



HAL
open science

Indices d'association partielle entre variables "qualitatives" ordinales

I.C. Lerman

► **To cite this version:**

I.C. Lerman. Indices d'association partielle entre variables "qualitatives" ordinales. Annales de l'ISUP, 1983, XXVIII (1-2), pp.7-46. <hal-03711568>

HAL Id: hal-03711568

<https://hal.science/hal-03711568v1>

Submitted on 1 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

INDICES D'ASSOCIATION PARTIELLE ENTRE VARIABLES
"QUALITATIVES" ORDINALES

par I.C. LERMAN

Laboratoire de Statistique

Université de Rennes I - I.R.I.S.A. (L.A. 227)

I. INTRODUCTION

Pour comprendre l'idée de ce travail et ce qui l'a motivée, il y a lieu de commencer par rappeler notre point de vue dans le cas de la définition d'un coefficient d'association totale entre variables de description statistique.

Notre démarche générale dans l'élaboration d'un indice de proximité entre variables peut être schématisée par le diagramme suivant (cf. figure 1) que nous allons commenter en prenant l'exemple de la comparaison de deux variables qualitatives nominales.

Dans ce diagramme, α et β sont les deux structures de même nature à comparer.

$$(\alpha, \beta) \in A \times B \rightarrow (R(\alpha), R(\beta)) \in \Omega \times \Omega \quad (1)$$

$$\downarrow$$

$$s = \text{card}(R(\alpha) \cap R(\beta)) \quad (2)$$

h.a.l. "respectant les
caractéristiques de
cardinalité" de α et β

$$\downarrow$$

$$S = \text{card}(R(\alpha') \cap R(\beta')) \quad (3)$$

$$Q(\alpha, \beta) = (s - \frac{1}{2}S) / \sigma(S) \quad (4)$$

$$P(\alpha, \beta) = \Pr^N\{S < s\} \quad (5)$$

$$\cong \Phi(Q(\alpha, \beta)).$$

Figure 1

Dans l'exemple choisi α et β sont deux partitions où nous désignons par $t(\alpha)$ (resp. $t(\beta)$) le type de la partition α (resp. β) ; c'est-à-dire la suite ordonnée des cardinaux de ses classes. Dans ces conditions A (resp. B) est

l'ensemble des partitions sur E de type $t(\alpha)$ (resp. $t(\beta)$). $R(\alpha)$ (resp. $R(\beta)$) est l'ensemble des paires (sous-ensemble de l'ensemble $P_2(E)$) des parties à deux éléments de E dont les deux composantes sont réunies dans une même classe de la partition α (resp. β) Ω peut être défini comme l'ensemble des parties de $P_2(E)$ dont chacune correspond à la représentation d'une relation d'équivalence sur E .

L'hypothèse d'absence de lien (h.a.l.), passage du niveau (2) au niveau (3), associe au couple (α, β) un couple (α', β') d'éléments aléatoires indépendants où α' (resp. β') est un objet de même nature que α (resp. β) qui respecte d'une "certaine façon" les caractéristiques cardinales de α (resp. β). Dans l'exemple considéré, une des formes de l'h.a.l. consiste à associer à α (resp. β) un élément aléatoire dans l'ensemble A (resp. B) des partitions sur E , muni d'une probabilité uniformément répartie.

$\mathcal{Q}(S)$ et $\sigma^2(S)$ sont la moyenne et la variance de la variable aléatoire (v.a.) S et $Q(\alpha, \beta)$ est ce que nous appelons l'indice de proximité "centré réduit". Le passage de (3) à (4) est décisif puisque cet indice est celui d'association de K. Pearson s'il s'agit de comparer deux attributs de description ; à un coefficient multiplicatif près, celui de corrélation dans le cas de comparaison de deux variables numériques. D'autre part, dans le cas de la comparaison de deux variables "rang", le numérateur de Q est exactement le numérateur de l'indice τ de M.G. Kendall ; mais dans notre indice nous remplaçons le dénominateur de τ qui est le maximum de la valeur absolue du numérateur par l'écart type de la v.a. associée au numérateur. Toutefois, nous découvrons des indices nouveaux dans le cas de la comparaison de variables qualitatives nominales (variables "partition") et ordinales (variables "préordre total") où nous mettons en évidence un biais dans l'indice proposé pour cette situation par M.G. Kendall [LERMAN(1973) repris dans (1981)].

Dans le cas de la comparaison de deux parties $E(a)$ et $E(b)$ d'un même ensemble E (représentant en l'occurrence deux attributs descriptifs), nous avons pu mettre en évidence trois formes fondamentales de l'h.a.l. respectant chacune d'une certaine façon les caractéristiques cardinales de $E(a)$ et de $E(b)$ [LERMAN(1980)].

La première forme N_1 a un caractère combinatoire ; elle consiste à associer à une même partie D de cardinal d , une partie aléatoire D' qui représente un élément aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie, des parties de E de même cardinal d . Cette forme de l'h.a.l. conduit à une distribution hypergéométrique de la v.a. S (cf. niveau (3) du schéma).

Alors que dans le cas que nous venons de mentionner toute la mesure de probabilité est concentrée sur un même niveau de l'ensemble des parties de E , la deuxième forme N_2 de l'h.a.l. consiste à munir cet ensemble de parties d'une mesure de probabilité plus diffuse où le k -ème niveau, formé des parties à k éléments, est affecté de la probabilité $\binom{n}{k} \delta^k (1-\delta)^{n-k}$ où $\delta = d/n$. D'autre part, cette dernière probabilité est également répartie sur ce niveau. Cette deuxième forme de l'h.a.l. conduit à une distribution binomiale de la v.a. S .

La troisième forme N_3 de l'h.a.l. commence par associer à E , l'ensemble aléatoire \mathcal{C} où l'aléa ne concerne que la v.a. entière $\mathcal{N} = \text{card}(\mathcal{C})$ qui est

considérée comme une v.a. de Poisson de paramètre $n = \text{card}(E)$. Relativement à une réalisation \mathcal{O}_0 de cardinal m , les deux autres pas du modèle de choix correspondant à N_2 .

