



HAL
open science

Reconnexion magnétique et instabilités magnétohydrodynamiques dans les plasmas

Hubert Baty

► **To cite this version:**

Hubert Baty. Reconnexion magnétique et instabilités magnétohydrodynamiques dans les plasmas. 2022. hal-03711796

HAL Id: hal-03711796

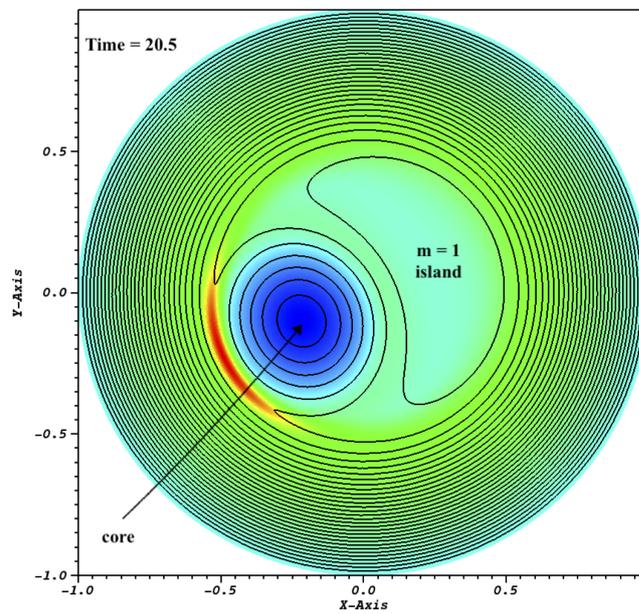
<https://hal.science/hal-03711796>

Preprint submitted on 1 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Reconnexion magnétique et instabilités magnétohydrodynamiques dans les plasmas



Hubert BATY

30 juin 2022

Avant-propos

Le mot *reconnexion* n'existe pas à proprement parler en français, et n'est pas dans le dictionnaire d'ailleurs. Il s'agit de la traduction quelque peu sauvage du mot anglais *reconnection*, pour traduire une action de connecter à nouveau, par exemple pour assembler/réunir deux éléments d'une structure qui sont déconnectés ou détachés l'un de l'autre au préalable. Dans le contexte du champ magnétique, la reconnexion magnétique désigne une action de connecter deux lignes de champ distinctes pour en faire une nouvelle ligne hybride. L'action inverse de déchirer une ligne de champ pour fabriquer deux nouvelles lignes est d'ailleurs aussi considérée comme faisant partie du mécanisme de reconnexion magnétique. Ainsi, ce concept introduit la notion plus générale de modification de la topologie du champ magnétique. Le processus de reconnexion magnétique est à l'oeuvre dans les plasmas fortement conducteurs, en conduisant par le réarrangement du champ magnétique, à la conversion d'une partie de l'énergie magnétique en énergie thermique, cinétique et aussi en accélération de particules.

C'est un mécanisme au minimum bi-dimensionnel qui se produit aussi en trois dimensions. Cependant, pour des raisons de simplification, nous nous limiterons dans cet ouvrage à une description essentiellement bi-dimensionnelle. Des éléments de dynamique tri-dimensionnelle seront quand même évoqués de façon succincte ici ou là.

Je développe aussi dans cet ouvrage le sujet connexe qu'est celui des instabilités dans le contexte de la magnétohydrodynamique (MHD). La MHD est le modèle permettant de décrire l'interaction des particules du plasma (vues comme un milieu continu de type fluide) avec le champ magnétique qu'elles génèrent notamment par leur propres mouvements. Les instabilités MHD sont des ingrédients quasi-nécessaires à la formation d'une région très localisée dans l'espace, appelée nappe de courant (comme illustrée en rouge sur la page de garde), qui permet alors de déclencher puis de contrôler le processus de reconnexion magnétique.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivation observationnelle

Le mécanisme de reconnexion magnétique est considéré comme étant à l'origine des phénomènes éruptifs observés dans de nombreux plasmas. C'est le cas des éruptions solaires et des éjections coronales en provenance de la couronne solaire (voir figure 1.1). Ainsi, une éruption solaire standard par exemple nécessite la libération de 10^{25} Joules dans une région ayant une taille de 100000 km de côté pendant une vingtaine de minutes environ. Celle-ci se manifeste par un embrillancement soudain et rapide dans différents domaines de fréquences couvrant le domaine radio jusqu'au domaine des rayons-X voire rayons- γ . Cette énergie est convertie en chauffage, et accélération (individuelle et collective) des particules. L'origine magnétique de l'énergie ne fait aucun doute, de même que le rôle primordial de la reconnexion. Cependant, les détails du mécanisme demeurent encore à l'heure actuelle mal élucidés. Notamment, alors que le modèle MHD s'applique au plasma de la couronne solaire en excellente approximation (voir ci-dessous), les solutions de reconnexion associées (et connues jusqu'à présent) sont trop lentes et peinent donc à expliquer la soudaineté ainsi que la rapidité des échelles de temps observées.

D'autres plasmas naturels sont aussi sujets à la reconnexion magnétique, comme dans les magnétosphères autour des planètes, les disques d'accrétions autour des étoiles, et dans bien d'autres milieux encore. C'est aussi le cas de plasmas de laboratoire, comme par exemple dans les expériences de fusion thermonucléaire contrôlée par confinement magnétique, avec le cas des tokamaks en particulier (voir figure 1.2 montrant la configuration magnétique). Une illustration en coupe d'une instabilité dite de *kink interne* dans une configuration de type tokamak est visible sur la page de couverture, où la reconnexion magnétique associée conduit à la formation d'un îlot magnétique en arrière alors que le cœur (contenant l'axe magnétique) est comprimé à l'avant.

Le lecteur souhaitant plus de développements sur les aspects observationnels pourra se reporter à l'excellent ouvrage de référence qu'est le livre écrit par Eric Priest et Terry Forbes [1].



FIGURE 1.1 – Observation d'éruptions dans la couronne solaire. Le plasma chaud emprisonné dans les structures magnétiques en forme de boucles coronales s'embrillane en rayons X et UV. Credit NASA-SDO.

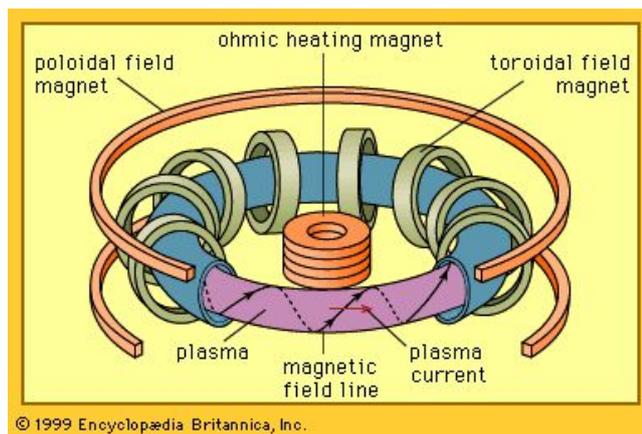


FIGURE 1.2 – Configuration magnétique (lignes de champs en forme d'hélice sur des surfaces toriques) schématique pour un tokamak, créée par des électro-aimants placés tout autour.

1.2 Notions générales sur les plasmas

Un plasma est un milieu contenant des ions (chargés positivement car issus d'atomes ou molécules ayant perdu un ou plusieurs électrons), des électrons libres, et des atomes ou molécules neutres. Les ions peuvent donc être multi-chargés. C'est un milieu globalement neutre (charge totale nulle). Le schéma de la figure 1.3 illustre le cas d'un plasma mono-chargé (un ion est constitué d'un seul proton). Chaque type de particule est animé d'une vitesse moyenne d'agitation thermique qui dépend de sa température et de sa masse (comme pour un gaz). Un plasma (considéré comme le quatrième état de la matière) peut être obtenu en portant un gaz (atomique ou moléculaire) donné à une température supérieure à une valeur critique qui dépend de la composition. Ainsi, ceci permet d'ioniser le gaz par *arrachement* des électrons. La température critique est de l'ordre de quelques électrons-volts en moyenne (en terme d'énergie thermique $k_B T$, k_B étant la constante de Boltzmann), ou encore de façon équivalente de plusieurs dizaines de milliers de degrés Kelvin pour T . Cependant, certains plasmas peuvent exister à des températures beaucoup plus basses (quelques centaines de degrés) à cause de densités extrêmement faibles de certains milieux astrophysiques. L'ionisation est plus ou moins forte selon que le nombre restant d'atomes (ou molécules) neutres est plus ou moins grand. En pratique, on parle de degré d'ionisation α plus ou moins proche de l'unité. Celui-ci est défini de la façon suivante, $\alpha = \frac{n_e}{n_e + n_n}$ avec n_e la densité électronique et n_n la densité de neutres. Un plasma complètement ionisé correspond ainsi à $\alpha = 1$. Les modèles décrits ci-dessous concernent essentiellement des plasmas dont l'ionisation est suffisamment grande pour que la dynamique de la population des particules neutres soit considérée comme négligeable. L'ionisation peut-être aussi obtenue d'une autre façon comme par décharge électrique dans un gaz, ou encore par rayonnement (cas des régions de formation d'étoiles).

En astrophysique de nombreux objets astronomiques comme les étoiles (l'intérieur et aussi leur couronne), les disques d'accrétion, les nébuleuses, et le milieu interstellaire sont composés de plasma. On peut aussi ajouter les milieux entourant l'atmosphère de la Terre comme l'ionosphère ou de façon plus lointaine la magnétosphère. On parle alors de plasmas naturels, par opposé aux plasmas de laboratoires (comme par exemple ceux créés dans le but de réaliser la fusion thermonucléaire). En pratique, il y a une diversité impressionnante de conditions, en termes de température et de densité, régnant au sein de différents plasmas. On s'intéresse ici à des plasmas classiques, c'est-à-dire non-relativistes et non quantiques. De plus, on exclut aussi les plasmas dits fortement couplés comme les plasmas froids, pour se focaliser sur les plasmas dits dilués.

Il existe un grand nombre de modèles physiques permettant de décrire la dynamique des plasmas. Le lecteur pourra trouver ci-dessous un résumé simplifié et très succinct (voir aussi figure 1.4). Le modèle MHD sera évidemment plus amplement développé ici.

Les modèles PIC (abréviation pour *Particle In Cell*). Ils sont basés sur l'intégration numérique de l'équation du mouvement (seconde loi de Newton de la dynamique) pour chaque particule chargée (de charge q et masse m), soumise à la force électrique $q\vec{E}$ et la force magnétique de Lorentz $q(\vec{V} \times \vec{B})$. Ainsi, un très grand nombre de particules (représentant les ions et électrons) sont im-

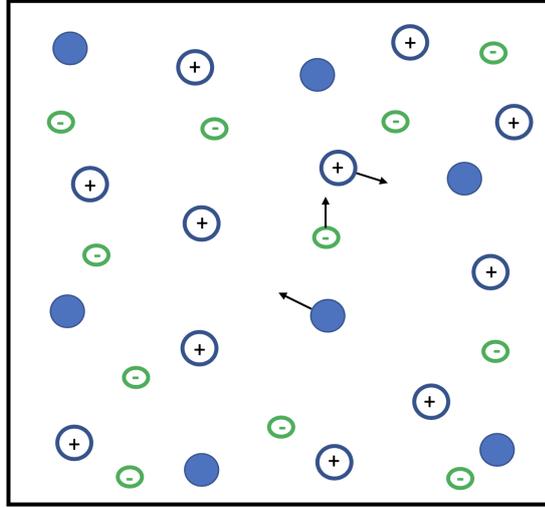


FIGURE 1.3 – Vision schématique des particules constituantes d’un plasma, avec des électrons libres chargés négativement, des ions chargés positivement, et des neutres. On suppose des ions de type noyaux d’hydrogène (protons) pour simplifier.

plémentées avec un pas de temps δt par une technique numérique adaptée dans les champs électrique et magnétiques \vec{E} et \vec{B} respectivement. La méthode numérique doit ainsi satisfaire des propriétés particulières de conservation (comme celle de l’énergie), comme par exemple dans les schémas de type Boris. A la fin de cette première étape, la position ainsi que la vitesse de chaque particule sont ainsi déduites. Une fois les particules implémentées, dans une seconde étape, il faut calculer les champs \vec{E} et \vec{B} correspondants à la nouvelle distribution des particules dans l’espace des phases (c’est à dire l’espace physique et l’espace des vitesses). Pour ce faire, il faut intégrer par rapport à l’espace les équations de Maxwell correspondantes dans l’approximation du vide, que sont l’équation de Maxwell-Gauss (pour \vec{E}) et l’équation de Maxwell-Ampère (pour \vec{B}). Ceci est alors réalisé sur un domaine découpé en cellules, et nécessite un lissage pour éviter les gradients trop irréalistes de distribution des particules. Les limitations de la méthode sont multiples. Tout d’abord le nombre maximum de particules est évidemment très inférieur à la réalité, et on parle alors de super-particules. Le rapport de masse entre les ions et les électrons limite fortement le temps de calcul au travers des conditions de stabilité des schémas numériques, conduisant ainsi à l’emploi d’un rapport de masse moins grand dans les simulations. Malgré les limitations, ces modèles permettent une approche complémentaire des modèles cinétiques et fluides. Ils constituent aussi une approche naïve et beaucoup plus simple techniquement que les autres modèles. Le lecteur désirant avoir plus de détails pourra consulter le livre référence en la matière de Birdsall et Langdon [2].

Les modèles dits cinétiques. Ils sont utilisés lorsque le plasma étudié est dit non (ou peu) collisionnel, car les collisions sont peu fréquentes et donc

influent peu sur le mouvement des particules. Il s'agit de résoudre une équation de type Vlasov (avec ou sans opérateur tenant compte d'un minimum de collisions). Ce type de modèle est considéré comme un modèle approché du modèle exact (équation de Klimontovitch ou approche statistique de Liouville). En effet, au lieu de résoudre le comportement microscopique de chaque particule (ce qui est évidemment impossible vu le nombre) dans l'espace des phases, on cherche la fonction de distribution par espèce $f(\vec{r}, \vec{V}, t)$ (électrons ou ions) qui résulte d'une moyenne d'ensemble statistique et qui est solution de l'équation de Vlasov-Landau (aussi appelée équation de type Boltzmann dans la littérature). Le passage rigoureux du modèle de Klimontovitch à l'équation de Vlasov-Landau constitue une étape relativement complexe en théorie des plasmas, mais il permet d'obtenir des solutions approchées au prix d'une perte d'information sur la physique individuelle des particules. L'équation de Vlasov (sans collisions) pour une espèce de particules (électrons ou ions de masse m et charge q) est,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + (q/m)(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{V}} = 0. \quad (1.1)$$

Il ne faut pas confondre avec l'équation de Klimontovitch qui prend une forme similaire, mais pour laquelle la fonction de distribution doit être remplacée par une fonction individuelle associée à chaque particule (et les champs électromagnétiques ne sont plus moyennés).

Les modèles dits fluides. Ces derniers sont utilisés lorsque le plasma étudié est suffisamment dominé par les collisions. Les modèles se ramènent alors à résoudre des équations de type fluide pour chaque espèce couplées aux équations de Maxwell pour les champs électromagnétiques, et on parle alors de modèle multi-fluide. Le modèle particulier dit mono-fluide pour lequel le plasma est vu comme un seul fluide conducteur est appelé Magnétohydrodynamique (ou MHD en abrégé, et c'est aussi plus facile à prononcer). Ainsi, le plasma est caractérisé par des champs de type densité, vitesse, énergie cinétique, ... reliés aux paramètres physiques des particules par des intégrales sur les fonctions de distribution $f(\vec{r}, \vec{V}, t)$ (solutions de l'équation de Vlasov-Landau). Plus précisément, on utilise les moments d'ordre croissant sur les fonctions de distribution pour définir les champs et obtenir les équations différentielles associées. Pour l'exprimer autrement, on accepte de perdre de l'information sur la partie vitesse de l'espace des phases pour les distributions des électrons et des ions. Cette perte d'information est évidemment plus ou moins acceptable suivant les plasmas considérés (voir plus bas les conditions de validité d'un modèle fluide et les implications en terme d'échelles spatiales et temporelles). En résumé, la MHD est constituée d'un premier jeu de trois équations différentielles de conservation permettant de calculer la densité volumique du plasma ρ , la vitesse \vec{V} (à ne pas confondre avec la vitesse des particules), et la température T . Une hypothèse d'équation d'état est aussi nécessaire pour relier T et ρ à la pression thermique P (relation dite de fermeture) intervenant par exemple dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Une équation différentielle supplémentaire (déduite des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm) permet aussi d'obtenir le champ magnétique \vec{B} .

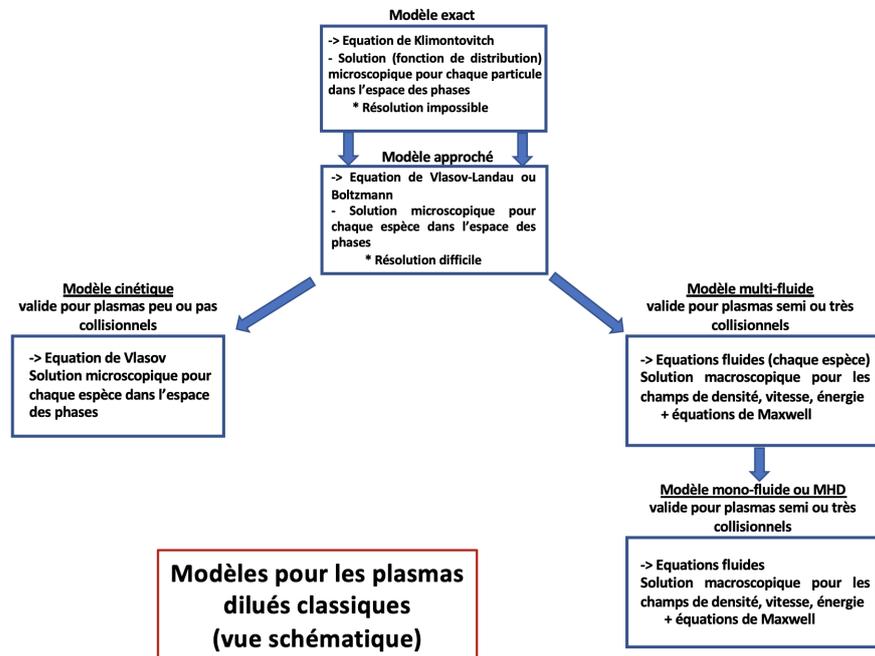


FIGURE 1.4 – Vision schématique simplifiée des différents modèles utilisés pour décrire les plasmas.

Le modèle mono-fluide ou MHD. Le modèle MHD (équations, obtention, et hypothèses) est décrit en détails plus loin dans cet ouvrage. Cependant, le passage d'un modèle bi-fluide à un modèle mono-fluide mérite ici quelques explications. Tout d'abord, la densité volumique du plasma $\rho(\vec{r}, t)$ représente essentiellement celles des ions, car la masse des électrons est négligeable. De même, la vitesse de plasma $\vec{V}(\vec{r}, t)$ représente celle des ions. La vitesse des électrons (qui n'est pas un paramètre du modèle MHD) peut alors s'en déduire à condition de connaître la densité de courant électrique \vec{J} , par $\vec{V}_e = \vec{V} - \vec{J}/(ne)$, avec n la densité de particules (on suppose $n_e = n_i$ qui est l'hypothèse de quasi-neutralité de la MHD, et e étant la valeur absolue de la charge électronique). La densité de courant est elle obtenue en résolvant les équations de Maxwell. La MHD est évidemment aussi le modèle permettant de décrire la dynamique des fluides réels (pas seulement de certains plasmas) conducteurs de l'électricité. Une autre façon d'obtenir les équations MHD est de les établir directement par l'utilisation de bilans de conservation appliqués à la masse, quantité de mouvement, et énergie, pour un petit volume fixe (appelé globule fluide) du plasma. Il faut bien sûr ajouter les équations de Maxwell appliquées à des champs moyens. Ceci est développé ci-dessous. Plus d'informations sur les modèles sont disponibles par exemple dans le livre de Jean-Loup Delcroix et Abraham Bers [3], et plus particulièrement sur le modèle MHD dans le livre de Dieter Biskamp [4]. Le passage des équations bi-fluides au modèle mono-fluide est particulièrement bien expliqué dans l'article de revue publié dans le Journal Review of Modern Physics par Jeffrey P. Freidberg [5].

1.3 Les équations de base de la MHD

La première équation concerne la conservation de la masse, ou plus exactement de la densité volumique de masse (masse par unité de volume) notée ρ . Elle exprime que la variation de masse en temps dans une unité de volume est uniquement le fait du bilan net des entrées/sorties de la masse au travers de la surface enfermant ce volume,

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0.} \quad (1.2)$$

En effet, le théorème de Green-Ostrogradski nous dit que l'intégrale en volume de la divergence de $\rho \vec{V}$ est le flux net de la densité de masse au travers de la surface enfermant le dit volume (voir aussi la figure 1.5). Il n'y a donc pas de création ni de disparition de la masse en volume (par exemple à cause de réaction chimique). Sinon, il faudrait rajouter un terme source à droite du signe égal de l'équation ci-dessus. Ce volume est bien sûr fixe, il n'est pas entraîné avec le fluide.

La seconde équation est la plus importante pour la dynamique du fluide, car elle exprime une relation fondamentale de la dynamique pour la densité de moment $\rho \vec{V}$ (on devrait dire la densité de quantité de mouvement en français, mais je préfère utiliser le terme de moment qui est la traduction du terme anglais *momentum*), qui s'avère être aussi le flux de masse,

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overline{\vec{V}\vec{V}}) = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}.} \quad (1.3)$$

Ainsi, $\rho \overline{\vec{V}\vec{V}}$ est un tenseur d'ordre 2 (ou de rang 2) représentant le flux convectif de la densité de moment, fabriqué à partir du vecteur vitesse \vec{V} (plus exactement à partir d'un produit entre le vecteur colonne et le vecteur ligne de la vitesse). Parfois ce tenseur est aussi noté $\rho \vec{V} \vec{V}^T$, où \vec{V}^T est le vecteur ligne transposé du vecteur colonne \vec{V} . Quant à la divergence du tenseur $\rho \overline{\vec{V}\vec{V}}$, on peut se convaincre que c'est un vecteur dont la composante i (pouvant être x , y , ou z en cartésien) suivant une direction donnée s'obtient à partir de l'opérateur nabla (∇) par $\nabla_j (\rho \overline{\vec{V}\vec{V}})_{ji}$, avec la convention habituelle de sommation implicite lorsqu'un indice est répété (en l'occurrence j dans l'expression). A l'image de la seconde loi de la dynamique de Newton, les termes dans le membre de droite après le signe égal représentent les densités de force qui sont potentiellement sources de création/disparition du moment en volume, comme la force magnétique, la force de gradient thermique, la force de gravitation externe (sans auto-gravitation), et la force visqueuse, par ordre d'apparition de gauche à droite, à droite du signe égal dans l'équation ci-dessus. Le coefficient μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide (l'unité correspondante est le Pascal par seconde, ou kg/m/s). Cette équation est bien l'équivalent de la relation fondamentale de la dynamique de Newton pour la mécanique. Il faut aussi noter une autre formulation équivalente (qui s'obtient facilement en utilisant conjointement l'équation de conservation de la masse),

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{(\vec{J} \times \vec{B} - \nabla P)}{\rho} + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V}, \quad (1.4)$$

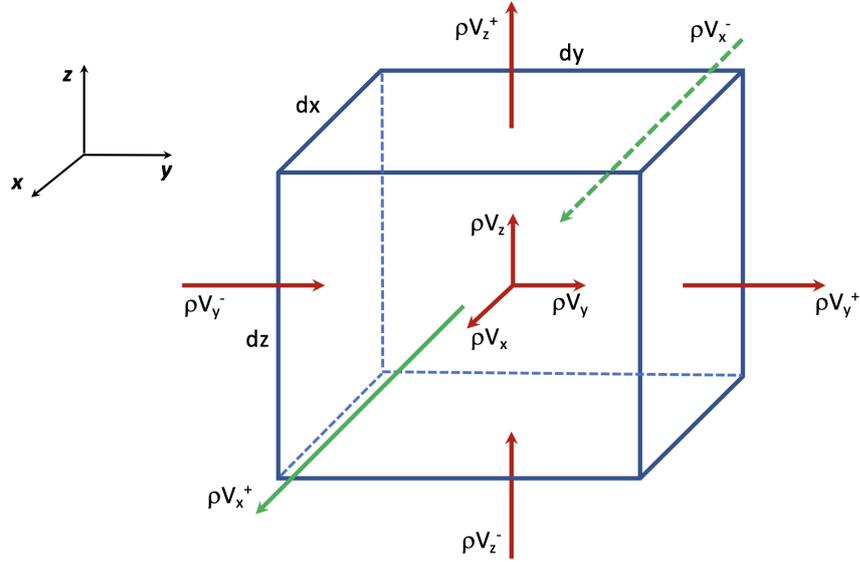


FIGURE 1.5 – Illustration schématique du flux de densité de masse autour d'un petit volume ($dx \, dy \, dz$). Les composantes du flux suivant x par exemple sont $\rho V_x^- \, dy \, dz = (\rho V_x - \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} dx/2) \, dy \, dz$ et $\rho V_x^+ \, dy \, dz = (\rho V_x + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} dx/2) \, dy \, dz$ obtenues par développement de Taylor à l'ordre 1 autour du centre. Le même développement suivant les deux autres directions conduit alors à $\nabla \cdot (\rho \vec{V})(dx \, dy \, dz)$ pour le flux net total sortant du petit volume.

avec le coefficient de viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ (dont l'unité est m^2/s). Cette seconde formulation est similaire à l'équation de Navier-Stokes en mécanique des fluides que l'on retrouve d'ailleurs dans le cas non magnétisé, et fait apparaître dans le membre de gauche la dérivée Lagrangienne (ou encore dite dérivée en suivant le mouvement, ou aussi dérivée particulaire) $D/Dt = d/dt + \vec{V} \cdot \nabla$ appliquée à la vitesse \vec{V} . La force magnétique $\vec{J} \times \vec{B}$ est l'équivalent de la force de Laplace $I \vec{dl} \times \vec{B}$ appliquée sur un élément de circuit électrique \vec{dl} parcouru par un courant I et plongé dans un champ externe \vec{B} . Ici, la densité de courant \vec{J} est reliée au champ magnétique par la loi de Maxwell-Ampère $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ de l'approximation de la magnétostatique du vide. Le terme de courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligé, car on s'intéresse à des phénomènes se déroulant avec une vitesse caractéristique non relativiste très inférieure à la vitesse de la lumière (voir aussi l'Annexe A sur les équations électriques de la MHD).

Alors que la seconde équation permet de quantifier l'effet du champ magnétique sur la partie hydrodynamique, la troisième équation quant à elle permet à l'inverse de quantifier l'effet du champ de vitesse sur la partie magnétique,

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) - \nabla \times (\vec{J}/\sigma)}, \quad (1.5)$$

avec σ le coefficient de conductivité électrique (l'unité correspondante est le $S.m^{-1}$). Elle résulte de la loi de Maxwell-Faraday reliant le champ électrique \vec{E} au champ magnétique, $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, ainsi que de la loi d'Ohm pour un fluide conducteur animé d'une vitesse \vec{V} , $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$. En effet, on rappelle que la loi d'Ohm s'écrit $\vec{J} = \sigma \vec{E}'$, avec $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}$ le champ électrique dans le repère se déplaçant avec le fluide. Il faut aussi noter que cette troisième équation représente aussi l'équation dite Dynamo ou d'induction,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}, \quad (1.6)$$

obtenue à partir de l'équation précédente en prenant un coefficient de diffusivité magnétique appelé aussi résistivité $\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ (dont l'unité est m^2/s) homogène, et en utilisant la propriété (dite solénoïdale) de divergence nulle du champ magnétique $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. En effet, on reconnaît aisément le dernier terme (dans le membre de droite) qui est de type diffusion pure alors que le premier terme est un terme source de type production de champ magnétique (ou terme dynamo).

Il manque une équation pour fermer le système, comme on dit dans la littérature. En effet, la pression thermique qui apparaît dans la seconde équation doit être déduite à partir d'une nouvelle équation sans faire apparaître de nouvelle variable. Cette dernière équation représente comment l'énergie totale se conserve en se répartissant entre les différentes sources possibles d'énergie. Alors qu'en principe il faudrait prendre une équation régissant l'évolution de la densité d'énergie totale (cinétique, interne, et magnétique), souvent on préfère prendre une équation plus simple, comme par exemple celle exprimant la variation de la densité d'énergie interne u seule d'un plasma dit parfait, $u = p/(\Gamma - 1)$,

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot ((u + P)\vec{V}) = \vec{V} \cdot \nabla P + J^2/\sigma}, \quad (1.7)$$

avec Γ le coefficient adiabatique (valant $5/3$ pour un plasma monoatomique). Ainsi, si on néglige le dernier terme qui traduit le chauffage par effet Joule, il est facile de montrer que l'équation se réduit à,

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla P = -\Gamma P \nabla \cdot \vec{V}, \quad (1.8)$$

qui traduit en fait une équation d'évolution adiabatique, car celle-ci s'écrit aussi $\frac{D(P/\rho^\Gamma)}{Dt} = 0$. Une telle équation de conservation approchée peut être plus ou moins bien justifiée suivant les problèmes considérés. Cependant, dans le contexte de cet ouvrage qui est centré sur la dynamique de la reconnexion, la répartition subséquente de l'énergie magnétique libérée ne modifie pas véritablement les phases initiales. Par conséquent, la justification de l'emploi d'une équation simple est aussi de rendre les traitements analytiques et numériques plus aisés.

Les équations de base de la MHD. En résumé, dans cet ouvrage, nous partons donc sur le jeu suivant (dans lequel nous avons négligé le terme de force de gravité dans les équations ci-dessus car très petit devant les autres

types de force pour les milieux considérés ici),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overline{\vec{V} \vec{V}}) = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V}, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) - \nabla \times (\vec{J}/\sigma), \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla P = -\Gamma P \nabla \cdot \vec{V}, \quad (1.12)$$

assorti de la relation d'Ampère $\vec{J} = (\nabla \times \vec{B})/\mu_0$ obtenue dans la limite non relativiste (voir Annexe A sur les équations électriques de la MHD) et de la propriété solénoïdale pour le champ magnétique, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. La plupart du temps, les coefficients dissipatifs de viscosité et de résistivité (ou conductivité) seront de plus considérés homogènes, sauf contre indication.

Les limites de validité de la MHD. Pour les plasmas collisionnels dominés magnétiquement qui nous intéressent, tels ceux de la couronne solaire et des expériences de laboratoire de fusion par voie magnétique, le modèle MHD s'applique à condition de considérer des échelles spatiales grandes devant celles caractéristiques des particules. En pratique, la MHD représente correctement les phénomènes sur des échelles plus grandes que le rayon de Larmor des ions, qui vaut typiquement 10 cm dans la couronne et 1 cm pour un tokamak. De même, la MHD est valide si on s'intéresse aux échelles de temps très grandes devant les échelles de temps caractéristiques du mouvement des particules comme l'inverse de la fréquence cyclotron.

1.4 Equations réduites en MHD incompressible bi-dimensionnelle

Dans une grande partie de cet ouvrage, nous pourrions utiliser un modèle simplifié à deux dimensions (dans un plan xOy), dont les équations correspondantes qui suivent sont démontrées en détail dans les Annexes B et C. Ce modèle appelé réduit est une bonne approximation pour des configurations magnétiques comportant une composante du champ magnétique dominante (suivant z) et perpendiculaire au plan de la dynamique décrite, rendant alors le flot de vitesse dans le plan incompressible. Ainsi, les équations ci-dessous ne décrivent que les composantes dans ce plan. Ceci ne sera pas démontré ici, mais le lecteur qui voudrait approfondir ce point pourra se reporter à la référence suivante [6].

Modèle réduit le plus courant en variables flux-vorticité.

Dans le contexte de cet ouvrage, nous cherchons à simplifier autant que faire se peut les configurations sujettes à la reconnexion magnétique. Ainsi, nous pourrions considérer un modèle bi-dimensionnel sans gravité et incompressible, dit communément réduit,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \psi = \eta \nabla^2 \psi, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \omega = (\vec{B} \cdot \nabla) J + \nu \nabla^2 \omega, \quad (1.14)$$

$$J = -\nabla^2 \psi, \quad (1.15)$$

$$\omega = -\nabla^2 \phi. \quad (1.16)$$

L'obtention de ce système est détaillé en Annexe. Il correspond à un plasma incompressible ($\nabla \cdot \vec{V} = 0$), dont les champs de vitesse et magnétique sont restreints à un plan (par exemple un plan cartésien xOy). Ainsi, ces deux champs étant supposés à divergence nulle, ils peuvent alors s'écrire à partir de deux fonctions scalaires $\psi(x, y)$ et $\phi(x, y)$, telles que $\vec{B} = \nabla \psi \times \vec{e}_z$ et $\vec{V} = \nabla \phi \times \vec{e}_z$ (\vec{e}_z étant le vecteur unitaire perpendiculaire au plan xOy et orienté dans le sens direct). Les deux autres variables scalaires $J(x, y)$ et $\omega(x, y)$ représentent les composantes perpendiculaires au plan (suivant z) de la densité de courant $\vec{J} = \nabla \times \vec{B}$ et de la vorticité $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$ du flot. Comme son nom l'indique, ce modèle réduit considérablement le nombre de variables scalaires (en fait de 8 à 4 dont 2 variables principales seulement) mais conduit aussi à simplifier le traitement numérique (voir plus loin). Un résultat remarquable de ce système réduit est l'absence mathématique du terme de gradient de pression thermique. Il faut aussi noter que les unités utilisées dans le système ci-dessus sont telles que la perméabilité magnétique du vide μ_0 ainsi que la densité de masse ρ sont prises égales à 1.

Un autre modèle réduit équivalent en variables courant-vorticité.

Principalement dans le but de faciliter le traitement numérique, il est possible d'obtenir un autre modèle réduit équivalent au modèle précédent (voir

la démonstration en Annexe), dans lequel les deux variables principales sont maintenant J et ω au lieu de ψ et ω ,

$$\frac{\partial J}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)J = (\vec{B} \cdot \nabla)\omega + \eta \nabla^2 J + g(\phi, \psi), \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\omega = (\vec{B} \cdot \nabla)J + \nu \nabla^2 \omega, \quad (1.18)$$

$$\nabla^2 \phi = -\omega, \quad (1.19)$$

$$\nabla^2 \psi = -J, \quad (1.20)$$

avec $g(\phi, \psi) = 2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right]$. Il faut noter que ce second modèle est valide pour un modèle à résistivité uniforme (contrairement au précédent), mais peut être aisément modifié pour tenir compte d'une résistivité non uniforme. Ce second modèle a le mérite de faire apparaître une formulation presque parfaitement symétrique pour les deux équations principales (seul le terme g rompt cette symétrie), mais surtout de faire disparaître les termes de dérivée spatiale du troisième ordre par rapport aux variables principales. En effet, ce n'était pas le cas dans le modèle réduit précédent, avec le terme $(\vec{B} \cdot \nabla)J$ impliquant une dérivée spatiale d'ordre 3 pour ψ , qui apparaît particulièrement problématique dans les traitements numériques.

Il faut enfin remarquer que dans ce type de modèle réduit, nous n'avons nul besoin d'équation de fermeture, expliquant ainsi l'absence d'équation énergétique. En cas de besoin d'évaluer la pression thermique, il faut résoudre à posteriori une équation obtenue en appliquant l'opérateur divergence sur l'équation de Navier-Stokes magnétique telle que,

$$\nabla^2 P = \nabla \cdot (-\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \vec{J} \times \vec{B} + \nu \nabla^2 \vec{V}). \quad (1.21)$$

Bibliographie

- [1] E.R. Priest and T.G. Forbes, *Magnetic Reconnection* (Cambridge University Press, 2000).
- [2] C.K. Birdsall and A.B. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation* (CRC Press, 2004).
- [3] J.L. Delcroix and A. Bers, *Physique des Plasmas* (EDP sciences, 1994).
- [4] D. Biskamp, *Nonlinear Magnetohydrodynamics* (Cambridge University Press, 2009).
- [5] J.P. Freidberg, *Ideal magnetohydrodynamic theory of magnetic fusion systems* (Rev. Mod. Phys. 54, 801, 1982).
- [6] G.P. Zank and W.H. Matthaeus, *The equations of reduced magnetohydrodynamics* (J. Plasma Physics 48, 85, 1992).

Chapitre 2

De la diffusion à la reconnexion magnétique

La finalité de ce chapitre est de passer progressivement de la notion de diffusion pure à celle de reconnexion magnétique, nécessaire à une évacuation suffisamment rapide de l'énergie. De prime abord, il s'agit d'identifier sur quelle échelle de temps caractéristique la libération de l'énergie magnétique est possible par le mécanisme de simple diffusion, induit par le terme $\nabla^2 \vec{B}$ seul dans l'équation d'évolution du champ magnétique (voir chapitre précédent). Ainsi, différentes configurations (en dimensions 1 et 2) sont explorées ci-dessous, conduisant à l'obtention d'une échelle de temps, $t_D = \alpha L^2 / \eta$ pour la solution de la diffusion, avec L une échelle spatiale caractéristique pour le champ magnétique et α un paramètre de l'ordre de l'unité (voire légèrement plus petit suivant les configurations). Cette échelle de temps est beaucoup trop longue, par de nombreux ordres de grandeur pour par exemple expliquer la libération d'énergie lors des éruptions solaires.

En second lieu, on s'intéresse alors aux solutions dite d'advection-diffusion en régime stationnaire, pour lesquelles on ajoute l'effet du terme dit *terme dynamo*, $\nabla \times (\vec{V} \times \vec{B})$, en plus de la diffusion dans l'équation d'évolution du champ magnétique. Alors que ce terme seul (en absence de diffusion) qui est même largement dominant presque partout (c'est à dire sauf aux endroits où V et/ou B sont nuls), permet plutôt d'amplifier un champ que de le faire disparaître, il conduit à augmenter l'éventail des solutions possibles en présence de diffusion. C'est le cas des solutions stationnaires dites d'annihilation magnétique et de reconnexion diffusive. Ces dernières solutions mettent alors en relief l'importance d'une région centrale de type couche limite résistive appelée nappe de diffusion (où le terme de diffusion est dominant), au travers de laquelle le champ magnétique présente un renversement de sa direction. Un flot de vitesse bi-dimensionnel peut alors se mettre en place, avec une vitesse de reconnexion déterminée par la vitesse à laquelle les lignes de champs convergent vers la région centrale.

Enfin, la limitation de l'extension spatiale de la nappe de diffusion aussi appelée nappe de courant a permis d'obtenir la solution de référence pour la reconnexion en MHD, qu'est la solution de Sweet-Parker. Cette dernière se produit alors sur une échelle de temps caractéristique $t_{SP} = S^{1/2} L / V_A$ notablement

plus rapide que $t_D = SL/V_A$ (en effet on peut ré-écrire $t_D = L^2/\eta$ en utilisant le nombre de Lundquist $S \equiv LV_A/\eta$, V_A étant la vitesse caractéristique d'Alfvén définie plus loin dans le chapitre). Cependant cette loi d'échelle reste encore trop lente pour expliquer les éruptions solaires, car la valeur attendue pour S est $S \simeq 10^{10-12}$. Des solutions encore plus rapides comme celle de Petschek ou celle impliquant des plasmoides sont alors évoquées actuellement pour expliquer les disruptions rapides.

2.1 La diffusion ohmique dite aussi résistive

Equation de diffusion et temps caractéristique associé de diffusion.

L'équation d'évolution du champ magnétique en absence de mouvements (i.e. $\vec{V} = 0$) conduit à une équation de diffusion (résistive) pure,

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{B}}, \quad (2.1)$$

pour un coefficient de diffusivité magnétique η homogène. Celle ci se ramène alors à,

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}, \quad (2.2)$$

dans un cas mono-dimensionnel cartésien pour le champ $\vec{B}(x, t) = B_y(x, t)\vec{e}_y$. Cette équation est aussi parfois appelée équation de la chaleur, car une équation identique régit la diffusion de température dans un milieu. L'échelle de temps caractéristique t_D sur laquelle le champ magnétique initial $\vec{B}(x, 0)$ évolue, est obtenue par une analyse dimensionnelle de l'équation, $B_y/t_D = \eta B_y/a^2$, avec a une échelle spatiale caractéristique de la solution (ou plutôt de son gradient). Ainsi, nous avons,

$$\boxed{t_D = a^2/\eta}. \quad (2.3)$$

Dans un plasma typique de la couronne solaire ou d'une machine à confinement magnétique (tokamak par exemple), t_D est très long devant les autres échelles de temps caractéristiques importantes (comme celle par exemple alimentant le gradient du champ magnétique). Pour fixer les idées, la valeur attendue pour η en absence de turbulence dans la couronne solaire est $\eta \simeq 1 \text{ m}^2/\text{s}$, conduisant à des valeurs pour t_D variant de 10^6 à 10^{12} s pour des valeurs de a variant de 1 km à 10^3 km. Il est alors impossible d'expliquer la dynamique des éruptions solaires impliquant des structures magnétiques de taille bien supérieure à 10^3 km (y compris pour les dimensions transverses) évoluant sur des échelles de temps de l'ordre de 10^3 s. La même problématique s'applique aussi aux disruptions dans les tokamaks.

Solution particulière de l'équation de diffusion résistive à une dimension dans un milieu infini.

Une solution particulière intéressante, parfois appelée à tort solution générale de l'équation de la chaleur, est un résultat bien établi en physique mathématique dont le lecteur pourra se convaincre en vérifiant directement dans l'équation différentielle à-posteriori (ou en consultant

la démonstration plus bas). Ainsi, nous avons,

$$\boxed{B_y(x, t) = B_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\eta t}}\right)}, \quad (2.4)$$

avec B_0 une constante reliée à la condition initiale ($t = 0$) au centre du domaine, et où la fonction erreur $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$ est utilisée. La densité de courant électrique J correspondante est alors obtenue en dérivant par rapport à x (à μ_0 près), et donc,

$$\boxed{J(x, t) = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{1}{\sqrt{\pi\eta t}} e^{-x^2/(4\eta t)}}. \quad (2.5)$$

Voici donc la démonstration. Il s'agit de chercher la solution de,

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}, \quad (2.6)$$

où $b \equiv B_y$ pour simplifier la notation. Il faut aussi noter que la densité de courant électrique J obéit à la même équation différentielle,

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}, \quad (2.7)$$

car $J = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial b}{\partial x}$. Mais évidemment, la solution sera différente car les conditions aux limites pour les deux quantités ne sont pas les mêmes. Pour commencer, nous noterons que si $b(x, t)$ est solution alors $b(\alpha x, \alpha^2 t)$ l'est aussi. On parle alors de solution auto-similaire, car invariable par la transformation ($x \rightarrow \alpha x$, $t \rightarrow \alpha^2 t$). Ainsi, nous pouvons chercher une solution $b(v)$ avec $v \equiv \frac{x^2}{\eta t}$ de façon à obtenir une solution auto-similaire pour la variable adimensionalisée v . Ainsi,

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial b}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{x^2}{\eta t^2} b'(v) = -\frac{v}{t} b'(v), \quad (2.8)$$

De plus,

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{\eta t} b'(v), \quad (2.9)$$

et une seconde dérivation spatiale conduit alors à,

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = \frac{2}{\eta t} b'(v) + \frac{4x^2}{\eta^2 t^2} b''(v) = \frac{1}{\eta t} [2b'(v) + 4vb''(v)]. \quad (2.10)$$

Nous avons utilisé ci-dessus les notations, $b'(v)$ et $b''(v)$ pour les dérivées première et seconde de b par rapport à la variable v respectivement. L'équation de diffusion se réduit alors à une équation différentielle ordinaire,

$$-\frac{v}{t} b'(v) = \eta \frac{1}{\eta t} (2b' + 4vb''), \quad (2.11)$$

puis à,

$$(2 + v)b' + 4vb'' = 0, \quad (2.12)$$

et finalement en posant $j(v) = b'(v)$ à,

$$\frac{j'(v)}{j(v)} = -\frac{1}{2v} - \frac{1}{4}. \quad (2.13)$$

Cette dernière équation s'intègre alors en,

$$j(v) = \frac{j_0}{\sqrt{v}} e^{-v/4}, \quad (2.14)$$

avec j_0 une constante d'intégration. Ainsi, on peut remonter à une solution particulière pour le champ magnétique,

$$b(v) = \int_0^v j(w) dw = \int_0^v \frac{j_0}{\sqrt{w}} e^{-w/4} dw, \quad (2.15)$$

que l'on peut remanier grâce à deux changements de variable successifs ($\xi^2 = w$ puis $\zeta = \xi/2$),

$$b(v) = 2j_0 \int_0^{\sqrt{v}} e^{-\xi^2/4} d\xi = 4j_0 \int_0^{\sqrt{v}/2} e^{-\zeta^2} d\zeta. \quad (2.16)$$

Ainsi, en utilisant la définition de la fonction erreur (voir ci-dessus),

$$b(v) = 2\sqrt{\pi} j_0 \operatorname{erf}(\sqrt{v}/2), \quad (2.17)$$

puis en revenant aux variables initiales d'espace et de temps, nous obtenons

$$b(x, t) = B_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\eta t}}\right), \quad (2.18)$$

en posant $B_0 = 2\sqrt{\pi} j_0$. La densité de courant électrique devient alors,

$$J(x, t) = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{1}{\sqrt{\pi\eta t}} e^{-x^2/(4\eta t)}. \quad (2.19)$$

Afin d'illustrer la solution, nous avons tracé les profils de b et J à 3 instants différents, en choisissant $B_0 > 0$ donné de façon à avoir $J(x, t) > 0$. Nous constatons que, comme attendu, la diffusion tend à étaler au cours du temps le courant localisé initialement au centre de la configuration (voir figure 2.1). Si on calcule le courant total I , intégré sur le domaine, nous obtenons,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} J(x, t) dx = \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial b}{\partial x} dx = \frac{2B_0}{\mu_0}, \quad (2.20)$$

qui se conserve de façon attendue (l'aire sous la courbe de la densité de courant est donc conservée au cours du temps). Un dernier petit calcul instructif consiste à calculer l'évolution au cours du temps de l'énergie magnétique. En effet, l'énergie magnétique E_M est obtenue à partir de la densité d'énergie magnétique,

$$E_M = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b^2}{2\mu_0} dx, \quad (2.21)$$

conduisant alors à,

$$\frac{\partial E_M}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{\mu_0} \frac{\partial b}{\partial t} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{\mu_0} \eta \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} dx. \quad (2.22)$$

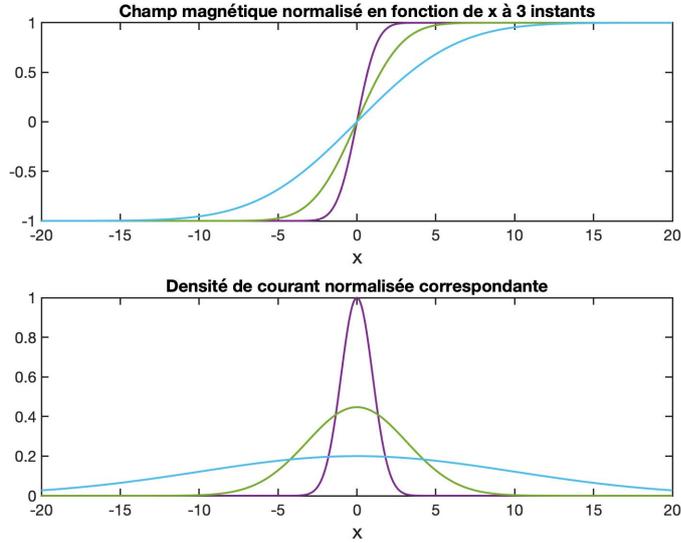


FIGURE 2.1 – Solution de l'équation de diffusion en milieu infini à 3 instants : t_0 , $t_1 = 5 t_0$, et $t_2 = 25 t_0$ à partir d'une solution initiale en forme de marche d'escalier pour le champ. Le champ est normalisé à sa valeur initiale B_0 de part et d'autre du centre, et la densité de courant est normalisée à sa valeur initiale au centre à $t = t_0$.

Après intégration par partie (et utilisant que la dérivée spatiale de b s'annule à l'infini), nous obtenons,

$$\frac{\partial E_M}{\partial t} = -\frac{\eta}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} dx = -\eta \mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} J^2 dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J^2}{\sigma} dx, \quad (2.23)$$

qui exprime tout simplement le taux de chauffage ohmique par effet Joule (l'énergie magnétique diminue et se transforme en chaleur).