Nous distinguons en fait deux principaux types d'une variable de description ; où pour le premier la variable peut être fidèlement représentée au niveau de E et où, pour le second type, la variable ne peut admettre une représentation mathématique fidèle qu'au niveau de $E \times E$. Dans la première classe définie par le premier grand type de variables, on a exactement l'"attribut descriptif" représentable par une partie de E et la variable quantitative représentable par une pondération sur E . D'autre part, toute variable définissant une relation binaire discrète ou pondérée sur E , rentre dans le cadre de la deuxième classe ; ainsi en est-il de la variable qualitative nominale, de celle ordinale (totalement ou partiellement), de celle "rang" et enfin de celle définissant un graphe pondéré sur E .

u , v et w étant trois variables qualitatives d'un même type ; pour construire un coefficient d'association partielle $\gamma(v, w; u)$ entre v et w relativement à u , de nombreuses méthodes procèdent par analogie avec le cas numérique où c'est le point de vue géométrique qui prévaut et proposent un indice de la forme

$$\gamma(v, w; u) = \frac{\gamma(v, w) - \gamma(u, v)\gamma(u, w)}{\sqrt{[1 - \gamma^2(u, v)][1 - \gamma^2(u, w)]}}$$

dès lors qu'elles ont pu aboutir à un indice $\gamma(v, w)$ dont la nature géométrique paraît analogue à celle d'un coefficient de corrélation [SAPORTA (1976)]. Il en résulte une absence de clarté et parfois un grave inconvénient où cet indice peut ne pas être nul en cas d'indépendance conditionnelle où, pour toute valeur de u , v et w sont indépendantes [DAUDIN(1979)].

Ce que propose M.G. Kendall [KENDALL (1942), cf. (1970)] est dans son principe essentiellement différent et correspond formellement en fait à commencer par représenter chacun des ordres totaux par son graphe dans $E \times E$, respectivement σ , ω et \mathcal{O} par $R(\sigma)$, $R(\omega)$ et $R(\mathcal{O})$ où par exemple

$$R(\sigma) = \{(x, y) / (x, y) \in E \times E, x < y(\sigma)\},$$

avec des expressions analogues pour $R(\omega)$ et $R(\mathcal{O})$. Il se situe ensuite dans $R(\sigma)$ et définit dans ce cadre le coefficient d'association de K. Pearson entre les deux attributs représentés par les deux parties $R(\sigma) \cap R(\omega)$ et $R(\sigma) \cap R(\mathcal{O})$. Cet indice se met par conséquent sous la forme :

$$\tau_{\omega \mathcal{O}, \sigma} = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} \quad (4)$$

où $a = \text{card}[R(\sigma) \cap R(\omega) \cap R(\mathcal{O})]$, $b = \text{card}[R(\sigma) \cap R(\omega) \cap R^c(\mathcal{O})]$,

$c = \text{card}[R(\sigma) \cap R^c(\omega) \cap R(\mathcal{O})]$, $d = \text{card}[R(\sigma) \cap R^c(\omega) \cap R^c(\mathcal{O})]$.

M.G. Kendall constate avec étonnement, en attribuant le résultat à une coïncidence, que l'indice peut se mettre sous la forme

$$\tau_{\omega\theta,\sigma} = \frac{\tau_{\omega\theta} - \tau_{\omega\sigma} \cdot \tau_{\theta\sigma}}{\sqrt{1-\tau_{\omega\sigma}^2} \sqrt{1-\tau_{\theta\sigma}^2}} \quad (5)$$

où τ_{uv} n'est autre que l'indice établi entre deux variables "rang" u et v.

Notre analyse nous permettra de comprendre ce résultat et d'asseoir la conception de l'indice que nous découvrirons sur des bases formelles plus claires. Il s'avèrera que le numérateur de ce dernier sera le même que celui proposé par M.G. Kendall ; mais il n'en sera pas de même du dénominateur. Notre indice sera en fait obtenu à partir du calcul de l'espérance mathématique et de la variance d'une variable aléatoire associée à un indice brut de comparaison entre ω et θ , dans le cadre d'une hypothèse d'absence de lien (h.a.l.) préservant d'une certaine façon les positions relatives entre ω et σ d'une part, θ et σ d'autre part. P.A.P. Moran [MORAN(1951)] qui avait effectué une étude par simulation de la distribution de $\tau_{\omega\theta,\sigma}$, mais pour n très petit ($n=\text{card}(E)=4$) avouait son impuissance devant ce calcul ; mais c'était dans le cadre d'une h.a.l. plus stricte que la nôtre.

Cet article reprend un aspect d'un volumineux rapport de recherche (Publication interne IRISA n° 153, Oct. 1981 - 125 pages) qui comprend les différentes situations quant à la structure des variables à comparer et notamment, le cas où les variables sont qualitatives nominales (i.e. variables "partition"). Nous nous limiterons ici, pour des raisons de place et parce que la démarche générale est la même, après avoir considéré le cas où les variables sont des attributs descriptifs, à étudier le cas ordinal.

II - COEFFICIENT DE CORRELATION ENTRE DEUX ATTRIBUTS, PARTIELLE RELATIVEMENT A UN TROISIEME ATTRIBUT

On désigne par a, b et c trois attributs descriptifs et par E l'ensemble des individus défini par l'échantillon étudié. Soient E(a), E(b) et E(c) les parties de E représentant respectivement a, b et c ; en d'autres termes E(a) est le sous ensemble de E formé des sujets qui possèdent l'attribut a, E(b) celui b et E(c) celui c. Nous schématisons la situation par le diagramme naïf suivant :

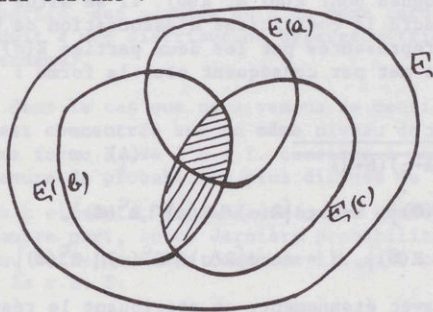


Figure 2

Il s'agit de définir un indice d'association partielle entre b et c , neutralisant l'influence de a . Nous nous proposons de le faire à partir d'une construction adéquate de l'h.a.l. de même nature que N_1 (cf. § I ci-dessus).