Comme énoncé plus haut, on voit que B_0 représente le champ magnétique initial ($t = 0$) d'une configuration présentant une discontinuité (valant $2B_0$) en $x = 0$, alors que la densité de courant électrique correspond à une singularité de type fonction de Dirac.

Solution générale de l'équation de diffusion résistive à une dimension en milieu infini. L'obtention d'une solution générale peut se généraliser à partir de la solution particulière,

$$J(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta t}} e^{-x^2/(4\eta t)}, \quad (2.24)$$

obtenue pour une condition initiale $J(x, 0) = \delta(x)$ (fonction source de type Dirac), qui est aussi appelée solution fondamentale dans la littérature (Attention toutefois car la forme exacte pour cette solution fondamentale aussi appelée noyau de l'équation de la chaleur dépend aussi de la dimensionnalité du problème). Dans la formule ci-dessus, on peut vérifier que la normalisation permet

d'obtenir que l'intégrale de J sur tout le domaine est l'unité. Ainsi, la solution obtenue pour une condition initiale quelconque $J(x, 0)$ peut se déduire à partir de la solution fondamentale par,

$$J(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} J(s, 0) e^{-(x-s)^2/(4\eta t)} ds, \quad (2.25)$$

qui est la convolution de la solution initiale avec la solution fondamentale. En effet, pour une source située en s , la réponse est alors décalée de s avec un exposant devenant $-(x-s)^2/(4\eta t)$ au lieu de $-x^2/(4\eta t)$. La solution initiale est considérée comme une combinaison (intégrale) de fonctions delta centrées en s , et par linéarité la solution résultante est alors la combinaison (intégrale) des solutions fondamentales. Un exemple relativement simple (et connu) d'application de l'expression précédente est de considérer un profil initial Gaussien de type $J(x, 0) = e^{-x^2/2\sigma^2}$ avec σ le paramètre de largeur effective donné. Ainsi, la convolution conduira à un résultat qui reste Gaussien. En effet, sans développer le calcul, nous pouvons remarquer que la fonction $e^{-x^2/2\sigma^2}$ est la réponse à une solution fondamentale d'une fonction delta initiée à $\eta t = -\sigma^2/2$. Ainsi, la solution à l'instant t sera celle obtenue à partir de la fonction delta en remplaçant ηt par $\eta t + \sigma^2/2$ dans la solution fondamentale et en normalisant à l'unité, c'est à dire,

$$J(x, t) = \sqrt{\frac{2\sigma^2}{2\sigma^2 + 4\pi\eta t}} e^{-x^2/(2\sigma^2 + 4\eta t)}. \quad (2.26)$$

Voyons maintenant **une autre formulation plus pratique de la solution générale précédente**. En effet, en partant d'une méthode de séparation des variables où on écrit $J(x, t) = G(t)H(x)$, avec $G(t)$ et $H(x)$ deux fonctions dépendant exclusivement du temps et de l'espace respectivement, on obtient alors,

$$\frac{1}{\eta} \frac{G'}{G} = \frac{H''}{H}. \quad (2.27)$$

Ce qui peut se résoudre en cherchant des solutions de type $G(t) \propto \exp(-k^2\eta t)$ et $H(x) \propto \exp(\pm ikx)$, de façon à ce que le rapport précédent soit constant et posé égal à $-k^2$ (k étant un nombre réel appelé nombre d'onde). Les solutions sont donc du type $\exp(-k^2\eta t) \exp(\pm ikx)$ pour k donné, conduisant alors à la solution générale de type,

$$J(x, t) = (\alpha_k e^{ikx} + \beta_k e^{-ikx}) e^{-k^2\eta t}, \quad (2.28)$$

ou encore la forme équivalente,

$$J(x, t) = (a_k \cos kx + b_k \sin kx) e^{-k^2\eta t}, \quad (2.29)$$

avec (α_k, β_k) et (a_k, b_k) des couples de coefficients complexes et réels respectivement dont les valeurs dépendent des conditions initiales et limites. Si on introduit la *quantification* suivante pour k , $k = n\pi/L$ (n étant un nombre entier variant de 0 à l'infini et L une longueur caractéristique du domaine de résolution de l'équation), alors on pourra écrire la solution sous la forme,

$$J(x, t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})] e^{-(n^2\pi^2/L^2)\eta t}. \quad (2.30)$$

Solution générale de l'équation de diffusion résistive à une dimension en milieu fini : conditions périodiques sur le domaine $[-L : L]$. La solution s'écrit alors,

$$J(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})] e^{-(n^2 \pi^2 / L^2) \eta t}, \quad (2.31)$$

et la condition initiale devant vérifier $J(x, 0) = J_0(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})]$. Ainsi, on obtient/reconnait un développement en série de Fourier pour la condition initiale, dont les coefficients s'obtiennent par,

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} J_0(x) dx, \quad (2.32)$$

et pour $n > 1$,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} J_0(x) \cos(\frac{n\pi x}{L}) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} J_0(x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx. \quad (2.33)$$

Retrouvons la solution particulière correspondante à la réponse à une discontinuité de champ magnétique (entre $-B_0$ et B_0) dans un milieu s'étendant entre $-L$ et L , en utilisant la forme ci-dessus. En effet, après évaluation des coefficients de Fourier correspondants, nous avons alors pour le champ magnétique,

$$B(x, t) = B_0 x / L + \frac{2B_0}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} e^{-(n^2 \pi^2 / L^2) \eta t} \sin(\frac{n\pi x}{L}), \quad (2.34)$$

car $b_n = \frac{2B_0}{n\pi}$, $a_n = 0$ pour $n > 1$, et $a_0 = B_0 x / L$. La densité de courant électrique correspondante devient alors,

$$\mu_0 J(x, t) = B_0 / L + \frac{2B_0}{L} \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-(n^2 \pi^2 / L^2) \eta t} \cos(\frac{n\pi x}{L}), \quad (2.35)$$

Il est possible (après quelques calculs un peu pénibles, voir la référence [1] à Wilmot-Smith par exemple) en faisant tendre L vers l'infini, de retrouver les résultats obtenus au début de cette section à base de la solution dite fondamentale.

Afin d'illustrer la solution de diffusion en milieu fini $[-L : L]$, nous avons tracé les profils de B et J à 4 instants différents sur la figure 2.2 en prenant un nombre de termes suffisant pour assurer la convergence des sommes. Les courbes montrent clairement comment le profil initial en marche d'escalier diffuse sur une échelle de temps $t_D = L^2 / \eta$. En effet à $t = t_D$, la solution n'évolue presque plus et la solution stationnaire $B = B_0 x / L$ est obtenue à 10^{-4} près. La densité de courant électrique correspondante quant à elle vaut l'unité. Ceci est aussi en accord avec la forme mathématique de décroissance exponentielle de chaque composante de Fourier en e^{-t/t_n} avec $t_n = \frac{L^2}{n^2 \pi^2 \eta}$. Ainsi pour $n = 1$, la diffusion se fait même sur une échelle de temps $t_1 = t_D / \pi^2$, qui un ordre de grandeur plus rapide qu'en prenant t_D , expliquant ainsi pourquoi à t_D la diffusion est terminée sur la figure. Il faut noter qu'à la différence avec la solution en milieu infini, les conditions aux bords $B(x = -L) = -B_0$ et

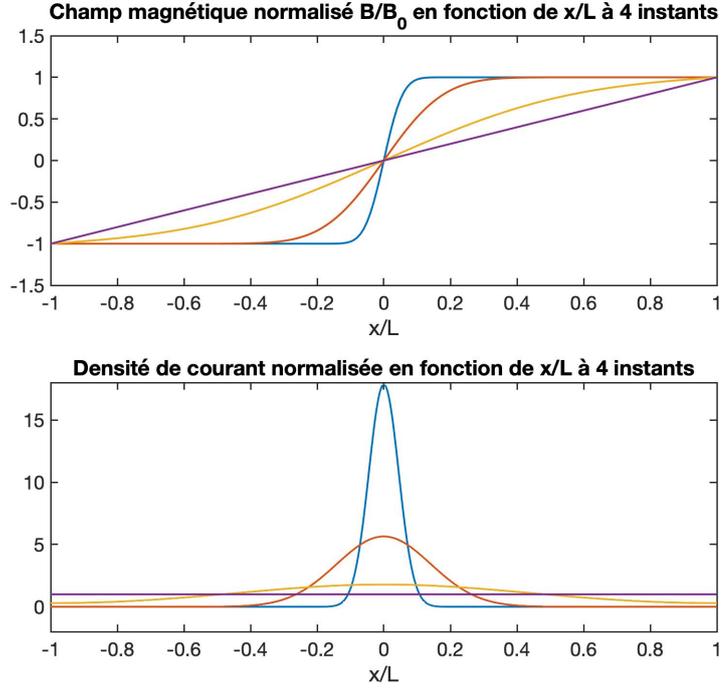


FIGURE 2.2 – Solution de l'équation de diffusion en milieu fini $[-L : L]$ à 4 instants : $t = 0.001 t_D$, $t = 0.01 t_D$, $t = 0.1 t_D$, et $t = 1 t_D$. Le champ est initialement une fonction en escalier et est maintenu à $\pm B_0$ aux bords. Le champ est normalisé à sa valeur initiale B_0 de part et d'autre du centre. La densité de courant est normalisée à sa valeur finale stationnaire.

$B(x = L) = B_0$ permettent de compenser la diminution d'énergie magnétique (ou encore le chauffage ohmique) dans le domaine. Plus explicitement, on peut vérifier que,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{-L}^{+L} \frac{B^2}{2\mu_0} dx \right\} = -(J^2/\sigma)(2L) = -\frac{B_0^2}{L^2 \mu_0^2 \sigma} (2L) = -2\eta B_0^2 / (\mu_0 L), \quad (2.36)$$

qui est compensé par le flux de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ aux deux bords. En effet,

$$2\Pi = \frac{2B_0 J}{\sigma \mu_0} = 2B_0 \frac{\partial B}{\partial x} \frac{1}{\sigma \mu_0^2} = 2B_0^2 \frac{1}{\sigma \mu_0^2 L} = 2B_0^2 \frac{\eta}{\mu_0 L}. \quad (2.37)$$

2.2 La diffusion résistive pour des lignes de champ magnétique circulaires

Au vu des topologies magnétiques réalisées dans la couronne solaire et en laboratoire (pour les machines à confinement magnétique), il peut s'avérer utile

d'examiner la diffusion pure du champ magnétique pour des lignes de champ circulaires avec un champ magnétique initial de type,

$$\vec{B}(r, 0) = B(r, 0)\vec{u}_\theta, \quad (2.38)$$

utilisant un système de coordonnées cylindriques avec les notations habituelles. Ainsi l'équation de diffusion se réduit à,

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{B}{r^2} \right), \quad (2.39)$$

pour la composante azimuthale du champ. On peut aussi faire intervenir la fonction de flux ψ avec en écrivant $\vec{B} = \nabla \times (\psi \vec{u}_z)$ (car le champ est à divergence nulle) qui obéit alors à l'équation,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \quad (2.40)$$

car $B = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$. Une solution auto-similaire simple pour B est,

$$B(r, t) = C \frac{r}{2\eta t^2} e^{-r^2/(4\eta t)}, \quad (2.41)$$

mais qui ne satisfait pas l'équation pour ψ (C étant une constante). On peut tout de même obtenir la solution pour un milieu fini $0 < r < a$. La bonne méthodologie consiste à, une fois encore, utiliser la méthode de séparations des variables, pour obtenir,

$$\psi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n^2 \eta t} j_0(k_n r), \quad (2.42)$$

avec j_0 la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0, et $-k_n^2$ étant comme vu auparavant la constante notée k . Ainsi, $-k_n^2$ représente la valeur propre de l'opérateur Laplacien associée à la fonction propre $j_0(k_n r)$, car $\nabla^2 j_0 = -k_n^2 j_0$. Les coefficients C_n sont obtenus par,

$$C_n = \frac{2}{a^2 j_0^2(k_n a)} \int_0^a r \psi(r, 0) j_0(k_n r) dr. \quad (2.43)$$

Le champ magnétique correspondant est alors,

$$B(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C'_n k_n e^{-k_n^2 \eta t} j_1(k_n r). \quad (2.44)$$

où j_1 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1. La densité de courant quant à elle suit,

$$J(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n k_n^2 e^{-k_n^2 \eta t} j_0(k_n r), \quad (2.45)$$

Afin d'illustrer la solution ci-dessus, nous avons représenté l'évolution (à 4 instants) de la solution sur la figure 2.3 pour une configuration initiale

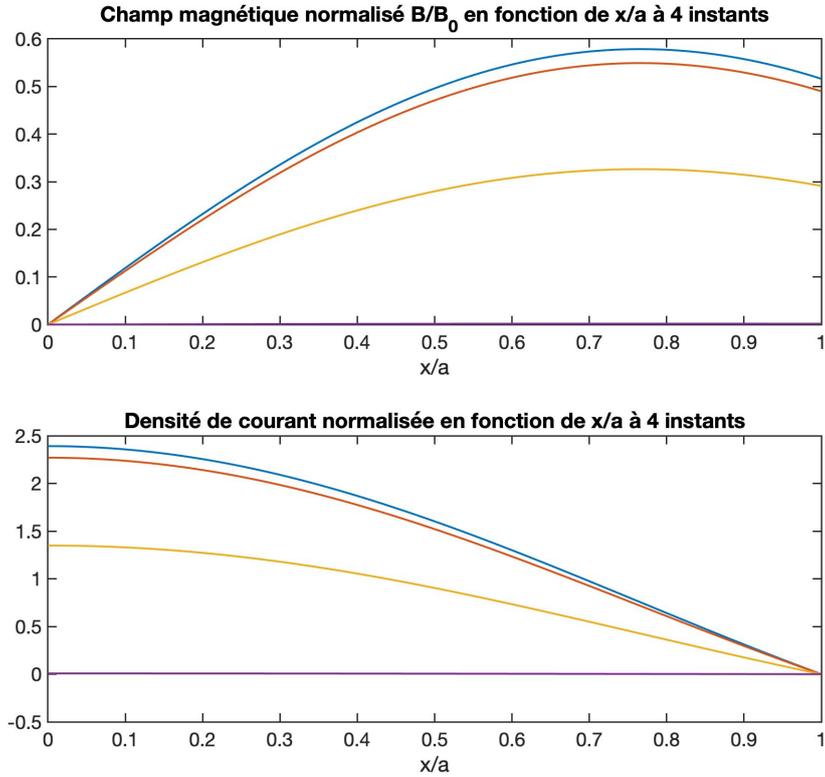


FIGURE 2.3 – Solution de l'équation de diffusion en géométrie cylindrique (lignes de champ circulaires) en milieu fini $[0 : a]$ à 4 instants : $t = 0.001 t_D$, $t = 0.01 t_D$, $t = 0.1 t_D$, et $t = 1 t_D$. Le champ est initialement une fonction de Bessel d'ordre 1, et le courant une fonction de Bessel d'ordre 0 s'annulant à la paroi $r = a$

présentant une seule composante de la somme infinie, celle correspondant à $n = 1$. Au bord $r = a$, la condition $J = 0$ est imposée correspondant à la valeur $k_1 \simeq 2.4048255577$ (premier zéro de la fonction de Bessel j_0), conduisant ainsi à une extinction du courant et du champ partout dans le domaine. Les résultats montrent clairement l'efficacité de la diffusion sur l'échelle de temps caractéristique $t_D = a^2/\eta$. Plus précisément, la composante de Bessel s'éteint de façon exponentielle en e^{-t/t_1} avec $t_1 = \frac{L^2}{k_1^2 \eta} = t_D/k_1^2$. donc sur une échelle de temps environ cinq fois plus rapide que t_D .

2.3 Solutions d'advection et d'advection-diffusion

Le mécanisme d'advection du champ magnétique. Nous avons vu ci-dessus comment le champ magnétique tend à s'éteindre par diffusion ohmique pure. Celui-ci tendra alors vers une solution stationnaire non-nulle à condition qu'il soit maintenu par un flux magnétique imposé aux bords du domaine consi-

déré. Pour ce faire nous avons négligé le premier terme (en supposant que le flot de vitesse est nulle par exemple) dans l'équation d'évolution du champ magnétique,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}, \quad (2.46)$$

où la résistivité est supposée homogène pour simplifier. En pratique, l'analyse dimensionnelle conduit à définir un rapport entre deux termes noté R_m et appelé nombre de Reynolds magnétique, $R_m = LV/\eta$, par analogie avec le nombre de Reynolds R en hydrodynamique pure avec $R = LV/\nu$ (où L et V sont des longueurs et vitesses caractéristiques du milieu considéré respectivement). Ce sont évidemment des valeurs sans dimensions. Le Reynolds R mesure le rapport des non-linéarités du flot de vitesse sur la dissipation visqueuse, $R = \frac{|V \nabla V|}{|\nu \nabla^2 V|}$, car il résulte de l'équation de type Navier-Stokes,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{V}. \quad (2.47)$$

Le Reynolds magnétique R_m , quant à lui, mesure le rapport du terme parfois appelé terme dynamo ou bien terme d'induction (voir ci-dessous) $\nabla \times (\vec{V} \times \vec{B})$ sur la dissipation résistive $\eta \nabla^2 \vec{B}$, $R_m = \frac{|\nabla \times (\vec{V} \times \vec{B})|}{|\eta \nabla^2 \vec{B}|}$. Le terme dynamo contient en fait trois termes après simplification (à cause de la divergence nulle du champ magnétique) car,

$$\nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) = -(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{V} - (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{B}, \quad (2.48)$$

qui se réduisent même à deux termes pour un flot incompressible. Le premier terme $-(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B}$ traduit les variations du champ magnétique le long du plasma se déplaçant à la vitesse \vec{V} et est donc un terme d'advection pure, alors que le second terme $(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{V}$ représente la dilatation/compression du fluide le long du champ magnétique. Ce second terme est la source principale permettant d'amplifier le champ magnétique par un cisaillement de vitesse (voir plus loin). Ainsi, le terme dynamo n'est que partiellement un terme d'advection pour le champ magnétique. Ce qui n'est pas le cas si on considère l'évolution du flux magnétique au lieu du champ (voir équations de la MHD réduite).

Pour les plasmas considérés dans cet ouvrage, les valeurs des nombres de Reynolds sont très grandes devant l'unité. Par exemple $R_m \sim 10^{12}$ et $R_m \sim 10^8$ pour la couronne solaire et les tokamaks respectivement. Ainsi, on peut considérer que le terme dynamo est largement dominant sur le terme résistif. On parle alors de MHD parfaite. Cette approximation basée sur l'analyse dimensionnelle se révélera valide presque partout dans l'espace. Pour le dire autrement, il y aura des exceptions très localisées dans l'espace, qui seront quand même importantes car au coeur du mécanisme de reconnexion magnétique (voir plus loin dans le chapitre).

Loi du flux gelé en MHD parfaite. Nous avons vu que dans l'approximation de la MHD parfaite (valide presque partout),

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{V} - (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{B}}, \quad (2.49)$$

qui se ramène à,

$$\frac{D\vec{B}}{Dt} = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{V} - (\nabla \cdot \vec{V})\vec{B}, \quad (2.50)$$

en utilisant la dérivée Lagrangienne. Comme entrevue ci dessus, cette dernière équation peut s'écrire de façon plus simple en utilisant le flux magnétique. En effet, selon le théorème d'Alfvén,

$$\boxed{\frac{D\Phi}{Dt} = 0}, \quad (2.51)$$

avec Φ défini comme étant le flux magnétique au travers d'une surface quelconque S entourée par un circuit fermé C se déplaçant (donc pouvant se déformer) avec le plasma, $\Phi(C) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Une démonstration de ce théorème, aussi appelé loi du flux gelé car éléments du plasma et champ magnétique se déplacent alors ensemble, est donnée en Annexe D.

Exemple d'amplification pure du champ magnétique par un flot de vitesse. Pour illustrer comment le champ peut être amplifié à partir d'un cisaillement de vitesse, nous considérons une exemple très simple. Nous appliquons à l'instant initial un flot de vitesse (incompressible) $\vec{V} = V(y)\vec{u}_x$ sur un champ magnétique homogène $\vec{B} = B_0\vec{u}_x$. Ainsi, il est aisé de vérifier que nous devons résoudre l'équation,

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -B_0 \frac{\partial V}{\partial y} + \eta \nabla^2 b, \quad (2.52)$$

à partir de $b(y, 0) = 0$, pour la composante $b(y, t) \equiv B_y(x, t)$. La solution pour la composante B_x restera quant à elle constante et égale à sa valeur initiale (la diffusion sur une composante homogène étant nulle), donc $B_x = B_0$. L'équation à résoudre est donc une équation de diffusion avec un terme source non homogène $-B_0 \frac{\partial V}{\partial y}$ dépendant seulement de y . Supposons que l'on s'intéresse à un profil de vitesse de type, $V(y) = V_0 \cos(\alpha y)$ avec V_0 et $\alpha = \pi/(2L)$ deux constantes, et appliqué sur un domaine s'étendant de $y = -L$ à $y = L$. Le terme source s'écrit alors $B_0 V_0 \alpha \sin(\alpha y)$.

Cherchons d'abord la solution stationnaire b_s ($\frac{\partial b_s}{\partial t} \equiv 0$). On vérifie aisément que $b_s = \frac{B_0 V_0}{\alpha \eta} \sin(\alpha y)$. La solution transitoire pour les temps faibles correspond à une amplification avec une croissance linéaire en temps, en effet $b(y, t) = [\alpha B_0 V_0 \sin(\alpha y)] \times t$, jusqu'à ce que le terme dissipatif entre en jeu pour limiter cette croissance. Hors, nous avons vu précédemment que la solution de diffusion pure peut s'écrire sous forme de séries de Fourier, ne faisant intervenir que des fonctions de type sinus (cas où les conditions aux limites sont homogènes et nulles, ce qui est le cas dans notre exemple ici). Il est ainsi facile de déduire la solution dépendante du temps par,

$$b(y, t) = \frac{B_0 V_0}{\alpha \eta} \sin(\alpha y) \left[1 - e^{-\eta \alpha^2 t} \right], \quad (2.53)$$

induisant ainsi une échelle de temps caractéristique $\tau = 1/(\eta \alpha^2) = 4L^2/(\pi^2 \eta)$. On retrouve en fait un temps de diffusion car c'est aussi t_D/π^2 avec $t_D = (2L)^2/\eta$ le temps de diffusion caractéristique habituel vu auparavant.

Cet exemple constitue en fait comment un cisaillement parallèle (au champ initial) de vitesse perpendiculaire peut amplifier un champ magnétique en créant une nouvelle composante perpendiculaire du champ magnétique. C'est la première composante d'un mécanisme dynamo, appelé dynamo omega. Pour que la dynamo soit réellement effective, il faut que la composante initiale du champ magnétique (ici B_0) soit aussi amplifiée à partir d'une autre composante. Ainsi, un effet dynamo n'est possible qu'en dimension 3.

De façon plus générale, l'échelle de temps caractéristique de ce type de problème peut s'estimer à partir de,

$$\tau \simeq \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial y}} \frac{1}{\eta} \int_0^y V(u) du, \quad (2.54)$$

en correspondance avec la solution stationnaire,

$$b_s(y) = -\frac{B_0}{\eta} \int_0^y V(u) du. \quad (2.55)$$

Exemple d'advection-amplification du champ magnétique par un flot de vitesse. Dans l'exemple précédent, le terme dynamo était constitué d'un terme d'amplification pure. Maintenant, voyons un cas pour lequel l'évolution du champ magnétique est déterminée par un terme d'amplification ajouté à un terme d'advection. Nous considérons un champ de vitesse (incompressible et stationnaire),

$$\vec{V} = \frac{V_0}{a} (-x\vec{u}_x + y\vec{u}_y), \quad (2.56)$$

avec V_0 et a deux constantes déterminant une valeur de vitesse et une échelle spatiale caractéristique respectivement. Ce flot de vitesse est appliqué sur le champ magnétique initial unidirectionnel,

$$\vec{B}(x, 0) = B_0 \cos(\pi x/a) \vec{u}_y, \quad (2.57)$$

pour x variant de $-a/2$ à $a/2$. Ainsi, l'équation d'évolution pour B_y noté b devient,

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -b \frac{\partial V_x}{\partial x} - V_x \frac{\partial b}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}, \quad (2.58)$$

alors que pour B_x ,

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0. \quad (2.59)$$

Ainsi $B_x(t) = 0$ car $B_x(t=0) = 0$. L'équation pour b devient, quant à elle,

$$\frac{\partial b}{\partial t} = V_0(x/a) \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right) + bV_0/a + \eta \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}. \quad (2.60)$$

Le premier terme (à droite du signe égal) est un terme d'advection. Le second terme représente un effet d'amplification à cause du gradient de vitesse, similaire au terme source vu précédemment (excepté que l'amplification se fait maintenant sur le champ initial et non pas sur une composante perpendiculaire). Le dernier terme est le terme de diffusion résistive.

L'équation sans dissipation (MHD parfaite) peut se résoudre analytiquement en utilisant la méthode des caractéristiques. En effet, résoudre l'équation précédente est équivalent à résoudre,

$$\frac{Db}{Dt} = bV_0/a, \quad (2.61)$$

dans le plan (x, t) le long des courbes caractéristiques,

$$\frac{dx}{dt} = -V_0x/a, \quad (2.62)$$

car nous avons exploité l'écriture,

$$\frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (2.63)$$

Ainsi, nous trouvons tout d'abord l'équation des courbes caractéristiques $x = x^*e^{-V_0t/a}$ avec x^* la valeur initiale $x(t=0)$. Puis, la résolution pour la solution b le long des courbes caractéristiques conduit à $b = Ke^{V_0t/a}$ avec K une constante d'intégration. La condition initiale est $b = B_0 \cos(\pi x/a)$ avec $x = x^*$, se traduisant par, $b(x, 0) = K = B_0 \cos(\pi x^*/a)$ avec $x^* = xe^{V_0t/a}$. Ainsi la solution MHD parfaite s'écrit,

$$b(x, t) = B_0 \cos(\pi xe^{V_0t/a}/a) \times e^{V_0t/a}. \quad (2.64)$$

Une représentation graphique de cette solution est visible sur la figure 2.4 et montre l'amplification par un facteur e au centre $x=0$, lorsque le temps t est multiplié par 2. En revanche, la zone centrale se réduit en s'accompagnant de renversements de la direction du champ. On pourrait étendre la solution pour un champ initial donné par $\vec{B}(x, 0) = B_0 F(x) \vec{u}_y$. Ainsi pour $F(x) = (x/a)e^{-x^2/a^2}$, nous obtenons la solution,

$$b(x, t) = B_0 \frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{a^2}(e^{2V_0t/a})} \times e^{V_0t/a}, \quad (2.65)$$

qui est illustrée sur la figure 2.5. Pour ce second cas, l'amplification se fait de part et d'autre du renversement du champ amplifiant alors fortement la densité de courant électrique. Comme nous le verrons dans la suite, ce type de configuration présentera un intérêt majeur pour le mécanisme de reconnexion magnétique.

L'ajout supplémentaire de la dissipation permettra de limiter cette amplification au centre ainsi que la formation des gradients, mais l'obtention de solution analytique stationnaire pour laquelle les différents termes se compensent devient alors plus compliquée (voir ci-dessous).

2.4 Solution stationnaire d'annihilation magnétique

Nous cherchons maintenant une solution simple stationnaire avec renversement d'un champ magnétique mono-dimensionnel au centre du domaine. Considérons donc un écoulement du même type que celui vu précédemment, bi-dimensionnel et incompressible, indépendant du temps,

$$\vec{V} = \frac{V_0}{a} (-x\vec{u}_x + y\vec{u}_y). \quad (2.66)$$

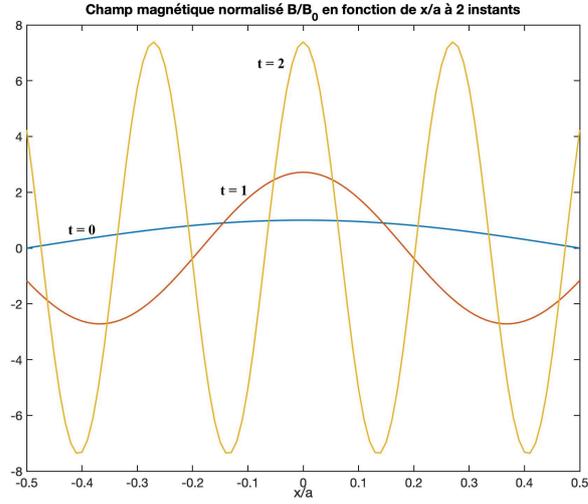


FIGURE 2.4 – Solution de l'équation d'advection-amplification en MHD parfaite sur un domaine x situé entre $-a/2$ et $a/2$, pour la composante $B_y(x, t)/B_0$ à partir d'une forme initiale en $B_0 \cos(\pi x/a)$, tracée à 3 instants différents $t = 0$, $t = a/V_0$, et $t = 2 a/V_0$.

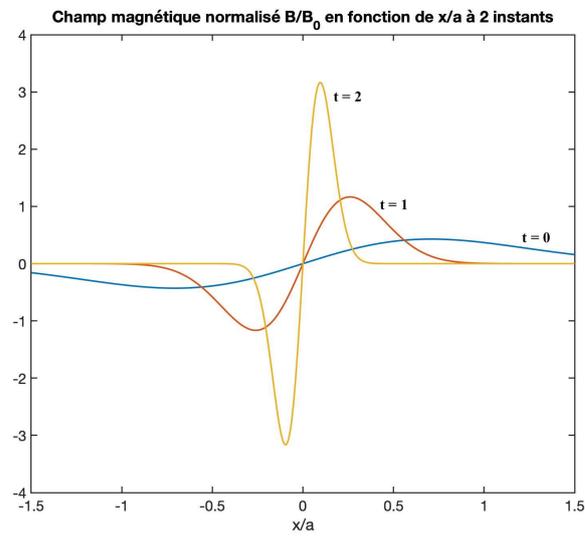


FIGURE 2.5 – Solution de l'équation d'advection-amplification en MHD parfaite sur un domaine x situé entre $-1.5a$ et $1.5a$, pour la composante $B_y(x, t)/B_0$ à partir d'une forme initiale en $(B_0 x/a) e^{-x^2/a^2}$, tracée à 3 instants différents $t = 0$, $t = a/V_0$, et $t = 2 a/V_0$.

Le fait que le module de la vitesse diverge à l'infini n'est pas gênant car le modèle n'est censé représenter que l'écoulement dans un voisinage limité autour de l'origine. Ce type de mouvement appliqué sur un champ $\vec{B}(x, 0) = B_0 F(x) \vec{u}_y$ où $F(x)$ est une fonction impaire de x est particulièrement intéressant, car le champ reste globalement similaire à des instants ultérieurs. En effet, la solution de MHD parfaite implique l'amplification du champ autour du point central dit point-nul (car $B = 0$) qui est aussi un point de stagnation du flot ($V = 0$). On peut alors espérer que le terme le terme dynamo (qui sera nul en ce point) va être dominé par le terme diffusif dans une petite région centrale. Loin de cette région centrale, la solution de MHD parfaite s'appliquera alors.

Traduisons maintenant ceci par les mathématiques. Puisque nous cherchons une solution stationnaire pour le champ magnétique ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$), le rotationnel du champ électrique $\vec{E} = -\vec{V} \times \vec{B} + \vec{J}/\sigma$ est (par vertu de l'équation de Maxwell-Farraday) nécessairement nul, conduisant alors à un champ \vec{E} homogène. Ainsi, nous pouvons écrire,

$$E = \frac{xV_0}{a}b + \eta \frac{db}{dx}, \quad (2.67)$$

avec la notation $b \equiv B_y$. Autour de $x = 0$, nous pouvons écrire que $E = \eta \frac{db}{dx}$ qui s'intègre en $b(x) \simeq \frac{xE}{\eta}$. Loin de la région centrale, on s'attend plutôt à $b(x) \simeq \frac{aE}{xV_0}$ car le terme dynamo domine. La transition entre les deux solutions (ou plutôt les deux régimes) se fait lorsque les deux termes sont comparables, donc pour une valeur particulière de $x = d$ traduisant la distance au point central telle que,

$$\frac{d}{a} = \sqrt{\frac{\eta}{V_0 a}} = R_m^{-1/2}, \quad (2.68)$$

avec $R_m = aV_0/\eta$ le Reynolds magnétique défini à partir de V_0 et a comme paramètres caractéristiques de vitesse et dimension spatiale respectivement. En pratique R_m étant très grand devant l'unité, la région dissipative est donc ce que l'on appelle en physique une couche limite de très faible épaisseur.

Une résolution complète pas trop compliquée peut être obtenue en utilisant la méthode de la variation de la constante. En effet tout d'abord, la solution générale de l'équation sans second membre (terme en E) conduit à la solution $b(x) = K e^{-x^2/l^2}$, avec la définition $l^2 = \frac{2\eta a}{V_0}$ (en fait le double de d^2 obtenu ci-dessus). On est donc amené à insérer cette forme dans l'équation complète avec second membre et on obtient alors après simplification,

$$e^{x^2/l^2} E/\eta = K', \quad (2.69)$$

qui s'intègre en $K(x) = \frac{E}{\eta} \int_0^x e^{u^2/l^2} du = \frac{El}{\eta} \int_0^{x/l} e^{v^2} dv = \frac{2Ea}{lV_0} \int_0^{x/l} e^{v^2} dv$. Ainsi, la solution s'écrit,

$$b(x) = \frac{2Ea}{lV_0} e^{-x^2/l^2} \int_0^{x/l} e^{v^2} dv \quad (2.70)$$

On peut aussi reconnaître la fonction de Dawson, $Daw(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{v^2} dv = \int_0^x e^{(v^2-x^2)} dv$, permettant d'écrire la solution sous la forme,

$$b(x) = \frac{2Ea}{lV_0} Daw(x/l). \quad (2.71)$$

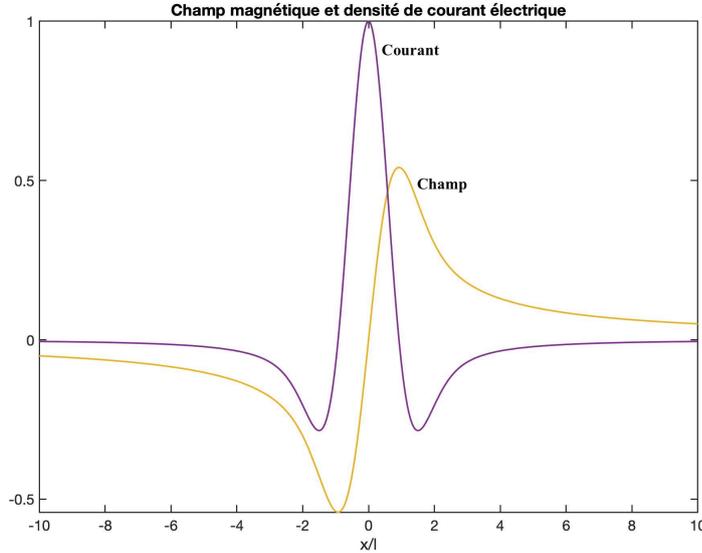


FIGURE 2.6 – Solution stationnaire d’annihilation magnétique, pour le champ magnétique et la densité de courant électrique en fonction de x/l . Le facteur de normalisation $\frac{2Ea}{lV_0}$ (courant au centre) est pris égal à l’unité. La nappe de courant correspond bien à une largeur totale de $2l$

Une autre écriture équivalente (que l’on trouve dans la littérature) est,

$$b(x) = \frac{E}{\eta\mu} \text{Daw}(\mu x), \quad (2.72)$$

avec $\mu \equiv 1/l = \sqrt{V_0/(2a\eta)}$. La densité de courant électrique correspondante J est alors donnée par,

$$\mu_0 J(x) = \frac{2Ea}{lV_0} \left[1 - \frac{2x}{l^2} \text{Daw}(x/l) \right], \quad (2.73)$$

La profil spatial de la solution magnétique stationnaire est représenté de façon schématique sur la figure 2.6. Elle représente l’annihilation de deux champs anti-parallèles de même amplitude. Dans la limite de faible résistivité (ou de grand nombre de Reynolds magnétique), la solution possède une nappe de courant intense et fortement localisée autour de la région centrale contenant le point-nul ou point de stagnation. La nappe est caractérisée par une épaisseur (dans la direction- x) $l = \sqrt{2}d \propto R_m^{-1/2} \propto \eta^{1/2}$ et aussi par une extension infinie dans la direction- y . Ce modèle ainsi appelé annihilation magnétique a été construit par Priest & Sonnerup [2] (voir aussi la référence [3]).

Cette solution permet de poser la question cruciale de la valeur maximale possible pour la vitesse à laquelle le champ peut être ainsi annihilé. Pour ce faire, nous pouvons utiliser l’équation du mouvement (conservation du moment) en

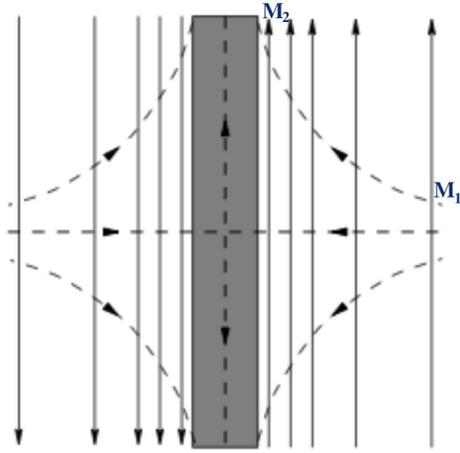


FIGURE 2.7 – Représentation schématique de la solution stationnaire d’annihilation magnétique, extraite de Watson et al. (1998). Les lignes discontinues représentent le flot de vitesse, et les lignes continues verticales les lignes de champ magnétiques. La zone centrale grisée est la couche limite résistive de demi-largeur $l \propto \eta^{1/2}$.

régime stationnaire (viscosité négligée),

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{(\vec{J} \times \vec{B} - \nabla P)}{\rho}, \quad (2.74)$$

et l’écrire sous la forme,

$$\rho(V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y})V_x = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial b^2}{\partial x}, \quad (2.75)$$

et

$$\rho(V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y})V_y = -\frac{\partial P}{\partial y}. \quad (2.76)$$

En effet, nous avons exploité notamment que le terme de force de Lorentz $\vec{J} \times \vec{B}$ s’écrit simplement $\nabla(\frac{B^2}{2\mu_0})$ en absence de courbure du champ magnétique. En multipliant la première par V_x et la seconde par V_y , puis en les additionnant, on obtient alors,

$$\rho(V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y})(V_x^2 + V_y^2)/2 = -V_x \frac{\partial P}{\partial x} - V_y \frac{\partial P}{\partial y} - V_x \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial b^2}{\partial x}. \quad (2.77)$$

Par conséquent, nous avons une équation de Bernoulli magnétique,

$$P + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{constante} \quad (2.78)$$

le long du mouvement. Appliquons cette relation à un globule de plasma qui s’approche de façon lointaine la nappe de courant en M_1 de coordonnées $(x = L, y = l)$. La géométrie du flot de vitesse est telle qu’il sera en M_2 de coordonnées

($x = l, y = L$) avec le même module de vitesse égale à $\sqrt{l^2 + L^2}(V_0/a)$. Ainsi, soient P_1 et b_1 la pression et le champ magnétique en M_1 , P_2 et b_2 la pression et le champ magnétique en M_2 , nous avons,

$$P_1 + \frac{b_1^2}{2\mu_0} = P_2 + \frac{b_2^2}{2\mu_0} \quad (2.79)$$

Si on se place en $x = l$ où la pression thermique est minimale (terme de pression magnétique maximal), alors la condition $P_2 > 0$ en $x = l$ sera équivalente à demander $P > 0$ partout. Par conséquent, cette condition conduira à la condition,

$$b_2^2 < b_1^2 + 2\mu_0 P_1, \quad (2.80)$$

puis à

$$\frac{b_2^2}{b_1^2} < (1 + \beta_1), \quad (2.81)$$

avec $\beta_1 = 2\mu_0 P_1/b_1^2$. En utilisant alors que $b_1 \simeq Ea/(LV_0)$ et $b_2 = \frac{2Ea}{V_0}D(1)$ (la notation $D(1)$ est utilisée pour simplifier la notation de la valeur de la fonction de Dawson en 1) , nous en déduisons la condition,

$$4\frac{L^2}{l^2}D^2(1) \lesssim (1 + \beta_1), \quad (2.82)$$

puis,

$$V_0 \lesssim \frac{1 + \beta_1}{4D^2(1)} \times \frac{2\eta a}{L^2}. \quad (2.83)$$

Enfin, en utilisant $V_1 \simeq V_0 L/a$, la condition s'écrit

$$V_1 \lesssim \frac{1 + \beta_1}{4D^2(1)} \times \frac{2\eta}{L}, \quad (2.84)$$

et sous forme adimensionnelle,

$$M_1 \lesssim \frac{1 + \beta_1}{2D^2(1)} \times \frac{1}{R_m}, \quad (2.85)$$

en divisant par une vitesse caractéristique V_c afin de faire apparaître un nombre de Mach $M_1 \equiv V_1/V_c$, et en définissant un nombre de Reynolds correspondant $R_m \equiv LV_c/\eta$. Le facteur numérique multiplicatif étant de l'ordre de 1 (en fait 1.7 pour $\beta_1 = 0$), le nombre de Mach déterminant la vitesse d'approche restera très limité dans la limite de très grand Reynolds. Cette vitesse normalisée représente un taux d'annihilation du champ dans la région résistive centrale mais aussi la vitesse à laquelle le champ magnétique (loin de la zone centrale) y est amené, le champ étant gelé dans le flot.

Ainsi, nous avons obtenu une vitesse avec une loi d'échelle en $1/R_m$ typique des phénomènes pour lesquels le mécanisme à l'oeuvre peut limiter l'amplification-advection du champ magnétique est la diffusion pure. Dans la suite, nous allons nous orienter sur un mécanisme différent même si le terme à l'origine reste le même, c'est à dire le terme en $\eta \nabla \vec{B}$. Nous verrons alors que la vitesse associée impliquera une vitesse d'approche avec une loi d'échelle plus rapide en $1/R_m^\alpha$ avec $\alpha < 1$.

2.5 Solution stationnaire de reconnexion diffusive

L'idée pour obtenir une solution ressemblant à l'annihilation mais impliquant un mécanisme de reconnexion, donc avec un changement de la topologie magnétique, est d'ajouter une contrainte supplémentaire dans le flot de vitesses tel que,

$$\vec{V} = \vec{P} + \lambda g(x) \vec{u}_y, \quad (2.86)$$

et de rechercher une solution magnétique du type,

$$\vec{B} = \lambda \vec{P} + g(x) \vec{u}_y, \quad (2.87)$$

avec $g(x) = \frac{E}{\eta \tilde{\mu}} \text{Daw}(\tilde{\mu}x)$. \vec{P} est la forme en point de stagnation vue auparavant, $\vec{P} = (-\alpha x, \alpha y, 0)$ avec $\alpha = V_0/a$, et $\tilde{\mu} \equiv \sqrt{\alpha(1-\lambda^2)/(2\eta)}$. La solution d'annihilation correspond alors au cas particulier dans les équations ci-dessus où on impose $\lambda = 0$ (ainsi $\tilde{\mu} = \mu$).

Les solutions de reconnection sont celles avec $\lambda \neq 0$, et vont permettre d'avoir des lignes de champ courbées tout en gardant un point-nul (et point de stagnation) au centre. Les travaux de Craig & Henton (1995) ont montré que pour $-1 < \lambda < 0$, la solution prenait alors l'allure décrite sur la figure 2.8. Cependant, la région centrale (nappe de courant) n'est pas radicalement modifiée de part sa forme, son extension infinie dans la direction y , mais aussi pour sa largeur qui reste $\tilde{l} = 1/\tilde{\mu} \propto \eta^{1/2}$ (même si elle dépend du facteur λ). Ceci est dû au fait que l'ajout de la contribution en $\lambda \vec{P}$ pour le champ magnétique est à rotationnel nul et donc ne modifie pas la forme de la densité de courant (déterminée par $g(x)$). Les conclusions sur la vitesse maximum du mécanisme demeurent (par rapport à l'annihilation magnétique) avec une vitesse caractéristique (ou taux ou nombre de Mach entrant) variant comme $1/R_m$.

2.6 Solution stationnaire de reconnexion magnétique de type Sweet-Parker

L'obtention d'une solution stationnaire permettant le transport du champ magnétique à une vitesse plus rapide qu'une vitesse de type diffusion (voir ci-dessus) est rendue possible si l'extension longitudinale de la région centrale de diffusion n'est pas infinie mais limitée à une valeur L , imposée par exemple par les dimensions extérieures de la structure magnétique. Ainsi, un tel modèle a été proposé par Sweet (1958) et Parker (1957), avec un succès tel qu'il est considéré actuellement comme le modèle de référence pour la reconnexion magnétique en MHD (surtout lorsque le mécanisme est bi-dimensionnel). Une représentation schématique de la solution est visible sur la figure 2.9. La solution analytique mathématique développée en chaque point de l'espace n'est pas possible, car elle nécessiterait la description détaillée de la région centrale qui apparaît une fois encore comme une couche limite. Le modèle de Sweet-Parker (SP) peut cependant être obtenu par un raisonnement simple qui consiste à chercher des solutions homogènes dans la région parfaite (là où la résistivité est négligée), et dans la région centrale résistive (là où le terme résistif est dominant), puis à raccorder les deux solutions.

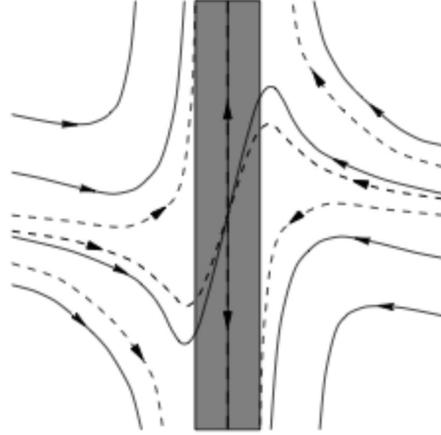


FIGURE 2.8 – Représentation schématique de la solution stationnaire de reconnexion diffusive, extraite de Watson et al. (1998). Les lignes discontinues représentent le flot de vitesse, et les lignes continues verticales les lignes de champ magnétique. La zone centrale grisée est la couche limite résistive de demi-largeur $\tilde{l} \propto \eta^{1/2}$.

Ainsi, pour ce faire, nous considérons un flot incompressible bi-dimensionnel. Dans la région dite entrante non-dissipative, nous supposons que la vitesse est essentiellement dirigée suivant la direction \vec{u}_x (ce qui est exact pour $y = 0$ pour une structure rigoureusement symétrique et seulement de façon approchée ailleurs). Dans la région dite sortante non-dissipative, nous supposons que la vitesse est essentiellement dirigée suivant la direction \vec{u}_y (ce qui est exact pour $x = 0$ pour une structure rigoureusement symétrique). Ainsi les vitesses du plasma entrante et sortante (loi de la région centrale) seront notées V_e et V_s . Les champs magnétiques correspondants seront notés B_e et B_s . La taille de la région centrale résistive est supposée d'extension $2L$ dans la direction longitudinale (selon le champ magnétique principal entrant ou encore l'axe Oy), et d'extension 2δ dans la direction transverse (selon l'axe Ox). Parmi ces paramètres, quatre sont inconnus (V_s , V_e , B_s , et δ) contrairement à L et B_e qui sont imposés par des conditions externes. Il reste donc à trouver quatre relations/équations.