1. Indice brut et h.a.l.

L'indice brut d'association entre b et c a toujours la même expression:

$$s(b,c) = n(b \wedge c) = \text{card}[E(b) \cap E(c)], \quad (1)$$

Comme dans le cas total, l'h.a.l. peut avoir une forme unilatérale, en fixant par exemple $E(b)$ et en associant à $E(c)$ une partie aléatoire Z . Pour neutraliser l'influence de $E(a)$, cette h.a.l. doit préserver les positions relatives observées entre $E(a)$ et $E(b)$ d'une part, $E(a)$ et $E(c)$ d'autre part. Comme $E(a)$ et $E(b)$ sont fixées, la partie aléatoire Z doit avoir par rapport à $E(a)$, la même situation relative que celle qu'avait $E(c)$.

Dans ces conditions, Z sera choisie comme formée de la réunion de deux parties aléatoires indépendantes $Z(a)$ et $Z(\bar{a})$ où $Z(a)$ [resp. $Z(\bar{a})$] est un élément aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie, des parties de $E(a)$ [resp. $E(\bar{a})$] de même cardinal $n(a \wedge c)$ [resp. $n(\bar{a} \wedge c)$], où nous avons noté \bar{a} l'attribut opposé de a ; de sorte que $E(\bar{a}) = E - E(a)$ (différence ensembliste).

La v.a. S se met alors sous la forme suivante d'une somme de deux v.a. indépendantes :

$$S(b,c';a) = \text{card}[E(b) \cap Z(a)] + \text{card}[E(b) \cap Z(\bar{a})], \quad (2)$$

Il est facile de se rendre compte que la première (resp. seconde) v.a. est hypergéométrique de paramètres $[n(a), n(a \wedge b), n(a \wedge c)]$ (resp. $[n(\bar{a}), n(\bar{a} \wedge b), n(\bar{a} \wedge c)]$). De façon précise, on a

$$\text{Pr}\{N(a \wedge b \wedge Z(a)) = \ell\} = \binom{n(a \wedge b)}{\ell} \binom{n(a \wedge \bar{b})}{n(a \wedge c) - \ell} / \binom{n(a)}{n(a \wedge c)}, \quad (3)$$

et

$$\text{Pr}\{N(\bar{a} \wedge b \wedge Z(\bar{a})) = m\} = \binom{n(\bar{a} \wedge b)}{m} \binom{n(\bar{a} \wedge \bar{b})}{n(\bar{a} \wedge c) - m} / \binom{n(\bar{a})}{n(\bar{a} \wedge c)} \quad (4)$$

où nous avons noté $N(a \wedge b \wedge Z(a))$ (resp. $N(\bar{a} \wedge b \wedge Z(\bar{a}))$) la première (resp. seconde) des deux v.a. ; d'autre part, une expression de la forme $n(\bar{a})$ indique $\text{card}[E(\bar{a})]$ et une expression de la forme $n(a \wedge b)$, $\text{card}[E(\bar{a}) \wedge E(b)]$.

On peut certes sans difficulté donner l'expression de la loi de la v.a. $S(b,c;a)$ sous la forme de celle d'une somme de deux v.a. entières indépendantes. Mais nous préférons aller droit au but en calculant les expressions de la moyenne et de la variance de la v.a. $S(b,c;a)$.

2. Moyenne et variance de la v.a. $S(b,c;a)$.

On a

$$E(N(a\lambda b\lambda z(a))) = n(a) \times \frac{n(a\lambda b)}{n(a)} \times \frac{n(a\lambda c)}{n(a)} = n p(a\lambda b)p(a\lambda c)/p(a) \quad (5)$$

où $p(a)$, $p(a\lambda b)$ et $p(a\lambda c)$ désignent respectivement les proportions $n(a)/n$, $n(a\lambda b)/n$ et $n(a\lambda c)/n$.

De même,

$$E(N(\bar{a}\lambda b\lambda z(\bar{a}))) = n(\bar{a}) \times \frac{n(\bar{a}\lambda b)}{n(\bar{a})} \times \frac{n(\bar{a}\lambda c)}{n(\bar{a})} = n p(\bar{a}\lambda b)p(\bar{a}\lambda c)/p(\bar{a}) \quad (6)$$

avec des notations analogues à ci-dessus.

$$D'autre part, \text{Var}(N(a\lambda b\lambda z(a))) = \frac{n(a)^2}{[n(a)-1]} \times \frac{n(a\lambda b)}{n(a)} \times \frac{n(a\lambda \bar{b})}{n(a)} \times \frac{n(a\lambda c)}{n(a)} \times \frac{n(a\lambda \bar{c})}{n(a)}$$

$$\cong n p(a\lambda b)p(a\lambda \bar{b})p(a\lambda c)p(a\lambda \bar{c})/(p(a))^3. \quad (7)$$

$$\text{et de même, } \text{Var}(N(\bar{a}\lambda b\lambda z(\bar{a}))) \cong n p(\bar{a}\lambda b)p(\bar{a}\lambda \bar{b})p(\bar{a}\lambda c)p(\bar{a}\lambda \bar{c})/(p(\bar{a}))^3. \quad (8)$$

D'où la proposition :

PROPOSITION 1. L'indice "centré réduit", représentant le coefficient d'association partielle entre les deux attributs b et c , relativement à a : $\rho_{bc.a}$ s'exprime par

$$\frac{\sqrt{n} \left(p(b\lambda c) - \left(\frac{p(a\lambda b)p(a\lambda c)}{p(a)} + \frac{p(\bar{a}\lambda b)p(\bar{a}\lambda c)}{p(\bar{a})} \right) \right)}{\sqrt{\frac{p(a\lambda b)p(a\lambda \bar{b})p(a\lambda c)p(a\lambda \bar{c})}{p(a)^3} + \frac{p(\bar{a}\lambda b)p(\bar{a}\lambda \bar{b})p(\bar{a}\lambda c)p(\bar{a}\lambda \bar{c})}{p(\bar{a})^3}}} \quad (9)$$

Il est naturel de chercher à rapprocher l'expression qu'on vient de trouver pour l'indice $\rho_{bc.a}$ avec celle :

$$\frac{\rho_{bc} - \rho_{ab}\rho_{ac}}{\sqrt{(1-\rho_{ab}^2)(1-\rho_{ac}^2)}} \quad (10)$$

qu'on aurait obtenue en procédant par analogie directe entre le cas où les variables sont numériques et celui qui nous occupe ici. On peut en effet se rendre compte que le numérateur de l'indice (9) trouvé, se met, dans le cadre de l'h.a.l. considérée, à un coefficient multiplicatif près, sous la forme $(\rho_{bc} - \rho_{ab}\rho_{ac})$. Cependant, on n'a pas une propriété analogue de rapprochement en ce qui concerne le dénominateur.

Terminons ce paragraphe en signalant que pour étendre cette notion de corrélation partielle au cas de la comparaison de deux variables numériques, partielle relativement à une variable qualitative nominale, l'élément aléatoire devient une permutation formée d'une suite de permutations aléatoires indépendantes dont chacune affecte exactement une classe d'individus possédant une modalité de la variable qualitative [LERMAN, Oct. 81].

III - COEFFICIENT DE CORRELATION ENTRE DEUX VARIABLES QUALITATIVES ORDINALES, PARTIELLE RELATIVEMENT A UNE TROISIEME VARIABLE QUALITATIVE ORDINALE

Nous désignerons par η et θ les deux variables qualitatives ordinales dont il s'agit de mesurer le lien en neutralisant l'effet d'une troisième variable qualitative ordinaire ξ . Aucune ambiguïté n'étant possible, nous désignerons par ξ , η et θ les trois préordres totaux sur E respectivement induits par les trois variables ξ , η et θ . On notera respectivement

$$\begin{aligned} \{E_i / 1 \leq i \leq I\} & \text{ l'ensemble des classes de } \xi, \\ \{F_j / 1 \leq j \leq J\} & \text{ l'ensemble des classes de } \eta \quad (1) \\ \text{et } \{G_k / 1 \leq k \leq K\} & \text{ l'ensemble des classes de } \theta. \end{aligned}$$

où l'indexation des classes d'un même préordre est naturellement conforme à l'ordre quotient sur les classes défini par ce préordre.

Les compositions des préordres ξ , η et θ seront respectivement notées $(n(1), n(2), \dots, n(i), \dots, n(I))$, $(n(1), n(2), \dots, n(j), \dots, n(J))$ et $(n(1), n(2), \dots, n(k), \dots, n(K))$ où $n(i) = \text{card}(E_i)$, $n(j) = \text{card}(F_j)$ et $n(k) = \text{card}(G_k)$, $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$ et $1 \leq k \leq K$.

La position relative entre deux préordres totaux est déterminée par le tableau de contingence de leur croisement. On aura dans ces conditions à considérer les trois tableaux de contingence suivants, respectivement associés aux croisements deux à deux des préordres $\xi \wedge \eta$, $\xi \wedge \theta$ et $\eta \wedge \theta$:

$$\begin{aligned} n(\xi \wedge \eta) &= \{n(i \wedge j) / 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J\} \\ n(\xi \wedge \theta) &= \{n(i \wedge k) / 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq K\} \\ n(\eta \wedge \theta) &= \{n(j \wedge k) / 1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K\} \end{aligned} \quad (2)$$

où $n(i \wedge j) = \text{card}(E_i \cap F_j)$, $n(i \wedge k) = \text{card}(E_i \cap G_k)$ et $n(j \wedge k) = \text{card}(F_j \cap G_k)$, $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$, $1 \leq k \leq K$.

Rappelons ([LERMAN(1973)]) qu'on représente un même préordre total dans $E^{[2]}$ par l'ensemble des couples d'objets (x, y) tels que x précède strictement y ; ainsi ξ , η et θ sont respectivement représentés par

$$\begin{aligned} R(\xi) &= \sum \{E_i \times E_{i'} / 1 \leq i < i' \leq I\}, \\ R(\eta) &= \sum \{F_j \times F_{j'} / 1 \leq j < j' \leq J\}, \\ \text{et } R(\theta) &= \sum \{G_k \times G_{k'} / 1 \leq k < k' \leq K\}. \end{aligned} \quad (3)$$

III.1. CAS D'UN INDICE D'ASSOCIATION PARTIELLE DANS LE CADRE D'UNE H.A.L. A CARACTERE LOCAL

1. Indice brut et h.a.l.

L'indice définitif que nous cherchons dans ce paragraphe III.1. sera désigné par $\rho_{\eta\theta, \xi}$. L'indice brut est le même que dans le cas total, il prend la forme suivante

$$s(\eta, \theta) = \text{card}[R(\eta) \cap R(\theta)] = \sum \{n(j \wedge k) n(j' \wedge k') / 1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq k < k' \leq K\} \quad (4).$$

Comme dans le cas total [LERMAN(1973)], on fixe l'un des deux préordres totaux η et θ et on associe à l'autre un préordre aléatoire en montrant que la distribution de la v.a. associée à $s(\eta, \theta)$ ne dépend pas de celui des deux préordres totaux fixés.