La première relation résulte de la conservation de la masse, qui est en fait la condition d'incompressibilité du plasma $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. La forme intégrale (sur le volume de la région centrale) se ramène alors à écrire la conservation du flux de masse entre l'entrée et la sortie.

$$\rho V_e L = \rho V_s \delta. \quad (2.88)$$

La densité ρ sera supposée homogène pour simplifier, sans perte de généralité. La seconde relation est obtenue en calculant le champ électrique à l'entrée qui est évalué par $V_e B_e$, et à l'égaliser au champ électrique à la sortie qui vaut $V_s B_s$. En effet, nous avons négligé la contribution résistive dans ces régions de MHD parfaite et considéré que le champ électrique $\vec{E} = -\vec{V} \times \vec{B}$ doit être homogène (son rotationnel est nul) car nous sommes en régime stationnaire (de

par l'équation de Maxwell-Faraday). Ainsi,

$$E = B_e V_e = B_s V_s, \quad (2.89)$$

avec la notation E utilisée pour la composante E_z perpendiculaire au plan. Cette seconde équation peut aussi s'interpréter comme la conservation du flux magnétique au travers de la région centrale. La troisième relation est obtenue par le même raisonnement que le précédent, mais en faisant intervenir maintenant la région centrale diffusive pour évaluer de nouveau le champ électrique E . Ainsi en se plaçant au centre $x = y = 0$ (point-nul et aussi point de stagnation), $E = J/\sigma$ conduit à,

$$E = \frac{B_e}{\delta} \frac{1}{\mu_0 \sigma} = \eta \frac{B_e}{\delta}. \quad (2.90)$$

Nous avons ci-dessus évalué $J_z \equiv J$ au point-nul par la variation de B_e au travers de la région centrale, qui approxime d'autant mieux la dérivée de B_e que la largeur δ est petite (ce qui sera justifié à posteriori). Ceci explique aussi pourquoi la région centrale est aussi appelée la nappe de courant. Il nous manque une dernière équation. Comme nous n'avons pas encore fait intervenir la dynamique, nous pouvons considérer l'équation de type Navier-Stokes magnétique (viscosité négligée et en régime stationnaire), $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{J} \times \vec{B}$, dans laquelle nous avons aussi négligé le terme de pression thermique (qui est souvent secondaire dans les plasmas considérés dans cet ouvrage). Nous pouvons appliquer cette équation en un point situé à mi-chemin entre le point-nul et le bord de la nappe de courant (c'est à dire en $x = 0, y = L/2$), pour lequel la vitesse est évaluée par $V_s/2$ (moyenne arithmétique entre 0 et V_s) et le gradient de vitesse à V_s/L . Nous avons alors,

$$\rho \frac{V_s (V_s - 0)}{2} \frac{1}{L} = J \frac{B_s}{2} = \frac{B_e B_s}{\delta \mu_0} \frac{1}{2}, \quad (2.91)$$

où nous avons évalué le champ magnétique par la valeur $B_s/2$ (moyenne arithmétique entre 0 et B_s) et la densité de courant J par sa valeur maximum $\frac{B_e}{\delta \mu_0}$ obtenu au point- X (ceci est en général vérifié à posteriori notamment dans les simulations numériques). La relation ci-dessus traduit comment la force magnétique exercée le long de la nappe (du point-nul central vers le bord de la nappe) permet d'accélérer le plasma (terme de gauche de type advection non-linéaire en $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$).

L'exploitation de ces quatre relations permet alors d'obtenir les résultats suivants,

$$V_s^2 = \frac{B_e^2}{\rho \mu_0}, \quad (2.92)$$

$$V_e^2 = \frac{B_e^2}{\rho \mu_0} \frac{1}{S}, \quad (2.93)$$

$$B_s^2 = \frac{B_e^2}{S}, \quad (2.94)$$

$$\delta^2 = \frac{L^2}{S}, \quad (2.95)$$

avec S le nombre (sans dimension) de Lundquist défini ainsi $S \equiv LV_A/\eta$ où on utilise la vitesse d'Alfvén $V_A \equiv \frac{B_e}{\rho \mu_0}$ (définie à partir du plasma entrant). Le

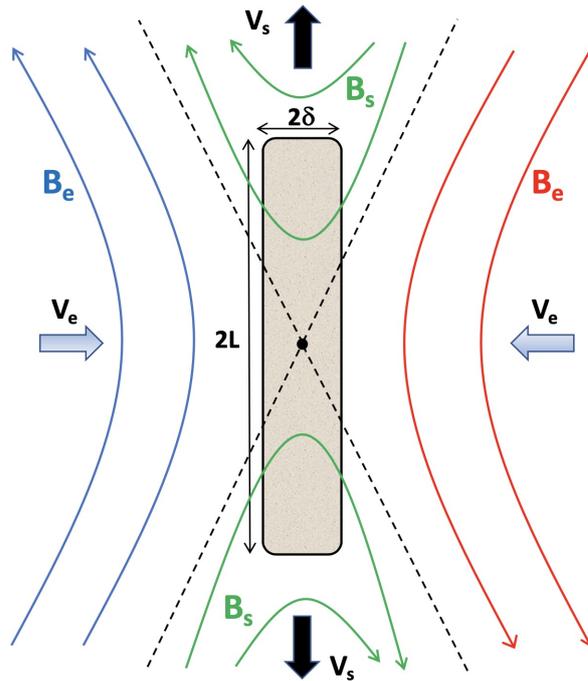


FIGURE 2.9 – Représentation schématique de la solution stationnaire de Sweet-Parker. Des lignes de champs symétriques (bleues et rouges) sont transportées vers la région centrale (nappe de courant en grisée) à une vitesse V_e . Le mécanisme de reconnexion permet de fabriquer de nouvelles lignes (vertes) qui sont transportées vers l'extérieur à une vitesse V_s . La nappe de courant s'étend avec des dimensions $2L \times 2\delta$. La solution analytique approchée considère que le champ magnétique entrant B_e est principalement orienté suivant y et le champ sortant B_s orienté suivant x . Des courbes (en pointillés) appelées séparatrices délimitent les régions topologiquement différentes. La figure ne rend pas compte du rapport d'aspect correct (voir texte) avec $L/\delta = S^{1/2} \sim 10^5$.

nombre de Lundquist est en fait un nombre de Reynolds particulier utilisant la dimension spatiale L et la vitesse d'Alfvén comme valeurs caractéristiques. Après ré-écriture des résultats nous avons,

$$\frac{V_s}{V_A} = 1, \quad (2.96)$$

$$\frac{V_e}{V_A} = \frac{1}{S^{1/2}}, \quad (2.97)$$

$$\frac{B_s}{B_e} = \frac{1}{S^{1/2}}, \quad (2.98)$$

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{S^{1/2}}. \quad (2.99)$$

Ainsi, la vitesse de sortie est simplement la vitesse d'Alfvén basée sur le champ entrant, alors que la vitesse d'entrée qui représente la vitesse du mécanisme est largement sub-Alfvénique d'un facteur $S^{1/2}$ (on rappelle que des valeurs $S \sim 10^{10}$ doivent être considérées). Le champ magnétique des lignes reconnectées est très faible (c'est le module du champ avant reconnexion divisé par le facteur $S^{1/2}$). Enfin, la largeur δ est réduite d'un facteur $S^{1/2}$ par rapport à la longueur L de la nappe de courant, justifiant ainsi l'hypothèse pour débiter le calcul ci-dessus.

Dans le résultat obtenu ci-dessus, le gradient de pression thermique a été négligé, en accord avec les conditions régnant par exemple dans la couronne solaire. Si on ajoute cependant ce terme, les résultats montrent que la vitesse de reconnexion est très peu modifiée, car elle est au mieux multipliée par un facteur $\sqrt{2}$ (voir référence au livre de Priest et Forbes du chapitre précédent).

Il peut aussi être instructif d'examiner l'énergétique correspondante, pour quantifier la manière dont l'énergie magnétique entrante (dans la zone de reconnexion) se convertit en d'autres formes d'énergie. En effet, un chauffage important est requis pour expliquer les éruptions solaires par exemple. On peut tout d'abord montrer que le rapport de l'énergie cinétique du fluide rapportée à l'énergie magnétique en entrée est, $1/2 \frac{\rho V_e^2}{B_e^2/\mu_0} = V_e^2/(2V_A^2) = 1/(2S) \ll 1$. Nous avons utilisé que la densité d'énergie électromagnétique est $\frac{B^2}{\mu_0}$ car le taux d'énergie électromagnétique dans un fluide conducteur en déplacement est donné par le flux de Poynting EBL/μ_0 avec $E = VB$, conduisant ainsi à l'expression ci-dessus pour la densité d'énergie électromagnétique appelée simplement magnétique ci-dessus. De la même façon, pour la sortie, le même rapport conduit à l'expression inverse, égale à $2S \gg 1$ car $B_s V_s = B_e V_e$. Ainsi, en entrée c'est l'énergie magnétique qui domine alors qu'en sortie c'est l'énergie cinétique. Le rapport le l'énergie cinétique de sortie à l'énergie magnétique d'entrée vaut quant à lui $1/2 \frac{\rho V_s^2}{B_e^2/\mu_0} = 1/2$. Ainsi, la moitié de l'énergie magnétique est convertie en énergie cinétique (emportant les lignes de champ reconnectées) alors que l'autre moitié est convertie en chaleur (énergie thermique).

La motivation principale pour obtenir ce modèle était la recherche de solution plus rapide que la vitesse de type diffusion, qui varie (loi d'échelle) avec le paramètre de diffusion en η ou encore de façon équivalente en $1/R_m$. Ici, nous avons obtenu que la loi d'échelle pour V_e est en $\eta^{1/2}$ ou encore en $S^{-1/2}$, donc 10^5 fois plus rapide typiquement. En effet, nous avons vu que le temps caractéristique

de diffusion s'écrivait $t_D = L^2/\eta$ ou encore $t_D = SL/V_A$. Pour la solution stationnaire de Sweet-Parker, le temps caractéristique s'écrit $t_{SP} = L/V_e = S^{1/2}L/V_A$.

Une application à la couronne solaire où même aux disruptions observées en laboratoire montre que ce n'est pas encore suffisamment rapide pour expliquer les observations (de 3 ordres de grandeur au moins pour la couronne et de 1 ordre environ pour les tokamaks).

Effet de la viscosité sur le régime de Sweet-Parker. Les motivations pour établir les solutions de reconnexion stationnaire incluant l'effet de la viscosité sont les suivantes. Tout d'abord, il est légitime de considérer une viscosité non nulle et possiblement du même ordre que la résistivité pour un plasma donné. De plus, l'utilisation d'un code numérique introduit naturellement via le schéma numérique un terme de ce type. C'est pourquoi une simulation considérant un terme de viscosité explicite dominant la viscosité numérique est alors préférable pour étudier la reconnexion.

La modification principale du modèle (non-visqueux) établi ci-dessus, concerne l'équation généralisée de Navier-Stokes (voir formule) dans laquelle nous ajoutons maintenant dans le membre de droite un terme en $\mu \nabla^2 \vec{V}$ approximé le long de la nappe de courant par le terme en un point à mi-distance par $-\mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V_s/2}{\partial y} \simeq -\mu V_s/(2\delta^2)$. Ainsi,

$$\rho \frac{V_s}{2} \frac{(V_s - 0)}{L} = \frac{B_e}{\delta \mu_0} \frac{B_s}{2} - \mu \frac{V_s}{2\delta^2}, \quad (2.100)$$

conduit alors à (utilisant $B_e \delta = B_s L$),

$$\rho V_s^2 = \frac{B_e}{\delta \mu_0} (B_e \delta) - \mu \frac{L V_s}{\delta^2}, \quad (2.101)$$

puis à,

$$V_s^2 = \frac{B_e^2}{\rho \mu_0} - \mu \frac{V_s^2}{\rho \eta} = V_A^2 - \mu \frac{V_s^2}{\rho \eta}, \quad (2.102)$$

après utilisation de $V_e = \frac{\eta}{\delta}$ puis $V_e L = V_s \delta$ conduisant à $\frac{L}{\delta^2} = \frac{V_s}{\eta}$. Au final, nous pouvons écrire,

$$\frac{V_s}{V_A} = (1 + P_r)^{-1/2}, \quad (2.103)$$

avec $P_r = \mu/(\rho \eta) = \nu/\eta$. La correction visqueuse se traduit sur la vitesse entrante par,

$$\frac{V_e}{V_A} = (1 + P_r)^{-1/4} S^{-1/2}. \quad (2.104)$$

Le rapport inverse de la nappe de courant est alors obtenu à partir de,

$$\frac{\delta}{L} = (1 + P_r)^{1/4} S^{-1/2}. \quad (2.105)$$

et le champ magnétique après reconnexion B_s rapporté au champ avant reconnexion B_e est,

$$\frac{B_s}{B_e} = (1 + P_r)^{1/4} S^{-1/2}. \quad (2.106)$$

Enfin le champ électrique stationnaire $E = V_e B_e$ (en fait la composante E_z perpendiculaire au plan) est alors,

$$E = (1 + P_r)^{-1/4} S^{-1/2} V_A B_e, \quad (2.107)$$

conduisant alors au taux de reconnexion normalisé $E/(V_A B_e) = (1 + P_r)^{-1/4} S^{-1/2}$ (qui est aussi le nombre de Mach Alfvénique V_e/V_A). Enfin, il peut être utile d'estimer la vorticité maximum, c'est à dire au niveau de la sortie de la région de reconnexion, par $\omega_M \simeq V_s/\delta \simeq (V_s/L)(L/\delta)$. Ainsi nous obtenons,

$$\omega_M \simeq \frac{V_A}{L} (1 + P_r)^{-3/4} S^{1/2}. \quad (2.108)$$

De même la densité de courant maximum J_M , qui se situe au centre de la nappe (au point- X), est évaluée à partir de $J_M \simeq B_e/\delta \simeq (B_e e L)(L/\delta)$, conduisant alors à,

$$J_M \simeq \frac{B_e}{\mu_0 L} (1 + P_r)^{-1/4} S^{1/2}. \quad (2.109)$$

On remarque que le rapport J_M/ω_M vaut $(1 + P_r)^{1/2}$ en unités normalisées avec $\rho = \mu_0 = 1$.

Un résumé des effets de la viscosité sur le régime de Sweet-Parker est disponible dans la référence [14]. La pertinence de la validité du modèle y est aussi discutée dans le cadre de la formation de la nappe de courant (non incluse dans le modèle ci-dessus où la nappe est supposée pré-formée) comme conséquence de configurations initiales permettant le développement de modes de la MHD parfaite (coalescence et tilt, voir plus bas dans ce document).

2.7 Solution stationnaire de reconnexion magnétique de type Petschek

Afin de chercher une solution encore plus rapide, Petschek (1964) proposa que le mécanisme de reconnexion soit gouverné par la présence d'ondes de choc MHD stationnaires. Plus précisément, les fronts de chocs sont stationnaires car ils se propagent par rapport au fluide à la même vitesse que le fluide vers la région centrale mais à contre courant. Ainsi, quatre structures de choc ancrées aux quatre coins d'une région centrale résistive (la longueur $2l$ n'est maintenant plus fixée mais est fonction de la résistivité comme c'est le cas pour la largeur), comme illustré sur la figure 2.10.

Sans développer de calcul correspondant dans cet ouvrage, le modèle autorise ainsi une plus grande non homog nit  du champ magnétique transport  vers la région centrale. La vitesse sortante reste la vitesse d'Alfvén. La valeur maximum de la vitesse entrante (loin de cette région) rapportée à la vitesse d'Alfvén (qui est aussi parfois appelée le nombre de Mach Alfvénique M_e pour des raisons évidentes) est,

$$M_e = \frac{V_e}{V_A} \simeq \frac{\pi}{8 \log_e(S)}, \quad (2.110)$$

avec S défini à partir d'une longueur macroscopique $L \neq l$, $S \equiv LV_A/\eta$ (la fonction logarithmique étant en base népérienne ou dite aussi naturelle). Ainsi, le résultat fait apparaître une dépendance avec S moins importante que la loi de

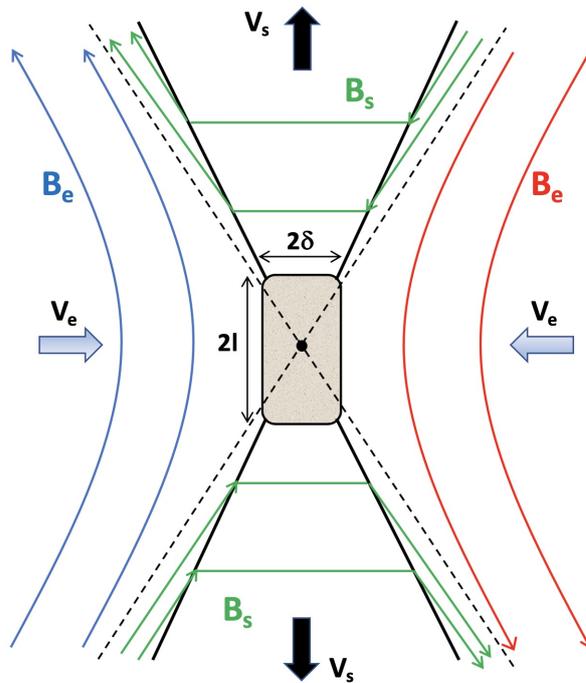


FIGURE 2.10 – Représentation schématique de la solution stationnaire de Petschek. Des lignes de champs symétriques (bleues et rouges) sont transportées vers la région centrale (nappe de courant en grisée) à une vitesse V_e . Le mécanisme de reconnexion permet de fabriquer de nouvelles lignes (vertes) qui sont transportées vers l'extérieur à une vitesse V_s . La nappe de courant principale s'étend avec des dimensions $2l \times 2\delta$. Contrairement au modèle de Sweet-Parker, la longueur l dépend de la résistivité et reste très petite devant la longueur du système. La solution analytique approchée considère que le champ magnétique entrant B_e n'est pas aussi homogène que dans le modèle de Sweet-Parker. La reconnexion se produit essentiellement au travers de 4 ondes de choc non propagatives (lignes continues) ancrées aux 4 coins de la région centrale diffusive, qui permet une discontinuité du champ magnétique. Les séparatrices (en pointillés) ne correspondent pas aux régions de choc.

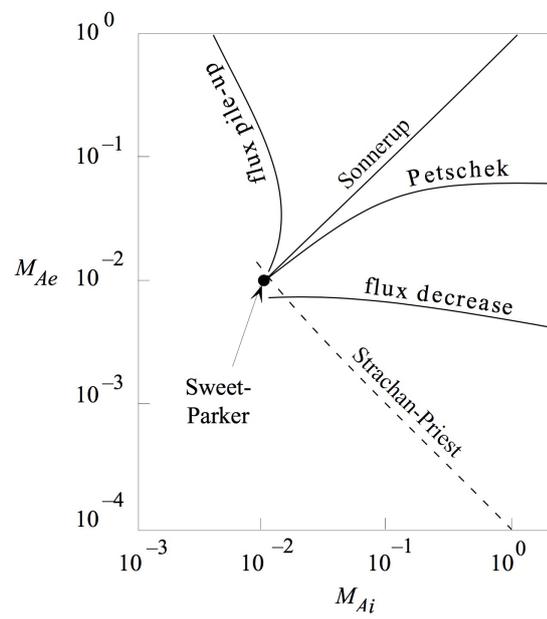


FIGURE 2.11 – Résumé des solutions mathématiques stationnaires de reconnexion obtenues par Priest et Forbes (tiré de Forbes 2001), représentant le Mach loin de la zone centrale (M_e) en fonction du Mach proche de la région résistive (M_i) pour une résistivité donnée.

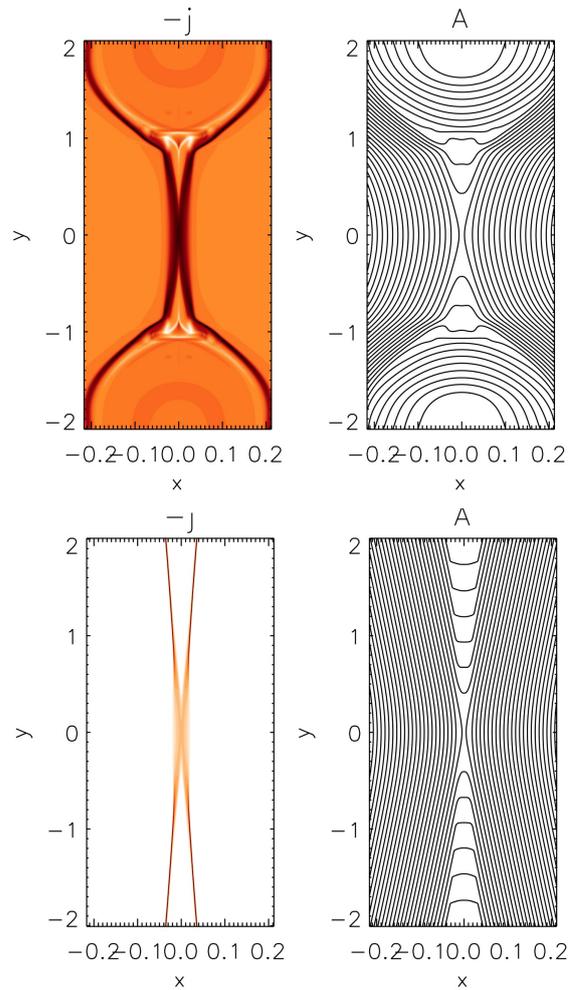


FIGURE 2.12 – Résultats d’une simulation numérique illustrant la formation d’une solution de Petschek à partir d’une nappe de courant de type Harris relativement large centrée sur une résistivité localisée exponentiellement en $x = y = 0$), avec la densité de courant (à gauche) et les lignes de champ magnétique (à droite) pour un temps intermédiaire (en haut) et un temps final correspondant à l’état stationnaire (en bas). Figure tirée des travaux [9] et [11-14].

type Sweet-Parker en $S^{-1/2}$ conduisant à des vitesses de 2 – 3 ordres de grandeurs plus rapides. La solution de Petschek a été retrouvée quelques années plus tard sur une base mathématique élargie parmi d'autres solutions plus ou moins physiques (voir référence à Priest et Forbes 1986 [7]). Celles ci sont résumées sur la figure (tirée de Forbes 2001) pour une résistivité donnée, et comparées à la solution de Sweet-Parker. La solution de Petschek montre bien un maximum pour M_e qui est tracé en fonction de M_i qui est le nombre de Mach Alfvénique au niveau du front de la région diffusive. Cette inhomogénéité n'était pas présente pour la configuration de Sweet-Parker car $M_e = M_i$ (voir figure 2.11).

Pour illustrer la formation de la solution, les résultats de simulation numériques montrent que celle ci apparaît progressivement à partir du centre du domaine ($x = y = 0$) lorsque la résistivité η est localisée de façon exponentielle. Une structure transitoire qui précède les chocs est alors expulsée par les bords pour laisser place aux quatre ondes de chocs stationnaires ultérieurement. Cependant, après de nombreuses années de polémiques sur l'existence réelle de cette solution, il s'est avéré que du moins sous sa forme stationnaire la solution s'avère instable sauf si une résistivité non uniforme (dépendance spatiale arbitraire) qui sert d'ailleurs à la former, la stabilise (voir Baty et al. 2014 ou référence [14]) Des travaux menant à cette conclusion sont aussi exposés dans les références [9] et [11-13]. Nous verrons plus loin dans cet ouvrage, que sous sa forme non stationnaire elle joue probablement un rôle important (voir chapitre 5 sur les plasmoides).

Bibliographie

- [1] A.L. Wilmot-Smith, E.R. Priest and G. Hornig, *Magnetic diffusion and the motion of field lines* (Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics 99, 177, 2005).
- [2] E.R. Priest and U.O. Sonnerup, *Theories of Magnetic Field Annihilation* (Geophys. J. R. astr. Soc. 41, 405, 1975).
- [3] P.G. Watson and I.J.D. Craig, *Analytic solutions of the magnetic annihilation and reconnection problems* (Physics of Plasmas 4, 101 (1997)).
- [4] I.J.D. Craig and I.J.D. Henton, *Exact Solutions for Steady State Incompressible Magnetic Reconnection* (The Astrophysical Journal 450, 280 (1995)).
- [5] E. Parker, *Sweet's Mechanism for Merging Magnetic Fields in Conducting Fluids* (Journal of Geophysical Research, vol. 62, issue 4, pp. 509 (1957)).
- [6] P. Sweet, *The neutral point theory of solar flares* (In Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics (ed. Lehnert B). p. 123. Cambridge : Cambridge University Press. (1958)).
- [7] E.R. Priest and T.G. Forbes, *New models for fast steady state magnetic reconnection* (J. Geophys. Res. 91, 5579 (1986)).
- [8] H. Petschek, *The physics of solar flares* (in The Physics of Solar Flares, edited by W. N. Hess (NASA, SP-50, 1964), p. 425).
- [9] H. Baty, E.R. Priest and T.G. Forbes, *Effect of nonuniform resistivity in Petschek reconnection* (Physics of Plasmas 13, 022312 (2006)).
- [10] T.G. Forbes, *The nature of Petschek-type reconnection* (Earth, Planets and Space volume 53, pages 423–429 (2001)).
- [11] H. Baty, T.G. Forbes and E.R. Priest, *Petschek reconnection with a non-localized resistivity* (Physics of Plasmas 16, 012102 (2009)).
- [12] H. Baty, E.R. Priest and T.G. Forbes, *Petschek-like reconnection with uniform resistivity* (Physics of Plasmas 16, 060701 (2009)).
- [13] H. Baty, T.G. Forbes and E.R. Priest, *The formation and stability of Petschek reconnection* (Physics of Plasmas 21, 112111 (2014)).
- [14] H. Baty, *On the Sweet-Parker model for incompressible visco-resistive magnetic reconnection in two dimensions associated to ideal magnetohydrodynamic instabilities* (Preprint ArXiv 2022, <https://arxiv.org/abs/2201.01135>)

Chapitre 3

Instabilités résistives de déchirement magnétique

Le mécanisme de reconnexion magnétique a été décrit dans le chapitre précédent sous sa forme stationnaire. Cela a permis d'avoir un premier aperçu de la rapidité du mécanisme (échelle de temps $t_{SP} = S^{1/2}L/V_A$) en comparant par rapport à la diffusion pure (échelle de temps $t_D = SL/V_A$). Cependant, pour plus de réalisme et par souci de complétude, il est nécessaire d'étudier des solutions de reconnexion dépendantes du temps et pouvant éventuellement rejoindre une phase stationnaire, telle que décrite précédemment. C'est le cas des instabilités de déchirement magnétique qui se développent pour des configurations instables à cause d'une résistivité non nulle, bien que petite.

3.1 Le mode de déchirement magnétique ou tearing en géométrie plane cartésienne

Dans ce paragraphe, nous détaillons des calculs analytiques car ceci est difficile à trouver dans la littérature. Ceci est parfois fastidieux mais important pour la bonne compréhension physique.

Formulation de la configuration.

Les gens ont considéré une configuration plane la plus simple possible et contenant une nappe de courant pré-formée. Nous verrons plus loin comment une telle nappe peut être créée et même comment le processus de formation peut interférer sur la reconnexion elle-même (voir chapitre 5 sur les plasmoides). Supposons un équilibre statique (donc sans vitesse) représenté par un champ magnétique planaire ayant un renversement de sa direction en $x = 0$,

$$\vec{B}_0(x) = B_0 f(x) \vec{u}_y, \quad (3.1)$$

avec B_0 une constante représentant l'amplitude du champ, et $f(x)$ une fonction (sans unité) impaire. Pour fixer les idées, dans la suite nous considérerons la fonction $f(x) = \tanh(x/a)$, avec a une échelle spatiale caractéristique de la nappe de courant et appelée sa demi-largeur pour des raisons évidentes. La densité de courant électrique résultante (la composante perpendiculaire au plan

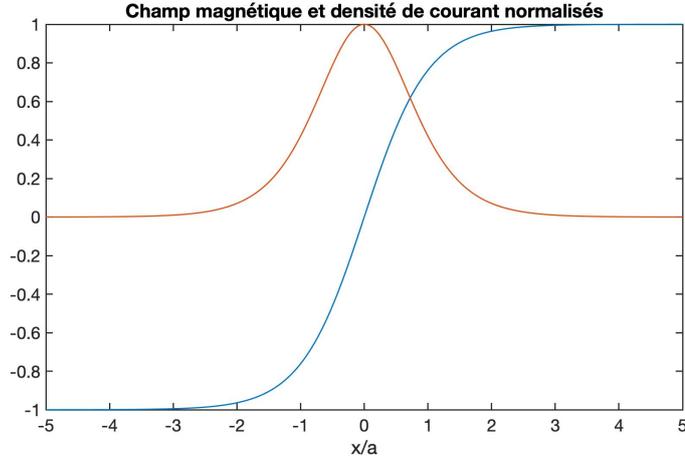


FIGURE 3.1 – Profil principal d’équilibre de type Harris étudié pour le mode de déchirement magnétique en géométrie plane. Champ magnétique normalisé à sa valeur à l’infini B_0 (variation en tangente hyperbolique en bleue), et la densité de courant électrique correspondante normalisée à sa valeur en $x = 0$, qui est B_0/a .

plus exactement) est alors, $J_0(x) = B_0 \frac{df}{dx} = \frac{B_0}{a} \frac{1}{\sinh^2(x/a)}$. Ces profils dits de type Harris sont ainsi tracés sur la figure 3.1 ci-contre, montrant que B_0 représente l’amplitude du champ loin de la nappe, alors que la densité de courant quant à elle s’annule à l’infini. Ce choix de profil est bien sûr arbitraire, mais a le mérite d’être à la fois une bonne approximation pour certaines configurations et d’être particulièrement manipulable analytiquement. Nous évoquerons cependant de façon plus succincte, l’effet d’utiliser un autre profil dans cet ouvrage. La fonction de flux magnétique correspondante est alors $\psi_0(x) = -aB_0 \log(\cosh(x/a))$, qui est bien sûr définie à une constante près.

Stabilité linéaire, équations linéarisées, et solutions numériques.

Nous allons maintenant linéariser les équations MHD en écrivant $\psi(x, y, t) = \psi_0(x) + \psi_1(x, y, t)$ et $\phi(x, y, t) = 0 + \phi_1(x, y, t)$, avec ψ_1 et ϕ_1 des perturbations d’ordre 1 par rapport à l’équilibre. En reportant dans les équations réduites MHD, et en ne gardant que les termes d’ordre 1, nous obtenons pour l’équation magnétique,

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \psi_0 = \eta \nabla^2 \psi_1, \quad (3.2)$$

car le terme $(\vec{V} \cdot \nabla) \psi_1$ est d’ordre 2 et n’est donc pas conservé. On remarquera que pour être rigoureux, un équilibre résistif serait assuré par une équation $\nabla^2 \psi_0 = -J_0$, correspondant à une équation globale,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \psi = \eta (\nabla^2 \psi + J_0), \quad (3.3)$$

dans laquelle le terme J_0 permet d’empêcher la diffusion résistive de l’équilibre pendant le développement du mode. L’équation de vorticité (pour $\omega_1 = -\nabla^2 \phi_1$)

conduit à l'équation linéarisée,

$$\frac{\partial(-\nabla^2\phi_1)}{\partial t} = (\vec{B}_0 \cdot \nabla)J_1 + (\vec{B}_1 \cdot \nabla)J_0, \quad (3.4)$$

dans laquelle nous ne considérons pas la diffusion visqueuse pour simplifier. Au final, en exprimant tout en fonction des deux variables linéarisées (ψ_1 et ϕ_1), nous arrivons à,

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = B_0f(x)\frac{\partial\phi_1}{\partial y} + \eta\nabla^2\psi_1, \quad (3.5)$$

puis à,

$$\frac{\partial(\nabla^2\phi_1)}{\partial t} = B_0f(x)\frac{\partial(\nabla^2\psi_1)}{\partial y} - B_0f''\frac{\psi_1}{\partial y}. \quad (3.6)$$

De façon classique, nous pouvons utiliser un développement en onde plane, $\psi_1(x, y, t) = \psi^*(x)e^{iky+\gamma t}$, $\phi_1(x, y, t) = \phi^*(x)e^{iky+\gamma t}$, avec ψ^* et ϕ^* des amplitudes complexes. Nous voyons aussi apparaître le taux de croissance linéaire de l'instabilité γ d'un nombre d'onde k (suivant la direction y). Cette analyse sera donc exacte pour un milieu possédant une périodicité ou alors ayant une extension infinie dans la direction longitudinale. L'injection de cette forme dans les deux équations précédentes conduit alors à,

$$\gamma\psi = ikB_0f(x)\phi + \eta\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\right)\psi, \quad (3.7)$$

puis à,

$$\gamma\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\right)\phi = ikB_0f(x)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\right)\psi - ikB_0f''\psi, \quad (3.8)$$

en laissant tomber l'indice 1 pour simplifier la notation. On remarquera qu'il est aussi possible d'avoir des équations réelles en utilisant un développement déphasé pour ϕ_1 , tel que $\phi_1(x, y, t) = -i\phi^*(x)e^{iky+\gamma t}$. Mais, on choisit ici de rester avec nos équations complexes.

Il est possible de résoudre directement le système ci-dessus (en utilisant un code numérique) assorti des bonnes conditions aux limites pour une fonction $f(x)$ donnée, ici ($\phi \rightarrow 0$ et $\psi \rightarrow 0$) quand $x \rightarrow \pm\infty$. En pratique, les bords seront placés suffisamment loin de la nappe de courant centrale de façon à minimiser leurs effets sur la solution. On obtient ainsi des courbes dites solutions de dispersion $\gamma(k)$ paramétrées par le nombre de Lundquist $S_a = aV_A/\eta$, avec V_A la vitesse d'Alfvén basée sur le champ magnétique asymptotique B_0 , $V_A = B_0/\sqrt{\rho\mu_0}$ (donc $V_A = B_0$ dans nos unités adimensionnelles). Ces courbes sont reportées sur la figure 3.2 pour trois valeurs de S_a , en fait $\gamma a/V_A$ en fonction de ka . Nous réalisons alors que pour l'équilibre choisi, l'instabilité requiert la condition $ka < 1$, ce qui signifie que la longueur d'onde longitudinale $\lambda = 2\pi/k$ minimale requise doit être plus grande que la taille de la nappe de courant ($2a$) à un facteur numérique près de l'ordre de π . Ceci fixe alors une longueur minimale de la nappe de courant ou un rapport d'aspect minimal de π . Nous pouvons aussi remarquer que le taux de croissance possède un maximum pour un nombre d'onde optimal sur lequel nous reviendrons plus loin, car représentatif d'une transition entre deux régimes. Les fonctions propres associées à un mode ka proche du maximum du taux de croissance sont aussi tracées sur la figure 3.3. Ces dernières montrent ainsi la structure radiale du mode, qui est

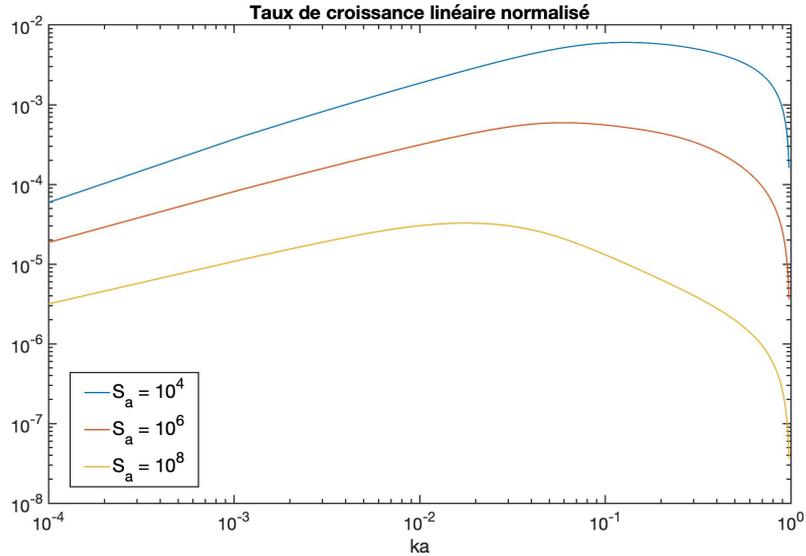


FIGURE 3.2 – Taux de croissance linéaire $\gamma a/V_A$ en fonction de ka , obtenu par résolution numérique du système MHD réduit linéaire (voir texte) pour 3 valeurs du nombre de Lundquist S_a , et pour le profil magnétique de Harris en tangente hyperbolique.

comme attendu fortement localisé dans une petite région centrale, avec une tendance singulière. Nous allons approfondir ceci maintenant grâce à la recherche de solutions approchées par le calcul analytique.

Stabilité linéaire, et solutions approchées analytiques. Historiquement, cette analyse analytique a été obtenue avant la solution numérique montrée ci-dessus. Bien que les expressions soient approchées, cette analyse permet de gagner significativement en intuition physique sur la nature et sur les caractéristiques de l'instabilité.

Avant de procéder à ces calculs, il est commode de définir deux échelles de temps caractéristiques, l'échelle de temps résistive et l'échelle de temps d'Alfvén,

$$\tau_\eta \equiv \frac{a^2}{\eta}, \tau_A \equiv \frac{1}{kV_A}, \quad (3.9)$$

respectivement. Ainsi, le nombre de Lundquist défini précédemment s'écrit aussi $S_a = (ka)^{-1}\tau_\eta/\tau_A$. On supposera alors que $\tau_\eta^{-1} \ll \gamma \ll \tau_A^{-1}$, qui pourra être vérifié a posteriori ou même en utilisant les résultats numériques présentés juste avant.

Comme représentée sur les figures montrant la structure radiale des modes, la solution est formée en partie d'une solution interne de type couche limite autour de $x = 0$, à l'intérieur de laquelle les termes résistifs sont importants (malgré la petitesse de η). La largeur de cette couche limite sera notée comme de coutume δ_{in} et reste très petite devant a . Ainsi, nous aurons $k \sim a^{-1} \ll d/dx \sim \delta_{in}^{-1}$ pour cette région dite interne. La solution est aussi formée d'une solution dans

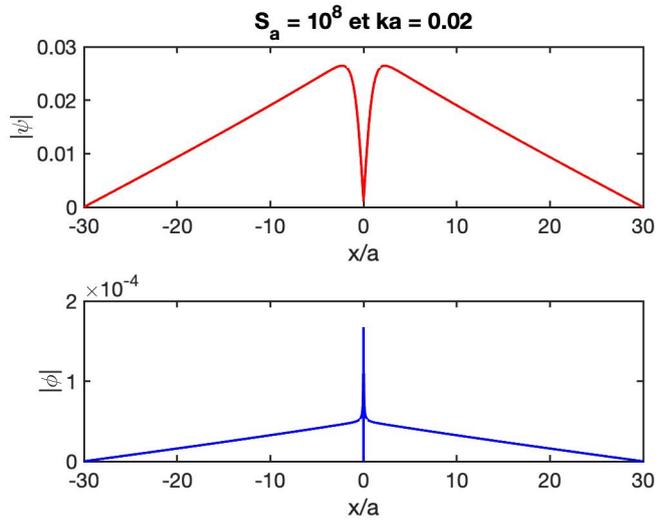


FIGURE 3.3 – Fonctions propres $\psi(x)$ et $\phi(x)$ associées au mode $ka = 0.02$ proche du taux de croissance maximum obtenu pour $S_a = 10^8$ (voir figure précédente). Les bords numériques (voir texte) sont placées en $x = \pm 30a$.

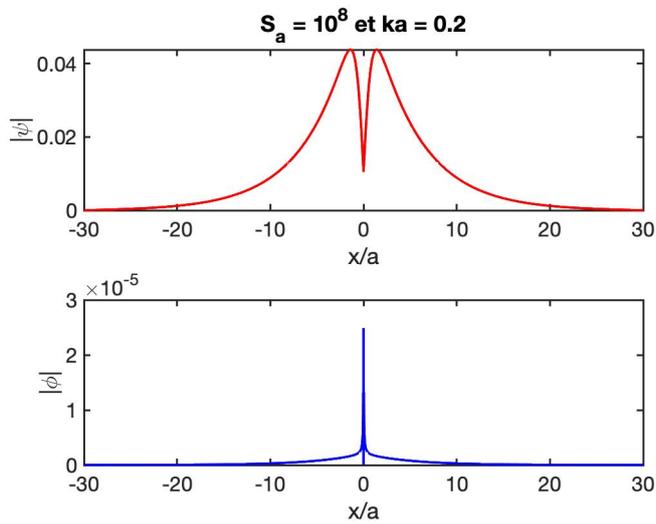


FIGURE 3.4 – Fonctions propres $\psi(x)$ et $\phi(x)$ associées au mode $ka = 0.2$ proche du seuil de stabilité pour $S_a = 10^8$ (voir figure précédente). Les bords numériques (voir texte) sont placées en $x = \pm 30a$.

la région externe (qui devra se raccorder à la solution interne comme nous le verrons plus loin) où les termes résistifs sont négligeables.

Cherchons tout d'abord la solution externe notée (ϕ_{ext}, ψ_{ext}) . Le système des deux équations pour les fonctions propres conduit alors à,

$$\phi_{ext} = \frac{\gamma}{ikB_0 f} \psi_{ext}, \quad (3.10)$$

pour la première équation dans laquelle le terme résistif a été négligé. Pour la seconde équation, nous pouvons négliger le terme inertiel (membre de gauche) qui reste en effet très faible dans cette région (voir figures précédentes), conduisant alors à,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 - \frac{f''}{f} \right) \psi_{ext} = 0. \quad (3.11)$$

Cette dernière équation devient singulière quand x tend vers zéro car la dérivée première de ψ_{ext} est discontinue en $x = 0$ (la dérivée seconde qui traduit la densité de courant perturbée étant singulière). En pratique, la solution pour ψ_{ext} est obtenue pour $x > 0$, et la solution pour $x < 0$ est alors déduite par parité, $\psi_{ext}(-x) = \psi_{ext}(x)$. Une quantité déterminant l'énergie disponible (ou libre pour traduire littéralement l'anglais) pour alimenter l'instabilité est définie par Δ' , le paramètre de tearing,

$$\Delta' \equiv \left[\frac{1}{\psi_{ext}(0)} \frac{d\psi_{ext}}{dx} \right]_{0^-}^{0^+}, \quad (3.12)$$

à partir de la solution ψ_{ext} , une fois celle-ci obtenue. Le paramètre de tearing (ayant comme dimension l'inverse d'une longueur) est donc une mesure de saut de la dérivée au travers de la couche limite. On peut vérifier que pour l'équilibre $f(x) = \tanh(x/a)$, la solution de l'équation est bien,

$$\psi_{ext}(x) = C e^{-kx} \left[1 + \frac{1}{ka} \tanh(x/a) \right], \quad (3.13)$$

pour $x > 0$ (C étant une constante d'intégration). La solution pour $x < 0$ est quant à elle déduite par parité, $\psi_{ext}(-x) = \psi_{ext}(x)$. Le paramètre de tearing correspondant est alors,

$$\Delta' a = 2 \left[\frac{1}{ka} - ka \right]. \quad (3.14)$$

Ce résultat est assez simple à obtenir, car il suffit de calculer tout d'abord $\frac{1}{\psi_{ext}(0)} \frac{d\psi_{ext}}{dx}$, de prendre sa limite quand x tend vers zéro par valeur supérieure, puis de multiplier par 2 (la limite de l'expression quand elle tend vers zéro par valeur inférieure étant égale à sa limite par valeur supérieure). Je signale encore des erreurs dans la littérature, avec le facteur 2 parfois manquant ou alors la normalisation par rapport à a erronée. L'allure de cette solution pour ψ_{ext} est tracée sur la figure 3.5, et on peut constater l'accord avec la solution numérique trouvée avant. La différence étant aux bords, car pour la solution numérique la fonction s'annulait aux bords placés suffisamment loins mais pas rigoureusement à l'infini. Enfin, on remarquera que la condition d'instabilité $\Delta' > 0$ se traduit par $ka < 1$, confirmant ainsi les résultats numérique obtenus auparavant.

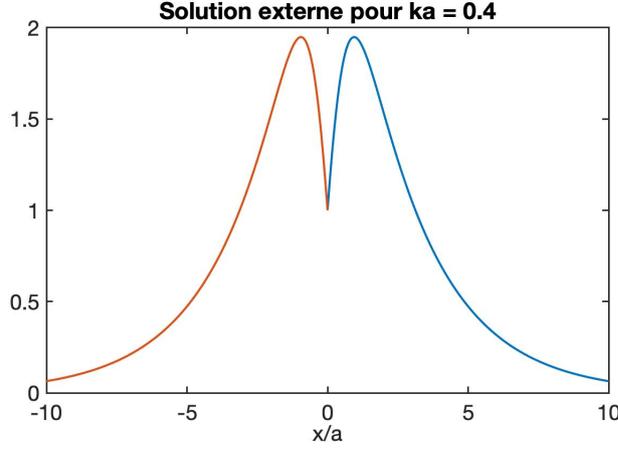


FIGURE 3.5 – Forme mathématique analytique de la fonction propre $\psi_{ext}(x)$ évaluée pour la région externe (voir texte).

Il reste maintenant à se placer dans la région interne d'épaisseur δ_{in} . Reprenons donc les deux équations linéarisées, dans lesquelles nous allons maintenant garder le terme résistif et tenir compte de l'hypothèse $k \sim a^{-1} \ll d/dx \sim \delta_{in}^{-1}$ (les variations spatiales très rapides avec x sont en effet particulièrement visibles sur les figures précédentes). Ainsi nous obtenons,

$$\gamma\psi_{in} = ikB_0f\phi_{in} + \eta\frac{\partial^2\psi_{in}}{\partial x^2}, \quad (3.15)$$

et

$$\gamma\frac{\partial^2\phi_{in}}{\partial x^2} = ikB_0f\frac{\partial^2\psi_{in}}{\partial x^2}, \quad (3.16)$$

pour les solutions internes ψ_{in} , et ϕ_{in} . Dans cette région interne de type couche limite, l'équilibre magnétique peut alors s'approcher en prenant $f(x) \simeq x/a$. Fort de cette approximation, nous pouvons alors introduire la seconde équation différentielle ci-dessus dans la première pour aboutir à,

$$\frac{d^2\psi_{in}}{dx^2} = -\frac{\gamma^2 a^2}{k^2 V_A^2} \frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{1}{x} \left(1 - \frac{\eta}{\gamma} \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi_{in} \right], \quad (3.17)$$

où V_A représente la vitesse d'Alfvén obtenue avec l'amplitude B_0 . Avant de s'intéresser à la résolution plutôt complexe de cette équation, il est utile d'évaluer le fameux paramètre δ_{in} représentant la largeur de la couche limite. En effet, l'analyse dimensionnelle de l'équation conduit à,

$$\frac{1}{\delta_{in}^2} \sim \frac{\gamma^2 a^2}{k^2 V_A^2} \frac{1}{\delta_{in}^6} \frac{\eta}{\gamma} \implies \delta_{in} \sim a \left(\frac{\gamma \tau_A^2}{\tau_\eta} \right)^{1/4}, \quad (3.18)$$

qui sera admise comme définition de δ_{in} plus loin. On notera que δ_{in} dépend de la résistivité, mais aussi de k via τ_A . Ainsi chaque mode propre de déchirement possède une largeur de couche limite différente. Ceci est important car ceci signifie aussi que chaque mode correspond à un paramètre Δ' différent via la dépendance $\Delta'(k)$. Nous pouvons ré-écrire l'équation différentielle à résoudre en définissant

de nouvelles variables adimensionnelles, $X \equiv x/\delta_{in}$ et $\Lambda \equiv \gamma^{3/2} \tau_A \tau_\eta^{1/2} = \gamma \delta_{in}^2 / \eta$. Nous avons ainsi Λ qui est le taux de croissance linéaire normalisé par le taux de diffusion résistive au travers de la nappe résistive de largeur δ_{in} . Nous obtenons ainsi,

$$\frac{d^2 \psi_{in}}{dX^2} = -\frac{1}{X} \frac{d^2}{dX^2} \left[\frac{1}{X} \left(\Lambda - \frac{d^2}{dX^2} \right) \psi_{in} \right], \quad (3.19)$$

dont la solution sera obtenue en imposant de raccorder ψ_{in} avec ψ_{ext} . Ce raccord se fait en égalisant avec la discontinuité de la dérivée de ψ_{ext} vue auparavant, et quantifiée par le paramètre de tearing Δ' . Pour la région interne, ce paramètre traduit la variation totale de $d\psi_{in}/dx$ au travers de la couche,

$$\Delta' = \frac{2}{\delta_{in}} \int_0^1 dX \frac{1}{\psi_{in}(0)} \frac{d^2 \psi_{in}}{dX^2}. \quad (3.20)$$

Le facteur 2 provient de l'intégration entre $X = -1$ et $X = 1$ et de la parité du résultat. Nous ne développerons pas ici le calcul analytique plutôt compliqué qui conduit à obtenir $\Delta'(\Lambda)$ pour notre profil d'équilibre. Ainsi,

$$\Delta' \delta_{in} = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma[(\Lambda + 3)/4]}{\Gamma[(\Lambda + 5)/4]} \frac{\Lambda}{1 - \Lambda}, \quad (3.21)$$

avec $\Gamma(x)$ étant la fonction spéciale Gamma.