Comme dans le cas de comparaison partielle de parties (cf. § II ci-dessus), nous allons fixer le préordre total η et associer à θ , un préordre aléatoire θ' dont la suite des classes est notée $\{G'_k / 1 \leq k \leq K\}$ où G'_k est la partie aléatoire de E associée à G_k , $1 \leq k \leq K$, dans une h.a.l. qui préserve la position relative des classes du préordre aléatoire par rapport aux classes du préordre. Dans ces conditions, G'_k sera défini sous la forme de la somme ensembliste

$$G'_k = \sum_{1 \leq i \leq I} G'_{ki}, \quad (5)$$

pour tout $k=1, 2, \dots, K$, où $(G'_{k1}, G'_{k2}, \dots, G'_{ki}, \dots, G'_{kI})$ est une suite de parties aléatoires indépendantes ; G'_{ki} étant pris uniformément au hasard dans l'ensemble des parties de E_i de même cardinal $n(i, k)$.

Soit par conséquent la décomposition suivante de $E \times E$:

$$E \times E = \sum \{E_i \times E_{i'} / (i, i') \in \bar{I} \times \bar{I}\} \quad (6)$$

(somme ensembliste), où \bar{I} désigne l'ensemble $\{1, 2, \dots, i, \dots, I\}$, par rapport à laquelle l'ensemble aléatoire $R(\theta')$ se met sous la forme :

$$R(\theta') = \sum \{(E_i \cap G'_k) \times (E_{i'} \cap G'_{k'}) / 1 \leq i, i' \leq I, 1 \leq k < k' \leq K\}. \quad (7)$$

Introduisons à présent les fonctions indicatrices ϕ (resp. Ψ et Ψ') des sous ensembles $R(\eta)$ (resp. $R(\theta)$ et $R(\theta')$), la v.a. $S(\eta, \theta')$ se met alors sous la forme

$$\begin{aligned} S(\eta, \theta') &= \sum \{\phi(x, y) \Psi'(x, y) / (x, y) \in E \times E\} \\ &= \sum \{\sum \{\phi(u) \Psi'(u) / u \in E_i \times E_{i'}\} / (i, i') \in \bar{I} \times \bar{I}\} \quad (8) \end{aligned}$$

Nous allons calculer dans le cadre de l'h.a.l. exprimée, la moyenne et la variance de cette v.a. C'est en effet, conformément à la démarche générale, l'indice $s(\eta, \theta)$ centré et réduit qui définira le coefficient définitif $\rho_{\eta\theta, \xi}$.

2. Calcul de la moyenne de la v.a. $S(\eta, \theta'; \xi)$.

Nous aurons besoin pour ce calcul d'évaluer

$$\Pr\{\psi'(x, y) = 1 / (x, y) \in E_i \times E_{i'}\} \quad (9)$$

$$\sum \{\phi(x, y) / (x, y) \in E_i \times E_{i'}\} \quad (9')$$

$$\Pr\{\psi'(x, y) = 1 / (x, y) \in E_i \times E_{i'}\} \quad (10)$$

$$\sum \{\phi(x, y) / (x, y) \in E_i \times E_{i'}\}, \quad (10')$$

pour $1 \leq i \neq i' \leq I$.

Désignons par θ_i (resp. θ'_i) la restriction du préordre total θ (resp. θ') à la classe E_i ; ainsi, la suite des classes du préordre total θ'_i se trouve définie par $\{G_{ki} / 1 \leq k \leq K\}$. La composition de ce préordre est $\{n(i \wedge k) / 1 \leq k \leq K\}$.

L'expression (9) représente la proportion de préordres totaux θ'_i sur E_i de composition fixée, qui placent l'objet x dans une classe d'indice k , l'objet y dans une classe d'indice k' de telle sorte que k soit strictement inférieur à k' . Cette proportion vaut

$$\sum \left\{ \frac{n(i \wedge k)n(i \wedge k')}{n(i)[n(i)-1]} / 1 \leq k < k' \leq K \right\}. \quad (11)$$

D'autre part, l'expression (9') représente le nombre de couples d'objets de la classe E_i qui appartiennent à $R(\eta)$. Il s'agit du cardinal de $R(\eta_i)$ si on désigne par η_i la restriction du préordre total η à la classe E_i . On notera $\{F_{ij} / 1 \leq j \leq J\}$ la suite des classes du préordre total η_i qui est la suite des classes du préordre total η qui est de composition $\{n(i \wedge j) / 1 \leq j \leq J\}$. L'expression (9') vaut donc

$$\sum \{n(i \wedge j)n(i \wedge j') / 1 \leq j < j' \leq J\}. \quad (12)$$

L'expression (10) représente la proportion de couples $(\theta'_i, \theta'_{i'})$ de préordres totaux tels que θ'_i place l'objet x dans sa k -ème classe, $\theta'_{i'}$ place l'objet y dans sa k' -ème classe, avec $k < k'$. Cette proportion est égale à

$$\sum \left\{ \frac{n(i \wedge k)n(i' \wedge k')}{n(i)n(i')} / 1 \leq k < k' \leq K \right\}. \quad (13)$$

L'expression (10') représente le nombre de couples d'objets (x, y) tels que x (resp. y) appartient à la j -ème (resp. j' -ème) classe de η_i (resp. $\eta_{i'}$), avec $j < j'$. Ce cardinal est égal à

$$\sum \{n(i \wedge j)n(i' \wedge j') / 1 \leq j < j' \leq J\}. \quad (14)$$

Pour le calcul de l'espérance mathématique de la v.a. $S(\eta, \theta'; \varrho)$, nous décomposerons l'expression (8) en deux morceaux :

$$\sum \{ \sum \{ \phi(u)\psi'(u) / u \in E_i \times E_i \} / i \in \bar{I} \} + \sum \{ \sum \{ \phi(u)\psi'(u) / u \in E_i \times E_{i'} \} / (i, i') \in \bar{I}^{[2]} \} \quad (15)$$

où rappelons-le, $\bar{I}^{[2]} = \bar{I} \times \bar{I} - \Delta(\bar{I} \times \bar{I})$ désigne l'ensemble des couples (i, i') tels que $i \neq i'$.

En appliquant l'opérateur espérance, on obtient

$$\begin{aligned} \mu(\eta, \theta'; \varrho) = & \sum \left\{ \sum \left\{ \frac{n(i \wedge j)n(i \wedge j')n(i \wedge k)n(i \wedge k')}{n(i)[n(i)-1]} / 1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq k < k' \leq K \right\} / 1 \leq i \leq I \right\} \\ & + \sum \left\{ \sum \left\{ \frac{n(i \wedge j)n(i' \wedge j')n(i \wedge k)n(i' \wedge k')}{n(i)n(i')} / 1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq k < k' \leq K \right\} / (i, i') \in \bar{I}^{[2]} \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

3. Calcul de la variance de la v.a. $S(n, \theta'; \mathcal{E})$.

Comme pour le cas de la comparaison totale [1973], toute la difficulté va résider dans l'expression et l'évaluation du moment d'ordre 2. Le carré de l'expression (15) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & \sum \{ \phi(u) \Psi'(u) / u \in \sum \{ E_i \times E_i / i \in \bar{I} \} \} + \sum \{ \phi(u) \Psi'(u) / u \in \sum \{ E_i \times E_i / (i, i') \in \bar{I}^{[2]} \} \} \\ & + \sum \{ \phi(u) \phi(v) \Psi'(u) \Psi'(v) / (u, v) \in (\sum_{i \in \bar{I}} E_i \times E_i) \times (\sum_{i' \in \bar{I}} E_{i'} \times E_{i'}) \} \\ & + \sum \{ \phi(u) \phi(v) \Psi'(u) \Psi'(v) / (u, v) \in (\sum_{\bar{I}} [2] E_i \times E_i) \times (\sum_{\bar{I}} [2] E_{i''} \times E_{i''}) \} \\ & + 2 \sum \{ \phi(u) \phi(v) \Psi'(u) \Psi'(v) / (u, v) \in (\sum_{\bar{I}} E_i \times E_i) \times (\sum_{\bar{I}} [2] E_{i''} \times E_{i''}) \}, \end{aligned} \quad (17)$$

où $u \neq v$ et où les différentes sommes à l'intérieur des accolades sont ensemblistes.

La détermination de l'espérance mathématique de (17) nécessite la reconnaissance des différentes structures propres d'un couple de couples d'objets selon les répétitions qui peuvent se produire d'un même objet. On peut voir qu'un couple de couples d'objets $((x, y), (x', y'))$ de $(E^{[2]})^{[2]}$ peut prendre les cinq formes différentes suivantes où des lettres distinctes représentent des objets différents :

$((x, y), (x, t)), ((x, y), (z, x)), ((x, y), (z, y)), ((x, y), (y, t))$ et $((x, y), (z, t))$.

A cette dernière suite, nous associons respectivement la suite des classes $G_1(E), G'_1(E), G_2(E), G'_2(E)$ et $H(E)$, où une même classe est formée de l'ensemble des éléments $((x, y), (x', y'))$ de même forme. Ces classes forment une partition de $(E^{[2]})^{[2]}$.

D'autre part, la structure propre d'un élément $((i, i'), (i'', i'''))$ de $(\bar{I} \times \bar{I}) \times (\bar{I} \times \bar{I})$ peut être l'une des suivantes :

$$\begin{aligned} & ((i, i), (i, i)), \\ & ((i, i), (i, i_4)), ((i, i), (i_3, i)), ((i, i_2), (i, i)), ((i_1, i), (i, i)), \\ & ((i_1, i_1), (i_3, i_3)), ((i_1, i_2), (i_1, i_2)), ((i_1, i_2), (i_2, i_1)) \\ & ((i, i), (i_3, i_4)), ((i, i_2), (i, i_4)), ((i, i_2), (i_3, i)), ((i_1, i), (i, i_4)), \\ & ((i_1, i), (i_3, i)), ((i_1, i_2), (i, i)), \\ & ((i_1, i_2), (i_3, i_4)), \end{aligned} \quad (18)$$

où des symboles différents représentent des éléments différents de \bar{I} .

La décomposition de $(\bar{I} \times \bar{I}) \times (\bar{I} \times \bar{I})$ conformément à la suite ordonnée des différentes configurations précédentes, donne

$$\begin{aligned} (\bar{I} \times \bar{I}) \times (\bar{I} \times \bar{I}) = & L(\bar{I}) + K_4(\bar{I}) + K_3(\bar{I}) + K_2(\bar{I}) + K_1(\bar{I}) \\ & + \Delta(\bar{I}) + D(\bar{I}) + D'(\bar{I}) \\ & + G(\bar{I}) + G_1(\bar{I}) + G'_1(\bar{I}) + G'_2(\bar{I}) + G_2(\bar{I}) + G'(\bar{I}) \\ & + H(\bar{I}). \end{aligned} \quad (19)$$

C'est pour des raisons très précises de calcul que nous avons présenté d'une manière qui peut paraître redondante les décompositions de $(E_{[2]})_{[2]}$ et de $(\bar{I}x\bar{I})x(\bar{I}x\bar{I})$. En effet, les deux expressions associées de la forme

$$\begin{aligned} & \mathcal{C} \left\{ \psi'(x,y)\psi'(x',y') \middle/ ((x,y), (x',y')) \in (E_{i'} \times E_{i''}) \times (E_{i'''} \times E_{i''''}) \right\} \quad (20) \\ & \left\{ \phi(x,y)\phi(x',y') \middle/ ((x,y), (x',y')) \in (E_{i'} \times E_{i''}) \times (E_{i'''} \times E_{i''''}) \right\} \quad (20') \end{aligned}$$

dépendant chacune et de la même façon de la structure propre de $((x,y), (x',y'))$ qui appartient à $(E_{[2]})_{[2]}$, ainsi que de celle de $((i,i'), (i'',i'''))$ qui appartient à $(\bar{I}x\bar{I})x(\bar{I}x\bar{I})$. Si V désigne la structure de (u,v) ($V = G_1, G'_1, G_2, G'_2$ ou H) et W celle de $((i,i'), (i'',i'''))$ ($W = L, K_1, K_2, K_3, K_4, G, G', G_1, G'_1, G_2, G'_2, \Delta, D, D'$ ou H), on notera $\Upsilon(V, \mathcal{C})$ (resp. $c(V, \mathcal{L})$) l'expression (20) (resp. (20')), où \mathcal{L} indique le quadruplet $((i,i'), (i'',i'''))$.