Historiquement, la solution fût d'abord obtenue dans le régime $\Lambda \ll 1$. Ainsi, dans cette limite asymptotique, nous avons,

$$\Delta' \delta_{in} \simeq \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)} \Lambda \simeq 2.124 \Lambda. \quad (3.22)$$

Ce régime dit à petit Δ' car $\Delta' \delta_{in} \ll 1$ est appelé aussi régime Furth-Killeen-Rutherford (noté FKR) car obtenu par les dits auteurs en 1963. Ainsi, on peut alors déduire que le taux de croissance pour le régime FKR s'écrit,

$$\boxed{\gamma \simeq 0.547 \tau_A^{-2/5} \tau_\eta^{-3/5} (\Delta' a)^{4/5}}, \quad (3.23)$$

qui pour notre profil en tangente hyperbolique se ramène alors à,

$$\boxed{\gamma \frac{a}{V_A} \simeq 0.953 S_a^{-3/5} (ka)^{-2/5} (1 - k^2 a^2)^{4/5}} \quad (3.24)$$

en remplaçant l'expression obtenue précédemment pour $\Delta'(k)$. Cette expression est aussi parfois simplifiée un peu plus, en négligeant le terme $k^2 a^2$ devant 1 pour obtenir,

$$\gamma \frac{a}{V_A} \simeq S_a^{-3/5} (ka)^{-2/5}. \quad (3.25)$$

La loi d'échelle du taux de croissance en $S_a^{-3/5}$ est le résultat représentatif le plus connu pour ces modes de déchirement, qui ainsi croissent sur une échelle de temps intermédiaire (ou hybride) entre l'échelle de temps d'Alfvén et l'échelle de temps résistive. Le régime FKR est aussi référencé dans la littérature comme l'approximation à ψ -constant, car la condition $\Delta' \delta_{in} \ll 1$ est en accord avec l'hypothèse que pour ce régime ψ_1 varie peu au travers de la nappe résistive,

$\psi'_1 \ll \psi_1/\delta_{in}$ tout en ayant un saut de la dérivée, $\psi'_1 \simeq \psi_1 \Delta'/\delta_{in}$. On peut aussi facilement voir que le temps caractéristique de croissance du mode reste très long devant le temps de diffusion résistif au travers δ_{in} , car $\gamma^{-1} \gg \delta_{in}^2/\eta$ conséquence de $\Lambda \ll 1$. De façon complémentaire, on peut vérifier que dans ce régime la largeur de couche s'écrit,

$$\frac{\delta_{in}}{a} \sim \left(\frac{\tau_A}{\tau_\eta}\right)^{2/5} (\Delta'a)^{1/5} \sim S_a^{-2/5} (ka)^{-3/5}. \quad (3.26)$$

L'autre régime correspond à la limite asymptotique $\Lambda \rightarrow 1^-$. Ainsi on obtient,

$$\Delta'\delta_{in} \simeq \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{1-\Lambda} \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{1-\Lambda}. \quad (3.27)$$

En prenant alors l'approximation $\Delta'a \simeq 2/(ka)$ (valide pour ka petit devant 1), ceci conduit à,

$$\boxed{\gamma \simeq \tau_A^{-2/3} \tau_\eta^{-1/3} \simeq S_a^{-1/3} (ka)^{2/3}}, \quad (3.28)$$

que l'on pouvait aussi obtenir plus directement à partir de la définition de $\Lambda = \gamma^{3/2} \tau_A \tau_\eta^{1/2} \simeq 1$. Le résultat remarquable est que pour ce régime, les résultats deviennent indépendants du paramètre de tearing Δ' . Quant à la largeur caractéristique correspondante de la couche limite, elle est évaluée suivant,

$$\frac{\delta_{in}}{a} \sim \left(\frac{\tau_A}{\tau_\eta}\right)^{1/3} \sim S_a^{-1/3} (ka)^{-1/3}. \quad (3.29)$$

Ce régime est appelé le régime de Coppi (1976) et correspond à une approximation dit à ψ -non-constant. Le temps caractéristique de croissance du mode devient maintenant comparable au temps de diffusion résistif au travers de δ_{in} , car $\gamma^{-1} \simeq \delta_{in}^2/\eta$ conséquence de $\Lambda \simeq 1$. La loi d'échelle du taux de croissance est toujours hybride mais avec un exposant de S_a de $-1/3$ au lieu de $-3/5$, impliquant donc une échelle de temps substantiellement plus rapide.

Ces formules représentant les deux régimes sont comparées avec la solution complète obtenue par la résolution numérique du système initial. La figure 3.6 obtenue pour notre profil hyperbolique pour $S_a = 10^6$ montre que le régime FKR correspond aussi à une approximation ka moyennement faible devant l'unité contrairement au régime Coppi où $ka \ll 1$. Enfin, on vérifie aussi l'hypothèse de départ (quel que soit le régime), $\tau_\eta^{-1} \ll \gamma \ll \tau_A^{-1}$.

Stabilité linéaire pour d'autres profils d'équilibre. Bien que le profil précédent en tangente hyperbolique soit représentatif de situations réalistes, il est intéressant d'en examiner d'autres ne serait-ce que pour la généralité des résultats. Ainsi, les gens se sont intéressés au profil $B_y(x) = B_0 f(x) = B_0 \frac{\tanh(x/a)}{\cosh^2(x/a)}$. La fonction de flux correspondante est $\psi_0 = -\frac{aB_0}{2 \cosh^2(x/a)}$. La densité de courant électrique est alors $J_0(x) = (B_0/a) \frac{1-2 \sinh^2(x/a)}{\cosh^4(x/a)}$. Les profils correspondants sont tracés sur la figure 3.7, et montrent maintenant que le champ loin de la nappe centrale tend vers zéro alors que le champ maximum (qui est inférieur à B_0 d'ailleurs) servant à normaliser est situé dans une région intermédiaire.

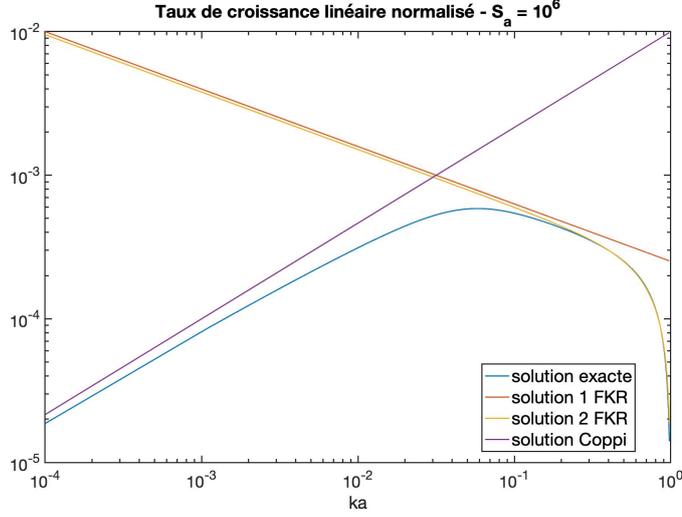


FIGURE 3.6 – Taux de croissance linéaire normalisé, $\gamma a/V_A$, en fonction de ka , obtenu par la résolution numérique (solution exacte), par l’approximation approchée FKR (solution 1 en $S_a^{-3/5}(ka)^{-2/5}$), et solution 2 en $0.953 S_a^{-3/5}(ka)^{-2/5}(1 - k^2 a^2)^{4/5}$, et par l’approximation du régime Coppi.

Nous avons reporté les résultats du taux de croissance normalisé en fonction de ka obtenus à l’aide de notre code de stabilité linéaire (voir figure 3.8). Tout d’abord le régime Coppi est retrouvé pour $ka \ll 1$ en accord avec le fait qu’il soit indépendant du paramètre de tearing Δ' , qui diffère de la valeur obtenue pour le profil de Harris (voir ci-dessous). Dans l’autre limite, le régime FKR suit approximativement maintenant une loi en,

$$\boxed{\gamma \frac{a}{V_A} \simeq C S_a^{-3/5} (ka)^{-6/5},} \quad (3.30)$$

avec $C = 4.77$. Cette formule peut être obtenue en reportant l’approximation $\Delta' a \simeq 15/(k^2 a^2)$ dans l’approximation FKR. En effet, c’est l’approximation à faible ka au premier ordre du résultat plus général du nouveau paramètre de tearing obtenu pour ce profil,

$$\boxed{\Delta' a = \frac{2(5 - k^2 a^2)(3 + k^2 a^2)}{k^2 a^2 \sqrt{4 + k^2 a^2}}.} \quad (3.31)$$

La dépendance avec S_a reste la même (c’est bien la signature du régime FKR), mais celle avec le nombre d’onde est différente. Pour ce nouveau profil, nous noterons que les modes deviennent instables maintenant dès que $ka \leq \sqrt{5}$ en accord avec $\Delta' a \geq 0$, et en accord avec la courbe de résultats numériques ci-dessus. Cette configuration présente ainsi la caractéristique d’être instable pour un rapport d’aspect L/a plus petit que pour le profil précédent, $L/a = 2\pi/\sqrt{5}$ au lieu de $L/a = 2\pi$. Ce qui peut présenter un avantage pour la simulation numérique demandant une haute résolution spatiale (voir plus loin), car le domaine de calcul est réduit d’un facteur 2 environ.

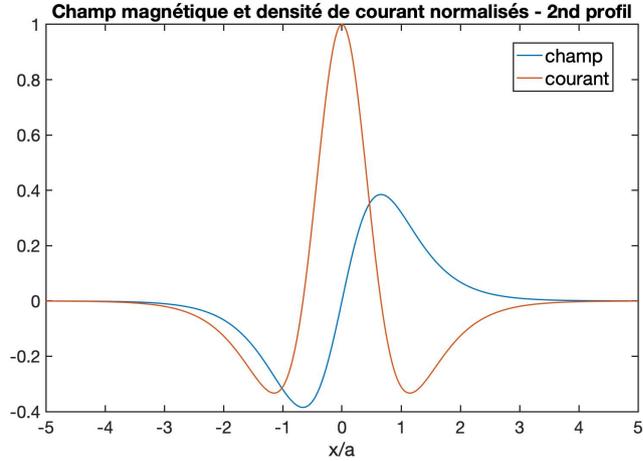


FIGURE 3.7 – Second profil d’équilibre étudié pour le mode de déchirement magnétique en géométrie plane. Champ magnétique normalisé à une valeur B_0 (voir texte), et la densité de courant électrique correspondante normalisée à sa valeur en $x = 0$.

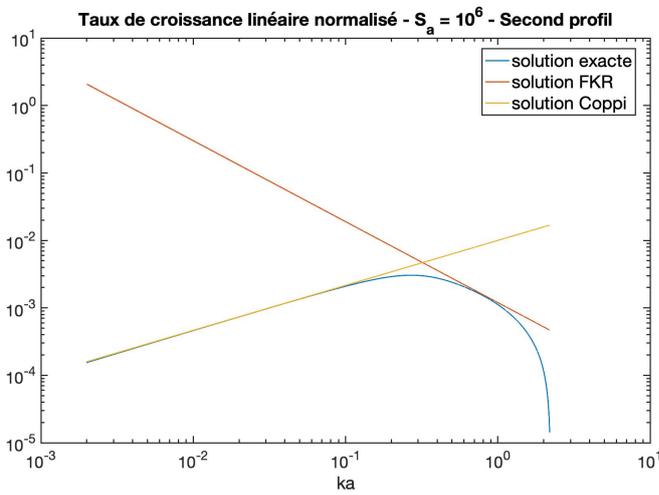


FIGURE 3.8 – Taux de croissance linéaire normalisé, $\gamma a/V_A$ du second profil, en fonction de ka , obtenu par la résolution numérique (solution exacte aux erreurs numériques près), par l’approximation approchée FKR (solution en $(ka)^{-6/5} S_a^{-3/5}$), et par l’approximation du régime Coppi.

Vision globale du mode de déchirement. Nous pouvons avoir un aperçu de la structure magnétique en forme d'îlot magnétique résultant du mode de déchirement magnétique. Un îlot s'étend entre 2 points- X et est centré sur un point- O . Il y aura éventuellement plusieurs îlots alignés le long de la région de renversement du champ magnétique principal, avec un nombre dépendant de la longueur L de la configuration. Ainsi, si $L \gg a$ (approximation courante pour une structure magnétique de type couronne solaire), c'est la valeur de k au voisinage du maximum du taux de croissance linéaire qui déterminera ce nombre. Si la structure est périodique (cas d'un tokamak par exemple), alors c'est le mode dominant parmi $k_n = 2\pi n/L$ (n étant un nombre entier positif).

Si on tient compte d'une composante de champ magnétique perpendiculaire au plan (aussi dite champ guide) pour rendre compte d'une géométrie tri-dimensionnelle plus réaliste, les îlots ont alors une extension le long de ce champ. La prise en compte d'une géométrie cylindrique ou torique conduit alors à une structure représentée schématiquement sur les figures 3.10 et 3.11. Il faut aussi noter que la structure des îlots n'est pas nécessairement exactement alignée selon l'axe (donc invariant) mais peut être vrillée, et c'est le cas si le nombre d'onde suivant cette troisième direction est non nulle. Nous verrons justement un exemple d'instabilité résistive, apparenté au tearing dans une géométrie polaire (appelé tearing résistif) dans le chapitre suivant.

La recherche de ce mode dominant k_{max} avec un taux correspondant γ_{max} dans le cas $L/a \rightarrow \infty$ s'est révélé fondamentale pour comprendre l'instabilité cousine du mode de déchirement, qui est l'instabilité dite dite de plasmoïde (voir plus loin). Nous pouvons donc tenter de l'évaluer en fonction du nombre de Lundquist S_a pour le profil principal, l'effet du profil ne changeant pas radicalement le résultat. En effet, ce mode dominant se trouve à la croisée des deux régimes (FKR et Coppi). Ainsi, si nous écrivons que les deux taux s'égalisent, nous obtenons que ceci correspond à,

$$k_{max}a \sim S_a^{-1/4}, \quad (3.32)$$

et que le taux maximum correspondant s'écrit alors, $\gamma_{max}a/V_A \sim S_a^{-1/2}$. Une estimation plus précise peut se faire en utilisant une formule capable de capturer les deux régimes et en cherchant son maximum. Cette formule est,

$$\gamma \equiv \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\left(\gamma_1^{3/2} + \gamma_2^{3/2}\right)^{2/3}}, \quad (3.33)$$

qui permet de capturer les deux régimes asymptotiques (taux γ_1 et γ_2) de façon approchée. Il en résulte alors les résultats plus précis,

$$\boxed{k_{max}a = 1.358 S_a^{-1/4}}, \quad (3.34)$$

et

$$\boxed{\gamma_{max} \frac{a}{V_A} = 0.623 S_a^{-1/2}}. \quad (3.35)$$

Ceci est illustrée clairement sur la figure 3.12. Le lecteur pourra aussi se référer à [3] pour avoir plus de détails.

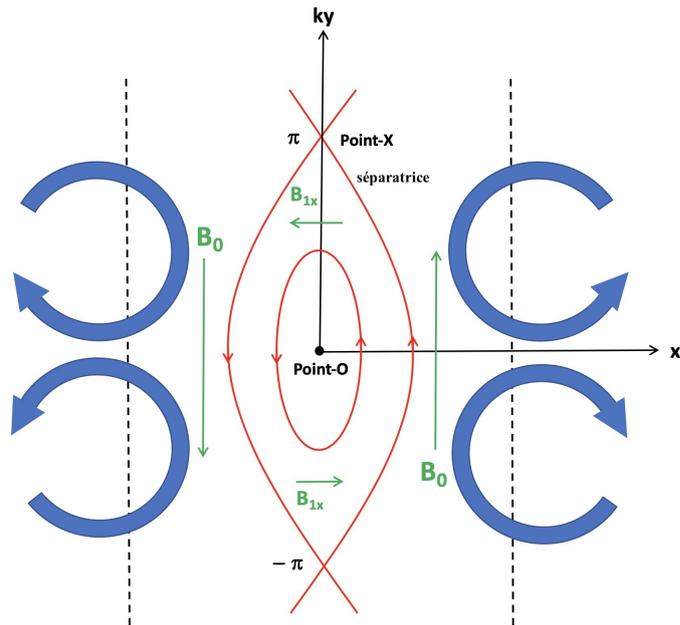


FIGURE 3.9 – Structure schématique de la déformation induite par un mode de déchirement magnétique. Le champ magnétique perturbé du premier ordre B_1 s'ajoute au champ d'équilibre B_0 pour produire un îlot magnétique dont le centre en $x = y = 0$ est appelé point- O . L'îlot s'étend entre 2 points appelé points- X situés en $ky = \pm\pi$ le long de la ligne (ou surface en 3 dimensions) dite séparatrice. Le flot de vitesse est schématisé par les mouvements vorticaux en bleu.

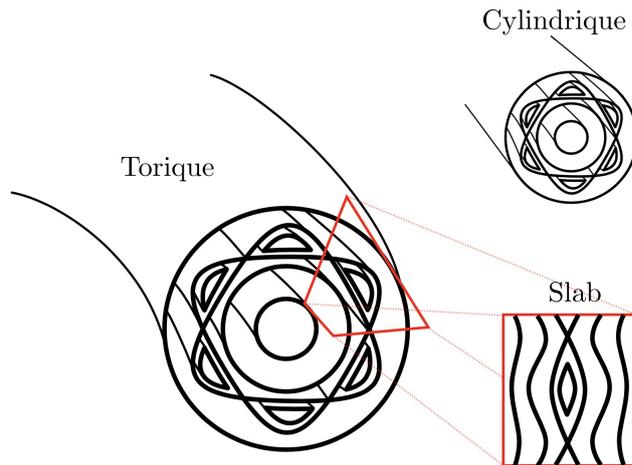


FIGURE 3.10 – Structures schématiques d'îlots magnétiques dans différentes géométries. Tiré de la thèse de Doctorat d'Alexandre Poyé [6].

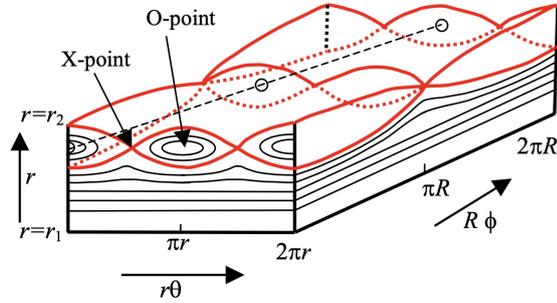


FIGURE 3.11 – Structure schématique d’une chaîne de 2 îlots magnétiques avec une extension cisailée ou vrillée suivant un champ guide. Tiré de Wilson (2017), ou référence [4]. Le plan de la dynamique est (r, θ) et le champ guide est suivant Φ .

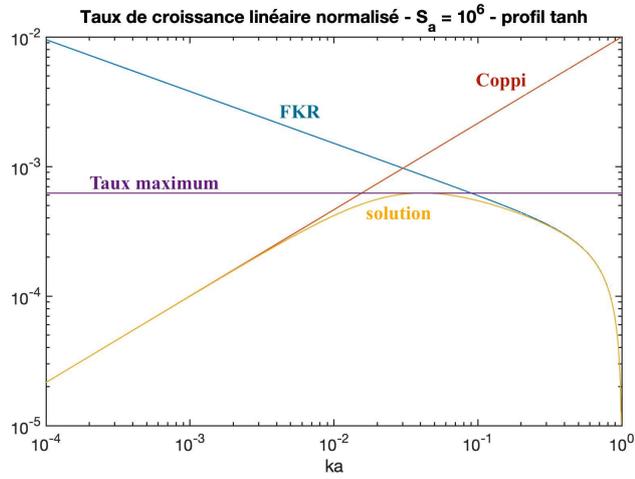


FIGURE 3.12 – Taux de croissance linéaire normalisé, $\gamma a/V_A$, en fonction de ka , obtenu par capture des deux régimes asymptotiques (FKR et Coppi) pour le profil en tangente hyperbolique. Le taux maximum (trait horizontal) donné par la formule (voir texte) est en accord avec le maximum de la solution reconstruite.

3.2 Evolution non-linéaire du mode de déchirement magnétique

Nous pouvons nous poser plusieurs questions importantes pour la poursuite non-linéaire de l'instabilité de déchirement dans le contexte de la recherche d'un mécanisme rapide de reconnexion. Celles-ci concernent l'évolution ultérieure de la topologie magnétique, et plus précisément de savoir si l'échelle de temps ultérieure impliquera une accélération ou une décélération. En effet, l'évolution linéaire du mode de tearing est réalisée avec des lois d'échelle du taux de croissance en $S_a^{-3/5}$ ou $S_a^{-1/3}$, un peu moins et un peu plus rapide que $S_a^{-1/2}$ (échelle de type Sweet-Parker vue dans le chapitre précédent) respectivement.

Régime de Rutherford et saturation des îlots magnétiques. Encore une fois, les études de l'instabilité se sont concentrées tout d'abord sur l'évolution ultérieure du régime FKR. En effet, pour les machines à confinement magnétiques, on s'intéressait plutôt au développement proche du seuil donc correspondant à $\Delta' \delta_{in} \simeq 2.44\Lambda \ll 1$ (ou encore à ka pas trop petit). Il nous faut tout d'abord introduire la notion de taille caractéristique de l'îlot, notée $w(t)$, qui bien sûr grossit avec le temps. Nous n'allons pas reproduire la totalité du raisonnement de Rutherford (1973) mais seulement les points-clef de celui-ci.

Nous pouvons utiliser la structure schématique de l'îlot (voir figure 3.9) pour remarquer que $\psi(x=0, y=\pi/k) = \psi(w/2, 0)$ pour la séparatrice, car les isocontours de ψ définissent les lignes de champ magnétique. Ensuite, nous pouvons exprimer les développements linéaires autour de l'équilibre (nous avons repris la notation ψ_0 et ψ_1 pour l'équilibre et la perturbation respectivement), avec

$$\psi(0, \pi/k) = \psi_0(0) + \psi_1 \cos(\pi), \quad (3.36)$$

pour le flux au point- X . Puis,

$$\psi(w/2, 0) = \psi_0(0) - (w/2)^2 B_0 / (2a) + \psi_1 \cos(0), \quad (3.37)$$

où maintenant nous avons utilisé le développement de Taylor au premier ordre pour l'équilibre, $\psi_0(x, 0) = \psi_0(0) - B_0 x^2 / (2a)$ en $x = w/2$. Nous supposons bien sûr que l'îlot reste petit devant a et que $B_0(x) \simeq B_0 x / a$. Après simplification, nous trouvons,

$$\boxed{w = 4 \sqrt{\frac{\psi_1}{J_0}}}, \quad (3.38)$$

avec $J_0 = B_0 / a$ l'amplitude de la densité de courant d'équilibre en $x = 0$. Cette expression de la taille de l'îlot à partir de la perturbation du flux n'est évidemment valide que dans l'approximation petit îlot.

Dans le régime non-linéaire, Rutherford proposa alors que, $J = J(\psi)$, se basant sur l'hypothèse que le terme inertiel devient négligeable dans l'équation d'évolution (complète) pour ω , et que donc le terme $(\vec{B} \nabla) J$ devienne nul, ou encore $\nabla \psi \times \nabla J = 0$. En utilisant alors l'équation d'évolution pour ψ , $\frac{d\psi}{dt} \simeq \eta J$ (le terme de convection étant négligé), il obtient alors,

$$\frac{d\psi_1}{dt} \simeq \eta \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} \simeq \eta \Delta' \psi_1 / w, \quad (3.39)$$

où on a utilisé la définition de Δ' (voir plus haut). Nous obtenons alors,

$$\frac{dw}{dt} \sim \eta \Delta', \quad (3.40)$$

qui se corrige par un calcul plus précis (assez laborieux) en,

$$\boxed{\frac{dw}{dt} \simeq 1.22 \eta \Delta'}. \quad (3.41)$$

Nous trouvons ainsi une croissance linéaire pour w , alors que la perturbation magnétique elle croît en $\psi_1 \propto t^2$ après une croissance exponentielle. Nous remarquons aussi l'importance du terme Δ' . Cette croissance plus lente de l'ilôt peut être vue comme un découplage entre la perturbation magnétique et celle de vitesse.

La saturation ultérieure à la croissance algébrique du régime de Rutherford a été calculée par White (1978), le résultat obtenu noté w_{sat} est,

$$w_{sat}/a \simeq \Delta' a, \quad (3.42)$$

confirmant à posteriori que l'hypothèse de petit ilôt (devant a) reste valide jusqu'à la saturation pour ce régime dit à petit Δ' . Le début de la phase non-linéaire débute lorsque $w/\delta_{in} \sim 1$.

L'évolution ultérieure pour le régime à grand Δ' est plus complexe. L'utilisation d'un code non-linéaire est alors indispensable, comme le lecteur pourra voir ci-dessous. Ce qui permettra aussi de mieux cerner la transition entre les deux régimes en terme de valeur de Δ' .

3.3 Simulation numérique du mode de déchirement magnétique en géométrie plane cartésienne

Le code non linéaire utilisé, FINMHD, est basé sur la résolution des équations réduites en MHD résistive et visqueuse. La méthode numérique qui utilise un traitement spatial aux éléments finis avec un maillage hautement adaptatif (voir référence Baty (2019) [11]). Nous pouvons ainsi placer l'équilibre magnétique de Harris en tangente hyperbolique $\tanh(x/a)$ dans un domaine périodique en y (de longueur L_y déterminant le spectre de nombre d'ondes disponibles $k_n = 2\pi n/L$), et avec des conditions aux limites fixes placées relativement loin (en $x = \pm L_x/2$) de la nappe de courant centrale où les perturbations s'annulent. Pour les simulations, nous utilisons $a = 0.3$ fixe, alors que le nombre de Lundquist S_a et la longueur L_y seront variables.

Simulations en régime à faible Δ' . Nous pouvons tout d'abord vérifier l'accord avec la théorie linéaire ci-dessus, et surtout mieux cerner la limite de validité en terme de valeur supérieure de Δ' pour ce régime correspondant à des ilôts restant petits.

Nous avons représenté sur la figure 3.13, l'évolution du maximum de vorticité (mesuré sur l'ensemble du domaine de simulation) ainsi que l'évolution du

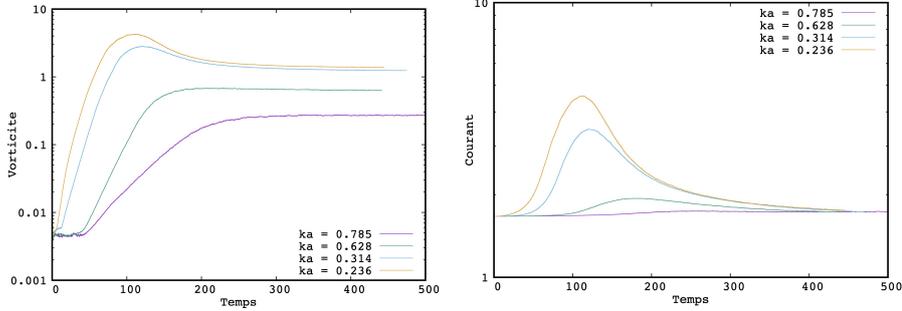


FIGURE 3.13 – Evolution temporelle du maximum de vorticité (a gauche) et de densité de courant correspondante (  droite) pour 4 simulations numériques (employant différentes longueurs L_y du domaine périodique en y et donc différentes valeurs ka correspondantes indiquées sur la légende). Le nombre de Lundquist utilisé est $S_a = 3 \cdot 10^2$.

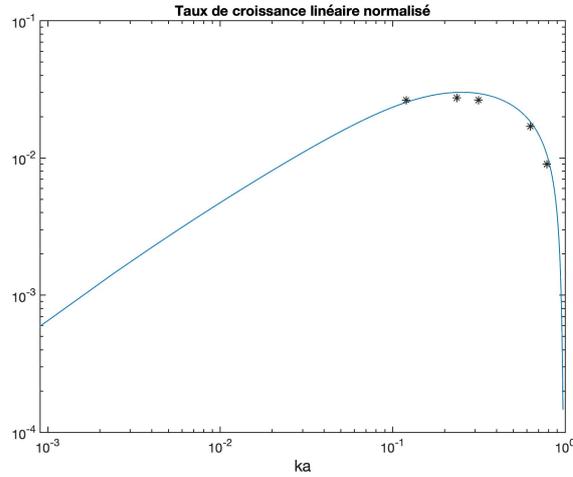


FIGURE 3.14 – Taux de croissance linéaire normalisé, $\gamma a/V_A$, en fonction de ka , obtenu avec le code de stabilité linéaire (courbe en trait continu), et déduit à partir des pentes initiales de l'évolution temporelle de vorticité maximum (voir figure précédente) pour 5 valeurs différentes de ka , ($ka = 0.785, 0.628, 0.314, 0.236, 0.12$) correspondantes à des valeurs $\Delta'a$ de (1., 2.1, 5.7, 8., 16.4) dans les simulations respectivement.

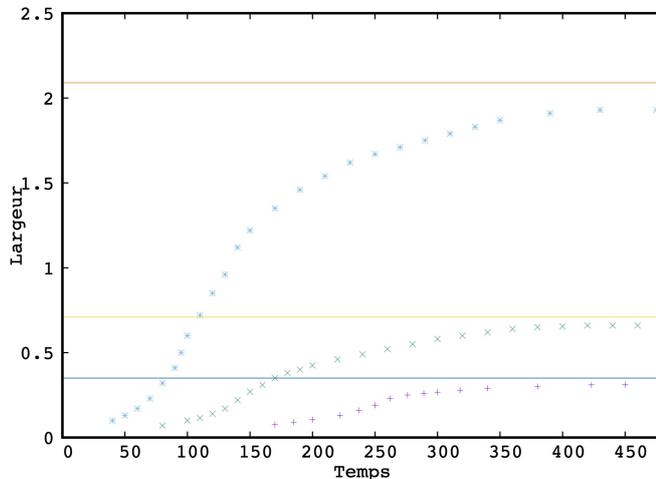


FIGURE 3.15 – Largeur d’îlot magnétique mesurée à la saturation pour trois simulations employant $ka = 0.785$, $ka = 0.628$, et $ka = 0.314$ (de la courbe la plus basse à la plus haute respectivement) correspondant à trois valeurs pour le paramètre de tearing $\Delta'a = 1.$, $2.$ et 5.7 . Les valeurs attendues par la formule théorique $\simeq \Delta'a$. dans le régime petit îlot sont tracées avec les traits horizontaux. Le nombre de Lundquist utilisé est $S_a = 3. \cdot 10^2$. L’unité de mesure pour la largeur est à comparer à la demi-largeur initiale de la nappe de courant $a = 0.3$.

maximum de la densité de courant en fonction du temps, pour quatre longueurs L_y différentes. Ceci correspond à quatre valeurs du nombre d’onde instable $k = k_1 = 2\pi/L_y$, $ka = 0.785, 0.628, 0.314, 0.236$, et 0.12 . La mesure de la pente de la courbe semi-logarithmique pour la vorticité permet de déduire directement le taux de croissance linéaire, qui est en effet en bon accord avec la courbe de dispersion déduite par le code linéaire (voir figure 3.14). La saturation est obtenue lorsque la densité de courant maximale revient à sa valeur initiale égale à $B_0/a = 3.33$ dans nos unités car $B_0 = 1$ et $a = 0.3$. Entretemps, nous pouvons mesurer la largeur de l’îlot en fonction du temps pour trois des cas précédents (voir figure 3.15). Par exemple, pour le cas $ka = 0.314$ la phase linéaire (croissance exponentielle) se termine à $t \simeq 100$, pour passer le relai à une phase non linéaire (croissance algébrique) se terminant à $t \simeq 175$. L’îlot termine alors sa croissance en tendant ensuite vers une valeur saturée un peu plus faible que la valeur théorique attendue déduite de la formule théorique (voir plus haut) pour la valeur correspondante du paramètre de tearing $\Delta'a = 5.7$.

Une évolution similaire est obtenue pour les deux autres simulations employant des valeurs de Δ' plus petites, c’est à dire $\Delta'a = 1.$, et $2.$ Cependant, comme attendu, l’accord avec la formule théorique pour la largeur de l’îlot à saturation est d’autant meilleur que Δ' est petit.

Simulations en régime à Δ' intermédiaire. Il a en effet été montré que le régime petit-îlot (ou faible Δ') est valide pour $\Delta'a \lesssim 1$. Pour les valeurs

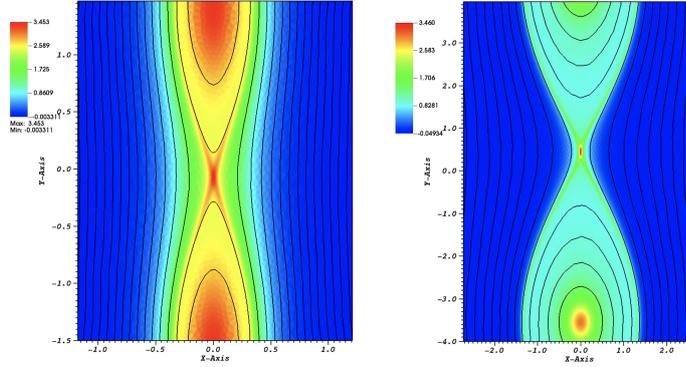


FIGURE 3.16 – Structure magnétique d’îlot à la saturation pour deux cas, $\Delta'a = 2$ (ou $ka = 0.628$) à gauche et $\Delta'a = 8$ ($ka = 0.236$) à droite. Les lignes de champ magnétique sont tracées en superposition d’iso-contours de la densité de courant. Le nombre de Lundquist utilisé est $S_a = 3 \cdot 10^2$. Les conditions aux limites sont placées à $x \pm 4$ et la demi-largeur initiale de la nappe de courant est $a = 0.3$.

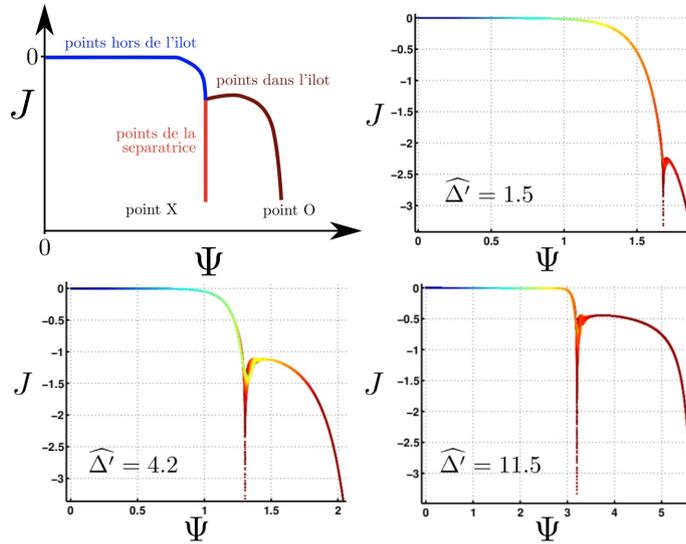


FIGURE 3.17 – Structure magnétique d’îlot à la saturation représentée par la distribution $J(\psi)$ pour différentes valeurs de $\hat{\Delta}' = \Delta'a_{equ}$ du régime îlot intermédiaire. La convention de signe pour le courant est opposée à celle choisie ici. La figure est tirée de la thèse d’Alexandre Poyé.

un peu plus élevées, un régime intermédiaire dit îlot-intermédiaire se met progressivement en place avec Δ' croissant, pour pour lequel la saturation implique une distribution de courant plus complexe dans l'îlot saturé. Ceci est illustré sur la figure 3.16, où l'îlot pour le cas $\Delta'a = 8$ montre que la distribution de courant se concentre au point- X et au point- O , contrairement au cas $\Delta'a = 2$ où le courant se répartit de façon plus diffuse. La structure magnétique et son interprétation correspond à la figure 3.17, tirée de la thèse d'Alexandre Poyé. Nous ne développerons pas plus ces résultats qui ne sont encore complètement explorés à l'heure actuelle. Il faut quand même noter que ces travaux ont permis d'unifier en partie les résultats obtenus pour différents profils magnétiques de départ, en normalisant différemment le paramètre de tearing, par $\Delta'a_{equ} = (\Delta'a)^{\frac{a_{equ}}{a}}$ avec $a_{equ} = \sqrt{\frac{J_0(0)}{J_0''(0)}}$, où $J_0(0)$ est la densité du courant initiale en $x = 0$ et $J_0''(0)$ sa dérivée seconde. Par exemple, pour l'équilibre utilisé ici, nous avons $\Delta'a_{equ} = \Delta'a/\sqrt{2}$.

Nous avons vu que le choix de la valeur de L_y détermine le mode instable k . Cependant, si L_y est encore plus grand que les valeurs choisies ci-dessus, la stabilité linéaire (voir figure 3.18) montre que le mode dominant ne sera plus le mode $k = k_1 = 2\pi/L_y$, mais le mode $k_2 = 4\pi/L_y$ ou même éventuellement $k_3 = 6\pi/L_y$. C'est le cas illustré pour la simulation employant $L_y = 20$, ou encore $k_1a = 0.094$ et correspondant à $\Delta'a = 21$. Ainsi, la phase linéaire implique clairement la formation initiale de deux îlots (à gauche), car le mode $k_2 = 2k_1$ domine linéairement le mode k_1 . Il est à noter qu'un peu plus tard, les îlots fusionnent à cause d'une instabilité de coalescence (voir plus loin dans l'ouvrage), pour se retrouver dans une situation similaire à celle décrite précédemment.

Simulations en régime à Δ' intermédiaire ou grand et résistivité suffisamment petite.

Alors que dans les exemples précédents une saturation terminait la phase non linéaire, une transition explosive appelée effondrement du point- X peut survenir lorsque la résistivité est trop petite. Elle est illustrée sur la figure 3.19, où au lieu d'avoir une phase de croissance algébrique de type Rutherford, une bifurcation topologique s'opère sur une échelle de temps relativement rapide (plus rapide que la phase initiale linéaire) avec l'apparition d'une nappe de courant secondaire en forme de point- Y à la place du point- X . Ceci est illustré de façon schématique sur la figure 3.20. Cette nappe de courant devient elle-même instable si $S_l = lV_A/\eta \lesssim 10^4$, où l est la longueur de cette nappe de courant secondaire. On voit alors apparaître de petits îlots magnétiques dont le nombre est d'autant plus élevé que S_l est grand devant la valeur critique $S_c \simeq 10^4$. Par exemple, dans la figure 3.19, nous voyons apparaître 2 îlots qui détruisent l'intégrité de la nappe, de la même façon que les instabilités de déchirement envahissent la nappe de courant initiale (par exemple de Harris). Ces îlots sont appelés plasmoides car ils sont rapidement éjectés aux deux extrémités, puis la nappe secondaire tendant à se reformer, produit de nouveaux plasmoides et ainsi de suite. Un régime de reconnexion dépendant du temps de façon chaotique/stochastique se met alors en place, que nous décrirons en détails dans le chapitre correspondant sur les plasmoides. A ce stade, nous pouvons quand même affirmer que la densité de courant étant localement très élevée, la reconnexion magnétique associée est alors très rapide et dépasse largement le taux de Sweet-Parker. Ce régime découvert assez récemment est très étudié ces dernières années (voir référence à

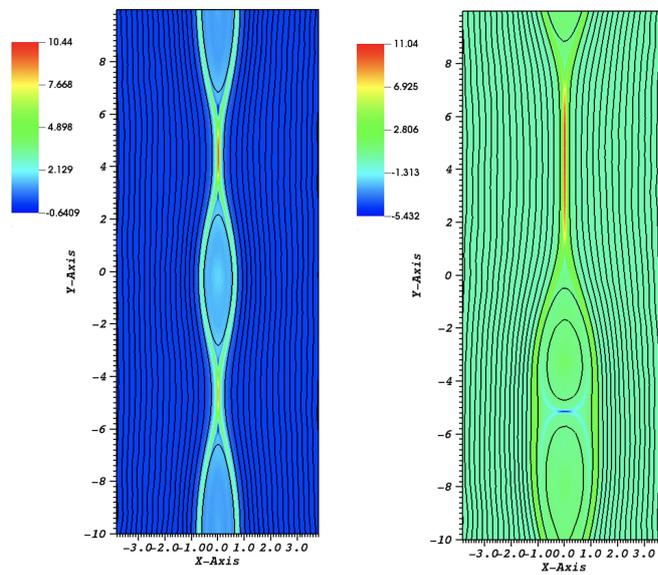


FIGURE 3.18 – Structure magnétique de la croissance d’îlots prise à 2 instants pendant la phase linéaire pour une simulation employant $\Delta'a = 21$ (correspondant à $ka = 0.094$) et $S_a = 3 \cdot 10^2$. A droite, les deux îlots amorcent une fusion de part et d’autre de la petite structure de courant (négatif en bleu) perpendiculaire à la structure principale (positive en rouge) et qui a remplacé le point- X de la figure de gauche.

Loureiro 2007 ou [9]), car il permet d'accéder à un mécanisme de reconnexion rapide et donc très prometteur dans l'optique d'expliquer les échelles de temps rapides obtenues dans les observations.

3.4 Mode de déchirement magnétique et de kink résistif en géométrie polaire

Afin de compléter les notions de reconnexion à partir de l'évolution d'une instabilité de nature résistive. Nous considérons maintenant un équilibre magnétique en géométrie polaire (ou cylindrique si on ajoute un champ guide perpendiculaire au plan de la dynamique principale). Pour ce faire, le champ magnétique est maintenant supposé de la forme,

$$\vec{B}_0(r) = B_\theta(r)\vec{u}_\theta, \quad (3.43)$$

avec $B_\theta(r)$ la composante azimuthale du champ présentant un changement de signe à un rayon r_s appelé rayon résonant, $B_\theta(r_s) = 0$. La densité de courant électrique d'équilibre (sa composante axiale en fait) est alors donnée par $J_0(r) = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{d(rB_\theta)}{dr}$. Un mode de déchirement magnétique peut alors se développer avec un taux de croissance linéaire $\gamma \propto \eta^{1/3} \propto S_a^{-1/3}$ lorsque la configuration possède en plus un renversement de $J_0(r)$ appelée trou de courant ou équilibre à courant renversé (voir référence à Baty (2020) et références incluses). C'est par exemple le cas pour le profil,

$$J_0(r) = J_1(1 - \tilde{r}^\alpha) - J_2(1 - \tilde{r}^2)^8, \quad (3.44)$$

où \tilde{r} est le rayon normalisé, i.e. $\tilde{r} = r/a$ avec a le rayon du bord externe. Nous avons choisi $\alpha = 2$, de façon à avoir des variations un peu moins raides que pour $\alpha = 4$ (valeur parfois choisie dans le contexte d'une application de tokamak). Nous avons aussi fixé les valeurs suivantes, $J_1 = 20$ et $J_2 = 36$. Ainsi, une région centrale avec une densité de courant négative est située dans le coeur, à $r \lesssim 0.28a$. Le champ magnétique correspondant peut s'obtenir par intégration (voir figure) et montre un renversement pour $r_s \simeq 0.43a$. Comme aucune autre composante de champ ne contribue à l'équilibre, ce dernier est évidemment assuré par un terme de gradient de pression thermique (dont nous n'avons pas besoin en MHD réduite, voir Annexes). La fonction de flux magnétique correspondante $\psi_0(r)$, qui peut être obtenue par une intégration supplémentaire car $B_\theta(r) = -\frac{d\psi_0}{dr}$, est aussi tracé sur la figure 3.21. Comme attendu, le maximum de $\psi_0(r)$ coïncide avec le zéro de $B_\theta(r)$. Nous verrons (ci-dessous) que ce profil pré-détermine comment deux lignes de champ magnétiques initiales ayant la même valeur de ψ_0 (reliées par une droite horizontale, voir figure 3.21) de part et d'autre du rayon résonant r_s , vont reconnecter. Le processus commencera par les lignes les plus proches de r_s , puis se terminera par la reconnection des lignes ayant la valeur $\psi_0(r=0) = \psi_0(r \simeq 0.7a)$.

Le processus est illustré sur la figure suivante, figure 3.22. En effet, nous pouvons voir la croissance d'un îlot au voisinage du rayon résonant, à l'opposé du coeur de la structure qui est déplacé contre la région externe et qui reconnecte au travers d'une nappe de courant d'amplitude croissante en temps. L'îlot magnétique est qualifié par son nombre d'onde azimuthal $m = 1$ car il

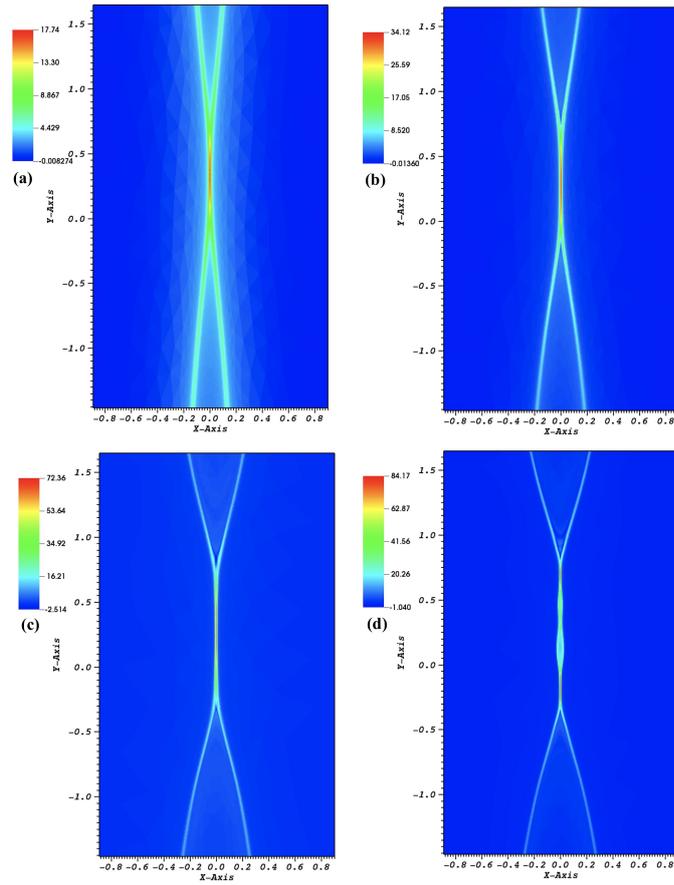


FIGURE 3.19 – Zoom sur la structure magnétique (point- X) pendant la phase non linéaire à 4 instants pour une simulation employant $\Delta'a = 8$ (correspondant à $ka = 0.236$) et $S_a = 10^4$. Le temps augmente de gauche à droite et de haut en bas. Le point- X s'effondre en (a) puis (b) pour former une nappe de courant très fine en (c) qui devient alors instable pour la formation de plasmoides en (d).

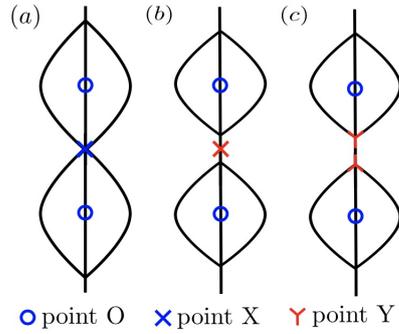


FIGURE 3.20 – Illustration schématique de l’effondrement d’un point- X (a) en point- Y (c). Tiré de la thèse d’Alexandre Poyé.

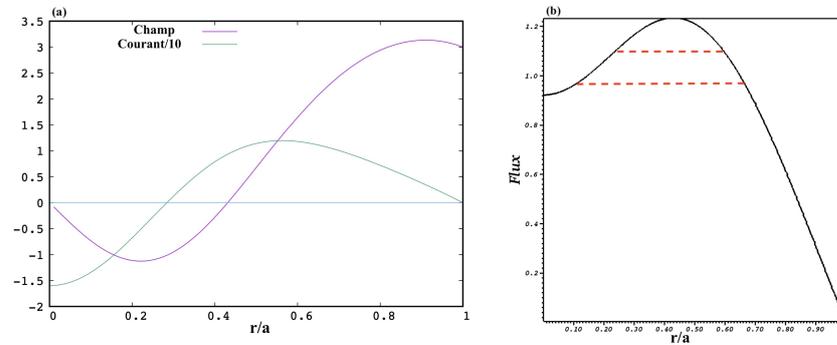


FIGURE 3.21 – (a) Profils d’équilibre pour l’étude du kink résistif, avec la densité de courant $J_0(r)$ (divisé par 10) et le champ magnétique correspondant $B_0(r)$ (voir texte). (b) Fonction de flux magnétique d’équilibre $\psi_0(r)$ correspondante montrant un maximum local au rayon de résonance (ou d’inversion du champ) $r_s \simeq 0.43a$. Les figures son tirées de Baty (2020)

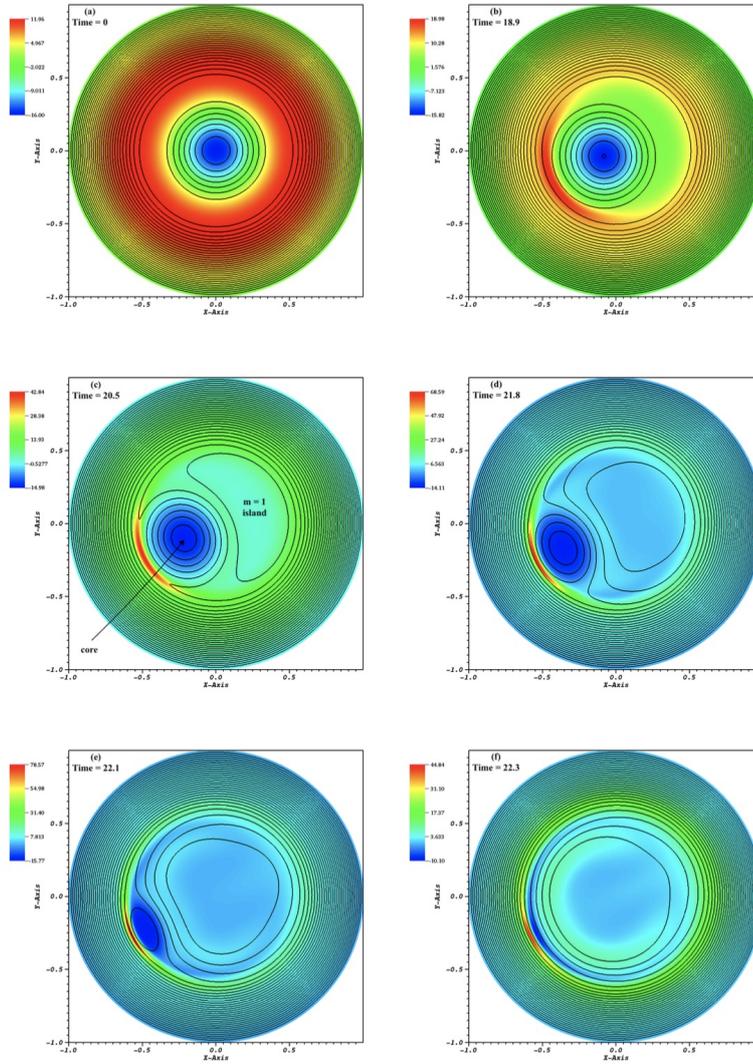


FIGURE 3.22 – Densité de courant (iso-contours) et lignes de champs magnétique à différents instants pendant la croissance de l’îlot magnétique associé au kink résistif, à partir de la configuration initiale (a). La nappe de courant se localise en augmentant son intensité pendant la croissance de l’îlot. A l’opposé, le coeur diminue jusqu’à disparaître entièrement (f). Les résultats sont obtenus par une simulation numérique employant un résistivité $\eta = 2 \times 10^{-3}$ et un nombre de Prandtl $P_r = \nu/\eta = 1$.

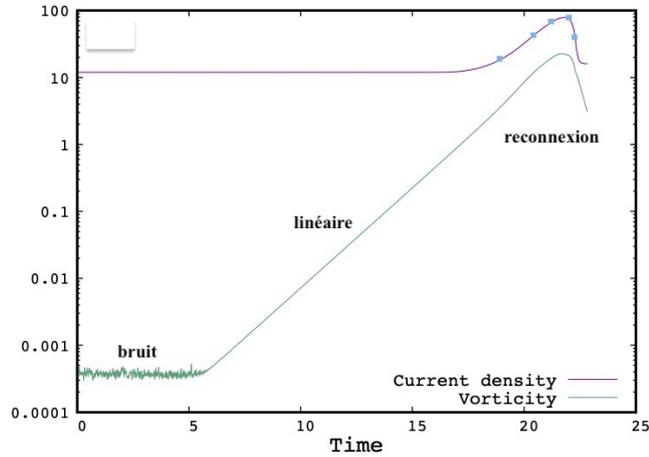


FIGURE 3.23 – Maximum de la densité de courant et de la vorticité en fonction du temps. La phase linéaire se développe après une phase de déclenchement d e au bruit numérique, et est suivie par une phase non linéaire s’accompagnant de reconnexion magnétique. Les instants correspondant aux snapshots de la figure précédente sont signalés par un carré.

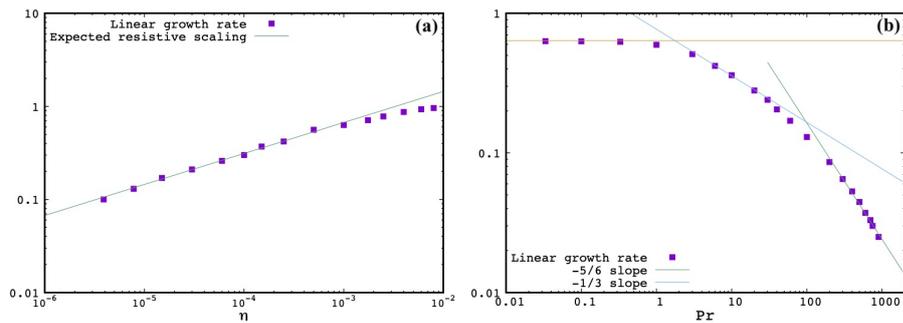


FIGURE 3.24 – (a) Taux de croissance linéaire mesuré en fonction de la résistivité η pour un nombre de Prandtl fixe $P_r = 1$, et dépendance en $\eta^{1/3}$ attendue par la théorie linéaire. (b) Taux de croissance linéaire mesuré en fonction du nombre de Prandtl magnétique P_r pour une viscosité fixée.

correspond à une perturbation de type $\cos(m\theta)$. Ainsi, un seul îlot apparaît le long de la direction angulaire après un tour, contrairement à un mode $m = 2$ qui impliquerait une structure avec 2 îlots. Pour la même simulation, la figure 3.23 montre aussi l'évolution temporelle du maximum de vorticité et du maximum de la densité de courant (dans le domaine de simulation). Les oscillations initiales de vorticité correspondent à du bruit numérique (déclenché par la discrétisation du schéma). En effet, nous n'utilisons pas de perturbation analytique particulière pour enclencher l'instabilité ici. Ensuite, la vorticité augmente exponentiellement au cours du temps jusqu'à un maximum avant de red cro tre. La reconnexion se développe pendant une phase d'augmentation du courant en temps, avant de red cro tre aussi.

La phase linéaire est analys e à l'aide de simulations employant différentes valeurs de résistivité η , pour un nombre de Prandtl $P_r = \nu/\eta$ constant égal à l'unité. La mesure de la pente du maximum de vorticité (voir figure 3.24) peut alors être utilisée. Les résultats sont ainsi reportés sur la figure, et montrent un bon accord avec la théorie pour $\eta \lesssim 10^{-3}$. Nous ne développerons pas ici de calculs analytique sur la stabilité des modes de déchirements en géométrie polaire. Mais, la théorie (voir références) montre comme en géométrie plane, l'existence de deux régimes. Le régime équivalent à celui FKR correspond à une perturbation magnétique ne variant pas trop vite radialement et est donc en accord avec une structure topologique à plusieurs îlots ($m = 2$ par exemple). Par contre, le mode $m = 1$ implique topologiquement forcément un shift (ou un déplacement rigide en marche d'escalier, voir figure) du coeur du plasma situé à l'intérieur de la région résonante ($r < r_s$), qui peut se représenter par une fonction en escalier (voir figure) pour le déplacement radial. Il s'en suit alors une variation radiale rapide au voisinage de r_s invalidant les hypothèses prises en régime de type FKR. La théorie montre alors que ce sont les lois d'échelles du régime de Coppi qui s'appliquent pour le kink résistif, avec par exemple pour le taux de croissance linéaire,

$$\gamma \simeq \tau_A^{-2/3} \tau_\eta^{-1/3} (1 + P_r)^\alpha, \quad (3.45)$$

où une dépendance avec le nombre de Prandtl est en plus ajoutée (α a été déterminé et varie entre $-1/3$ pour P_r modérément plus grand que 1 et $-5/6$ pour P_r très grand devant 1.). Il faut cependant amender la définition des échelles caractéristiques vues précédemment en géométrie plane. En effet, l'échelle de temps résistive est définie dans la configuration cylindrique par $\tau_\eta = r_s^2/\eta$, et l'échelle de temps d'Alfvén par $\tau_A = r/B'_\theta(r)$ prise en $r = r_s$.

Quant au régime non-linéaire, il a été montré qu'il se poursuit avec un taux similaire au taux linéaire en $\eta^{1/3}$ ou en $\eta^{1/2}$ (pour η suffisamment faible), mais sans ralentissement de type régime de Rutherford. Pour le kink résistif, la densité de courant maximum au point- X , J_{max} , n'est pas constante au cours du temps, et donc le taux de reconnexion défini à partir de ηJ_{max} ne l'est pas non plus car il représente plutôt un taux de reconnexion maximum. Ainsi, il est plus judicieux d'utiliser alors la vitesse de déplacement du centre magnétique (situé au centre du coeur) au cours du temps, qui rend mieux compte de cette phase de reconnexion quasi-stationnaire, en accord avec le régime de Sweet-Parker ou plutôt de Kadomtsev (voir Annexe E) qui est sa version cylindrique comme nous le verrons plus bas. Une alternative est de considérer la durée totale de la reconnexion pour définir un temps caractéristique de reconnexion dont l'inverse

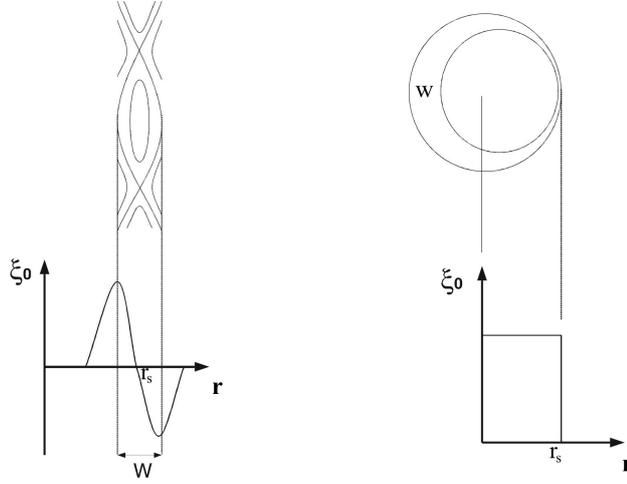


FIGURE 3.25 – Déplacement radial linéaire $\xi_0(r)$ pour un mode $m = 2$ (à gauche, courbure négligée pour faciliter la visualisation), et pour un mode $m = 1$ (à droite) représentant le kink résistif.

permet d'évaluer un taux moyen de reconnexion. De plus, nous verrons que dans la limite de résistivité très faible, une instabilité secondaire avec formations de petits îlots magnétiques appelées plasmoides permettra au système de bifurquer vers un autre régime de reconnexion plus rapide que celui de Sweet-Parker.

L'étude 2D montrée ci-dessus correspond en 3 dimensions à un kink résistif avec une dynamique invariante suivant la direction z si on ajoutante une composante de champ guide B_z dominante et non perturbée. Ainsi, le nombre d'onde k_z suivant cette direction est alors $k_z = 0$. Cependant, dans l'approximation cylindrique d'une configuration de type tokamak, l'instabilité de kink résistif correspondante est un mode ($m = 1, n = 1$) où n est le nombre d'onde suivant la direction longitudinale périodique, $n = k_z L / (2\pi) = k_z R_0$ ($L = 2\pi R_0$ étant la longueur du cylindre périodique équivalent de grand rayon R_0). Les résultats sont alors similaires à ceux présentés ici à condition de remplacer le champ reconnectant $B_\theta(r)$ par $B_h(r) = (1 - q)B_\theta$, où q est le facteur de sécurité défini à partir de l'équilibre par,

$$q(r) = 2\pi \frac{rB_z(r)}{LB_\theta(r)}. \quad (3.46)$$

Le facteur de sécurité représente l'hélicité des lignes de champ sur chaque surface magnétique cylindrique, qui est d'autant plus grande que q est petit. La surface $q = 1$ représente une surface particulière sur laquelle le champ s'enroule de façon à réaliser un tour azimuthalement quand il a parcouru une distance longitudinale de L exactement. Ainsi c'est B_h qui change de signe en r_s car le facteur de sécurité passe de $q < 1$ à $q > 1$ (profil typique pour un tokamak) quand r augmente, la surface $q = 1$ constituant la surface résonante. L'îlot $m = 1$ se trouve alors vrillé le long du cylindre, et la nappe de courant possède une extension axiale en forme d'hélice dont le pas est la longueur du cylindre. La fonction de flux déterminant la reconnexion est alors le flux hélicoïdal $\psi_h(r)$, qui peut être définie à partir des composantes du vecteur potentiel magnétique

\vec{A} tel que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, selon $\psi_h = A_z - (k_z r/m)A_\theta$. Le champ magnétique peut alors s'écrire,

$$\vec{B} = [\nabla\psi_h \times \vec{u}_z - (k_z r/m)B_z]\vec{u}_\theta + B_z\vec{u}_z. \quad (3.47)$$

Ainsi, la composante B_h provient du premier terme dans le crochet ci-dessus qui s'annule en $q = 1$ pour $m = n = 1$. Le flux hélicoïdal représente aussi le flux du champ au travers d'une surface en hélice, dont l'hélicité est déterminée par le vecteur $\vec{h} = -(k_z r/m)\vec{u}_\theta + \vec{u}_z$, et par une fonction $\lambda = m\theta + k_z z$ constante de telle façon que $\vec{k} = (m/r)u_\theta + k_z z$ soit perpendiculaire \vec{h} (voir figure 3.26). Ainsi,

$$\psi_h(r) = \int r dr (\vec{B} \cdot \nabla \lambda), \quad (3.48)$$

puis,

$$\psi_h(r) = \int (1 - q) B_\theta dr = \int B_h(r) dr. \quad (3.49)$$

On montre aussi que dans ce cas, $\vec{k} \cdot \vec{B} = B_h/r$ s'annule donc à la surface résonante, car $\vec{k} = \frac{1}{r}\vec{u}_\theta + \frac{2\pi}{L}\vec{u}_z$. Ainsi \vec{B} et \vec{k} sont perpendiculaires en r_s . L'interprétation physique des fonctions ψ et ψ_h représentent les flux de B_θ et de B_h au travers de surface θ et λ constants, respectivement pour le kink invariant suivant z (mode $n = 0$) et le mode vrillé suivant z (mode $n = 1$). Ces constructions géométriques peuvent se visualiser sur la figure. Le rôle de l'instabilité de kink interne résistif est de conduire à l'expulsion de la région centrale initiale avec $q < 1$ (dans le cas vrillé) de façon à ce que la nouvelle configuration finale (après reconnexion) soit en accord avec $q > 1$ partout dans le plasma, donc absence de la surface résonante $q = 1$. En d'autres termes, le surplus d'hélicité des lignes de champ magnétiques a été éliminé. Dans le cas invariant suivant z , le champ magnétique final azimuthal acquiert une composant de même signe partout. En ce qui concerne la vitesse de reconnexion moyenne (taux de reconnexion) associé au régime non-linéaire du kink résistif, le modèle de Kadomtsev (ou Sweet-Parker) reste une bonne approximation, même si des écarts au comportement standard (voir travaux par Firpo et al. 2004 [10]) ont montré qu'une accélération non-linéaire notable peut être attribuée à l'utilisation de profil initial du facteur de sécurité $q(r)$ atypique (relativement plat à l'intérieur de la surface $q = 1$).

Enfin, on ajoutera qu'il existe aussi des modes de déchirements magnétiques $m = 2$, non observés dans notre simulation à 2 dimensions car dominée par le mode $m = 1$ plus rapide, et présents dans une configuration de tokamak cylindrique sur une surface $q = 2$ en association avec un mode $n = 2$. De façon générale, les modes de déchirements se développent lorsque des surfaces résonantes $q = m/n$ sont présentes dans la configuration.

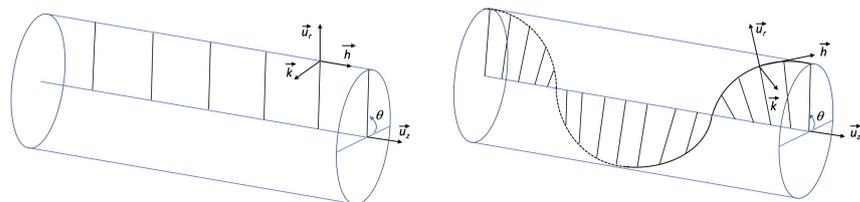


FIGURE 3.26 – Représentation schématique des surfaces à $(r$ et θ) constant (à gauche) et $(r$ et $\theta + \frac{2\pi z}{L})$ constant (à droite) au travers desquelles les champ magnétiques B_θ et B_h se renversent, pour les modes $(m = 1, n = 0)$ et $(m = 1, n = 1)$ respectivement. Le nombre d'onde \vec{k} est indiqué ainsi que le vecteur \vec{h} définissant l'hélicité (voir texte). Les flux correspondants atteignent des maxima pour $r = r_s$.

Bibliographie

- [1] H.P. Furth, J. Killeen and M.N. Rosenbluth, *Finite-Resistivity Instabilities of a Sheet Pinch* (Phys. Fluids 6, 459 (1963)).
- [2] B.P. Coppi, R. Galvao, R. Pellat, R. Galvao, M.N. Rosenbluth, and P. Rutherford, *Resistive internal kink modes* (Fizika Plazmy, vol. 2, Nov.-Dec. 1976, p. 961-966. Soviet Journal of Plasma Physics (1976)).
- [3] H.M. Huang, L. Comisso, R. Pellat, and A. Bhattacharjee, *Plasmoid Instability in Evolving Current Sheets and Onset of Fast Reconnection* (The Astrophysical Journal 849, 75, (2017)).
- [4] H.R Wilson, *Neoclassical Tearing Modes* (Fusion Science and Technology, Pages 152-160 (2017)).
- [5] P.H. Rutherford, *Nonlinear growth of the tearing mode* (Phys. Fluids 16, 1903 (1973)).
- [6] A. Poyé, *Dynamique des îlots magnétiques en présence de feuille de courant et en milieu turbulent* (Thèse de doctorat en Astrophysique, Aix-Marseille (2012)).
- [7] H. Baty, *Magnetic reconnection and plasmoid formation driven by the two-dimensional resistive kink instability in a current hole configuration* (Preprint ArXiv 2020, <https://arxiv.org/abs/2006.15013>)
- [8] B.B Kadomtsev, *Disruptive instability in tokamaks* (Sov. Tech. Phys. Lett. 1975)
- [9] N.F. Loureiro, *Instability of current sheets and formation of plasmoid chains* (Physics of Plasmas 14, 100703 (2007)).
- [10] M.C. Firpo, *Onset of the nonlinear regime and finite-resistivity effects for the resistive kink instability* (Physics of Plasmas 11, 970 (2004)).
- [11] H. Baty, *FINMHD : An Adaptive Finite-element Code for Magnetic Reconnection and Formation of Plasmoid Chains in Magnetohydrodynamics* (The Astrophysical Journal Supplement Series 243, 23, (2019)).

Chapitre 4

Instabilités non résistives de la MHD parfaite

Les taux de croissance linéaire des instabilités résistives (voir chapitre précédent) étant par définition dépendants de la résistivité η (formes en η^α avec $\alpha = 1/3 - 3/5$, et η représentant une valeur très petite), sont forcément trop faibles pour donner des échelles de temps caractéristiques suffisamment rapides pour expliquer les disruptions (éruptions solaires ou disruptions de tokamak). En effet, ces échelles de temps représentent des lois hybrides entre l'échelle de temps purement résistive et l'échelle de temps d'Alfvén. Il faut alors se tourner vers des instabilités se développant sur une échelle de temps d'Alfvén seule, donc indépendante de la résistivité, au moins dans la phase linéaire. Ainsi, nous allons considérer dans ce chapitre des configurations susceptibles d'être instables en MHD parfaite ($\eta = 0$).

Deux exemples sont présentés ci-dessous dans ce chapitre. Tout d'abord, c'est le cas des instabilités de coalescence de certaines chaînes d'ilôts magnétiques. Alors que les instabilités de déchirement conduisent à former de petites structures magnétiques déconnectées (de type îlot) de la structure initiale qui leur a donné naissance, les instabilités de coalescence par attraction puis fusion ainsi peuvent à l'inverse faire disparaître les petits ilôts pour alimenter des structures à plus grande échelle. C'est aussi le cas d'une structure particulière en forme de dipôle de courant électrique plongée dans une structure magnétique externe, qui est instable vis à vis de l'instabilité dite de tilt en conduisant à la répulsion des deux ilôts de courants opposés.

4.1 L'instabilité de coalescence

Configuration initiale et stabilité.

L'équilibre statique en MHD parfaite réduite obéit à la propriété (obtenue à partir de l'équation d'évolution de la vorticité) $J_0 = J_0(\psi_0)$, qui découle de $\vec{B}_0 \cdot \nabla J_0 = 0$. De plus, la relation $J_0 = -\nabla^2 \psi_0$ conduit à chercher des équilibres satisfaisant à l'équation,

$$\nabla^2 \psi_0 = f(\psi_0). \quad (4.1)$$

Le choix de configuration la plus simple serait la dépendance linéaire dite équa-

tion de Helmholtz, $\nabla^2\psi_0 = -k^2\psi_0$ (avec k une constante), car la configuration est possiblement instable à cause du terme $\frac{dJ_0}{d\psi_0} = k^2 > 0$ d'après le principe d'énergie (voir Annexe F). Cependant, ceci conduit à une chaîne d'îlots soit très proches les uns des autres soit en contact avec les bords du domaine. On préfère donc utiliser l'équilibre de Fadeev (voir la référence à Finn and Kaw 1977 et aussi Pritchett and Wu 1979) donné par,

$$\psi_0(x, y) = -\frac{B_0}{k} \log_e [\cosh(ky) + \epsilon \cos(kx + \alpha)], \quad (4.2)$$

validant le choix $\nabla^2\psi_0 = k^2(\epsilon^2 - 1)e^{2k\psi_0/B_0}$ avec notre convention de notation, avec k et $\epsilon < 1$ deux paramètres déterminant la forme de la structure magnétique et B_0 l'amplitude du champ correspondant. La phase α est un paramètre arbitraire. Les composantes cartésiennes du champ magnétique sont alors,

$$B_x(x, y) = -\frac{B_0 \sinh(ky)}{\cosh(ky) + \epsilon \cos(kx + \alpha)}, \quad (4.3)$$

$$B_y(x, y) = -\frac{\epsilon B_0 \sin(kx)}{\cosh(ky) + \epsilon \cos(kx + \alpha)}, \quad (4.4)$$

et la densité de courant d'équilibre $J_0 = -\nabla^2\psi_0$,

$$J_0(x, y) = B_0(1 - \epsilon^2) \frac{k}{[\cosh(ky) + \epsilon \cos(kx + \alpha)]^2}. \quad (4.5)$$

Pour avoir un équilibre, il faut bien sûr soit ajouter une composante magnétique suivant z (possédant un gradient dans le plan xy) ou un gradient de pression thermique. En MHD réduite, nous n'aurons pas à nous préoccuper de ce terme. Dans la limite $\epsilon = 0$, nous retrouvons aussi l'équilibre de Harris (en tangente hyperbolique) utilisé pour les modes de déchirement, mais avec maintenant des lignes de champ alignées suivant l'axe Ox et un renversement de direction en $y = 0$. Le terme ajouté d'amplitude ϵ représente une structure périodique d'îlots préformés (voir ci-dessous), dont la largeur w correspond à $wk \simeq 4\epsilon^{1/2}$, car s'étendant entre $yk \simeq -2\epsilon^{1/2}$ et $yk \simeq 2\epsilon^{1/2}$. Plus précisément, cette largeur découle d'une approximation au second ordre de $\cosh(kw/2)$. Ainsi dans un domaine de longueur $L_x = 4\pi/k$, deux îlots sont présents qui contiennent deux structures de courants de même sens. Ces deux courants tendent donc à s'attirer (voir figure 4.1 ci-dessous pour deux valeurs de ϵ , 0.2 et 0.4.).

L'étude de la stabilité (MHD parfaite) n'est pas simple. Elle a tout de même été conduite par Bondeson (1982) utilisant le principe d'énergie en MHD réduite (voir Annexe F). En effet, la variation seconde de l'énergie potentielle,

$$\delta W^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3r \left[(\nabla\psi_1)^2 - \frac{dJ_0}{d\psi_0} \psi_1^2 \right], \quad (4.6)$$

avec $\psi_1 = \vec{B}_0 \cdot \nabla u = -\vec{\xi} \cdot \nabla\psi_0$ la fonction de flux perturbée d'ordre 1, conduit à

$$\delta W_{min}^{(2)} = -\frac{4\pi}{3}. \quad (4.7)$$

Ainsi, la configuration est donc toujours instable (en MHD parfaite) avec une instabilité conduite par le terme en $\frac{dJ_0}{d\psi_0}$, d'où la terminologie utilisée de current-driven dans la littérature. Le taux de croissance linéaire minimal normalisé

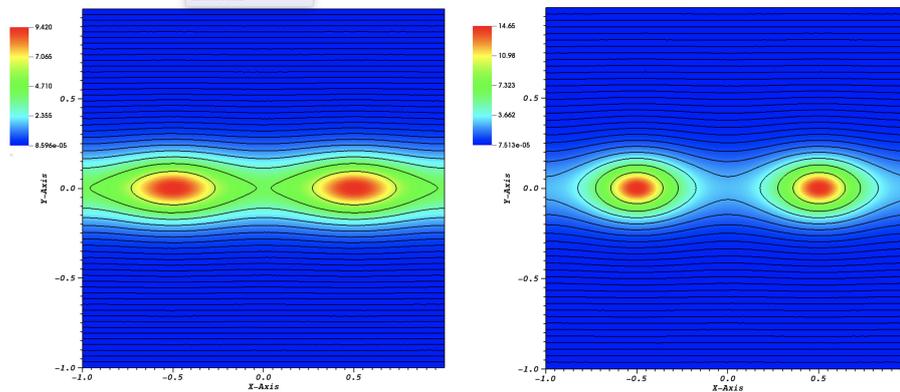


FIGURE 4.1 – Iso-contours de la densité de courant superposés avec des lignes de champ magnétiques pour les configurations initiales des équilibres de Fadeev pour $\epsilon = 0.2$ (à gauche) et $\epsilon = 0.4$ (à droite). La normalisation utilisée correspond à $B_0 = 1$, $k = 2\pi$, et le déphasage $\alpha = 0$.

$\gamma_{min} t_A$ (avec $t_A = 2/(kB_0)$) et en faisant attention au facteur 2 parfois oublié dans certains travaux) a aussi été évalué par Bondeson (1982) à partir de,

$$\gamma_{min}^2 t_A^2 = -\frac{\delta W_{min}^{(2)}}{K^{(2)}}, \quad (4.8)$$

avec $K^{(2)}$ l'énergie cinétique d'ordre 2 correspondante évaluée par

$$K^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3r \nabla \phi^2 = \frac{2\pi^2}{9\epsilon^{3/2}}, \quad (4.9)$$

conduisant à l'expression,

$$\gamma_{min} t_A = (6/\pi)^{1/2} \epsilon^{3/4}. \quad (4.10)$$

Ainsi une dépendance $\gamma_{min} \propto \epsilon^{3/4}$ est attendue.

Evolution linéaire de l'instabilité de coalescence.

Nous considérons l'équilibre décrit ci-dessus pour $k = 2\pi$ dans un domaine périodique de longueur $L_x = 2$ s'étendant pour x entre -1 et 1 . Pour valider l'existence d'un mode instable de type MHD parfaite, le taux de croissance linéaire mesuré doit être indépendant des paramètres de dissipation physique choisis, que sont la résistivité et la viscosité. Par commodité, on choisit un nombre de Prandtl égal à l'unité, $P_r = \nu/\eta = 1$ (c'est aussi plus pertinent pour la résolution numérique car les termes sont mieux équilibrés donc conduisant à une stabilité numérique accrue), et différentes valeurs de η seront alors étudiées. Il faut ajouter, que ce choix de $P_r = 1$ ne modifiera pas les lois d'échelles avec η (par exemple en $K\eta^\alpha$ pour $P_r = 0$) mais seulement les paramètres multiplicatifs (en remplaçant K par $K(1 + P_r)^\beta$). Notre normalisation correspond à $B_0 = 1$ et $k = 2\pi$ (pour l'échelle de longueur caractéristique), donc l'échelle de temps d'Alfvén est $\tau_A = 1/(kB_0) = 1/(2\pi)$ ici.

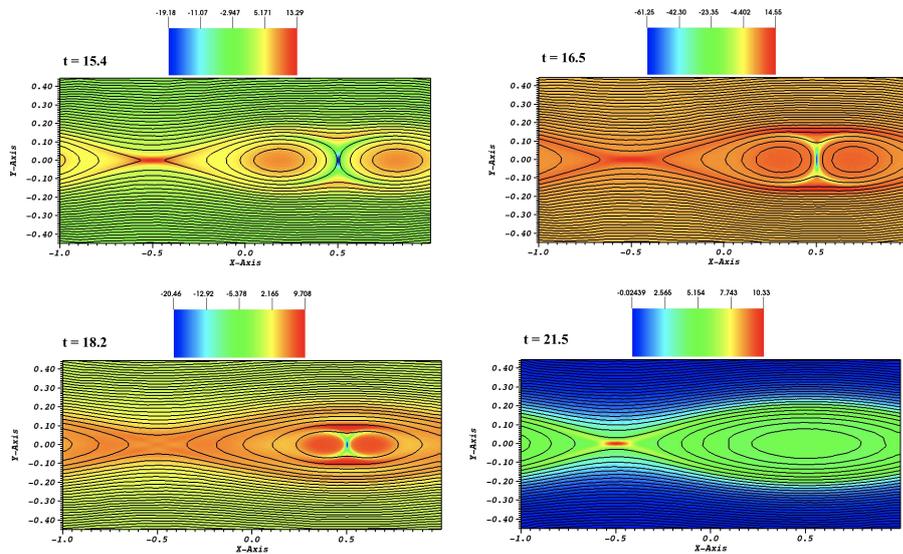


FIGURE 4.2 – Iso-contours de la densité de courant superposés avec des lignes de champ magnétiques à différents instants de la coalescence du cas utilisant $\epsilon = 0.2$, $\alpha = 0$, et $\eta = \nu = 3.2 \times 10^{-4}$.

Le cas standard habituellement répertorié dans la littérature correspond à $\epsilon = 0.2$. L'illustration de l'évolution temporelle de la configuration est visible sur la figure 4.2, où nous avons choisi le déphasage $\alpha = \pi$ de façon à avoir une nappe de courant qui ne soit jamais sur les bords. Les bords du domaine dans la direction latérale sont arbitrairement situés à $L_y \pm 1$ (suffisamment loin pour avoir une influence négligeable), avec des conditions de Dirichlet (égales à leurs valeurs initiales) imposées sur les variables. Le taux de croissance linéaire γ est alors mesuré en utilisant l'évolution temporelle du maximum de vorticité ( valu  sur le domaine de calcul) une fois sorti du bruit numérique, ainsi tracé sur les figures 4.3-4.5. Nous vérifions tout d'abord que le taux de croissance linéaire est indépendant de la résistivité, comme attendu pour une instabilité non résistive. Nous mesurons $\gamma\tau_A \simeq 0.1$ pour $\epsilon = 0.2$, ainsi que $\gamma\tau_A \simeq 0.13$ pour $\epsilon = 0.3$. Ce qui est en accord avec la dépendance en $\epsilon^{3/4}$ prédite par l'analyse de stabilité ci-dessus (voir figure 4.5). Quant à la valeur numérique, elle est 20 pour-cent supérieure à la valeur théorique minimum attendue (analyse de Bondeson), mais aussi en accord avec la valeur reportée dans la littérature (voir par exemple Pritchett and Wu 1979).

Evolution non-linéaire de l'instabilité de coalescence.

Nous avons vu que lorsque la phase linéaire se termine (rupture de pente de l'évolution temporelle de la vorticité), la reconnexion magnétique s'enclenche en rapport avec la formation d'une nappe de courant perpendiculaire à l'axe des ilôts et ayant une densité de courant négative (voir figure 4.2). La densité de courant au niveau du point-X continue alors à augmenter jusqu'à une valeur maximum puis re-décroit ensuite vers une valeur proche de zéro. La configuration finale est alors un ilot unique avec redistribution du courant.   l'image

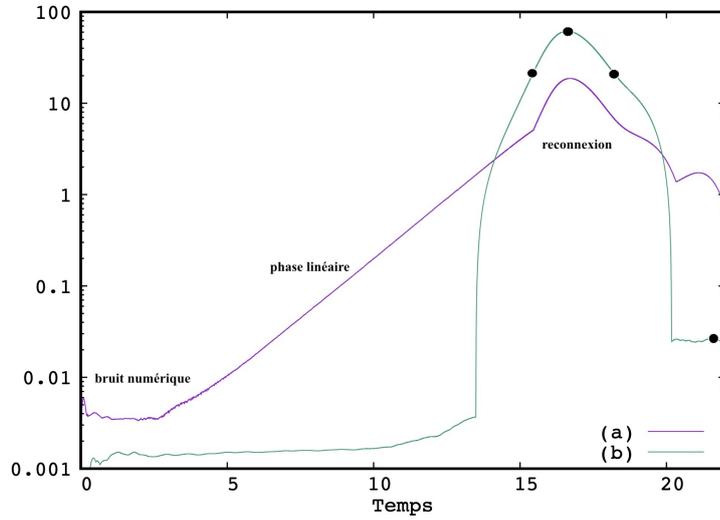


FIGURE 4.3 – Vorticité maximum sur le domaine (a) et densité de courant maximum au niveau du point- X (b) en fonction du temps (unité normalisée de τ_A) pour une simulation de coalescence utilisant $\epsilon = 0.2$, $\alpha = 0$, et $\eta = \nu = 3.2 \times 10^{-4}$. Les instants indiqués par des cercles sur le courant correspondent aux instantanés de la figure précédente.

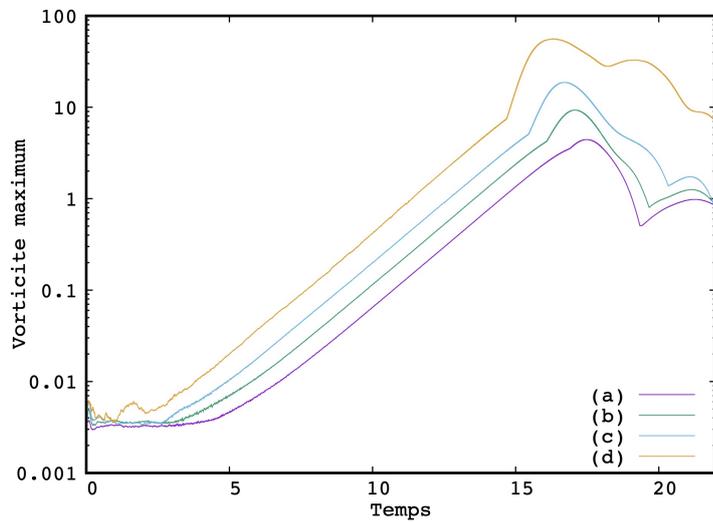


FIGURE 4.4 – Vorticité maximum sur le domaine en fonction du temps pour la configuration $\epsilon = 0.2$, obtenue pour différentes valeurs de résistivité, $\eta = 1.28 \times 10^{-3}$ (a), $\eta = 6.4 \times 10^{-4}$ (b), $\eta = 3.2 \times 10^{-4}$ (c), et $\eta = 8 \times 10^{-5}$ (d).

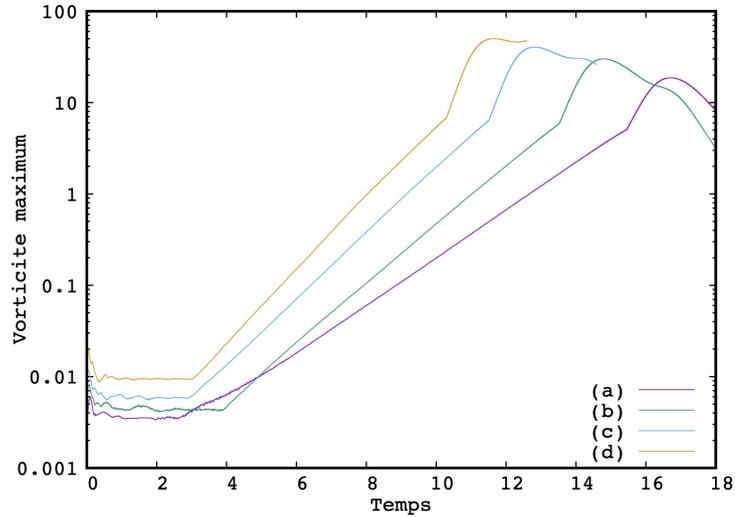


FIGURE 4.5 – Vorticité maximum sur le domaine en fonction du temps pour différentes configurations initiales utilisant, $\epsilon = 0.2$ (a), $\epsilon = 0.3$ (b), $\epsilon = 0.4$ (c), et $\epsilon = 0.5$ (d). La résistivité est fixée à $\eta = \nu = 3.2 \times 10^{-4}$.

de la reconnexion pendant le kink résistif, la densité de courant J_{max} (valeur absolue car est négative ici) au centre de la nappe n'est pas constant pendant la reconnexion, mais il permet quand même d'évaluer quand même la dépendance de la vitesse de reconnexion en fonction de la résistivité. En effet, ηJ_{max} constitue alors un taux de reconnexion maximum. Les résultats obtenus pour ce taux maximum ainsi mesuré en fonction d'une gamme relativement large de valeurs de résistivité est visible sur la figure 4.6. Ainsi, la dépendance prédite pour le taux de reconnexion par le régime de Sweet-Parker en $\eta^{1/2}$ est bien reproduite si la résistivité est suffisamment petite. La valeur de $0.007V_A B_0$ (en effet nous avons $V_A = B_0 = 1$ avec notre normalisation) est aussi en parfait accord avec les résultats de Knoll (2005) pour $\eta = 2 \times 10^{-5}$. Le lecteur désirant plus de détails sur la vitesse de reconnexion en fonction de la résistivité et aussi du nombre de Prandtl magnétique pourra se reporter au travail de Baty (2022).

Enfin, il faut noter que lorsque les paramètres de dissipation sont plus petits qu'une valeur critique, le régime de reconnexion de type Sweet-Parker est lui même instable au développement de plasmoides au niveau de la nappe de courant (voir chapitre 5).

4.2 L'instabilité de tilt

Une autre configuration instable de la MHD parfaite en 2D correspond à une structure contenant deux tourbillons de courant comme pour la coalescence mais de sens opposés. Ainsi, comme deux fils électriques parcourus par des courants de sens opposés, ils tendront à se repousser au lieu de s'attirer. Cette instabilité MHD semble se produire dans des configurations magnétiques destinées à étudier la fusion thermonucléaire en laboratoire en utilisant les sphéromaks. Elle

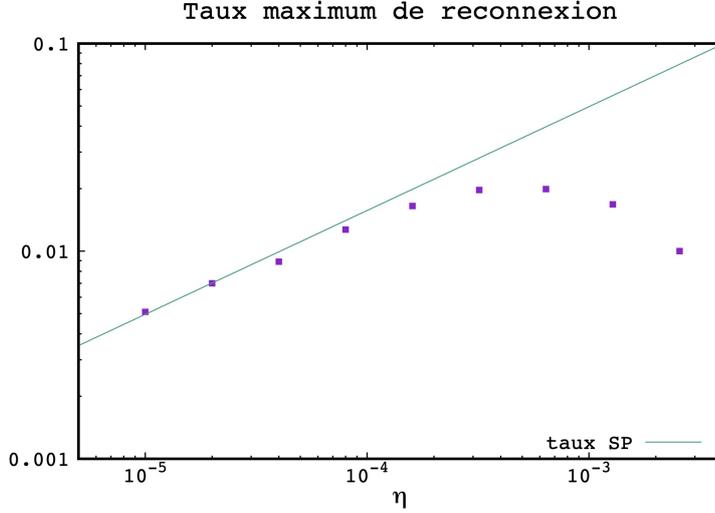


FIGURE 4.6 – Taux maximum de reconnexion évalué en utilisant ηJ_{max} (avec J_{max} l’amplitude maximum mesurée au centre de la petite nappe de courant contrôlant la coalescence entre les deux îlots) pour plusieurs simulations employant différentes résistivités η pour un nombre de Prandtl magnétique fixe $P_r = 1$. La dépendance en $\eta^{1/2}$ prédite par un modèle de Sweet-Parker est aussi tracée pour comparer. La configuration initiale utilisée correspond à $\epsilon = 0.2$.

est aussi utilisée comme banc d’essai approximant des instabilités de la couronne solaire (voir référence à Keppens et al. 2014 et références incluses).

Configuration de Lamb-Chaplygin issue de l’hydrodynamique pure.

La configuration d’équilibre initiale s’inspire de l’hydrodynamique pure à deux dimensions pour modéliser les tourbillons dans les sillages dits lointains. En effet, la recherche de paires de tourbillons de sens opposés en régime stationnaire et correspondant à une solution incompressible non visqueuse, a conduit à la solution du dipôle de Lamb-Chaplygin. Celle-ci s’écrit pour la fonction ϕ (potentiel de vitesse) en coordonnées polaires,

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} U_0 \left(\frac{R^2}{r} - r \right) \sin(\theta) & \text{si } r \geq R, \\ -\frac{2U_0}{\alpha j_0(\alpha R)} j_1(\alpha r) \sin(\theta) & \text{si } r < R, \end{cases} \quad (4.11)$$

avec $j_0(x)$ et $j_1(x)$ les première et seconde fonctions de Bessel de première espèce respectivement. La constante α (inverse d’une longueur) est définie par $\alpha R = 3.83170597$ en correspondance avec la première solution non nulle de l’équation $j_1(x) = 0$ (c’est à dire $j_1(\alpha R) = 0$), et U_0 définit une amplitude de référence représentant l’amplitude de la vitesse à l’infini. Ainsi, il est facile de vérifier que pour $r > R$, la solution externe est à vorticit   nulle car $\nabla^2 \phi = 0$, et on parle alors d’  coulement potentiel. Par contre, pour la r  gion interne au

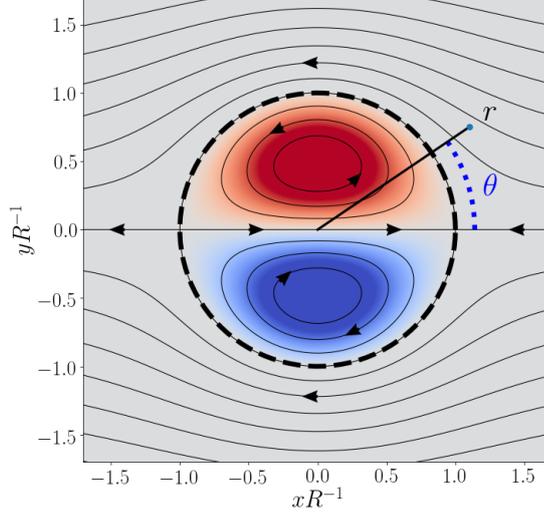


FIGURE 4.7 – Iso-contours de vorticité (en niveaux de couleurs) superposés avec quelques lignes de champ de vitesses, pour la structure dipolaire de vortex de Lamb-Chaplygin, solution d'écoulement tourbillonnaire incompressible et non visqueux de l'hydrodynamique pure à deux dimensions. Figure tiré de Wikipédia.

rayon R , la solution est,

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\alpha^2 \phi, \quad (4.12)$$

et donc par conséquence $\omega = \alpha^2 \phi$ est bien une solution particulière de l'équilibre stationnaire $(\vec{V} \cdot \nabla)\omega = 0$ pour l'équation de la vorticité. Les composantes polaires de la vitesses s'en déduisent alors par,

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, V_\theta = -\frac{\partial \phi}{\partial r}. \quad (4.13)$$

On vérifie que non seulement ϕ est continu en $r = R$ avec $\phi(R) = 0$, mais que ses dérivées (et donc la vitesse) le sont aussi. En effet, la composante radiale est nulle, et la composante azimuthale est $V_\theta(R, \theta) = 2U_0 \sin(\theta)$ (car $j_1'(x) = j_0(x)$). La figure 4.7 résume cette configuration dipolaire, avec la représentation des lignes de vitesses (ou iso-contours du potentiel) ainsi que les iso-contours de vorticité.

Configuration initiale magnétique et stabilité MHD. Ainsi, nous adoptons cette configuration pour la partie magnétique en remplaçant ϕ par ψ_e et ω par J_e . La structure dipolaire de courant J_e qui est solution particulière de l'équilibre électrique $(\vec{B} \cdot \nabla)J_e = 0$ devient alors,

$$J_e(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } r > R, \\ -B_0 \frac{2\alpha}{j_0(\alpha R)} j_1(\alpha r) \frac{y}{r} & \text{if } r \leq R, \end{cases} \quad (4.14)$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, et B_0 l'amplitude du champ magnétique de référence prise à l'infini. La solution pour la fonction de flux magnétique d'équilibre correspondante ψ_e et telle que $J_e = \alpha^2 \psi_e$ est alors,

$$\psi_e(x, y) = \begin{cases} B_0 \left(\frac{R^2}{r} - r \right) \frac{y}{r} & \text{si } r > R, \\ -\frac{2B_0}{\alpha j_0(\alpha R)} j_1(\alpha r) \frac{y}{r} & \text{si } r \leq R. \end{cases} \quad (4.15)$$

Nous avons aussi utilisé les coordonnées cartésiennes avec $\sin(\theta) = y/r$. Dans la suite, nous utiliserons $B_0 = 1$ et $R = 1$ de façon à définir la normalisation pour le champ magnétique et la dimension spatiale respectivement. Enfin, on notera qu'un équilibre MHD plus réaliste avec $\vec{J} \times \vec{B} = \nabla P$ dans l'équation pour la vitesse nécessiterait une pression thermique P obéissant à,

$$P(x, y) = \begin{cases} P_0 & \text{si } r > R, \\ P_0 + \frac{\alpha^2 \psi_e^2}{2} & \text{si } r \leq R, \end{cases} \quad (4.16)$$

avec P_0 définissant la pression thermique dans la région externe.

La stabilité en MHD parfaite a été étudiée par Richard et al. (1990) en utilisant la MHD réduite. L'utilisation du principe d'énergie montre, comme c'était le cas pour l'instabilité de coalescence, que le terme déstabilisant contribuant à rendre la variation d'énergie potentielle négative est le gradient de la densité de courant d'équilibre en $-\frac{dJ_e}{d\psi_e} \psi_1^2$ (avec ψ_1 la perturbation linéaire). Le mode propre se compose d'une rotation pure de la structure d'équilibre combinée avec une distortion, qui est schématisée sur la figure 4.8. Cependant, aucune expression analytique n'est obtenue et la valeur du taux de croissance du mode n'est pas précisée. Comme nous le verrons ci-dessous, les simulations numériques répondront cependant à ce manque (Lankalapalli et al. 2007).

Simulations numériques de l'instabilité de tilt - Aperçu général de l'évolution.

En utilisant, le code de MHD réduite aux éléments finis, FINMHD, nous pouvons simuler l'évolution linéaire et non linéaire de l'instabilité. Nous avons normalisé (voir ci dessus avec $B_0 = 1$ et $R = 1$), de façon à définir un temps caractéristique d'Alfvén $t_A = R/B_0 = 1$ (car on rappelle que dans nos équations $\rho = 1$ et $\mu_0 = 1$, et que donc la vitesse d'Alfvén $V_A = B_0/\sqrt{\rho_0 \mu_0} = 1$). Ainsi les unités de temps utilisées dans la suite sont à rapporter à celle valeurs ainsi définie de t_A . Comme pour les illustrations des instabilités précédentes, nous imposons un équilibre initial résistif grâce à un terme $-\eta J_e$ de façon à éviter la diffusion résistive de l'équilibre (effet non négligeable lorsque la résistivité n'est pas suffisamment petite). Pour une instabilité comme le tilt qui est fortement instable en MHD parfaite, ceci n'est hélas pas toujours imposé dans les études. Ceci nous permet donc d'avoir des résultats plus propres.

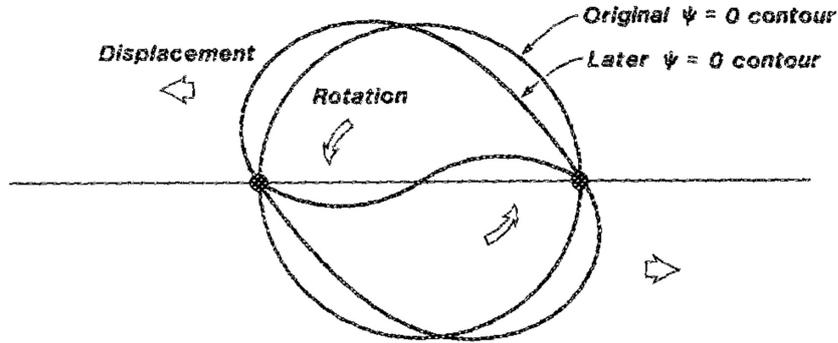


FIGURE 4.8 – Illustration schématique du mode de tilt tirée de Richard et al. (1990), montrant la déformation d'un contour à ψ constant englobant la structure dipolaire (voir figure précédente).