En d'autres termes, le calcul se déroule conformément à une partition croisée de $(E_{[2]})_{[2]}$, la première en

$$\{G_1(E), G'_1(E), G_2(E), G'_2(E), H(E)\}$$

et la deuxième en

$$\left\{ \left\{ (E_{i'} \times E_{i''}) \times (E_{i'''} \times E_{i''''}) \middle/ ((i,i'), (i'',i''')) \in W \right\} / W = L, K_1, K_2, K_3, K_4, G, G', G_1, G'_1, G_2, G'_2, \Delta, D, D', H \right\}$$

où la dernière indexation est celle définie par la décomposition (19).

On peut remarquer que certaines structures W ne se rencontrent pas dans le développement de l'expression (17). D'autre part et surtout le coefficient $\Upsilon(V, \mathcal{L})$ (resp. $c(V, \mathcal{L})$) est, en vertu de la structure de partition de $\{E_{i'}/1 \leq i' \leq I\}$, nul pour de nombreux couples (V, W) .

En fait, si $\Upsilon(V, \mathcal{L})$ représente une proportion, $c(V, \mathcal{L})$ représente un cardinal dont la forme sera la même que celle du numérateur de $\Upsilon(V, \mathcal{L})$.

Les structures de (V, W) pour lesquels le coefficient Υ (resp. c) n'est pas nul sont :

$$\begin{aligned} & (G_1, L), (G_1, K_4), (G_1, K_2), (G_1, G_1), (G_1, D), \\ & (G'_1, L), (G'_1, K_3), (G'_1, K_2), (G'_1, G'_1), (G'_1, D'), \\ & (G_2, L), (G_2, K_3), (G_2, K_1), (G_2, G_2), (G_2, D), \\ & (G'_2, L), (G'_2, K_4), (G'_2, K_1), (G'_2, G'_2), (G'_2, D'), \\ & (H, L), (H, K_4), (H, K_3), (H, K_2), (H, K_1), \\ & (H, G), (H, G_1), (H, G'_2), (H, G'_1), (H, G_2), (H, G'), \\ & (H, \Delta), (H, D), (H, D') \end{aligned} \quad (21)$$

et (H, H) ; soit 35 formes.

Considérons les trois sommes pour (u,v) ($u \neq v$) de l'expression (17). Les structures rencontrées dans leur développement de l'indice $((i,i'), (i'',i'''))$ sont respectivement : L et Δ pour la première somme, $G_1, G'_2, G'_1, G_2, D, D'$ et H pour la deuxième somme, enfin K_4, K_2 et G pour la troisième somme. Désignons par $\Gamma(V, W)$ la somme des produits $\Upsilon(V, \mathcal{L})c(V, \mathcal{L})$ pour \mathcal{L} décrivant W :

$$\Gamma(V, W) = \sum \{ \gamma(V, \mathcal{L}) c(V, \mathcal{L}) / \mathcal{L} \in W \}. \quad (22)$$

Avec les notations précédentes, on a le théorème suivant :

THEOREME 1. Le moment absolu d'ordre 2 de la v.a. $S(\eta, \theta'; \mathcal{L})$ est donné par la formule :

$$\begin{aligned} \mu_2(\eta, \theta'; \mathcal{L}) = & \mu(\eta, \theta'; \mathcal{L}) + \Gamma(G_1, L) + \Gamma(G'_1, L) + \Gamma(G_2, L) + \Gamma(G'_2, L) + \Gamma(H, L) + \Gamma(H, \Delta) \\ & + \Gamma(G_1, G_1) + \Gamma(G_1, D) + \Gamma(G'_1, G'_1) + \Gamma(G'_1, D') + \Gamma(G_2, G_2) \\ & + \Gamma(G_2, D) + \Gamma(G'_2, G'_2) + \Gamma(G'_2, D') + \Gamma(H, G_1) + \Gamma(H, G'_1) \\ & + \Gamma(H, G_2) + \Gamma(H, G'_2) + \Gamma(H, D) + \Gamma(H, D') + \Gamma(H, H) \\ & + 2 [\Gamma(G_1, K_4) + \Gamma(G'_1, K_3) + \Gamma(G_2, K_3) + \Gamma(G'_2, K_4) \\ & + \Gamma(H, K_4) + \Gamma(H, K_3) + \Gamma(H, G)]. \end{aligned} \quad (23)$$

où $\mu(\eta, \theta'; \mathcal{L})$ a été défini par la formule (16) ci-dessus.

Chacune des expressions composantes précédentes de la forme $\gamma(V, \mathcal{L})$ (resp. $c(V, \mathcal{L})$) se calcule parfaitement en fonction de la table de contingence de croisement entre les deux préordres totaux θ et \mathcal{L} (resp. η et \mathcal{L}). Toutefois, il serait ici trop long d'effectuer tous les calculs ; nous nous contenterons de quelques cas typiques pour montrer leur faisabilité.