L'évolution temporelle de la configuration magnétique décrite précédemment est illustrée sur la figure 4.9 à différents instants. Les conditions initiales pour la partie hydrodynamique sont $\omega = \phi = 0$ dans le domaine entier, et les conditions aux limites imposées sur le contour circulaire situé arbitrairement à $r = 3$ sont des conditions de type Dirichlet sur les 4 variables principales (les valeurs imposées à chaque instant sont leurs valeurs initiales). Le contour est placé suffisamment loin de façon à avoir une influence négligeable sur la dynamique du système. Pour cette simulation, nous avons utilisé $\eta = \nu = 10^{-3}$. L'instabilité démarre à partir du bruit numérique induit par la discrétisation, comme c'est visible en utilisant en particulier l'évolution de la vorticité maximale (voir figure 4.10). La densité maximum J_M pour le courant est définie comme $J_M = (J_{max} - J_{min})/2$, où J_{max} est la valeur d'amplitude maximale positive et J_{min} la valeur d'amplitude maximale négative. La même définition est aussi utilisée pour la vorticité maximale ω_m . A partir de $t \simeq 5t_A$, la phase linéaire se met en place jusqu'à $t \simeq 8 - 9t_A$. Pour $t = 8.6t_A$ la structure dipolaire d'équilibre commence à se mettre en rotation, et se poursuit alors à $t = 9t_A$. Il faut noter que le sens de rotation sur la figure (sens des aiguilles d'une montre), qui est d'ailleurs opposé à celui indiqué sur la figure 4.8, n'est pas déterminé par la physique. Il est déterminé de façon aléatoire par le bruit numérique du schéma. Dans le même temps, deux nappes de courant jumelles (d'amplitude positive et négative) se forment en s'amplifiant à l'interface avec le champ magnétique extérieur à la structure dipolaire. La densité maximum de la densité de courant dépasse alors la valeur de l'équilibre, qui est $J_e \simeq 11$. La phase non-linéaire qui s'en suit induit alors la reconnexion magnétique au travers des deux nappes intenses de courant, qui est particulièrement visible à $t = 10t_A$. Ainsi les lignes de champ magnétique fermées situées à l'intérieur de la structure dipolaire disparaissent progressivement par reconnexion, comme le montrent les figures à $t = 13.5t_A$ pour un état d'avancement plus important. Pour cette instabilité, la phase de reconnexion se passe à densité de courant et vorticité maximales quasi-constantes (voir figure 4.10), rendant ainsi cette configuration importante pour la comparaison avec le modèle stationnaire de Sweet-Parker. Ce qui n'était pas le cas du kink résistif ou même de l'instabilité

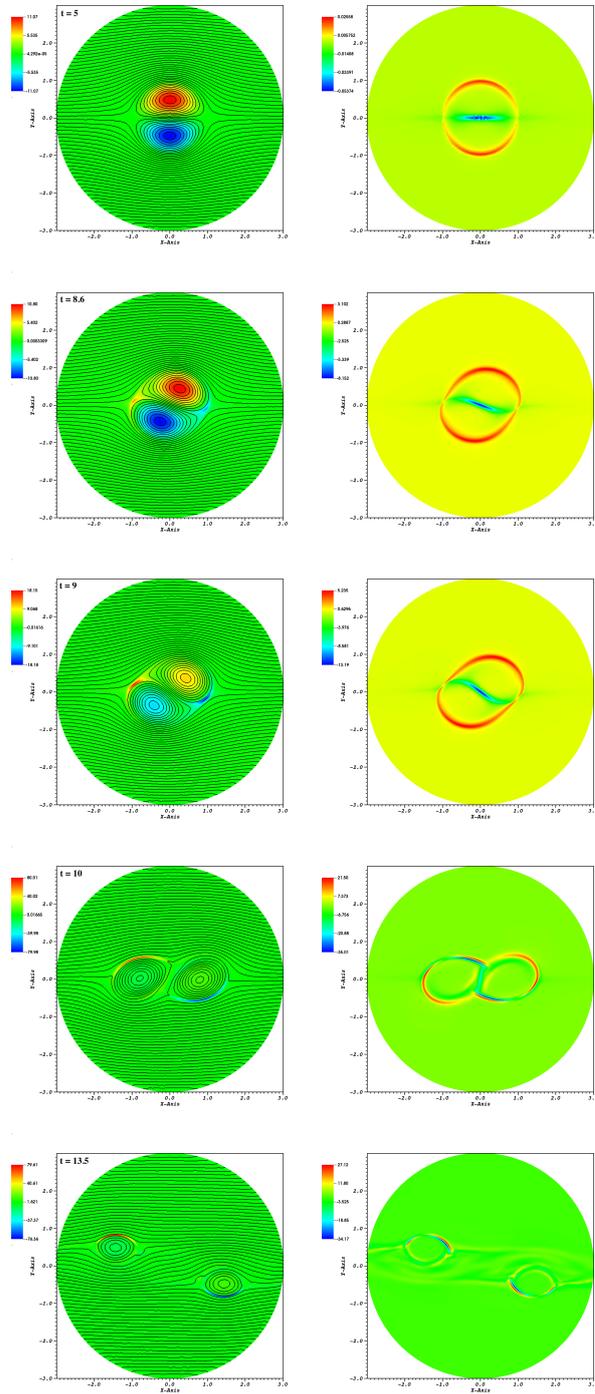


FIGURE 4.9 – Evolution temporelle (5 instants de haut en bas) de la densité de courant J (iso-contours couleurs) superposée à des lignes de champ magnétique (colonne de gauche), et de la vorticité ω (colonne de droite). L'instabilité de tilt est obtenue pour $\eta = \nu = 10^{-3}$.

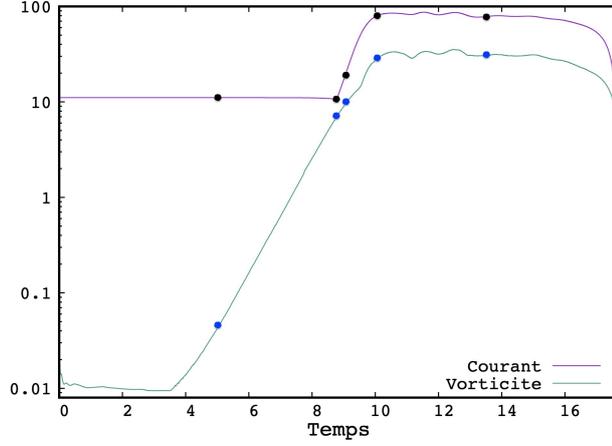


FIGURE 4.10 – Evolution temporelle du maximum de la densité de courant électrique et du maximum de vorticité (mesurés sur le domaine) pour un cas obtenu avec $\eta = \nu = 10^{-3}$. Les instants correspondants aux cartes obtenues sur la figure précédente sont marqués à l'aide des petits cercles colorés superposés aux deux courbes.

de coalescence vues précédemment. La dynamique se poursuit enfin par une dernière phase de relaxation, quand la reconnexion est terminée (car il n'y a plus de lignes de champ magnétiques disponibles).

Simulations numériques de l'instabilité de tilt - Développement linéaire et obtention du taux de croissance linéaire. D'après la théorie de la stabilité linéaire utilisant le principe d'énergie en MHD réduite, le système est instable en MHD parfaite lorsque le critère $\delta W^{(2)} < 0$ est rempli pour la perturbation (ψ_1, ϕ_1) rendant $\delta W^{(2)}$ minimal (voir Annexe F). On rappelle que,

$$\delta W^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3r \left[(\nabla \psi_1)^2 - \frac{dJ_0}{d\psi_0} \psi_1^2 \right], \quad (4.17)$$

avec $\psi_1 = -\vec{\xi} \cdot \nabla \psi_0$. Le taux de croissance linéaire γ peut alors être estimé à partir de,

$$\gamma^2 = -\frac{\delta W^{(2)}}{K^{(2)}}, \quad (4.18)$$

avec l'énergie cinétique associée

$$K^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3r \nabla \phi_1^2. \quad (4.19)$$

Nous avons tracé l'estimation numérique de γ^2 pendant la simulation présentée ci-dessus sur la figure 4.11. Ainsi une valeur de $\gamma t_A = 1.4$ est obtenue une fois la phase linéaire mise en place, à la sortie du bruit numérique. Cette valeur peut être aussi obtenue en examinant (mesurant) l'évolution temporelle de différentes quantités comme la vorticité maximum, une composante maximum de vitesse (en l'occurrence V_x), et l'énergie cinétique intégrée sur le domaine. En effet, la

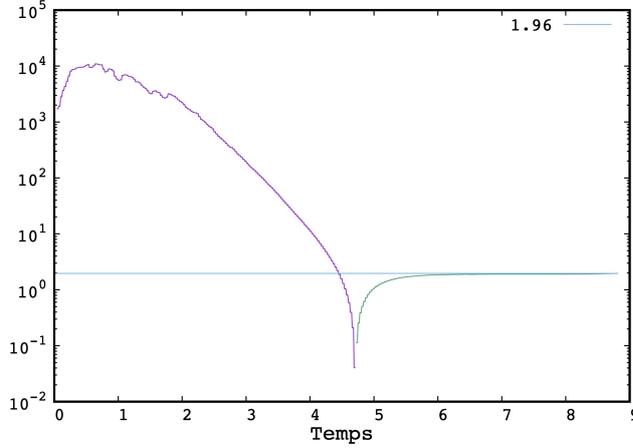


FIGURE 4.11 – Evolution temporelle de γ^2 estimée en utilisant le principe d'énergie (voir équation) pour un cas obtenu avec $\eta = \nu = 10^{-3}$. On trace la valeur absolue de l'expression car au départ l'expression est négative puis devient positive (instable) pour $t \simeq 4.7t_A$. La valeur tend asymptotiquement vers $\gamma t_A = 1.4$ lorsque la phase linéaire se met en place.

phase linéaire tracée sur la figure 4.12 permet de conclure à une dépendance temporelle en $\exp(1.4 t/t_A)$ pour la vitesse et la vortacité, et en $\exp(2.8 t/t_A)$ pour l'énergie cinétique. Ce résultat est indépendant de la résistivité, comme attendu pour une instabilité non résistive, et en parfait accord avec le taux de croissance linéaire cité ci-dessus. Cette valeur est aussi en accord avec les résultats publiés dans la littérature. Il faut aussi noter que l'effet de compressibilité (quand on emploie un code MHD complet donc non réduit) ne conduit pas à un taux de croissance très différent.

Simulations numériques de l'instabilité de tilt - Développement non linéaire et formation de nappes de courant jumelles - Régime de Sweet-Parker. Nous nous intéressons au régime de reconnexion réalisé à densité de courant et vortacité associée maximales (notées J_M et ω_M respectivement) quasi-constantes au cours du temps. En fait, dans ce régime de reconnexion, seulement de petites fluctuations temporelles sont présentes. Il est notamment instructif de comparer les résultats aux prédictions du modèle de Sweet-Parker en faisant varier la résistivité. Pour ce faire, nous gardons le nombre de Prandtl magnétique P_r fixé et égal à l'unité.

Ainsi, nous pouvons caractériser chaque simulation par ses valeurs de J_M et ω_M et représenter la dépendance avec η . En effet, le modèle de Sweet-Parker prévoit une loi d'échelle de type $J_M \propto 1/\eta^{1/2}$. Les résultats tracés sur la figure 4.13 sont en effet en accord avec cette loi pour J_M aussi bien que pour ω_M . En effet, un ajustement montre $J_M \simeq 2.67/\eta^{1/2}$ pour des valeurs de résistivité pas trop faibles. Cependant, une déviation claire est visible pour des valeurs de $\eta \sim 10^{-4}$, qui est la signature d'une transition vers un autre régime (régime de type plasmoïde) qui sera l'objet du chapitre suivant. Dans ce

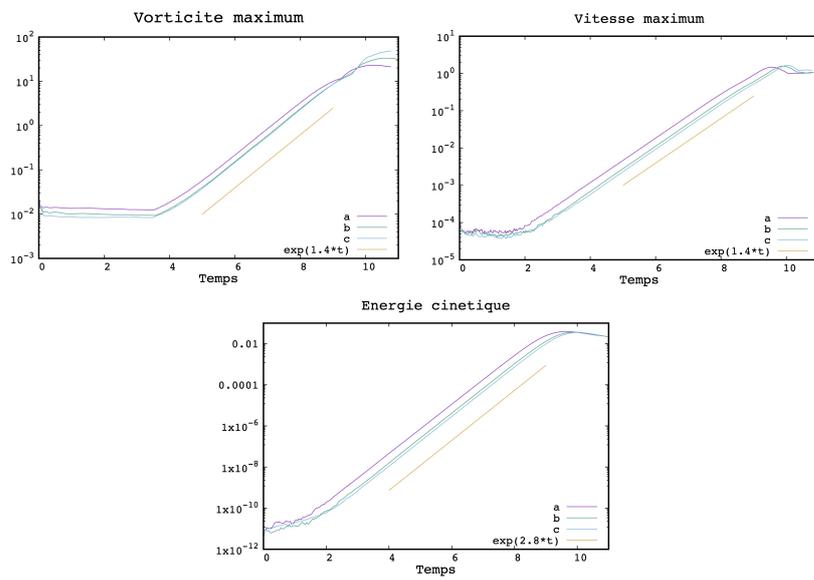


FIGURE 4.12 – Evolution temporelle de la vorticité maximum (à gauche), vitesse V_x maximum (au centre), et énergie cinétique intégrée sur tout le domaine (à droite). Les résultats sont obtenus pour 3 simulations employant, (a) $\eta = \nu = 2 \times 10^{-3}$, (b) $\eta = \nu = 10^{-3}$, et (c) $\eta = \nu = 5 \times 10^{-4}$. Les dépendances temporelles en $\exp(1.4 t)$ et $\exp(2.8 t)$ sont aussi tracées pour comparaison.

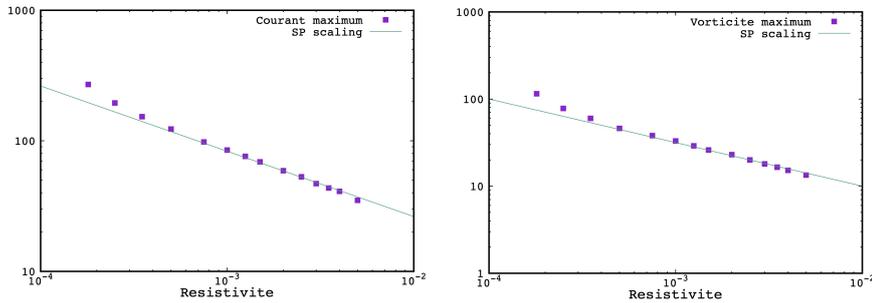


FIGURE 4.13 – Amplitude maximum mesurée de la densité de courant J_M (à gauche) et de la vorticité ω_M (à droite) pour des simulations employant différentes valeurs de résistivité η . Des lois d'échelles de type Sweet-Parker (SP) suivant une dépendance $J_M = 2.67 \times \eta^{-1/2}$ et $\omega_M = 1 \times \eta^{-1/2}$ sont aussi représentées pour comparaison.

régime de type Sweet-Parker, le taux de reconnexion (ou nombre de Mach Alfvénique défini précédemment) peut alors être évalué facilement à partir de la valeur de $\eta J_M / (V_A B_u)$. La vitesse d'Alfvén V_A ainsi que la magnitude du champ magnétique B_u représentent les valeurs mesurées en amont de la nappe de courant (voir schéma sur la figure correspondante). Nous avons estimé $B_u \simeq 2$ et que donc $V_A \simeq 2$ dans nos unités, et ceci de façon quasi-indépendantes de la résistivité. En utilisant de plus le nombre de Lundquist S défini à partir de la demi-longueur L de la nappe de courant (comme de coutume), $S = LV_A / \eta$ (avec $L \simeq 0.85$ mesuré dans les simulations), nous avons déduit que $J_M \simeq 2 \times S^{1/2}$. Ces résultats sont en accord avec les valeurs prédites par le régime de Sweet-Parker, car $J_M = B_u / a \simeq B_u S^{1/2} (1 + P_r)^{-1/4} L^{-1}$ en tenant compte de la correction visqueuse car le rapport d'aspect théorique de la nappe de courant est $L/a \simeq S^{1/2} (1 + P_r)^{-1/4}$. Le taux de reconnexion V_e / B_u qui vaut aussi ηJ_M en régime stationnaire, suit bien alors la loi, $V_e / B_u \simeq 1 \times S^{-1/2}$ attendue par le modèle de Sweet-Parker qui prédit un taux égal à $S^{-1/2} (1 + P_r)^{-1/4}$.

En ce qui concerne la vorticité, notre ajustement numérique à partir de la figure nous conduit à déduire $\omega_M \simeq 1/\eta^{1/2}$ et donc $\omega_M \simeq 0.75 \times S^{1/2}$. Les valeurs théoriques attendues à partir du modèle de Sweet-Parker (incluant la correction visqueuse) donnent $\omega_M = V_o / a$ avec $V_o \simeq (1 + P_r)^{-1/2} V_A$ la vitesse des lignes de champ à la sortie de la nappe de courant. Ainsi, $\omega_M \simeq V_A S^{1/2} (1 + P_r)^{-3/4} L^{-1}$ conduit à prédire $\omega_M \simeq 1.4 \times S^{1/2}$. Ce désaccord apparent provient de l'approximation à partir de V_o / a qui doit probablement être améliorée à cause de la géométrie de la nappe de courant qui diffère de la structure du modèle de Sweet-Parker (figure 4.14).

Afin de démontrer la bonne capture numérique de la nappe de courant pendant la reconnexion, nous avons représenté sur la figure 4.15, la superposition de la densité de courant électrique avec la grille de triangles aux éléments finis à l'instant considéré.

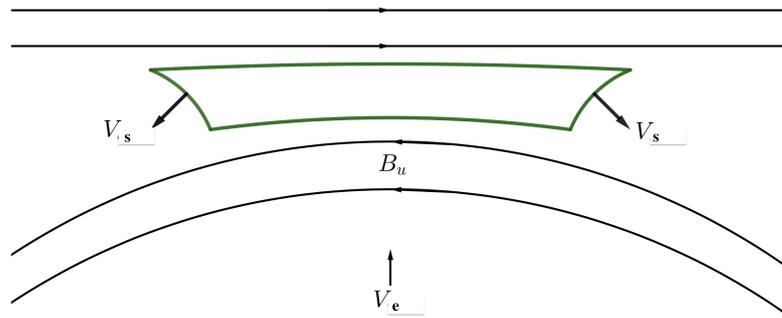


FIGURE 4.14 – Représentation schématique de la nappe de courant pendant la reconnexion, avec V_e la vitesse des lignes de champ entrantes de module B_e , et V_s la vitesse des lignes de champ reconnectées sortantes.

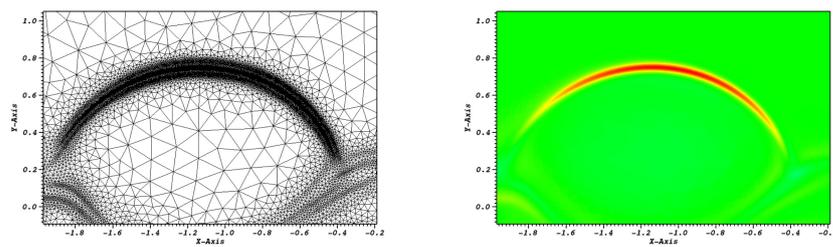


FIGURE 4.15 – Densité de courant électrique montrant une des deux nappes de courant pendant la reconnexion (à droite), et maillage numérique correspondant (à gauche).

Bibliographie

- [1] J.M. Finn & P.K. Kaw, *Coalescence instability of magnetic islands* (Phys. Fluids 20, 72 (1977)).
- [2] P.L. Pritchett & C.C. WU, *Coalescence of magnetic islands* (Phys. Fluids 22, 2140 (1979)).
- [3] A. Bondeson, *Linear analysis of the coalescence instability* (Phys. Fluids 26, 1275 (1983)).
- [4] D.A. Knoll, & D. A.Chacón, *Coalescence of magnetic islands, sloshing, and the pressure problem* (Phys. Plasmas 13, 032307 (2006)).
- [5] R. Keppens, O. Porth & C. Xia, *Interacting tilt and kink instabilities in current channels* (The Astrophysical Journal 795, 77 (2014)).
- [6] R. Richard, R.D. Sydora & M. Ashour-Abdalla, *Magnetic reconnection driven by current repulsion* (Phys. Fluids B 2, 488 (1990)).
- [7] S. Lankalapalli, J.E. Flaherty, M.S. Shephard & H.R. Strauss. *An adaptive finite element method for magnetohydrodynamics* (Journal of Computational Physics 225, 363 (2007)).
- [8] H. Baty, *On the Sweet-Parker model for incompressible visco-resistive magnetic reconnection in two dimensions associated to ideal magnetohydrodynamic instabilities* (Preprint ArXiv 2022, <https://arxiv.org/abs/2201.01135>)

Chapitre 5

Instabilités de type plasmoides

5.1 Historique

Dans les simulations numériques MHD relativement anciennes (Bulanov et al. 1979), l'observation de plasmoides était déjà évoquée, mais attribuée au manque de résolution numérique. Leur découverte a été attribuée quelques années plus tard à Loureiro (2007) lors d'études de l'évolution non linéaire des modes de déchirement (voir chapitres précédents). En effet, la présence d'ilôts magnétiques lors de l'effondrement de point- X tendant à former des nappes de courant secondaires a été d'abord observée lors de simulations numériques pour des résistivités plus faibles qu'une valeur critique.

Ces nappes de courant ressemblant aux nappes de courant stationnaires pendant la reconnexion de Sweet-Parker, des calculs analytiques de stabilité ont alors été développés de façon similaire à la théorie linéaire des modes de déchirement, en remplaçant la structure initiale de courant instable (de rapport d'aspect L/a arbitraire et indépendante de la dissipation) par une nappe de courant dite de Sweet-Parker de rapport d'aspect $L/a = S^{1/2}$ particulièrement grand (surtout pour des valeurs caractéristiques de la couronne solaire). Cependant, contrairement aux nappes dynamiques de Sweet-Parker (qui impliquent par exemple la prise en compte du flot de vitesse de reconnexion), ces nappes initiales étaient supposées statiques et préformées, par souci de simplification. Les résultats (que nous ne reproduirons pas ici) conduisent alors à un taux de croissance linéaire γ_p de l'instabilité de plasmode,

$$\gamma_p t_A = 0.623 S^{1/4}, \quad (5.1)$$

pour un nombre d'onde correspondant,

$$k_p L = 1.358 S^{3/8}. \quad (5.2)$$

Le temps d'alfvén est défini comme $t_A = L/V_A$, et le nombre de Lundquist $S = (LV_A)/\eta$. Ce résultat peut aussi se retrouver à partir de l'expression donnant le taux maximum de reconnexion des modes de déchirement (voir chapitre correspondant) $\gamma_p(a/V_A) = 0.623 S_a^{-1/2}$, dans laquelle nous avons utilisé $S = S_a(a/L)$ (car $S_a = aV_A/\eta$) et $k_p a = 1.358 S_a^{-1/4}$.

Ces lois d'échelles ci-dessus ont été vérifiées dans les simulations numériques partant d'une nappe de courant statique avec le bon rapport d'aspect. Cependant, un point contradictoire important a été soulevé. En effet, le taux de croissance tendrait alors vers l'infini dans la limite du nombre de Lundquist infiniment grand (limite de résistivité nulle), conduisant à un paradoxe pour une instabilité basée sur la reconnexion résistive. Ainsi, le point de départ d'une nappe de courant statique de type Sweet-Parker doit être remise en question. Deux théories apparemment concurrentes (voir ci-dessous) ont alors été développées pour pallier à ce paradoxe. Un autre point important et pas encore totalement clair, concerne le seuil précis pour le développement de l'instabilité. En effet, il est admis que les plasmoides se développent lorsque le nombre de Lundquist dépasse une valeur critique S_c qui est de l'ordre de 10^4 , sans pour autant définir une valeur précise. De plus, S_c dépend vraisemblablement aussi du nombre de Prandtl magnétique.

5.2 Théorie

Modes de déchirement de la MHD parfaite. Le premier modèle a été proposé par Marco Velli et ses collaborateurs (voir Pucci and Velli 2014). Celui-ci propose que le processus d'effondrement de la formation de la nappe (comme c'est par exemple le cas pour l'effondrement du point- X lors du développement des instabilités primaires de déchirement) conduit à un rapport d'aspect critique $L/a = S^\alpha$, avec α un coefficient dont la valeur permet d'obtenir un taux de croissance rendu indépendant de la résistivité.

Ainsi, en reprenant le calcul ci-dessus à partir du taux maximum pour les modes de déchirement, la valeur $\alpha = 1/3$ permet d'obtenir

$$\gamma_p t_A = 0.623, \quad (5.3)$$

pour un nombre d'onde correspondant,

$$k_p L = 1.358 S^{1/6}. \quad (5.4)$$

Alors que ces résultats ci-dessus s'appliquent à des profils de type nappe de Harris (profil magnétique en tangente hyperbolique), ce modèle a pu être généralisé à d'autres profils avec des résultats différant assez peu. Par exemple, pour le second profil vu pour l'instabilité de déchirement, la valeur optimale pour le coefficient α devient, $\alpha = 3/10$, et le taux maximum correspondant est,

$$\gamma_p t_A \simeq 1.1 \quad (5.5)$$

Ces résultats ont été obtenus pour la limite à viscosité nulle et doivent bien sûr être amendés pour différentes valeurs de $P_r = \nu/\eta$. Ainsi, selon ce modèle, le taux de croissance est Alfvénique et indépendant du nombre de Lundquist, expliquant ainsi l'appellation un peu étrange de prime abord, de mode de déchirement de la MHD parfaite ou d'ideal tearing mode.

L'existence de ce rapport d'aspect critique valant $S^{1/3}$ sensiblement plus petit que le rapport de Sweet-Parker qui est $S^{1/2}$, signifie qu'en pratique ce dernier n'est jamais atteint notamment lors de la formation d'une nappe de courant par effondrement.

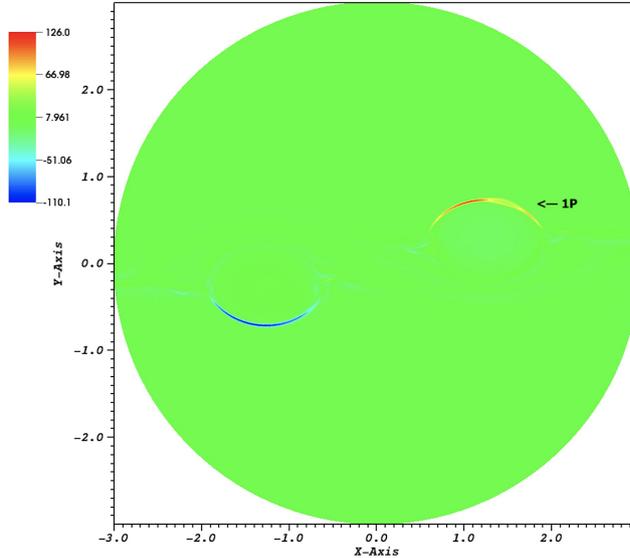


FIGURE 5.1 – Densité de courant électrique (iso-contours colorés) à un instant pendant la reconnexion pour une simulation employant une résistivité correspondante à $S \simeq S_c$. Une structure en forme d’îlot magnétique (1P indiqué par une flèche) montre la présence d’un plasmôïde unique dans la nappe de courant de droite.

Mode de déchirement dominant pendant l’effondrement rapide de la nappe. Un autre modèle a été proposé par Luca Comisso et ses collaborateurs (voir références Comisso et al. 2017-2018). Ce dernier tient compte de la sélection du mode dominant pendant la formation/effondrement de la nappe de courant, qui n’est pas nécessairement le mode le plus rapide linéairement (pour un rapport d’aspect donné) évoqué pour le premier modèle. En effet, dans ce second modèle, ce n’est plus la valeur d’un rapport d’aspect critique qui importe mais un critère/principe de moindre temps pour sortir de la phase linéaire qui détermine ce mode dominant.

Ainsi, le taux de croissance linéaire dominant, que nous appellerons γ_d , suit une loi qui n’est plus une simple loi de puissance avec S . Typiquement, le modèle prédit une transition entre la dépendance $\gamma_d \propto S^{1/4}$ pour des valeurs de S modérément élevées (avec $S > S_c$) et une dépendance avec une loi logarithmique décroissante pour S tendant asymptotiquement vers l’infini. Le taux de croissance γ_d au niveau de la transition peut alors atteindre une valeur super Alfvénique, $\gamma_d t_A \gg 1$, donc substantiellement supérieure à celle prédite par le premier modèle. Les valeurs précises dépendent des paramètres caractéristiques comme la loi d’échelle du processus d’effondrement (linéaire, exponentielle, ...) de la nappe de courant mais ne modifient pas la forme non monotone de la loi de dépendance du taux de croissance avec S ainsi que le caractère super-Alfvénique de la solution. Il est aussi possible d’évaluer le nombre de plasmôïdes n_p à partir du nombre d’onde k_p du mode dominant, via $n_p = Lk_p/(2\pi)$.

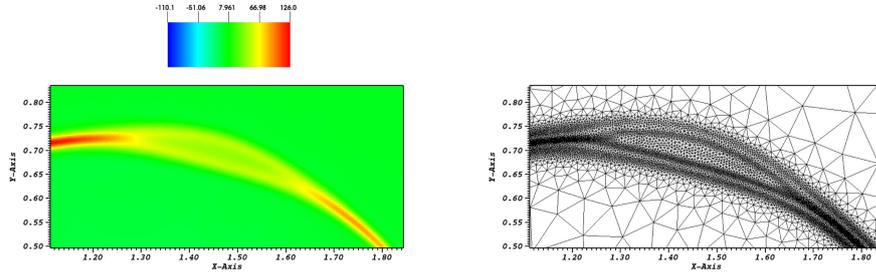


FIGURE 5.2 – Zoom sur le plasmøide de la figure précédente (à gauche), et maillage adapté correspondant (à droite).

5.3 Etudes numériques : plasmøides associés à la reconnexion initiée par l’instabilité de tilt

Développement de plasmøides pendant le tilt. L’instabilité de MHD parfaite de tilt peut aussi être étudiée pour des valeurs de résistivité plus petites que celles employées précédemment dans le régime de type Sweet-Parker. Typiquement, c’est le cas pour $\eta \lesssim 10^{-4}$, car un début de transition avait déjà été observé pour $\eta \sim 2 \times 10^{-4}$ (voir figure 5.1), suggérant un changement de loi d’échelle pour l’amplitude maximale de la densité de courant avec la résistivité.

En effet, la transition a été obtenue pour $S_c \simeq 5 \times 10^3$ pour $P_r = 1$. Par exemple, pour une simulation utilisant un nombre de Lundquist proche de la valeur critique $S \simeq S_c$, un plasmøide peut se former de façon transitoire avant d’être éjecté à l’une des deux extrémités (voir figures 5.1 et 5.2). Tant que S reste de l’ordre de S_c , le nombre d’ilôts reste modeste et cela n’affecte pas trop la reconnexion, car la valeur maximum de la densité de courant n’est pas non plus trop affectée par rapport à sa valeur attendue en supposant un régime de Sweet-Parker.

Cependant, la situation change pour des valeurs de S plus élevées. En effet, les nappes de courant sont envahies par un grand nombre de plasmøides qui est d’autant plus élevé que S l’est. Par exemple, pour $S \simeq 4 \times 10^4$ une dizaine d’ilôts sont visibles alors que pour $S \simeq 3 \times 10^5$ ce nombre est proche de 20 (voir figure 5.3). Afin de quantifier l’effet sur la dynamique de la reconnexion, l’historique du maximum de la densité de courant est mis en regard de la structure des nappes (voir figure 5.4) pour $S \simeq 1 \times 10^5$. En effet, nous observons l’apparition progressive des ilôts pendant une phase d’augmentation du courant, qui passe d’une valeur de l’ordre de 600 à une valeur proche de 3000. De plus, le changement brutal de pente indique une accélération de la dynamique que nous pouvons quantifier en mesurant la pente pour déduire une échelle de temps, qui sera évidemment plus rapide que celle associée au tilt. Cette valeur de 3000 devient ensuite la valeur moyenne quasi-stationnaire autour de laquelle la densité de courant fluctue. Les fluctuations rendent compte de la dynamique des plasmøides qui tendent à disparaître en étant progressivement éjectés de chaque nappe de courant par les extrémités, puis à se reformer au milieu des nappes, etc ...

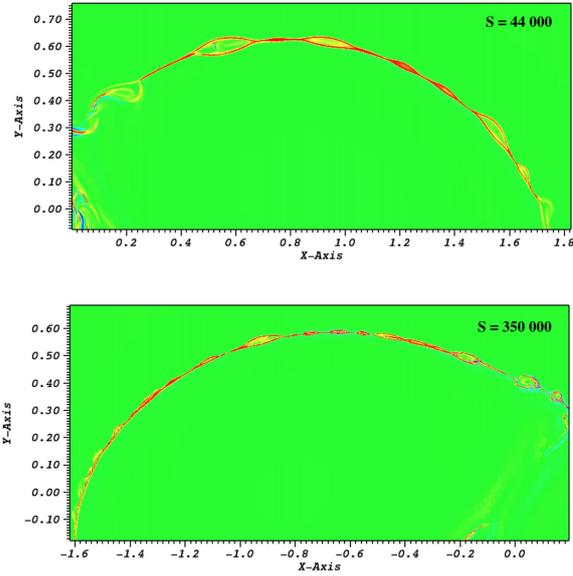


FIGURE 5.3 – Densité de courant électrique (iso-contours colorés) pendant la reconnexion pour deux simulations employant deux valeurs de S centrée sur une des deux nappes.

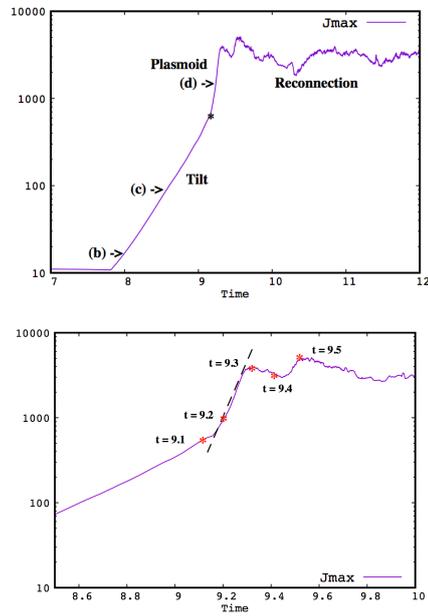


FIGURE 5.4 – Densité de courant électrique maximum en fonction du temps pour une simulation utilisant $S = 1 \times 10^5$. Un zoom est ajouté sur la figure du bas.

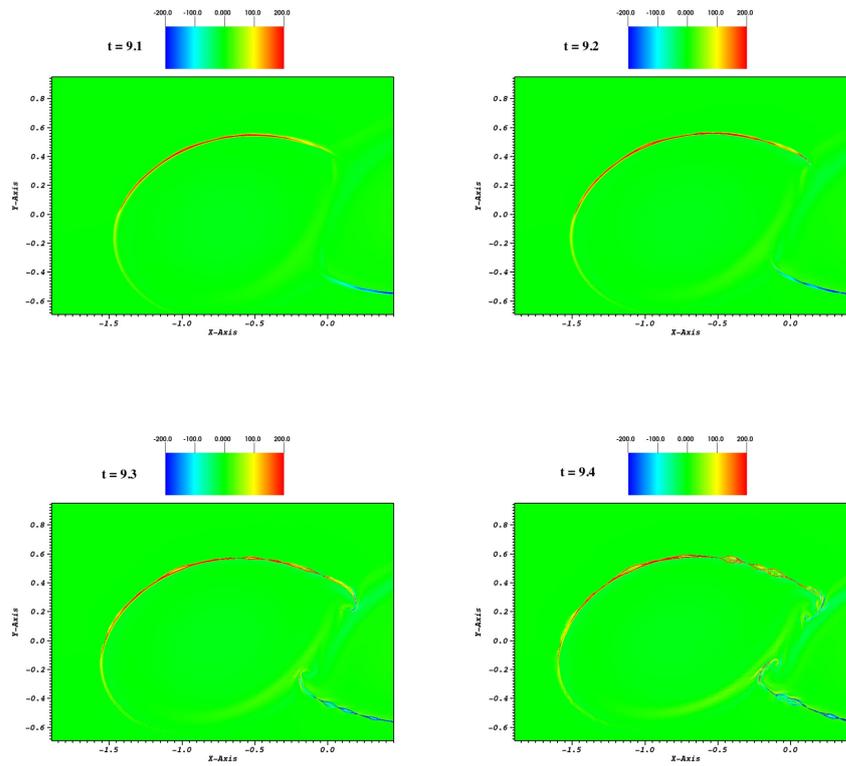


FIGURE 5.5 – Densité de courant électrique (iso-contours colorés saturés à une valeur de 200 pour faciliter la lisibilité) pendant la reconnexion pour le cas de la figure précédente. Les snapshots sont obtenus aux instants indiqués dans la figure précédente.

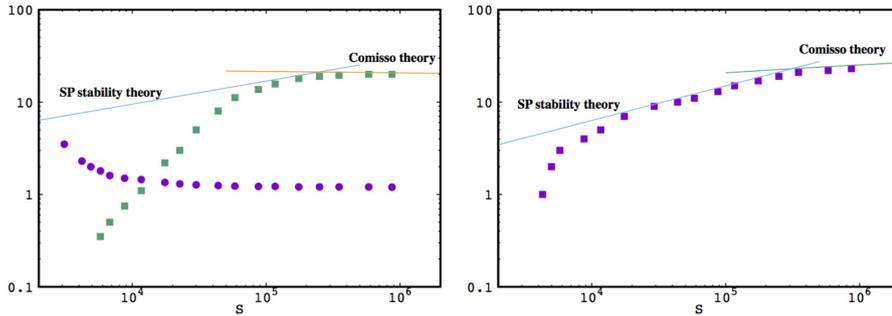


FIGURE 5.6 – (Gauche) Taux de croissance des plasmoides (carrés verts) et (cercles violets) en fonction de S . (Droite) nombre maximum de plasmoides en fonction de S . Les dépendances attendues par la théorie classique de la stabilité pour une nappe de Sweet-Parker en $S^{3/8}$ pour le taux de croissance γ_p et $S^{1/6}$ pour le nombre n_p de plasmoides sont indiqués. La dépendance non monotone issue du modèle de Comisso et al. est aussi ajoutée.

Taux de croissance des plasmoides. On peut utiliser l'inverse de l'échelle de temps (suggérée ci-dessus) pour évaluer le taux de croissance des plasmoides, même si la méthode est approximative. De la même façon, on peut aussi compter le nombre maximum de plasmoides pour chaque simulation. Les résultats sont visibles sur la figure 5.6. Nous avons un bon accord avec le modèle de Comisso au niveau de la forme attendue, mais surtout sur la valeur super-Alfvénique du taux. En effet, on rappelle que le modèle du tearing idéal ne prévoit qu'un taux de croissance Alfvénique quant à lui.

Taux de reconnexion dans le régime des plasmoides. Nous avons constaté que la présence de plasmoides (pour $S > S_c$) tendait à porter la valeur maximum de la densité de courant électrique J_M au dessus de la valeur attendue par la théorie de Sweet-Parker. Nous pouvons donc chercher la nouvelle dépendance de J_M avec S dans le régime où les nappes de courant sont dominées par un nombre relativement grand de plasmoides. Les résultats sont tracés sur la figure 5.7. Ils montrent des lois d'échelles linéaires de $0.033 \times S$ et $0.0125 \times S$ pour J_M et ω_M respectivement. Ainsi, en considérant que ce régime reste de type stationnaire (malgré les oscillations) avec une valeur moyenne de J_M au cours du temps, on peut déduire un taux de reconnexion moyen par ηJ_M qui devient indépendant de la résistivité (ou du nombre de Lundquist S). Le taux de reconnexion alors normalisé par $V_A B_u$ devient indépendant de la résistivité et égal à 0.014. Cette valeur est en bon accord avec les valeurs généralement reportées dans la littérature.

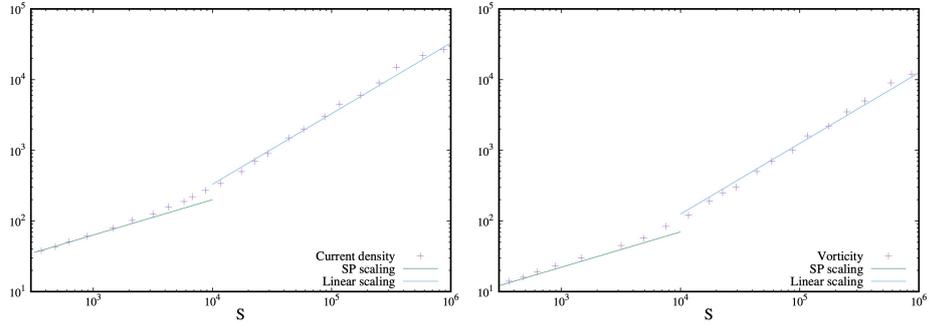


FIGURE 5.7 – (À gauche et à droite respectivement) Densité de courant maximum J_M et vorticité maximum ω_M (mesurées au niveau des nappes) pour différentes simulations employant différents S . Des lois d'échelles de type SP en $2 \times S^{1/2}$ et $0.75 \times S^{1/2}$ sont tracées, ainsi que des lois linéaires en $0.033 \times S$ et $0.0125 \times S$ approximant le régime plasmoides (pour J_M et ω_M respectivement).

5.4 Etudes numériques : plasmoides associés à la reconnexion initiée par l'instabilité de kink résistif

Développement de plasmoides pendant le kink résistif. Nous avons vu précédemment que le kink résistif dans son évolution non linéaire pouvait produire une nappe de courant. Cette nappe permet alors de contrôler la reconnexion magnétique. Lorsque la résistivité n'est pas trop petite, le processus de reconnexion suit de façon approximative le modèle de Sweet-Parker (ou plutôt celui de Kadomtsev dans le cas présent, vu la géométrie polaire). Le taux maximum ηJ_M (dédit à partir de la densité de courant maximum J_M) suit en effet une dépendance en $\eta^{1/2}$ (figure non fournie). Contrairement à l'instabilité de tilt, la phase de reconnexion se produit essentiellement pendant l'augmentation en temps de l'intensité du courant dans la nappe (voir figure 3.23). C'est aussi visible sur la figure pour deux valeurs de résistivité, comparant le tilt et le kink. On peut aussi vérifier que le temps total pour la phase de reconnexion suit alors une dépendance en $\eta^{-1/2}$, ou encore en $S^{1/2}$ (pour un nombre de Prandtl fixé).

Lorsque la résistivité est plus petite qu'une valeur critique estimée à 2×10^{-4} environ, le courant maximum J_M montre des oscillations superposées à sa croissance au cours du temps. Ceci est visible sur la figure 5.8. Ces oscillations sont clairement attribuées à la présence de plasmoides qui naissent dans la nappe de courant en nombre d'autant plus élevé que la résistivité employée est petite, comme visibles sur la figure 5.9 pour plusieurs valeurs de la résistivité et pour le même état d'avancement de la reconnexion. L'état d'avancement peut être défini à partir du déplacement du centre magnétique (situé au centre physique initialement) et qui disparaît seulement lorsque la reconnexion est terminée et complète (il n'y a pas de reconnexion partielle dans les cas considérés ici). Deux exemples de progression au cours du temps du déplacement, noté $\xi_0(t)$, sont tracés sur la figure suivante. On peut noter que la progression tend à être linéaire,

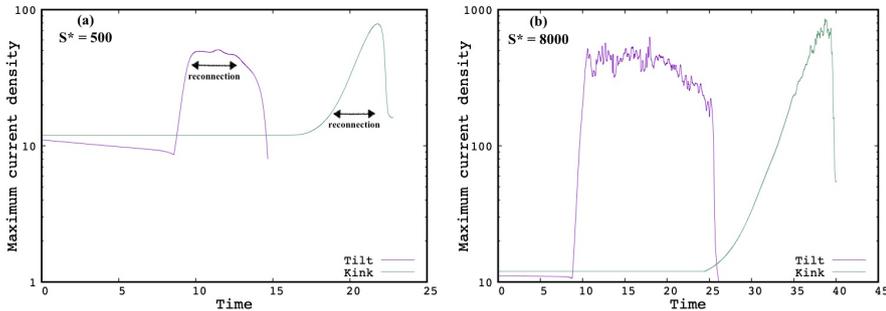


FIGURE 5.8 – Comparaison entre les instabilités de tilt et de kink (notamment les phases de reconnexion), en utilisant l'évolution temporelle de la densité de courant maximum J_M , pour une résistivité $\eta = 1/S^* = 2 \times 10^{-3}$ (figure de gauche, a) et pour une résistivité $\eta = 1/S^* = 1.25 \times 10^{-4}$ (figure de droite, a). Le nombre de Prandtl magnétique est fixé à $P_r = 1$.

du moins pendant la phase de reconnexion. Ceci conduit à définir le taux de reconnexion pour le kink à partir de sa dérivée temporelle, $d\xi_0/dt$. Ainsi le taux pourra s'écrire $d\psi/dt = d\psi/d\xi_0 \times d\xi_0/dt$.

Il a été obtenu que le taux de reconnexion suit bien une loi de type Sweet-Parker dans le régime sans plasmöide, typiquement pour une résistivité inférieure à 2×10^{-4} . Ainsi, on obtient pour le nombre de Lunquist critique $S_c \simeq 10^4$, en estimant la demi-longueur de la nappe $L \simeq 1$ et le champ magnétique mesuré à l'amont de la nappe $B_u \simeq 2$. Lorsque la résistivité est plus petite, la présence de plasmöides conduit à un taux de reconnexion qui ne diminue plus (quand la résistivité diminue) et qui est, $\frac{1}{V_A B_u} \frac{d\psi}{dt} \sim 0.02$. Cette valeur reste proche, bien que légèrement plus grande que la valeur obtenue pour la reconnexion associée au tilt (valeur de 0.014).

Quant à la vitesse (taux) de croissance des plasmöides eux-mêmes, il est (comme pour le tilt) indépendant de la résistivité. Cependant, il est mesuré plus faible avec une évaluation $\gamma_p \tau_A \simeq 0.25$ (pour $P_r = 1$), alors que ce taux était plutôt super-Alfvénique pour le tilt et la coalescence.

5.5 Ingrédients physiques du régime plasmöides et présence de chocs de type Petschek

Plusieurs travaux basés sur une hiérarchie fractale des différents plasmöides ont essayé d'expliquer pourquoi le taux de reconnexion devient indépendant de la résistivité avec une valeurs normalisée de 0.01 – 0.02. Cependant, les résultats dont nous parlerons pas ici ne sont pas encore convaincants.

D'autres travaux on montrés qu'une fois le régime atteint (donc après la phase initiale de croissance des premiers plasmöides qui ont disrupté la nappe de courant en formation), la dynamique d'interaction entre plasmöides conduit à la croissance de leur taille par coalescences successives. Au bout de plusieurs évènements, on aboutit alors à la formation de plasmöides dits monstres car très gros, avant d'être évacués par les extrémités de la chaîne (qui remplace la nappe

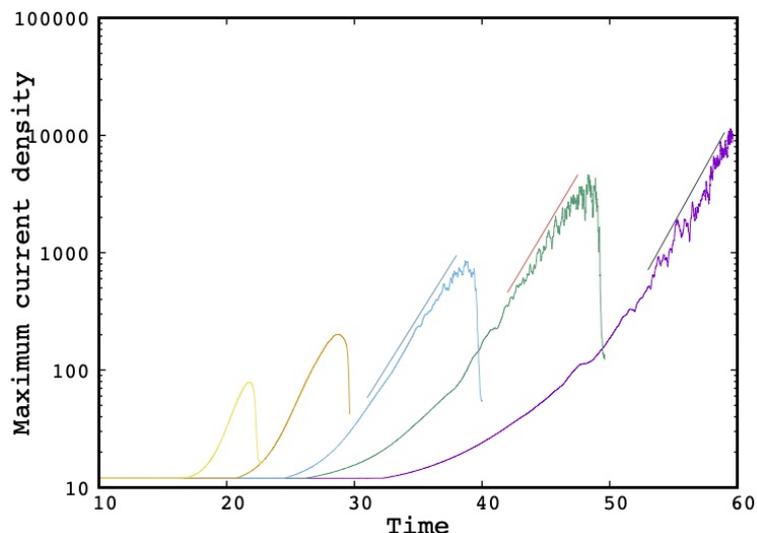


FIGURE 5.9 – Densité maximale de la densité de courant J_M pour l’instabilité de tilt utilisant différentes valeurs de résistivité, $\eta = 2 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-4}, 1.25 \times 10^{-4}, 3 \times 10^{-5}$, et 7.8×10^{-6} , de la gauche vers la droite respectivement. Le nombre de Prandtl magnétique est fixé à $P_r = 1$.

de courant anciennement). Ce mécanisme est observé pendant la reconnexion associée au kink, aussi bien que celle associée au tilt. Ceci est illustré sur les figures 5.13-5.14. On notera qu’une nappe de contre-courant (densité de courant de signe opposée à la densité de courant principale) se forme permettant ainsi la coalescence. Le résultat remarquable est alors la formation de structures de chocs similaires à celles issues du modèle stationnaire de Petschek, mais transitoires. Ceci est visible sur la figure 5.15. Ces mécanismes se re-produisent continuellement tant que la reconnexion n’est pas terminée. Ceci pourrait alors expliquer le taux de reconnexion obtenu à partir du taux du mécanisme de Petschek.

5.6 Conclusion sur le développement des plasmoides

Nous avons vu que les nappes de courant primaires qui se forment pendant une instabilité primaire (par exemple kink, tilt, et on peut aussi rajouter aussi coalescence même si nous ne l’avons pas illustré ici) conduisent à un régime de reconnexion rapide au travers de la formation de plasmoides qui envahissent cette nappe primaire. Ceci est vrai à partir du moment où la résistivité est suffisamment petite de façon à ce que le nombre de Lundquist $S = LV_A/\eta$ (avec L et V_A la longueur de la nappe de courant primaire et V_A la vitesse d’Alfvén définie à partir du champ magnétique local) dépasse le seuil critique de $S_c \simeq 10^4$. C’est vrai aussi pendant l’évolution non-linéaire d’une simple nappe de courant pré-formée statique et instable par le mode de tearing. Ainsi les échelles de temps caractéristiques initiales peuvent être rapides (cas du tilt et

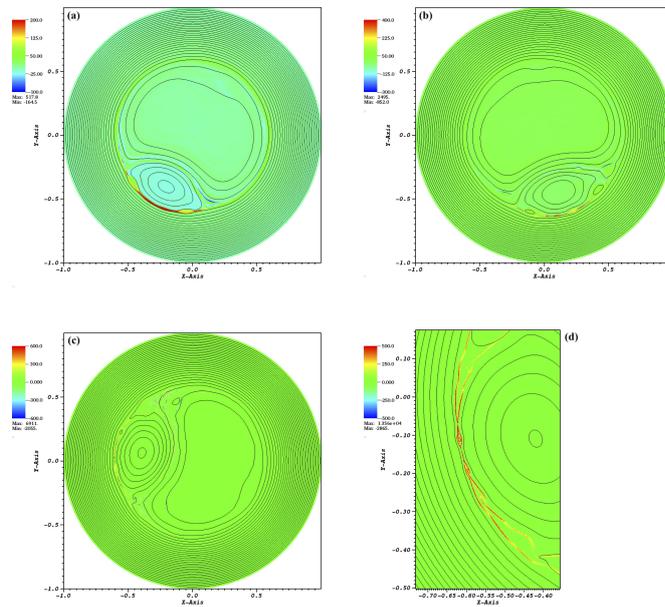


FIGURE 5.10 – Iso-contours en niveaux de couleurs de la densité de courant superposés avec quelques lignes de champ magnétiques, obtenus pour des simulations utilisant $\eta = 1.2 \times 10^{-4}$ (figure a), $\eta = 3.12 \times 10^{-5}$ (figure b), $\eta = 7.12 \times 10^{-6}$ (figure c), et $\eta = 3.9 \times 10^{-6}$ (zoom - figure d). Les quatre cas sont tracés pour un même état d'avancement de la reconnexion $\xi_0/a \simeq 0.4$. Pour faciliter la visualisation, le niveau de courant est saturé à une valeur maximum arbitraire pour chaque cas.

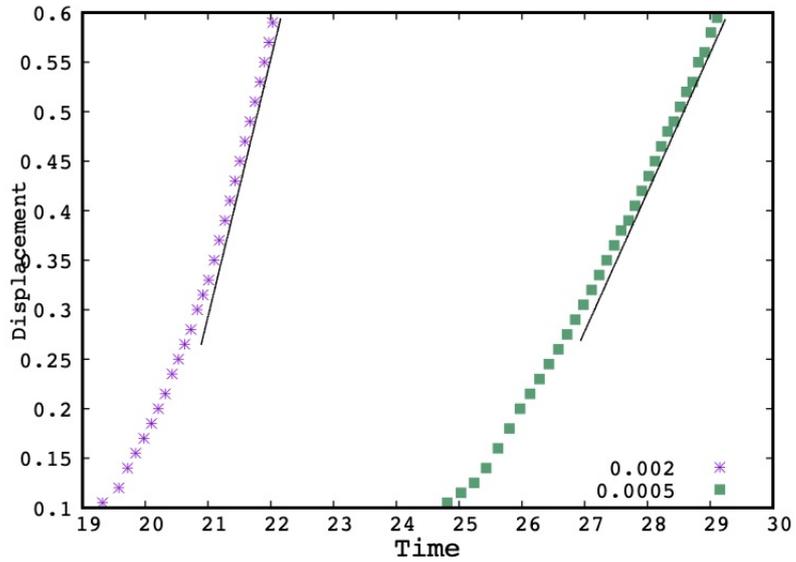


FIGURE 5.11 – Déplacement au cours du temps de l'axe magnétique (voir texte) $\xi_0(t)/a$, obtenu pour deux valeurs de résistivité, $\eta = 2 \times 10^{-3}$, et $\eta = 5 \times 10^{-4}$. Le nombre de Prandtl magnétique est fixé à $P_r = 1$.

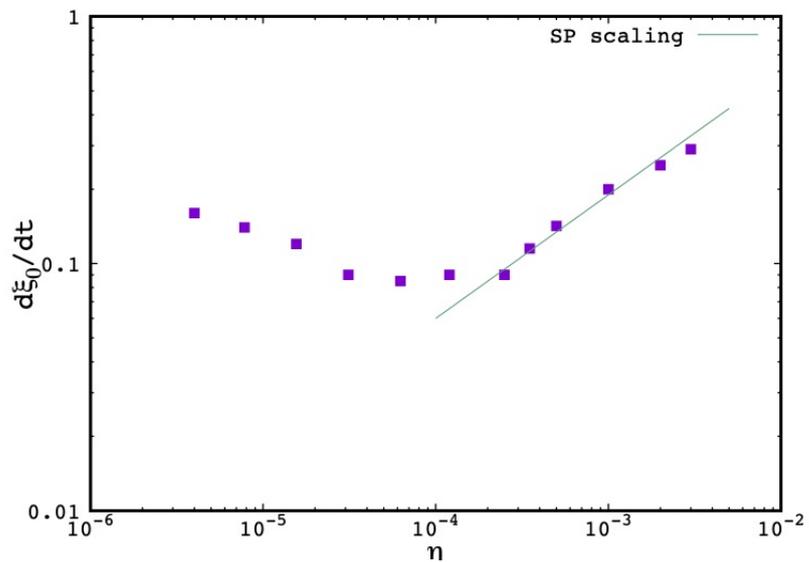


FIGURE 5.12 – Vitesse d'avancement $d\xi_0/dt$ (permettant de mesurer le taux de reconnexion) de l'axe magnétique en fonction de la résistivité. Le régime de Sweet-Parker avec une loi d'échelle en $\eta^{1/2}$ est aussi tracé pour comparer.

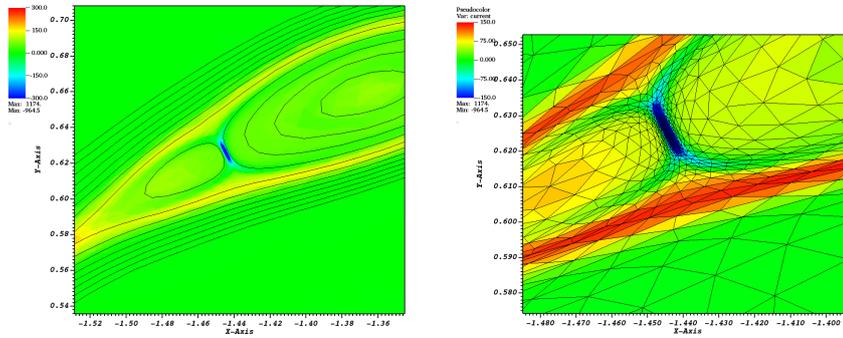


FIGURE 5.13 – Figure tirée de Baty (2020c) issue d’une simulation de reconnexion pendant l’instabilité de tilt. (A gauche) Zoom sur une nappe de courant (et quelques lignes de champ magnétiques) présentant deux plasmoides en train de fusionner au travers d’une nappe de courant secondaire (en bleu) de signe opposé à la nappe principale. (A droite) Le même zoom montrant la grille aux éléments finis utilisée.

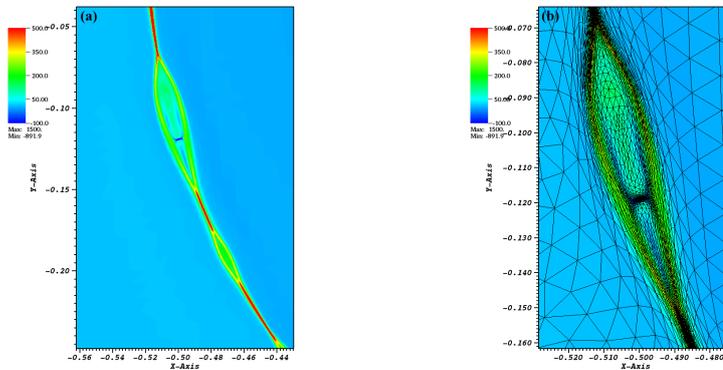


FIGURE 5.14 – Figure tirée de Baty (2020d) issue d’une simulation de reconnexion pendant l’instabilité de kink. (A gauche) Zoom sur une nappe de courant (et quelques lignes de champ magnétiques) présentant deux plasmoides en train de fusionner au travers d’une nappe de courant secondaire (en bleu) de signe opposé à la nappe principale. (A droite) Le même zoom montrant la grille aux éléments finis utilisée.

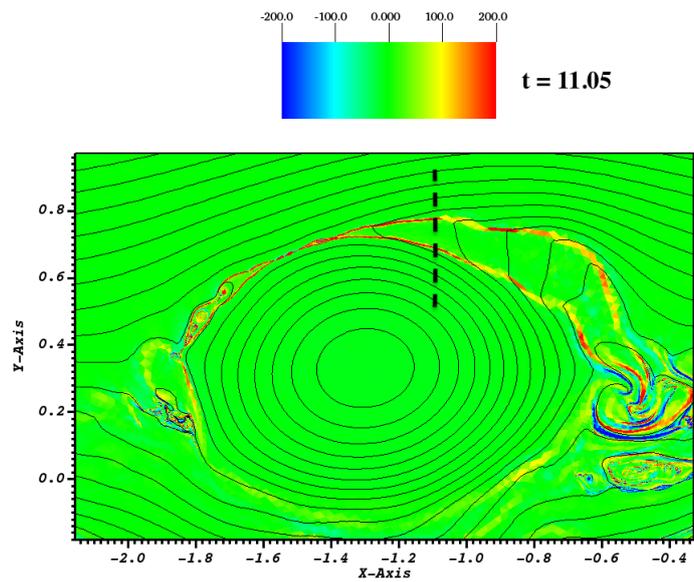


FIGURE 5.15 – Figure tirée de Baty (2020c), montrant un zoom sur une nappe de courant courbée pendant la reconnexion magnétique associée à l’instabilité de tilt à $S \simeq 4 \times 10^5$. Quelques lignes de champs magnétiques sont superposées aux iso-contours de la densité de courant. A droite, perpendiculairement au trait hachuré, un plasmøide monstre est évacué formant un structure de chocs de type Petschek.

de la coalescence) ou lentes (cas du tearing ou kink résistif).

Une autre échelle de temps rapide est déterminée alors par l'échelle de temps de croissance des plasmoides, et est alors donnée par les modes dominants. Le taux de croissance semble Alfvénique à partir des modes résistifs, plutôt en accord avec la théorie de Velli et al. du mode linéairement dominant associé au tearing idéal. Pour les configurations initialement instables en MHD parfaite, la formation de la nappe de courant engendre la formation de plasmoides sur une échelle de temps encore plus rapide (super-Alfvénique), plutôt en accord cette fois-ci avec la théorie développée par Comisso et al.

Une fois le régime de reconnexion dominée par la présence de nombreux plasmoides, une reconnexion stochastique se met en route avec un taux de reconnexion moyenné en temps de l'ordre de 0.01, peu importe la nature des instabilités primaires ayant conduit à la formation de la nappe.

Ainsi, un scénario possible d'évènement disruptif pourrait être ainsi constitué de trois phases. Une première phase lente ou rapide de formation de la nappe de courant primaire sans ou très peu de reconnexion. Une seconde phase plus ou moins explosive de formation de chaîne de plasmoides dans la nappe, constituant ainsi le déclencheur. Enfin, la troisième phase représentant la phase principale de reconnexion rapide pseudo-stationnaire au travers des plasmoides.

Certains pourraient argumenter que ce scénario n'est valide que pour un plasma entièrement collisionnel, et que donc il ne peut pas s'appliquer à la couronne solaire. La MHD s'appliquera de toute façon à grande échelle, et lorsque les échelles spatiales cinétique des particules sont atteintes, le régime de reconnexion rapide associé aux plasmoides permettra d'atteindre un régime de reconnexion encore plus rapide, qui d'après les différentes études s'établit avec un taux normalisé compris entre 0.01 et 0.1. Dans cet ouvrage, nous ne développerons pas cet aspect cinétique.

Bibliographie

- [1] S. Bulanov, J. Sakai & S. Syrovatskii, *Tearing-mode instability in approximately steady MHD configurations* (Sov. J. Plasma Phys. 5, 157 (1979)).
- [2] N.F. Loureiro, *Instability of current sheets and formation of plasmoid chains* (Physics of Plasmas 14, 100703 (2007)).
- [3] F. Pucci and M. Velli, *Reconnection of Quasi-singular Current Sheets : The "Ideal" Tearing Mode* (The Astrophysical Journal Letters 780, 19 (2014)).
- [4] L. Comisso, M. Lingam, Y.-M. Huang, A. Bhattacharjee, *General Theory of the Plasmoid Instability* (Phys. Plasmas 23, 100702 (2016)).
- [5] L. Comisso, M. Lingam, Y.-M. Huang, A. Bhattacharjee, *Plasmoid Instability in Forming Current Sheets* (Astrophys. J. 850, 142 (2017)).
- [6] H. Baty, *Formation of plasmoid chains and fast magnetic reconnection during nonlinear evolution of the tilt instability* (<https://arxiv.org/pdf/2001.07036.pdf>, 2020arXiv200107036B (2020a)).
- [7] H. Baty, *On the growth rate of plasmoid chains during nonlinear viscoresistive evolution of the tilt instability* (<https://arxiv.org/pdf/2003.08660.pdf>, 2020arXiv200308660B (2020b)).
- [8] H. Baty, *Petschek-type reconnection in the high-Lundquist-number regime during nonlinear evolution of the tilt instability* (<https://arxiv.org/pdf/2005.04221.pdf>, 2020arXiv200504221B (2020c)).
- [9] H. Baty, *Magnetic reconnection and plasmoid formation driven by the two-dimensional resistive kink instability in a current hole configuration* (<https://arxiv.org/pdf/2006.15013.pdf> (2020d)).

Chapitre 6

Instabilités de tearing double

Il existe une autre voie pour obtenir un comportement explosif en MHD à 2 dimensions sans faire forcément appel aux plasmoides. En effet, il suffit de considérer l'interaction de plusieurs nappes de courant pré-formées. Cela peut même se faire en géométrie plane cartésienne pour simplifier, même si une géométrie polaire est plus appropriée pour une application de tokamak par exemple. C'est le cas d'une configuration en double nappe, conduisant à une instabilité primaire résistive dite mode de double tearing (DTM), à l'image du mode de tearing simple (STM) d'une nappe de courant isolée (voir chapitre 3). L'évolution non linéaire conduit alors à un mécanisme d'interaction explosif à cause d'une instabilité secondaire structurelle des îlots magnétiques primaires, comme l'ont montré des travaux précédents (voir Janvier et al. (2011) et références incluses).

Cependant, il existe un seuil pour l'existence de ce comportement explosif, qui se résume à un rapport d'aspect minimal critique de la configuration. Le rapport d'aspect est défini comme le rapport de la longueur sur la demi-distance séparant les deux nappes de courant (voir ci-dessous).

6.1 Structure à double nappe de courant

Nous allons donc considérer une configuration initiale d'équilibre contenant deux nappes de courant. Par commodité et par souci de comparaison avec les résultats connus pour le mode de tearing simple, nous prenons un profil en double tangente hyperbolique de type Harris, pour la composante principale du champ magnétique $B_y(x) = B_e(x)$, avec

$$B_e(x) = B_0 \left[1 + \tanh\left(\frac{x - x_s}{a}\right) - \tanh\left(\frac{x + x_s}{a}\right) \right]. \quad (6.1)$$

Les renversements permettent de localiser les nappes en $x = \pm x_s$, avec une demi-épaisseur définie par la valeur du paramètre a . La valeur de B_0 représente alors la valeur du champ magnétique loin de la zone centrale. L'expression de la densité de courant d'équilibre $J_e(x)$ s'en déduit facilement avec,

$$J_e(x) = \frac{B_0}{a} \left[\frac{1}{\cosh^2[(x - x_s)/a]} - \frac{1}{\cosh^2[(x + x_s)/a]} \right]. \quad (6.2)$$

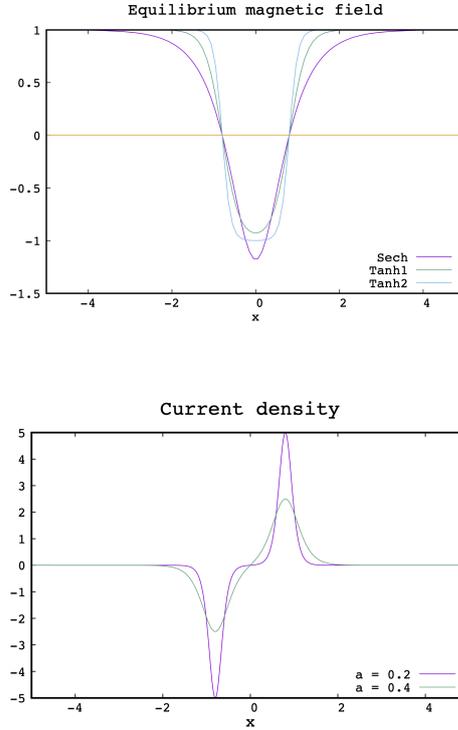


FIGURE 6.1 – (En haut) Profil des équilibres magnétiques, avec le champ magnétique normalisé $B_e(x)/B_0$, pour l'équilibre Sech (voir texte) et deux équilibres de type Harris ou Tanh obtenus pour $x_s = 0.8$ et $a = 0.4 - 0.2$. (En bas) Densité de courant électrique correspondante pour les profils Tanh1 et Tanh2, mettant en évidence les deux nappes.

Il faut noter qu'un autre profil d'équilibre (noté Sech ci-dessous) est souvent utilisé correspondant à,

$$B_e(x) = B_0 [1 - (1 + b_c)/\cosh(\zeta x)], \quad (6.3)$$

avec b_c et ζ des paramètres dont les valeurs sont choisies de façon à imposer les renversements en x_s via $\cosh(\zeta x_s) = (1 + b_c)$. Ainsi, des valeurs $b_c = 1.18$ et $\zeta = 1.77$ sont utilisées pour avoir $x_s = 0.8$, comme on peut le voir sur la figure 6.1 On peut aussi, sur cette même figure comparer le profil Sech à deux profils de type Harris (notés Tanh1 et Tanh2) pour $a = 0.4$ et $a = 0.2$. Les nappes de courant ayant des densités de courant de signes opposés correspondantes sont visibles sur la figure du bas.

Une étude permettant d'étudier séparément l'effet de la distance entre les deux nappes $2x_s$ et de l'épaisseur des nappes $2a$ est rendue plus facile par l'utilisation des équilibres de type Harris. Les résultats ne diffèrent pas non plus fondamentalement suivant les profils. C'est pourquoi nous nous focaliserons sur ce type d'équilibre.

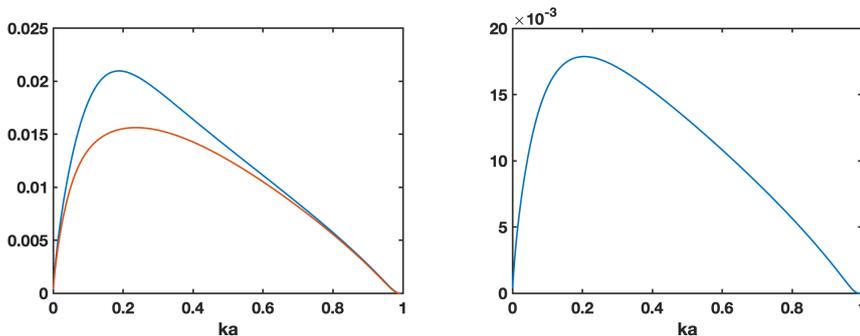


FIGURE 6.2 – Taux de croissance linéaire $\gamma a/V_A$ obtenu par un code numérique de stabilité, pour un équilibre en double nappe de type Harris, utilisant $x_s = 0.8$, $a = 0.2$, et $\eta = 2 \times 10^{-4}$. Deux branches instables apparaissent pour le DTM (figure de gauche). Pour comparaison, la branche d’une nappe isolée est calculée (STM) à droite.

6.2 Stabilité DTM

Comme pour les instabilités résistives de type tearing pour une simple nappe de courant (voir chapitre 3), il existe des instabilités résistives pour les structures magnétiques en double nappe introduites ci-dessus, appelées modes de double tearing (DTM). Et pour notre profil de type Harris, le seuil de stabilité linéaire peut être obtenu par une analyse de stabilité analytique ou en utilisant un code de stabilité numérique. Ainsi, les résultats montrent que maintenant deux branches instables existent. Ceci est illustré sur la figure 6.2 montrant le taux de croissance linéaire $\gamma a/V_A$ en fonction du nombre d’onde normalisé ka , pour un équilibre utilisant $x_s = 0.8$, $a = 0.2$, et $\eta = 2 \times 10^{-4}$. Les mêmes résultats obtenus pour la même configuration mais une autre valeur de la résistivité, $\eta = 2 \times 10^{-6}$ sont représentés sur la figure 6.3. Ces résultats se distinguent par une branche supérieure ayant le taux de croissance le plus élevé γ_{sup} , et une branche inférieure ayant le taux de croissance moins élevé γ_{inf} . En comparant à la branche d’une nappe seule (STM), on voit que sur la figure les deux branches précédentes du DTM se situent de part et d’autre du STM. En d’autres termes, pour un nombre d’onde donné ka , nous avons l’ordering suivant $\gamma_{sup} > \gamma_{STM} > \gamma_{inf}$. La nature des deux branches DTM a été examinée en détails par Wei et al. (2021). Elle révèle qu’elle est plus complexe que des combinaisons linéaires de deux branches STM, même si pour une séparation infinie cela doit être le cas. Nous ne développerons pas ce point ici. Nous remarquerons simplement que la disparité entre les deux branches s’accroît évidemment quand la séparation entre les deux nappes diminue, comme le montre la figure 6.3

Nous verrons ci-dessous, que c’est la branche supérieure va déterminer l’évolution de l’instabilité dominante dans une simulation MHD dépendante du temps.

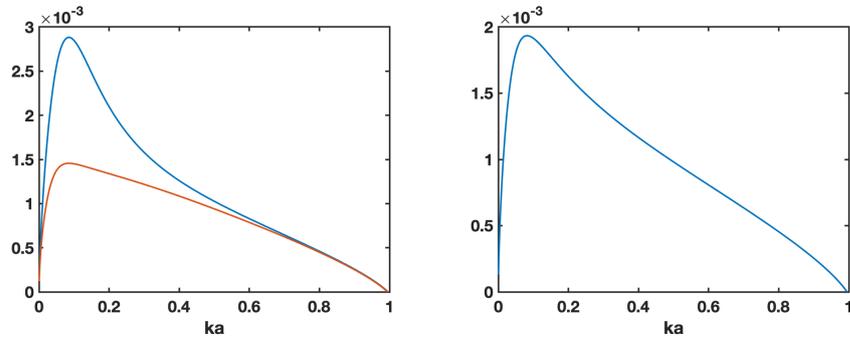


FIGURE 6.3 – Idem figure précédente mais avec une résistivité plus faible, $\eta = 2 \times 10^{-6}$.

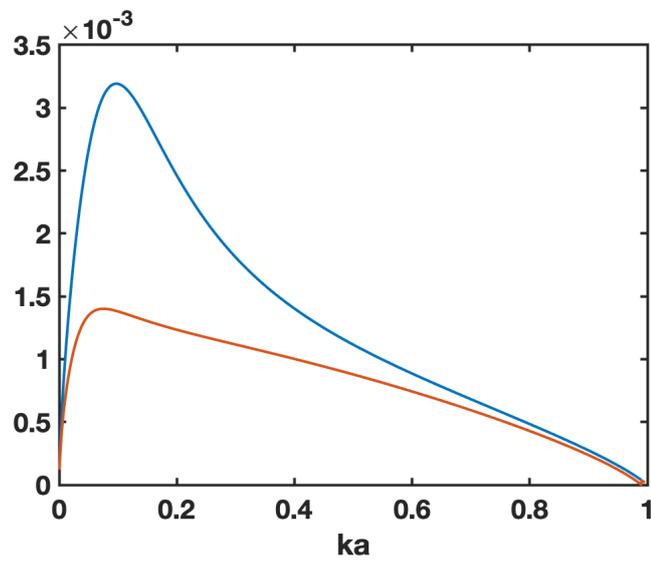


FIGURE 6.4 – Taux de croissance linéaire $\gamma a/V_A$ obtenu par un code numérique de stabilité, pour un équilibre en double nappe de type Harris, utilisant $x_s = 0.6$, $a = 0.2$, et $\eta = 2 \times 10^{-6}$.

6.3 Simulation numérique DTM

Nous allons maintenant étudier l'évolution temporelle de ces configurations en double nappe de Harris sujettes aux instabilités résistives de type déchirement. Pour ce faire, nous allons une fois de plus utiliser notre code en MHD réduite, FINMHD.

Dans le but d'avoir un aperçu du scénario conduisant à une phase explosive pendant l'évolution non-linéaire du DTM, nous présentons ci-dessous les résultats d'un cas représentatif. En effet, nous prenons un équilibre défini par $x_s = 0.8$ et $a = 0.3$. La longueur de la structure est choisie avec $L = 4$, permettant ainsi de rendre linéairement instable la configuration avec un nombre d'onde $ka = 2\pi a/L \simeq 0.47$ car effectivement plus petit que l'unité. On peut vérifier que le seuil de stabilité linéaire en terme de longueur critique minimale serait $L_{min} = 1.88$ pour ce cas. Nous prenons une résistivité pas trop petite, $\eta = 10^{-3}$, et une nombre de Prandtl magnétique $P_r = \nu/\eta = 1/3$, permettant de rester dans le régime à faible viscosité (utilisé dans la plupart des études). Nous utilisons aussi $B_0 = 1$ définissant ainsi notre normalisation. Par conséquence, la variable de temps t utilisé ci-dessous est normalisé par le temps d'Alfvén suivant $t_A = l/V_A$, avec l la distance unité et où V_A est la vitesse d'Alfvén basé sur B_0 (ainsi $V_A = 1$). Le domaine de simulation choisi est situé pour x dans l'intervalle $[-L_x/2 : L_x/2]$, avec $L_x = 4$ correspondant à un bord externe placé suffisamment loin de la région centrale pour ne pas ou peu influencer la dynamique principale. Ainsi, pour simplifier des conditions fixes sont imposées à $x = \pm L_x/2$. Des conditions périodiques sont utilisées dans l'autre direction de calcul (y), de façon à sélectionner différents nombres d'ondes k_m obéissant à $k_m = 2\pi m/L$ (m étant un nombre entier strictement positif) pour une longueur $L_y = L$ donnée de la configuration. Le mode DTM de plus rapide de la configuration correspondra alors à $m = 1$, provoquant la croissance d'une structure avec un îlot unique sur chaque nappe (voir ci-dessous).

Pour ce cas représentatif, la stratégie numérique d'un maillage adaptatif, conduit à utiliser des éléments finis (triangles) de taille minimale variant de $h_{min} \simeq 0.01$ (nécessaire pour bien résoudre la structure d'équilibre) et $h_{min} \simeq 0.001$ (nécessaire pour résoudre les structures les plus fines comme les nappes de courant secondaires relativement intenses qui se forment pendant les phases non linéaires). La taille maximale des triangles est $h_{max} \simeq 0.1$, permettant ainsi de couvrir les régions où il ne se passe presque rien (zones loie de la structure centrale ou la densité de courant reste proche de zéro). Le nombre total correspondant de triangles varie approximativement de 15000 à 35000.

La figure 6.5 (à gauche) montre l'évolution temporelle de la vorticité maximale ω_M , ainsi que de la densité de courant maximale J_M , mesurées sur l'ensemble du domaine de simulation. La figure 6.5 (à droite) montre aussi les évolutions temporelles correspondantes, de la composante maximale de la vitesse V_y et l'énergie cinétique E_K intégrée sur le domaine. Aux premiers instants, après une courte période s'accompagnant d'oscillations induites par le bruit numérique (à peine visible sur la courbe de E_K par exemple), on peut clairement observer pour $t \lesssim 100$ le développement linéaire de l'instabilité de DTM avec le temps (droite avec notre représentation semi-logarithmique) pour ω_M , V_y et E_K . La pente mesurée pour E_K est évidemment le double de celle pour V_y ou ω_M , et permet de mesurer le taux de croissance linéaire γ_l . Plus précisément, on peut déduire une valeur $\gamma_l = \partial_t E_K / E_K$, en bon accord avec un code linéaire.

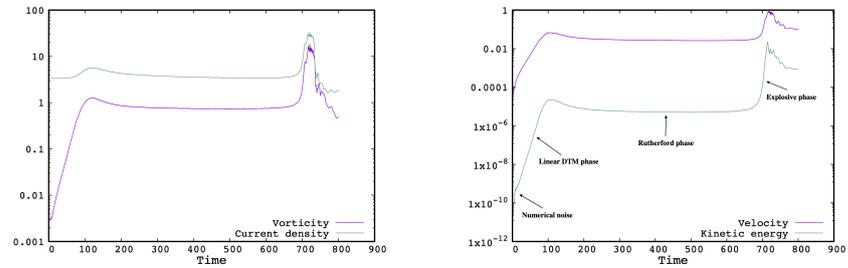


FIGURE 6.5 – (A gauche) Evolution de la vorticité maximum ω_M , et de la densité de courant maximum J_M . (A droite) Evolution de la vitesse maximum V_y et de l'énergie cinétique E_k . Simulation du cas représentatif avec $x_s = 0.8$, $a = 0.3$, $\eta = 10^{-3}$, et $P_r = 1/3$.

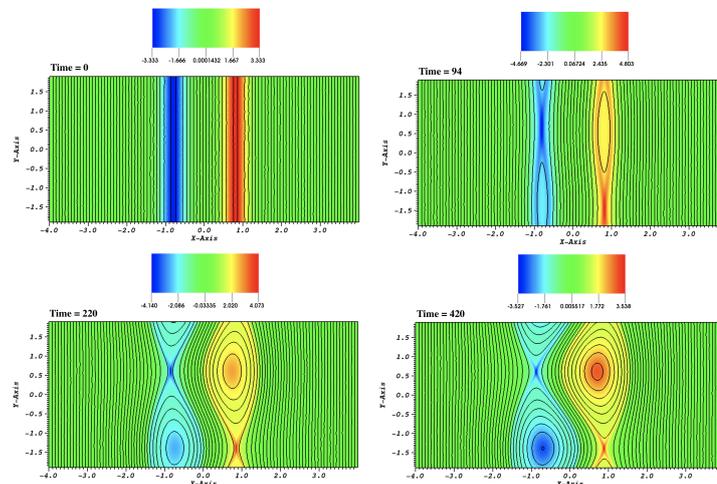


FIGURE 6.6 – Cartes d'iso-contours (niveaux de couleurs) prises à différents temps de la densité de courant, en superposition avec plusieurs lignes de champ magnétique, pendant l'évolution à des temps pas trop avancés du cas représentatif (voir figure précédente).

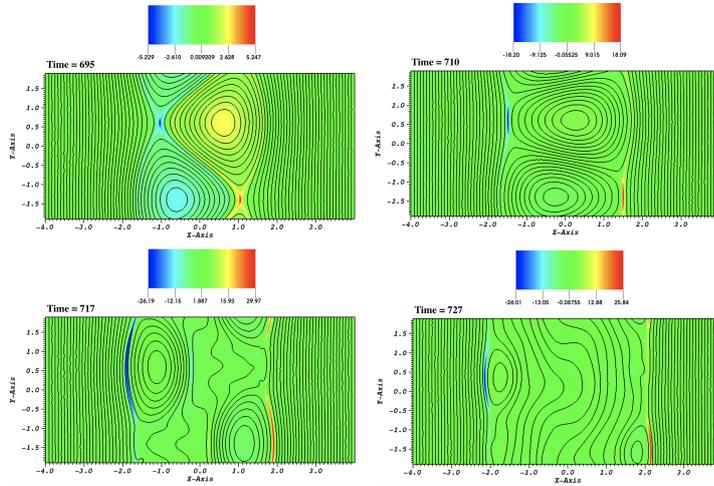


FIGURE 6.7 – Idem la figure précédente, mais pour des temps plus avancés incluant notamment phase explosive (voir texte).

On peut aussi vérifier que $\gamma_l \propto \eta^{3/5} \propto S^{-3/5}$, en accord avec la théorie des instabilités résistives de type tearing (voir chapitre 3). La figure 6.6 illustre la structure spatiale associée à la déformation de la densité de courant ainsi que la topologie magnétique à différents instants. Comme attendu, le mode DTM se caractérise par la formation de deux îlots magnétiques, croissants sur les deux nappes de courant initiales. De plus, le mode propre est anti-symétrique, avec une structure en opposition de phase entre les deux nappes. En effet, le point- O de chaque îlot se trouve en face un point- X de l'autre îlot. Ce mode correspond en fait à la branche du mode-A (d'après Wei et al. 2020) qui domine l'autre branche appelée mode-S (mode symétrique), comme vues sur les figures 6.3-6.4 de l'analyse linéaire.

La phase linéaire est suivie par une autre phase appelée régime de Rutherford (analogue à ce qui se passe pour un mode STM, voir chapitre 3). Dans cette dernière phase, l'énergie cinétique E_K reste quasi-stationnaire, alors que l'énergie magnétique associée à la perturbation (pas montrée ici) continue de croître de façon algébrique (voir Baty 2021).

Ainsi, après un long moment pendant lequel les deux îlots évoluent très peu sur une échelle de temps résistive (voir les instantanés à $t = 220$ et $t = 420$ sur la figure 6.6), une croissance soudaine surgit à $t \sim 700$. Les iso-contours de densité de courant correspondants, superposés avec les lignes de champ magnétiques visibles sur la figure 6.7, montre que cette troisième phase soudaine se caractérise par une déformation triangulaire des îlots (instantané à $t = 695$). Ceci est suivi par une augmentation de la densité de courant au niveau des deux points- X (voir instantané à $t = 710$), déclenchant alors une seconde phase de reconnexion (la première étant associée à la croissance des îlots). La reconnexion permet aux îlots de reconnecter avec les lignes de champ externes (situées initialement de part et d'autre de la région centrale entre les deux nappes de Harris), et se termine quand toutes les lignes redeviennent de nouveau ouvertes et presque droites (après une relaxation à $t \simeq 730$).

Il faut noter que le processus de reconnexion pendant cette dernière phase

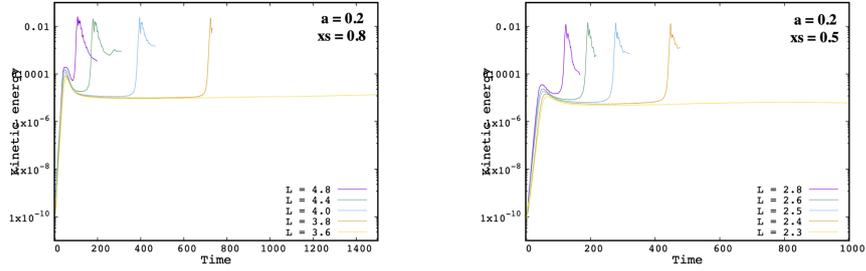


FIGURE 6.8 – Evolution temporelle de l'énergie cinétique E_K pour plusieurs cas employant différentes longueurs L (voir légende). Un profil de type Tanh est utilisé avec $x_s = 0.8$ et $a = 0.2$ à gauche, et avec $x_s = 0.5$ et $a = 0.2$ à droite.

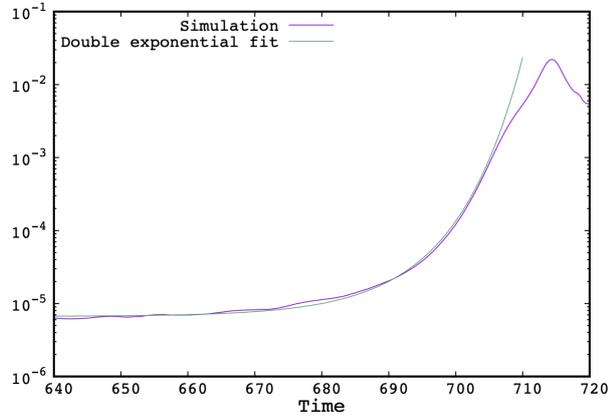


FIGURE 6.9 – Zoom (centré sur la phase explosive) de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique pour l'équilibre Tanh utilisant $a = 0.3$ et $x_s = 0.8$. Une approximation suivant une loi exponentielle double, $\exp(\exp(\gamma_*(t - t_0)))$ avec $\gamma_* = 0.1$ et $t_0 = 688$, est alors obtenue.

est l'inverse de celui associé à la phase linéaire du DTM. Le mécanisme à l'origine de cette dynamique de reconnexion explosive a été identifié comme une instabilité structurelle, avec un seuil dépendant de la déformation critique des îlots magnétiques. Pour résumer, il a été montré que la déstabilisation est obtenue lorsque le rapport d'aspect L/x_s dépasse une valeur de l'ordre de 5 pour les profils d'équilibres en Sech (référence Janvier et al. 2011). Pour les profils de type Harris, le rapport critique est légèrement plus faible avec une valeur de 4.7, comme montré sur la figure 6.8. La dépendance temporelle de l'énergie cinétique suit une loi de type exponentielle double, comme montré sur la figure 6.9

Bibliographie

- [1] M. Janvier, M. Kishimoto and J.Q. Li, *Structure-Driven Nonlinear Instability as the Origin of the Explosive Reconnection Dynamics in Resistive Double Tearing Modes* (Phys. Rev. Lett. 107, 195001 (2011)).
- [2] L. Wei, F. Yu, H. J. Ren, and Z. X. Wang, *A fundamental understanding of the unstable eigenmodes of double tearing instabilities in a shear slab geometry* (AIP Advances 10, 055111 (2020)).
- [3] C. L. Zhang and Z. W. Ma, *Nonlinear evolution of double tearing mode with guiding magnetic field* (Physics of Plasmas 18, 052303 (2011)).
- [4] Y. Ishii, M. Azumi, and Y. Kishimoto, *Structure-Driven Nonlinear Instability of Double Tearing Modes and the Abrupt Growth after Long-Time-Scale Evolution* (Phys. Rev. Lett. 89, 205002 (2002)).
- [5] T. Akramov and H. Baty, *Non-linear growth of double tearing mode : Explosive reconnection, plasmoid formation, and particle acceleration* (Physics of Plasmas 24, 082116 (2017)).
- [6] H. Baty, *Explosive Magnetic Reconnection in Double-current Sheet Systems : Ideal versus Resistive Tearing Mode* (The Astrophysical Journal 837, 74 (2017)).
- [7] H. Baty, *On the explosive phase of the tearing mode in double current sheet plasmas : effect of the equilibrium magnetic configuration on the onset threshold and growth rate* (<https://arxiv.org/pdf/2107.10069.pdf> (2021)).

Annexe A

Les équations électriques de la MHD

Commençons par rappeler les équations de Maxwell dans l'approximation du vide. Elles sont constituées de l'équation de Maxwell-Gauss, qui relie le champ électrique \vec{E} à la densité volumique de charge ρ_c en chaque point de l'espace, $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_c / \epsilon_0$. Pour un plasma de type fluide, dont la description est valide sur des échelles spatiales plus grandes que les échelles caractéristiques des particules, la densité de charge est alors considérée comme nulle (c'est la quasi-neutralité) conduisant ainsi à,

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = 0.} \quad (\text{A.1})$$

La seconde équation est celle Maxwell-Ampère qui relie le champ magnétique \vec{B} à la densité de courant \vec{J} , $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Le second terme du membre de droite appelé courant de déplacement est négligeable si on s'intéresse à des vitesses caractéristiques de plasma très inférieures à la vitesse de la lumière c (car $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$, avec ϵ_0 et μ_0 les permittivité électrique et perméabilité magnétique du vide respectivement), conduisant ainsi à la seconde équation relevante pour la MHD,

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}.} \quad (\text{A.2})$$

La troisième équation est celle de Maxwell-Faraday (rendant compte des phénomènes d'induction),

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.} \quad (\text{A.3})$$

La quatrième équation exprime tout simplement la propriété de divergence nulle (dite aussi propriété solénoïdale) du champ magnétique,

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0.} \quad (\text{A.4})$$

Annexe B

MHD réduite en variables de vorticité et flux

Le jeu complet de la MHD (voir équations de base du chapitre 1 en variables \vec{V} et \vec{B}) peut grandement se simplifier en prenant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. On se place tout d'abord dans un cas où la force de gravitation est négligeable (c'est le cas de la plupart des applications dont nous parlons dans cet ouvrage). De plus, nous considérons aussi que la dynamique est bi-dimensionnelle, avec par exemple $\vec{V}(x, y, t) = (V_x(x, y, t), V_y(x, y, t))$ en coordonnées cartésiennes. C'est le cas lorsqu'un champ magnétique dominant et aligné suivant une direction (selon z) perpendiculaire à ce plan empêche les perturbations de se développer suivant cette direction. Il peut de plus arriver que la dynamique bi-dimensionnelle soit incompressible en très bonne approximation (exemple du tokamak). Ainsi $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, ou encore la densité de masse ρ reste constante en temps ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), et aussi dans le repère en mouvement ($\vec{V} \cdot \nabla \rho = 0$, c'est à dire pas de contraction ni d'élongation le long du mouvement).

En appliquant alors l'opérateur rotationnel sur l'équation de conservation du moment (il est préférable de partir de la forme de type Navier-Stokes), on fait apparaître la vorticité $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$. En utilisant alors la commutativité entre les opérateurs différentiels de temps et d'espace, on obtient,

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times [(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}] = \frac{1}{\rho} \nabla \times [(\vec{J} \times \vec{B} - \nabla P)] + \nabla \times (\nu \nabla^2 \vec{V}). \quad (\text{B.1})$$

Ensuite, on exploite que le fait que le terme $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla(V^2/2) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$, puis que son rotationnel devienne $\nabla \times [(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}] = -\nabla \times [\vec{V} \times \vec{\omega}]$. Ce terme peut alors se développer en, $-\nabla \times [\vec{V} \times \vec{\omega}] = -(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\nabla \cdot \vec{\omega}) \vec{V} + (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{\omega} = -(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega}$, car la vitesse ainsi que sa vorticité sont à divergence nulle. Finalement, on obtient que $\nabla \times [(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}] = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega}$. En effet, on a utilisé que $\vec{\omega} = \omega(x, y, t) \vec{e}_z$ et que donc $\vec{\omega} \cdot \nabla = \omega \frac{\partial}{\partial z} = 0$. Puis, en exploitant ensuite que la densité de courant électrique et le champ magnétique sont tous les deux à divergence nulle, le terme de force magnétique devient $\nabla \times (\vec{J} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{J} - (\vec{J} \cdot \nabla) \vec{B}$, puis $[\nabla \times (\vec{J} \times \vec{B})] = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{J}$. En effet, on a utilisé que $\vec{J} = J(x, y, t) \vec{e}_z$ et que donc $\vec{J} \cdot \nabla = J \frac{\partial}{\partial z} = 0$. Le terme en gradient de pression est quant à lui automatiquement à rotationnel nul, et le rotationnel du

terme dissipatif devient $\nabla \times (\nu \nabla^2 \vec{V}) = \nu \nabla \times (\nabla^2 \vec{V}) = \nu \nabla^2 (\nabla \times \vec{V})$ à condition que la viscosité soit bien sur uniforme (et car la vitesse et la vorticit     tant toutes les deux    divergence nulle). Finalement, la composante projet  e suivant z de notre   quation pour la vorticit   devient,

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{\rho} (\vec{B} \cdot \nabla) J + \nu \nabla^2 \omega.} \quad (\text{B.2})$$

Pour d  duire la vitesse \vec{V}    partir de la vorticit  , on pr  f  re passer par la fonction de flot $\phi(x, y, z)$ d  finie par la relation $\vec{V} = \nabla \phi \times \vec{e}_z$ qui s'  crit aussi $\vec{V} = \nabla \times (\phi \vec{e}_z)$ (la vitesse   tant automatiquement ainsi    divergence nulle). Par cons  quent, on utilise,

$$\nabla^2 \phi = -\omega, \quad (\text{B.3})$$

pour obtenir ϕ par integration, avant de d  duire la vitesse en utilisant les d  riv  es partielles de ϕ .

En utilisant ensuite dans l'  quation d'  volution du champ magn  tique, la relation $\vec{B} = \nabla \psi \times \vec{e}_z$ qui peut aussi s'  crire $\vec{B} = \nabla \times (\psi \vec{e}_z)$, nous pouvons alors en d  duire une   quation pour la fonction de flux ψ , en appliquant l'op  ration inverse du rotationnel et en gardant seulement la composante suivant \vec{e}_z ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (\vec{V} \times \vec{B}) \vec{e}_z - J/\sigma. \quad (\text{B.4})$$

Ainsi en utilisant la d  finition de J , via $\vec{J} = (\nabla \times \vec{B})/\mu_0$, nous obtenons,

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \psi = \eta \nabla^2 \psi,} \quad (\text{B.5})$$

avec $\eta = 1/(\mu_0 \sigma)$. Il faut remarquer que cette derni  re   quation reste valide m  me si η n'est pas uniforme. Enfin, nous avons besoin de d  duire la densit   de courant J , qui pourra alors   tre obtenue simplement en utilisant la loi d'Amp  re, conduisant   ,

$$J = -\frac{\nabla^2 \psi}{\mu_0}. \quad (\text{B.6})$$

R  sum   du mod  le : Le mod  le peut alors se r  sumer   ,

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \omega = (\vec{B} \cdot \nabla) J + \nu \nabla^2 \omega, \quad \nabla^2 \phi = -\omega,} \quad (\text{B.7})$$

pour la partie hydrodynamique, d  termin  e par $\omega(x, y, t)$ et $\phi(x, y, t)$, et pour laquelle on utilise une normalisation des variables ou encore des unit  s telles que $\rho = 1$. La partie magn  tique, quant    elle, se r  sume   ,

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \psi = \eta \nabla^2 \psi, \quad J = -\nabla^2 \psi,} \quad (\text{B.8})$$

d  termin  e par $\psi(x, y, t)$ et $J(x, y, t)$, et pour laquelle on utilise une normalisation telle que $\mu_0 = 1$. On peut remarquer que l'  quation pour la fonction de flux magn  tique ψ est en fait une   quation d'advection-diffusion pure, alors que celle de la vorticit   ω est une   quation d'advection-diffusion avec un terme source magn  tique impliquant le champ magn  tique ainsi que sa densit   de courant associ  e.

Remarque sur la normalisation des équations : La densité de courant électrique J est en fait $\mu_0 J$ (voir équation d'Ampère), et la vorticité ω est en fait $\rho\omega$ (voir équation de type Navier-Stokes). Il faudra en tenir compte pour évaluer les valeurs numériques des différents quantités physiques.

Autres formes mathématiques équivalentes : Les deux équations principales précédentes peuvent aussi s'écrire,

$$\boxed{\frac{\partial\omega}{\partial t} + [\omega, \phi] = [J, \psi] + \nu\nabla^2\omega, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} + [\psi, \phi] = \eta\nabla^2\psi,} \quad (\text{B.9})$$

en utilisant la définition des crochets de Poisson, $[f, g] \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$, appliqués sur deux fonctions quelconques f et g .

Autres choix pour les fonctions ϕ et ψ : Enfin, il faut aussi noter qu'un autre choix reliant les fonctions (ϕ, ψ) aux champs vectoriels est possible, en prenant la convention $\vec{V} = -\nabla\phi \times \vec{e}_z$ et $\vec{B} = -\nabla\psi \times \vec{e}_z$, et conduisant alors aux mêmes équations pour (ϕ, ψ) mais à $\omega = \nabla^2\phi$ et $J = \nabla^2\psi$. Ce second choix est lié à la définition des potentiels vecteurs dont dérivent \vec{V} et \vec{B} , avec ici $\vec{V} = \nabla \times (-\phi\vec{e}_z)$ et $\vec{B} = \nabla \times (-\psi\vec{e}_z)$. Précédemment, nous avons $\vec{V} = \nabla \times (\phi\vec{e}_z)$ et $\vec{B} = \nabla \times (\psi\vec{e}_z)$. Ainsi, avec ce second choix, les équations deviennent en utilisant les crochets de Poisson,

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + [\phi, \omega] = [\psi, J] + \nu\nabla^2\omega, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} + [\phi, \psi] = \eta\nabla^2\psi. \quad (\text{B.10})$$

Les équations équivalentes utilisant les champs vectoriels \vec{B} et \vec{V} demeurent inchangées, mais avec un changement de signe pour les équations de Poisson,

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\omega = (\vec{B} \cdot \nabla)J + \nu\nabla^2\omega, \quad \nabla^2\phi = \omega, \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\psi = \eta\nabla^2\psi, \quad J = \nabla^2\psi. \quad (\text{B.12})$$

On trouve aussi parfois des conventions mixtes, où le premier choix de convention s'applique seulement à un des deux vecteurs et l'autre choix s'applique à l'autre vecteur. Il faut faire attention, car des différents choix dans la littérature conduisent à de nombreuses confusions et/ou erreurs d'écriture.

Annexe C

MHD réduite en variables de vorticité et de courant

Pour ce second modèle réduit, l'équation pour la vorticité obtenue pour le premier modèle est la même,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{\rho} (\vec{B} \cdot \nabla) J + \nu \nabla^2 \omega. \quad (\text{C.1})$$

Par contre, au lieu d'utiliser la fonction de flux magnétique ψ , on peut aussi utiliser la densité de courant électrique J qui est l'équivalent de la vorticité pour la partie magnétique. Pour obtenir ainsi la seconde équation pour J , il suffit d'appliquer l'opérateur rotationnel sur l'équation d'évolution du champ magnétique, et d'utiliser la commutativité entre les opérateurs différentiels de temps et d'espace. Il est aussi équivalent de partir de l'équation pour ψ et d'appliquer l'opérateur Laplacien. Pour ce faire, nous pouvons partir de l'équation utilisant les crochets de Poisson et utiliser la propriété mathématique,

$$\nabla^2 [\psi, \phi] = [\nabla^2 \psi, \phi] + [\psi, \nabla^2 \phi] + 2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + 2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]. \quad (\text{C.2})$$

Ainsi, nous obtenons

$$-\frac{\partial J}{\partial t} + [\nabla^2 \psi, \phi] + [\psi, \nabla^2 \phi] + 2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + 2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = \nabla^2 (\eta \nabla^2 \psi), \quad (\text{C.3})$$

avec $\mu_0 = 1$. Finalement, nous obtenons (utilisant $J = -\nabla^2 \psi$ et $\nabla^2 \phi = -\omega$),

$$\frac{\partial J}{\partial t} + [J, \phi] + [\psi, \omega] - 2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] - 2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = \eta \nabla^2 J, \quad (\text{C.4})$$

en considérant η homogène. Et enfin,

$$\frac{\partial J}{\partial t} + [J, \phi] = g(\phi, \psi) + [\omega, \psi] + \eta \nabla^2 J, \quad (\text{C.5})$$

avec $g(\phi, \psi) = 2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + 2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]$ qui peut aussi s'écrire de façon équivalente $g(\phi, \psi) = 2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right]$. Nous pouvons réintroduire les vecteurs \vec{V} et \vec{B} , pour aboutir à,

$$\frac{\partial J}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) J = (\vec{B} \cdot \nabla) \omega + \eta \nabla^2 J + g(\phi, \psi). \quad (\text{C.6})$$

Résumé du modèle : Le modèle peut alors se résumer à,

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \omega = (\vec{B} \cdot \nabla) J + \nu \nabla^2 \omega, \quad \nabla^2 \phi = -\omega} \quad (\text{C.7})$$

pour la partie hydrodynamique, déterminée par $\omega(x, y, t)$ et $\phi(x, y, t)$, et pour laquelle on utilise une normalisation des variables ou encore des unités telles que $\rho = 1$. La partie magnétique, quant à elle, se résume à,

$$\boxed{\frac{\partial J}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) J = (\vec{B} \cdot \nabla) \omega + \eta \nabla^2 J + g(\phi, \psi), \quad \nabla^2 \psi = -J,} \quad (\text{C.8})$$

déterminée par $\psi(x, y, t)$ et $J(x, y, t)$, et pour laquelle on utilise une normalisation telle que $\mu_0 = 1$. Le terme source g est alors défini par,

$$g(\phi, \psi) = 2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right]. \quad (\text{C.9})$$

Annexe D

Théorème d'Alfvén ou loi du flux gelé en MHD parfaite

Nous considérons un circuit C placé dans le plasma/fluide, donc mobile et se déplaçant avec le fluide. Au temps $t = t_0$, ce circuit occupe la position C_0 , et au temps $t = t_1 = t_0 + dt$, il occupe la position C_1 par un déplacement de chacun de ses points. Par exemple, le point de C_0 situé en M_0 à t_0 se retrouve en M_1 sur C_1 à $t_0 + dt$, car il s'est déplacé de $V dt$ (V étant la vitesse du plasma en M_0 à t_0). Ainsi, le mouvement du circuit avec le plasma engendre un volume τ pendant dt qui est enfermé dans la surface $S_0 \cup S_1 \cup S_l$, constituée des 2 surfaces ouvertes S_0 et S_1 couvrant C_0 et C_1 respectivement, et de la surface latérale complémentaire S_l (voir schéma sur la figure D.1).

Nous pouvons tout d'abord noter que le champ magnétique étant à divergence nulle à tout instant (donc en particulier à $t_1 = t_0 + dt$), nous avons,

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{B}(t_1) d\tau = 0. \quad (\text{D.1})$$

L'utilisation du théorème de Green-Ostrogradski (appelé aussi théorème de la divergence) conduit alors à,

$$\int_{S_0} \vec{B}(t_1) \cdot d\vec{S}_0 + \int_{S_1} \vec{B}(t_1) \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_l} \vec{B}(t_1) \cdot d\vec{S}_l = 0. \quad (\text{D.2})$$

Or $\vec{B}(t_1) = \vec{B}(t_0) + (t_1 - t_0) \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ par vertu du développement de Taylor (notre calcul se faisant bien sûr au premier ordre). De plus, $d\vec{S}_l = d\vec{l} \times \vec{V}(t_0)(t_1 - t_0)$. D'où,

$$\int_{S_0} \vec{B}(t_0) \cdot d\vec{S}_0 + \int_{S_1} \vec{B}(t_1) \cdot d\vec{S}_1 + (t_1 - t_0) \left[\int_{S_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_0 + \int_{S_l} (d\vec{l} \times \vec{V}) \cdot \vec{B}(t_1) \right] = 0. \quad (\text{D.3})$$

Nous voyons donc apparaître les flux du champ magnétique à t_0 et à $t_1 = t_0 + dt$ notés Φ_0 et Φ_1 respectivement, $\Phi_0 = \int_{S_0} \vec{B}(t_0) \cdot d\vec{S}_0 = \int_{S_0} \vec{B}_0 \cdot d\vec{S}_0$, et $\Phi_1 = - \int_{S_1} \vec{B}(t_1) \cdot d\vec{S}_1 = - \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1$. Le signe $-$ pour le second flux provient du choix d'orientation dans notre définition du flux au travers d'une surface ouverte.

Nous pouvons ainsi écrire,

$$\Phi_0 - \Phi_1 + dt \left[\int_{S_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_0 + \oint_{C_0} (\vec{V} \times \vec{B}_1) \cdot d\vec{l} \right] = 0, \quad (\text{D.4})$$

et pour la dernière intégrale remplacer $B_1 \simeq B_0$ car l'élément dl étant déjà au premier ordre, pour obtenir,

$$\Phi_0 - \Phi_1 + dt \left[\int_{S_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_0 + \oint_{C_0} (\vec{V} \times \vec{B}_0) \cdot d\vec{l} \right] = 0. \quad (\text{D.5})$$

Nous avons évidemment utilisé la notation $B_0 \equiv B(t_0)$ et $B_1 \equiv B(t_1)$. La dernière étape consiste à utiliser l'équation de Maxwell-Faraday, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}$ dans la première intégrale puis à utiliser le théorème de la circulation (on fera attention au sens de circulation qui donnera un signe moins supplémentaire) pour aboutir à,

$$\Phi_0 - \Phi_1 + dt \left[\oint_{C_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_{C_0} (\vec{V} \times \vec{B}_0) \cdot d\vec{l} \right] = 0. \quad (\text{D.6})$$

Enfin, la relation de MHD parfaite $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}_0 = \vec{0}$ permet d'annuler la somme des deux intégrales. Ce qui enfin aboutit à la conservation du flux, $\Phi_0 = \Phi_1$.

Ce résultat est appelé théorème d'Alfvén et traduit que le flux à travers un circuit se déplaçant avec le plasma reste constant pour un milieu infiniment conducteur. Ce théorème est aussi appelé loi du flux gelé dans la littérature. En effet, une conséquence de ce théorème que nous ne démontrerons pas dans cet ouvrage est que, l'ensemble des particules de plasma situées sur une même ligne de champ magnétique à l'instant t resteront sur une même ligne de champ à tout instant ultérieur. Ainsi, pour pouvoir se séparer, il faudrait par exemple que la ligne de champ perde son intégrité conduisant alors à un changement topologique. C'est pourquoi on dit que **tout changement topologique est interdit en MHD parfaite**. Des représentations d'évolutions autorisées versus évolutions interdites en MHD parfaite sont schématisées sur la figure D.2.

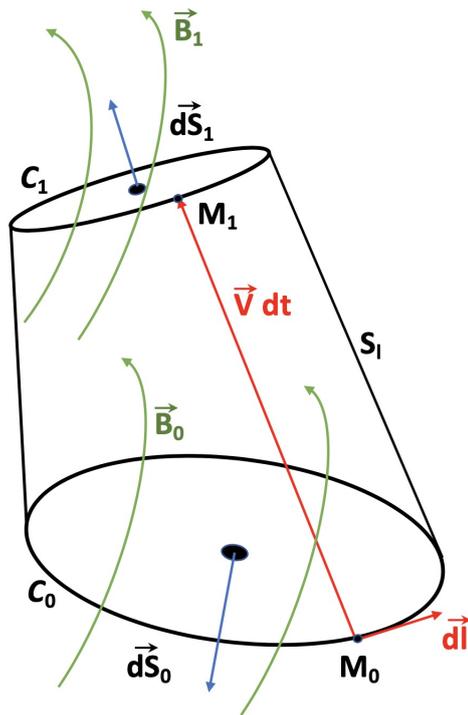


FIGURE D.1 – Illustration schématique d'un circuit C_0 plongé dans le plasma à $t = t_0$ sur lequel s'appuie une surface S_0 , et se déplaçant avec le fluide (vitesse V_0 prise à t_0) pour se retrouver à l'instant $t_1 = t_0 + dt$ en C_1 (surface correspondante S_1). Un volume est ainsi engendré à t_1 enfermé par $S_0 \cup S_1 \cup S_l$, où S_l est une surface latérale engendrée par $\vec{dl} \times \vec{V}(t_0)(t_1 - t_0)$. On s'intéressera aux flux du champ magnétique \vec{B}_0 au travers de S_0 à $t = t_0$ et de \vec{B}_1 au travers de S_1 à $t = t_1$. On fera attention à l'orientation des surfaces ouvertes pour définir les flux associés (voir texte).

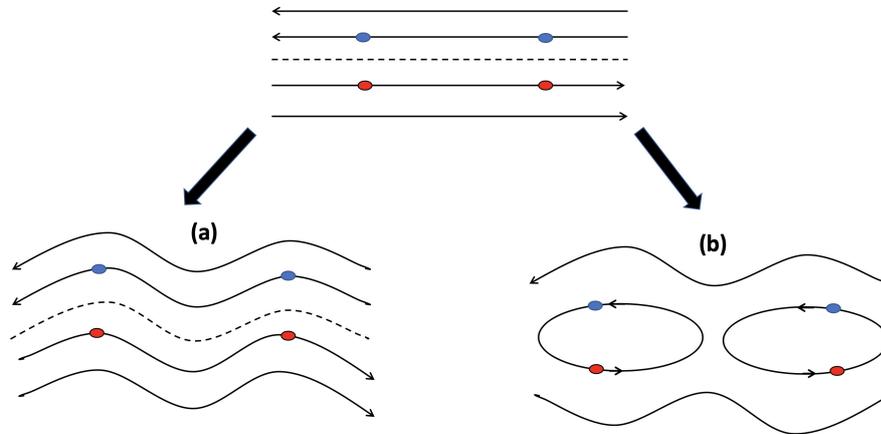


FIGURE D.2 – Illustration schématique d’une configuration magnétique planaire initiale (4 lignes de champ sont représentées sur la figure du haut), évoluant possiblement vers une configuration autorisée en MHD parfaite (figure a) ou vers une configuration interdite (figure b). On peut alors constater comment deux particules fluides bleues et deux autres particules rouges peuvent rester ou pas sur une même ligne de champ respectivement. L’évolution (b) sera autorisée en MHD résistive et est appelée déchirement magnétique.

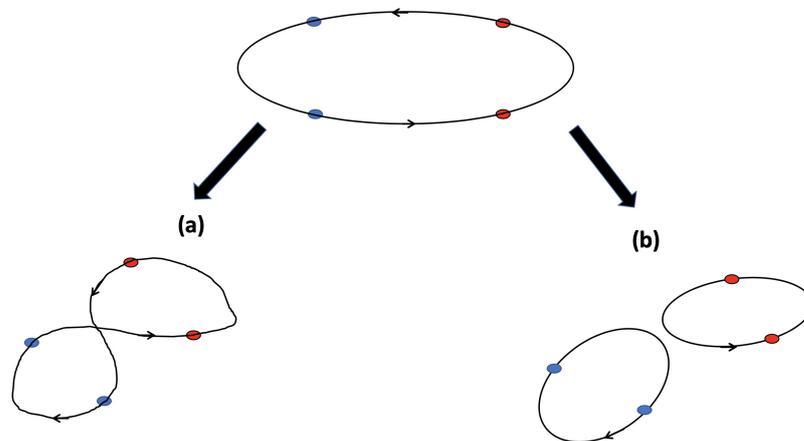


FIGURE D.3 – Illustration schématique d’une configuration magnétique initiale (ligne de champ circulaire sur la figure du haut), évoluant possiblement vers une configuration autorisée en MHD parfaite (figure a) ou vers une configuration interdite (figure b). On peut alors constater comment deux particules fluides bleues et deux autres particules rouges peuvent se recombinaer ou pas sur une même ligne de champ respectivement.

Annexe E

Le modèle de Kadomtsev

Le but de cette annexe est de présenter le modèle de Kadomtsev, qui est le pendant du modèle de Sweet-Parker, appliqué à l'évolution non linéaire du kink interne dans la géométrie cylindrique équivalente du tokamak. L'article original date de 1975 et a été publié sous le titre : Disruptive instability in tokamaks.

En géométrie cylindrique, le kink interne (mode $m = n = 1$) est instable lorsque le facteur de sécurité $q(r) = rB_z/(RB_\theta)$ associé à l'équilibre MHD devient plus petit que l'unité dans une région interne $r \leq r_s$. Le rayon résonant r_s définit ainsi la surface $q = 1$ au travers de laquelle le flux hélicoïdal $\psi_0^h(r)$ est maximum. C'est aussi le flux du champ magnétique auxiliaire (ou champ hélicoïdal) d'amplitude $B^h = r\vec{k} \cdot \vec{B} = (1 - q)B_\theta$ qui s'annule donc à la surface résonante $q = 1$, où le nombre d'onde du mode est donné par $\vec{k} = \vec{u}_\theta/R - \vec{u}_z/r$. On rappelle que la longueur du cylindre équivalent est $L = 2\pi R$. Pour se fixer les idées, nous prenons une forme précise de type parabolique pour le facteur de sécurité,

$$q(r) = [1 + (1/q_0 - 1)(1 - r^2/r_s^2)]^{-1}, \quad (\text{E.1})$$

vérifiant comme attendu $q(r_s) = 1$. Le flux hélicoïdal correspondant s'écrit alors,

$$\psi_0^h(r) = \alpha \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{r^2}{2r_s^2} \right), \quad (\text{E.2})$$

avec $\alpha = (1/q_0 - 1)B_z/R$. Les allures correspondantes de q , ψ_0^h , et B_θ sont visibles sur les figure F.2, où nous avons pris $B_z/R = 1$, $r_s = 0.5$, et $q_0 = 0.8$, ou encore $\alpha = 0.25$. Nous pouvons ainsi constater le caractère non monotone du flux avec un maximum local en $r = r_s$, de valeur $\alpha r_s^2/4 = 0.0156$, conduisant à deux rayons (r_1 et r_2) de part et d'autre du rayon résonant possédant la même valeur de flux (voir figure avec un flux de 0.01). Nous avons aussi tracé le champ $B_\theta = B_z r/R + \alpha r(r_s^2 - r^2)/r_s^2$ de façon à le comparer à $B_z r/R$. Nous constatons ainsi que la composante azimuthale présente un excès (pour $r < r_s$) par rapport à $B_z r/R$, qui est justement la valeur du champ hélicoïdal, et aussi l'origine de l'instabilité.

Les propriétés du mécanisme de reconnexion ont été remarquablement décrites par Kadomtsev. En effet, le mécanisme permet de combiner deux régions autour de r_1 et r_2 possédant le même flux pour former une nouvelle région autour de r . Les deux hypothèses sont que tout d'abord l'aire des régions se

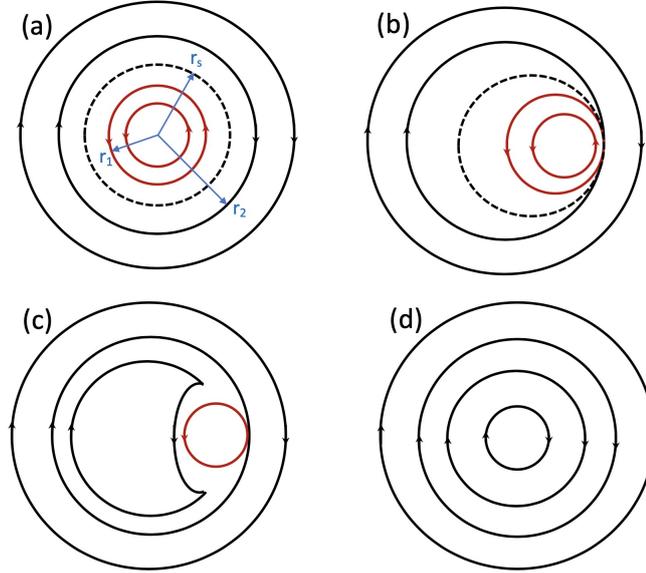


FIGURE E.1 – Schéma illustratif représentant les surfaces de flux pour l'équilibre initial (kink instable) en (a), le début de la reconnexion en (b), pendant la reconnexion (c), après la reconnexion (d). La surface résonante est indiquée en pointillé pour $r = r_s$. Les flèches indiquent le sens du champ auxiliaire.

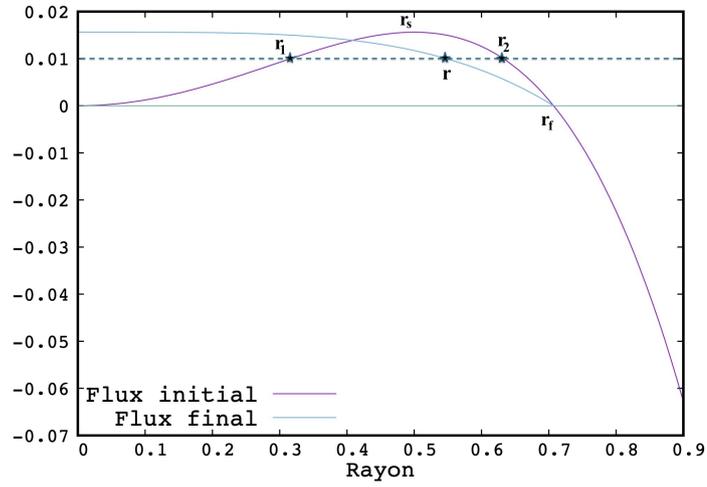


FIGURE E.2 – Exemple de dépendance radiale de la fonction de flux hélicoïdale, initiale et après reconnexion. La surface résonante est située en $r = r_s$ et la région affectée par la redistribution est située dans $r < r_f = \sqrt{2}r_s$. La ligne pointillée verticale passant par r_1 et r_2 indique deux surfaces initiales de même flux qui après reconnexion produiront une nouvelle surface de rayon r .

conserve, puis que le flux aussi se conserve (car le processus est suffisamment rapide par rapport à la diffusion pure). Ainsi, pour l'aire,

$$r_1 |dr_1| + r_2 |dr_2| = r |dr|, \quad (\text{E.3})$$

s'intègre en $r_2^2 - r_1^2 = r^2$, car pour $dr > 0$, $dr_1 < 0$ et $dr_2 > 0$ (ceci pourra se vérifier à posteriori). La conservation du flux $d\psi^h$ conduit à,

$$d\psi^h = \frac{d\psi_0^h}{dr} \Big|_{r=r_1} dr_1 = \frac{d\psi_0^h}{dr} \Big|_{r=r_2} dr_2 = \frac{d\psi_f^h}{dr} dr, \quad (\text{E.4})$$

avec $\psi_f^h(r)$ le flux final après reconnexion, qu'il reste à déduire. L'utilisation de l'égalité de gauche dans l'équation ci-dessus permet d'obtenir,

$$\frac{dr_1^2}{dr} (1 - r_1^2/r_s^2) = \frac{dr_2^2}{dr} (1 - r_2^2/r_s^2), \quad (\text{E.5})$$

puis en utilisant le résultat de l'intégration de l'aire,

$$\frac{dr_1^2}{dr} (1 - r_1^2/r_s^2) = \left(\frac{dr_1^2}{dr} + 2r \right) [1 - (r_1^2 + r^2)/r_s^2]. \quad (\text{E.6})$$

Après remise en forme nous avons,

$$r \frac{dr_1^2}{dr} = 2(r_s^2 - r^2 - r_1^2), \quad (\text{E.7})$$

dont la solution est $r_1^2 = r_s^2 - r^2/2$ et $r_2^2 = r_s^2 + r^2/2$. Enfin, l'utilisation de l'égalité de droite pour la conservation du flux permet d'obtenir,

$$\frac{d\psi_f^h}{dr} = \frac{d\psi_0^h}{dr} \Big|_{r=r_2} dr_2/dr = \frac{r}{2r_2} \frac{d\psi_0^h}{dr} \Big|_{r=r_2} = -\frac{\alpha}{2} \frac{r^3}{2r_s^2} \quad (\text{E.8})$$

conduisant à par intégration,

$$\psi_f^h(r) = -\frac{\alpha}{16r_s^2} r^4 + \psi_f^h(0), \quad (\text{E.9})$$

ou encore à l'expression finale en utilisant $\psi_f^h(0) = \psi_0^h(r_s) = \alpha r_s^2/4$,

$$\psi_f^h(r) = \frac{\alpha r_s^2}{4} \left(1 - \frac{r^4}{4r_s^4} \right). \quad (\text{E.10})$$

Le facteur de sécurité final correspondant est,

$$q_f(r) = \left[1 - (1/q_0 - 1) \frac{r^2}{4r_s^2} \right]^{-1}, \quad (\text{E.11})$$

et le champ azimuthal final est,

$$B_\theta^f = B_z r/R - \alpha \frac{r^3}{4r_s^2}. \quad (\text{E.12})$$

Nous pouvons noter que la reconnexion envahira la région jusqu'au rayon final $r_f = \sqrt{2}r_s$, défini à partir de $\psi_0^h(r_f) = 0$. Les solutions finales sont représentées sur les figures. On y voit notamment, qu'après reconnexion, le flux devient

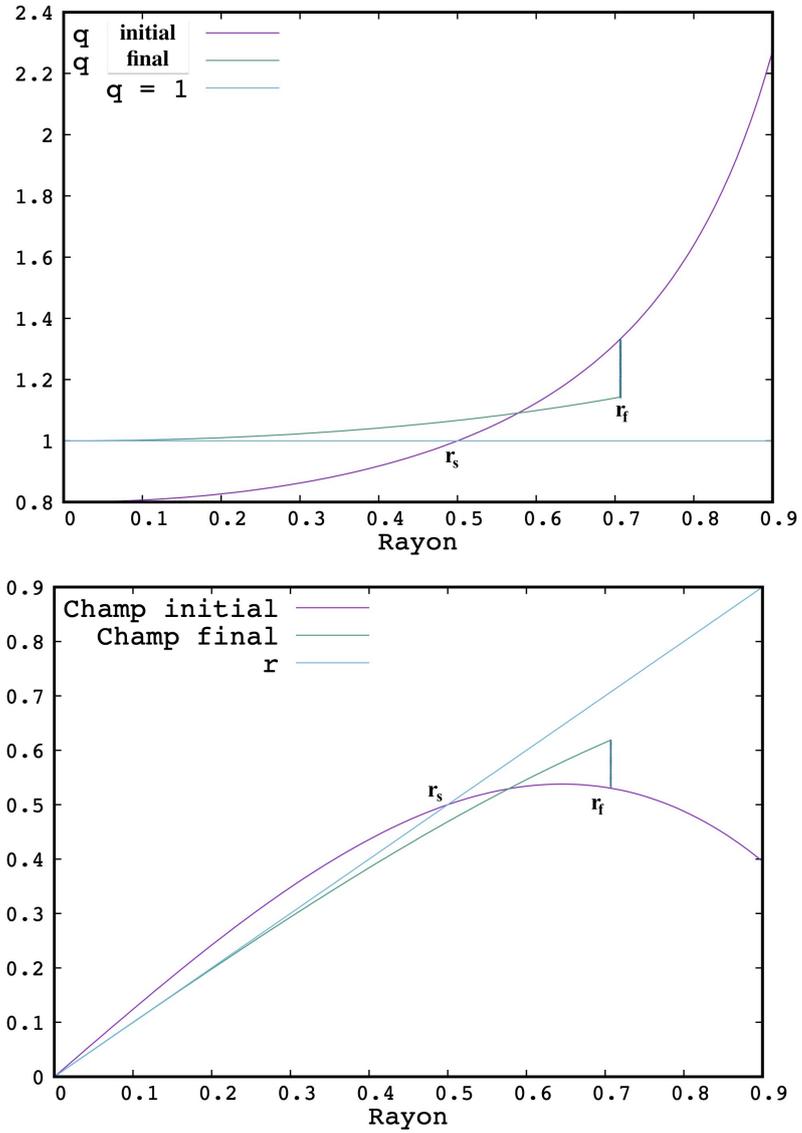


FIGURE E.3 – (Haut) Profil du facteur de sécurité initial $q(r)$ et final $q^f(r)$ (après reconnexion). (Bas) Champ magnétique azimuthal initial $B_\theta(r)$ et final $B_\theta^f(r)$.

monotone décroissant et que le champ azimuthal croit moins vite que $B_z r/R$. Cependant, comme les solutions doivent se raccorder à la solution initiale pour $r > r_f$, la dérivée de flux est discontinue en r_f engendrant ainsi des discontinuités de q_f et de B_θ^f , mais qui seront rapidement régularisées par la diffusion résistive.

La vitesse de reconnexion a été remarquablement obtenue par Kadomtsev de façon intuitive, en faisant l'hypothèse que le processus devait se dérouler sur une échelle de temps caractéristique étant la moyenne géométrique du temps caractéristique de diffusion et du temps d'Alfvén. Et c'est aussi le résultat qui découle du modèle de Sweet-Parker à condition de l'adapter à la géométrie.

Annexe F

Le principe d'énergie en MHD parfaite

Cas de la MHD complète. Pour déterminer la stabilité d'un système, plusieurs méthodes sont possibles. On peut bien sûr résoudre les équations linéarisées et chercher les solutions stables de la même façon que l'on cherche les solutions instables. Celles-ci sont alors purement oscillantes pour un milieu sans dissipation au lieu de purement croissantes en amplitude, ce sont par exemples des ondes. La transition entre les deux types de modes représente alors le seuil de stabilité du système. On peut aussi utiliser la méthode du principe d'énergie appliqué à la MHD. Ce dernier peut se comprendre à partir de l'analogie mécanique habituellement utilisée, de la bille en équilibre dans un creux ou une bosse (voir figure F.1). Ainsi, une configuration d'équilibre stable (à gauche) correspond à une courbure du potentiel positive, alors que la courbure est négative pour la configuration instable. En pratique on écrit que la variation $\delta W(\vec{\xi})$ de l'énergie potentielle W associée au déplacement élémentaire $\vec{\xi}(\vec{r})$ de la bille (depuis sa position d'équilibre) dans le cas instable est alors caractérisée par,

$$\boxed{\delta W^{(1)} = 0, \delta W^{(2)} < 0} \quad (\text{F.1})$$

dans le cas instable, car la variation première est nulle (équilibre) et la variation seconde donne le signe de la courbure. Ceci est aussi en accord avec le fait que l'énergie totale étant supposée constante (système isolé), la variation d'énergie cinétique associée est positive pour un système instable. Ainsi le principe dit qu'un système sera stable si quelque soit le déplacement, la variation associée d'énergie potentielle est positive. A contrario, s'il existe un déplacement pour lequel cette variation est négative, alors le système est instable.

Etant donné la difficulté pratique d'envisager un très grand nombre de déplacements possibles, une solution consiste à chercher le déplacement qui rend δW minimal, puis à examiner le signe de δW associé à ce déplacement. Si c'est positif, alors la configuration est stable. Si c'est négatif, la configuration est instable, et on aura alors des informations sur le mode au travers du déplacement correspondant (mode propre) ainsi que sur le taux de croissance (via la valeur exacte de δW).

L'énergie potentielle d'un système MHD (utilisant pour l'énergie interne celle

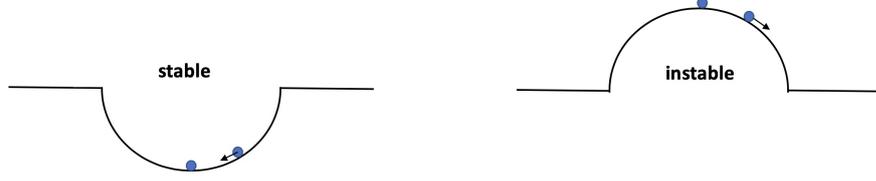


FIGURE F.1 – Illustration schématique de la stabilité linéaire d’une configuration en utilisant l’analogie mécanique de la bille en équilibre sur un creux ou sur une bosse de potentiel (point selle). A gauche, si on écarte la bille de sa position d’équilibre, elle tend à y retourner en oscillant. A droite, elle s’en écarte définitivement.

d’un plasma parfait de coefficient adiabatique Γ) sans gravitation s’écrit,

$$W = \int \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{P}{\Gamma - 1} \right) d^3r \quad (\text{F.2})$$

conduisant alors à sa variation (qui est donc une variation d’ordre 1),

$$\delta W^{(1)} = \int \left(\frac{\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_0}{\mu_0} + \frac{P_1}{\Gamma - 1} \right) d^3r, \quad (\text{F.3})$$

avec B_1 et P_1 les variations d’ordre 1 du champ magnétique et de la pression thermique respectivement, et B_0 le champ magnétique de l’équilibre statique. B_1 et P_1 peuvent s’exprimer à partir d’une variable commune, le déplacement ou plutôt le champ de déplacement $\vec{\xi}(\vec{r})$. En effet, la linéarisation de l’équation de continuité conduit à,

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{V}) = 0, \quad (\text{F.4})$$

qui s’intègre (par rapport au temps) en,

$$\rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \int \vec{V} dt) = 0, \quad (\text{F.5})$$

puis conduisant à (utilisant la définition du déplacement qui est la primitive de la vitesse),

$$\rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) = 0. \quad (\text{F.6})$$

De même, la linéarisation de l’équation d’évolution adiabatique conduit à,

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla P_0 = -\Gamma P_0 \nabla \cdot \vec{V}, \quad (\text{F.7})$$

aboutissant une fois intégré à,

$$P_1 + \vec{\xi} \cdot \nabla P_0 = -\Gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi}. \quad (\text{F.8})$$

Pour l’équation d’évolution du champ magnétique, le même raisonnement permet d’obtenir,

$$\vec{B}_1 = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0). \quad (\text{F.9})$$

L'introduction des quantités perturbées à l'ordre 1 dans $\delta W^{(1)}$ permet alors d'écrire,

$$\delta W^{(1)} = \int \left(\frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) - \frac{\vec{\xi} \cdot \nabla P_0 + \Gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi}}{\Gamma - 1} \right) d^3 r. \quad (\text{F.10})$$

Nous pouvons faire apparaître un maximum de termes impliquant l'opérateur divergence en écrivant,

$$\frac{\Gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi}}{\Gamma - 1} = \nabla \cdot \left(\frac{\Gamma P_0 \vec{\xi}}{\Gamma - 1} \right) - \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \vec{\xi} \cdot \nabla P_0, \quad (\text{F.11})$$

puis,

$$-\frac{\Gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi}}{\Gamma - 1} - \frac{1}{\Gamma - 1} \vec{\xi} \cdot \nabla P_0 = -\nabla \cdot \left(\frac{\Gamma P_0 \vec{\xi}}{\Gamma - 1} \right) + \vec{\xi} \cdot \nabla P_0. \quad (\text{F.12})$$

De même, nous avons,

$$\vec{B}_0 \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) = \nabla \cdot \left((\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0 \right) + (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \cdot \nabla \times \vec{B}_0, \quad (\text{F.13})$$

puis,

$$\vec{B}_0 \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) = \nabla \cdot \left((\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0 \right) - \vec{\xi} \cdot (\mu_0 \vec{J}_0 \times \vec{B}_0). \quad (\text{F.14})$$

Ainsi, après ré-écriture de la variation de l'énergie potentielle (et ré-agencement du produit mixte faisant apparaître la densité de courant), nous obtenons,

$$\delta W^{(1)} = \int \nabla \cdot \left[\frac{-\Gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi}}{\Gamma - 1} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0 \right] d^3 r + \int \vec{\xi} \cdot (\nabla P_0 - \vec{J}_0 \times \vec{B}_0) d^3 r. \quad (\text{F.15})$$

La seconde intégrale est nulle pour un équilibre statique (somme des deux forces nulle). La première intégrale se transforme en utilisant le théorème flux-divergence de Green-Ostrogradski en une intégrale de surface du flux du vecteur entre crochet au travers de la surface fermée enfermant le dit volume. Pour un système isolé de l'extérieur, cette intégrale est aussi nulle car $\vec{\xi} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{B}_0 \cdot \vec{n} = 0$ (\vec{n} étant le vecteur unitaire normal à la surface). Ainsi, comme attendu, $\delta W^{(1)} = 0$.

En ce qui concerne le calcul de la variation d'ordre 2, nous pouvons partir de,

$$\delta W^{(2)} = \int \left(\frac{\vec{B}_2 \vec{B}_0}{\mu_0} + \frac{B_1^2}{2\mu_0} + \frac{P_2}{\Gamma - 1} \right) d^3 r. \quad (\text{F.16})$$

Cependant le calcul est assez pénible à cause des termes d'ordre 2, et il est plus aisé de partir d'une autre expression à partir de l'opérateur des petits mouvements (voir ci-dessous). En effet, la variation d'énergie potentielle provient aussi du travail résistant (travail des forces résistant au déplacement),

$$\delta W^{(2)} = - \int d^3 r \int dt \vec{F}(\vec{\xi}) \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}, \quad (\text{F.17})$$

avec $\vec{F}(\vec{\xi})$ la force de rappel associée au déplacement hors équilibre $d\vec{\xi} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} dt$. L'opérateur de force est auto-adjoint (ce que nous admettrons car la démonstration n'est pas très simple), c'est à dire,

$$\vec{\xi}_1 \cdot \vec{F}(\vec{\xi}_2) = \vec{\xi}_2 \cdot \vec{F}(\vec{\xi}_1), \quad (\text{F.18})$$

quel que soient $\vec{\xi}_1$ et $\vec{\xi}_2$. Par conséquent, en appliquant à $\vec{\xi}_1 = \vec{\xi}$ et $\vec{\xi}_2 = \dot{\vec{\xi}}$ (en utilisant la notation de la dérivée temporelle du déplacement),

$$\delta W^{(2)} = - \int d^3r \int dt \frac{1}{2} \left[\vec{F}(\vec{\xi}) \cdot \dot{\vec{\xi}} + \vec{F}(\dot{\vec{\xi}}) \cdot \vec{\xi} \right], \quad (\text{F.19})$$

conduisant à,

$$\boxed{\delta W^{(2)} = - \frac{1}{2} \int d^3r \left[\vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) \right]}. \quad (\text{F.20})$$

On vérifie bien que lorsque $\vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) > 0$, donc lorsque la force de rappel pointe dans la même direction que le déplacement, la variation d'énergie potentielle est négative (mode instable).

La force de rappel peut être obtenue de plusieurs façons. En effet, la force peut-être déduite la linéarisation des différentes équations MHD (de continuité, énergie, champ magnétique) donnant les quantités perturbées à l'ordre 1 (\vec{B}_1, ρ_1, P_1) exprimées en fonction de $\vec{\xi}$, et injectées dans l'équation du moment pour aboutir à l'équation dite, des petits mouvements, et s'écrivant,

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F}(\vec{\xi})}. \quad (\text{F.21})$$

Ce qui donne un principe de dynamique avec l'expression cherchée pour \vec{F} . Cette méthode étant relativement longue, on peut tout simplement affirmer que \vec{F} est formée des différentes densités de force (de pression thermique et magnétique) d'ordre 1, c'est à dire,

$$\vec{F}(\vec{\xi}) = \nabla P_1 + \vec{J}_0 \times \vec{B}_1 + \vec{J}_1 \times \vec{B}_0. \quad (\text{F.22})$$

Utilisant ensuite les expressions des perturbations P_1 et \vec{B}_1 en fonction de $\vec{\xi}$ (voir ci-dessus), nous obtenons,

$$\vec{F}(\vec{\xi}) = \nabla \left(\vec{\xi} \cdot \nabla P_0 \right) + \nabla \left(\Gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left[\nabla \times \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \right] \times \vec{B}_0 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}_0) \times \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0). \quad (\text{F.23})$$

Après quelques développements mathématiques et utilisant le théorème flux-divergence, pour simplifier l'expression dans le cas de systèmes isolés, nous avons (d'après Bernstein 1958),

$$\delta W^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3r \left[\left[(\Gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi} + \vec{\xi} \cdot \nabla P_0) \nabla \cdot \vec{\xi} \right] + \left[\frac{Q^2}{\mu_0} - (\vec{J}_0 \times \vec{Q}) \cdot \vec{\xi} \right] \right], \quad (\text{F.24})$$

avec $\vec{Q} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)$. Les deux termes dans l'intégrale dépendent des répartitions spatiales de l'équilibre d'origine thermique (via P_0) et magnétique (via \vec{J}_0) respectivement. Les instabilités sont ainsi parfois classifiées en de type

pression ou de type courant suivant la dominance du terme principal participant à rendre cette variation d'énergie négative. Ainsi, nous constatons que les instabilités incompressibles sont alors de type courant.

Il est aussi possible de relier $\delta W^{(2)}$ aux modes propres et notamment au taux de croissance linéaire du mode le plus instable γ par,

$$\boxed{\gamma^2 = -\frac{2\delta W_{min}^{(2)}}{\int d^3r \rho_0 \|\vec{\xi}\|^2}}, \quad (\text{F.25})$$

obtenu en reliant $\delta W^{(2)}$ à la variation d'énergie cinétique $K^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho_0 \vec{\xi} \cdot \vec{\xi}$ (l'énergie totale étant constante). Le déplacement $\vec{\xi}$ dans la formule ci-dessus est celui particulier associé au mode rendant $\delta W^{(2)}$ minimal et égal à $\delta W_{min}^{(2)}$.

Cas de la MHD réduite.

L'équation d'évolution linéarisée (à résistivité nulle) pour la perturbation de la fonction de flux ψ_1 est,

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \psi_0 = 0, \quad (\text{F.26})$$

qui peut aussi s'écrire,

$$\psi_1 = -\vec{\xi} \cdot \nabla \psi_0, \quad (\text{F.27})$$

en intégrant en temps pour faire apparaître le déplacement. On peut aussi utiliser une fonction scalaire u telle que $\vec{\xi} = \nabla u \times \vec{e}_z = \nabla \times (u \vec{e}_z)$ conduisant à,

$$\psi_1 = \vec{B}_0 \cdot \nabla u. \quad (\text{F.28})$$

L'équation d'évolution linéarisée (à viscosité nulle) pour la perturbation de vorticit e ω est,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{J}_1 + (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{J}_0, \quad (\text{F.29})$$

avec $J_1 = -\nabla^2 \psi_1$ et $\omega = -\nabla^2 \phi_1$. On rappelle aussi que $\vec{B}_0 = \nabla \psi_0 \times \vec{e}_z$ et $\vec{B}_1 = \nabla \psi_1 \times \vec{e}_z$. Ainsi, cette seconde  equation devient,

$$\frac{\partial(\nabla^2 \phi_1)}{\partial t} = (\vec{B}_0 \cdot \nabla)(\nabla^2 \psi_1) - (\nabla \psi_1 \times \vec{e}_z) \cdot \nabla J_0. \quad (\text{F.30})$$

L' equilibre statique en MHD r eduite est $\vec{B}_0 \cdot \nabla J_0 = 0$ conduisant alors  a $J_0 = J_0(\psi_0)$, donc $\nabla J_0 = \frac{dJ_0}{d\psi_0} \nabla \psi_0$. Nous avons par cons equent,

$$\frac{\partial(\nabla^2 \phi_1)}{\partial t} = (\vec{B}_0 \cdot \nabla)(\nabla^2 \psi_1) - \frac{dJ_0}{d\psi_0} (\nabla \psi_1 \times \vec{e}_z) \cdot \nabla \psi_0, \quad (\text{F.31})$$

puis

$$\frac{\partial(\nabla^2 \phi_1)}{\partial t} = (\vec{B}_0 \cdot \nabla)(\nabla^2 \psi_1) + \frac{dJ_0}{d\psi_0} (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \psi_1, \quad (\text{F.32})$$

et enfin en utilisant $du/dt = \phi_1$ et $\psi_1 = \vec{B}_0 \cdot \nabla u$,

$$\frac{\partial(\nabla^2 du/dt)}{\partial t} = (\vec{B}_0 \cdot \nabla)(\nabla^2(\vec{B}_0 \cdot \nabla u)) + \frac{dJ_0}{d\psi_0} (\vec{B}_0 \cdot \nabla)(\vec{B}_0 \cdot \nabla u). \quad (\text{F.33})$$

On peut alors développer $u \propto e^{-i\gamma t}$ pour obtenir,

$$-\gamma^2 \nabla^2 u = (\vec{B}_0 \cdot \nabla)(\nabla^2(\vec{B}_0 \cdot \nabla u)) + \frac{dJ_0}{d\psi_0}(\vec{B}_0 \cdot \nabla)(\vec{B}_0 \cdot \nabla u). \quad (\text{F.34})$$

On peut noter que le second membre fait apparaître l'opérateur (ou force de rappel) des petits mouvements de la MHD réduite,

$$F(u) = (\vec{B}_0 \cdot \nabla)(\nabla^2(\vec{B}_0 \cdot \nabla u)) + \frac{dJ_0}{d\psi_0}(\vec{B}_0 \cdot \nabla)(\vec{B}_0 \cdot \nabla u), \quad (\text{F.35})$$

correspondant à,

$$-\gamma^2 \nabla^2 u = F(u). \quad (\text{F.36})$$

Après multiplication par u et intégration en volume (des intégrations par partie sont à faire), on obtient le principe d'énergie de la MHD réduite à partir de,

$$\boxed{\delta W^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3r \left[(\nabla \psi_1)^2 - \frac{dJ_0}{d\psi_0} \psi_1^2 \right]}, \quad (\text{F.37})$$

avec $\psi_1 = \vec{B}_0 \cdot \nabla u = -\vec{\xi} \cdot \nabla \psi_0$. Ainsi, la stabilité est déterminée par le signe du second terme faisant apparaître la dérivée de la densité de courant, et qui est potentiellement déstabilisant s'il est négatif et domine le premier terme qui lui est stabilisant (car toujours positif). Le terme déstabilisant potentiel provient du terme $(\vec{B}_1 \cdot \nabla)J_0$ (équivalent à la force $\vec{J}_0 \times \vec{B}_1$). alors que le terme stabilisant provient du terme $(\vec{B}_0 \cdot \nabla)J_1$ (équivalent à la force $\vec{J}_1 \times \vec{B}_0$). Il n'est bien sûr pas surprenant que seulement les instabilités de type courant sont possibles en MHD réduite. Attention, cette formule est obtenue avec la normalisation $\mu_0 = \rho_0 = 1$.

Nous pouvons aussi écrire le taux de croissance linéaire à partir de,

$$\boxed{\gamma^2 = -\frac{\delta W^{(2)}}{K^{(2)}}}, \quad (\text{F.38})$$

où

$$K^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3r \nabla \phi_1^2. \quad (\text{F.39})$$

Table des matières

Avant-propos	i
1 Introduction	1
1.1 Motivation observationnelle	1
1.2 Notions générales sur les plasmas	3
1.3 Les équations de base de la MHD	7
1.4 Equations réduites en MHD incompressible bi-dimensionnelle . .	11
2 De la diffusion à la reconnexion magnétique	15
2.1 La diffusion ohmique dite aussi résistive	16
2.2 La diffusion résistive pour des lignes de champ magnétique circu- laire	22
2.3 Solutions d’advection et d’advection-diffusion	24
2.4 Solution stationnaire d’annihilation magnétique	28
2.5 Solution stationnaire de reconnexion diffusivité	34
2.6 Solution stationnaire de reconnexion magnétique de type Sweet- Parker	34
2.7 Solution stationnaire de reconnexion magnétique de type Petschek	40
3 Instabilités résistives de déchirement magnétique	47
3.1 Le mode de déchirement magnétique ou tearing en géométrie plane cartésienne	47
3.2 Evolution non-linéaire du mode de déchirement magnétique . . .	61
3.3 Simulation numérique du mode de déchirement magnétique en géométrie plane cartésienne	62
3.4 Mode de déchirement magnétique et de kink résistif en géométrie polaire	68
4 Instabilités non résistives de la MHD parfaite	79
4.1 L’instabilité de coalescence	79
4.2 L’instabilité de tilt	84
5 Instabilités de type plasmoides	97
5.1 Historique	97
5.2 Théorie	98
5.3 Etudes numériques : plasmoides associés à la reconnexion initiée par l’instabilité de tilt	100
5.4 Etudes numériques : plasmoides associés à la reconnexion initiée par l’instabilité de kink résistif	104

5.5	Ingrédients physiques du régime plasmoides et présence de chocs de type Petschek	105
5.6	Conclusion sur le développement des plasmoides	106
6	Instabilités de tearing double	115
6.1	Structure à double nappe de courant	115
6.2	Stabilité DTM	117
6.3	Simulation numérique DTM	119
A	Les équations électriques de la MHD	125
B	MHD réduite en variables de vortacité et flux	127
C	MHD réduite en variables de vortacité et de courant	131
D	Théorème d'Alfvén ou loi du flux gelé en MHD parfaite	133
E	Le modèle de Kadomtsev	137
F	Le principe d'énergie en MHD parfaite	143