3.1. Calcul de $\gamma(H, \mathcal{L})$ (resp. $c(H, \mathcal{L})$) pour $\mathcal{L} \in \Delta(\bar{I})$.

$$\gamma[(H, \mathcal{L}) / \mathcal{L} \in \Delta(\bar{I})] = \int \psi'(u) \psi'(v) / (u, v) \in H(E) \cap (E_{i_1} \times E_{i_1}) \times (E_{i_3} \times E_{i_3}) \Bigg], \quad (24)$$

$$\text{où } ((i_1, i_1), (i_3, i_3)) \in \Delta(\bar{I}).$$

Cette espérance représente la proportion de couples de préordres totaux $(\theta_{i_1}^1, \theta_{i_3}^1)$ tels que $\theta_{i_1}^1$ place la première composante x de u avant la deuxième composante y de u et $\theta_{i_3}^1$ place la première composante z de v avant la deuxième composante t de v . Cette proportion est égale à

$$\sum \left\{ \frac{n(i_1 \wedge k) n(i_1 \wedge k')_x n(i_3 \wedge k'') n(i_3 \wedge k''')}{n(i_1) [n(i_1) - 1] n(i_3) [n(i_3) - 1]} \Bigg/ 1 \leq k < k' \leq K, 1 \leq k'' < k''' \leq K \right\} \quad (25)$$

D'autre part,

$$c[(H, \mathcal{L}) / \mathcal{L} \in \Delta(\bar{I})] = \sum \{ \phi(u) \phi(v) / (u, v) \in H(E) \cap (E_{i_1} \times E_{i_1}) \times (E_{i_3} \times E_{i_3}) \}, \quad (26)$$

où $((i_1, i_1), (i_3, i_3))$ appartient à $\Delta(\bar{I})$, représente le nombre de couples de couples de la forme $((x, y), (z, t))$ tels que d'une part, (x, y) appartient à la restriction $R(\eta_{i_1}^1)$ de $R(\eta)$ à $E_{i_1} \times E_{i_1}$ et d'autre part, (z, t) appartient à la restriction $R(\eta_{i_3}^1)$ de $R(\eta)$ à $E_{i_3} \times E_{i_3}$. Dans ces conditions, ce cardinal s'écrit :

$$\sum \{ n(i_1 \wedge j) n(i_1 \wedge j') n(i_3 \wedge j'') n(i_3 \wedge j''') / 1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq j'' < j''' \leq J \}. \quad (27)$$

3 .2. Calcul de $\Upsilon(G_1, \mathcal{L})$ (resp. $c(G_1, \mathcal{L})$) pour $\mathcal{L} \in G_1(\bar{I})$

$$\Upsilon[(G_1, \mathcal{L}) / \mathcal{L} \in G_1(\bar{I})] = \mathcal{P}[\psi'(u)\psi'(v) / (u, v) \in G_1(E) \cap (E_{i_1} \times E_{i_2}) \times (E_{i_1} \times E_{i_4})]. \quad (28)$$

où $((i_1, i_2), (i_1, i_4))$ appartient à $G_1(\bar{I})$. Il s'agit de la proportion de tri-uples de préordres totaux $(\theta_{i_1}^!, \theta_{i_2}^!, \theta_{i_4}^!)$ qui, respectivement, placent l'objet x (première composante commune de u et v) dans une classe d'indice k , l'objet y (deuxième composante de u) dans une classe d'indice k' et l'objet t (deuxième composante de v) dans une classe d'indice k'' ; tels que $k < k'$ et $k < k''$. Cette proportion est donc égale à

$$\sum \left\{ \frac{n(i_1 \wedge k) n(i_2 \wedge k') n(i_4 \wedge k'')}{n(i_1) n(i_2) n(i_4)} \mid 1 \leq k < k', k < k'' \leq K \right\}. \quad (29)$$

D'autre part,

$$c[(G_1, \mathcal{L}) / \mathcal{L} \in G_1(\bar{I})] = \sum \{ \phi(u)\phi(v) / (u, v) \in G_1(E) \cap (E_{i_1} \times E_{i_2}) \times (E_{i_1} \times E_{i_4}) \}, \quad (30)$$

où $((i_1, i_2), (i_1, i_4))$ appartient à $G_1(\bar{I})$ représente le nombre de couples de couples de la forme $((x, y), (x, t))$ pour lesquels x appartient à une classe d'indice j de η_{i_1} , y à une classe d'indice j' ($j' > j$) de η_{i_2} , t à une classe d'indice j'' ($j'' > j$) de η_{i_4} ; où η_{i_ℓ} est la restriction de η à E_{i_ℓ} . Par conséquent, ce cardinal est égal à

$$\sum \{ n(i_1 \wedge j) n(i_2 \wedge j') n(i_4 \wedge j'') \mid 1 \leq j \leq j', j \leq j'' \leq J \}. \quad (31)$$

3 .3. Calcul de $\gamma(H, \mathcal{L})$ (resp. $c(H, \mathcal{L})$) pour $\mathcal{L} \in G_1(\bar{I})$.

$$\Upsilon[(H, \mathcal{L}) / \mathcal{L} \in G_1(\bar{I})] = \mathcal{P}[\psi'(u)\psi'(v) / (u, v) \in H(E) \cap (E_{i_1} \times E_{i_2}) \times (E_{i_1} \times E_{i_4})], \quad (32)$$

où $((i_1, i_2), (i_1, i_4))$ appartient à $G_1(\bar{I})$. Cette espérance est définie par la proportion de tri-uples de préordres totaux $(\theta_{i_1}^!, \theta_{i_2}^!, \theta_{i_4}^!)$ tels que $\theta_{i_1}^!$ place l'objet x dans sa k -ème classe et l'objet z dans sa h -ème classe, $\theta_{i_2}^!$ place l'objet y dans sa k' -ème classe avec $k' > k$ et $\theta_{i_4}^!$ place l'objet t dans sa h' -ème classe avec $h' > h$. Cette proportion se décompose en une somme de deux proportions selon que $h = k$ où $h \neq k$; elle est égale à

$$\begin{aligned} & \sum \left\{ \frac{n(i_1 \wedge k) [n(i_1 \wedge k) - 1]}{n(i_1) [n(i_1) - 1]} \frac{n(i_2 \wedge k')}{n(i_2)} \frac{n(i_4 \wedge k'')}{n(i_4)} \mid 1 \leq k < k', k \leq k'' \leq K \right\} \\ & + \sum \left\{ \frac{n(i_1 \wedge k) n(i_1 \wedge h)}{n(i_1) [n(i_1) - 1]} \frac{n(i_2 \wedge k') n(i_4 \wedge h')}{n(i_2) n(i_4)} \mid 1 \leq k < k' \leq K, 1 \leq h < h' \leq K, h \neq k \right\} \quad (33) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sum \{ \phi((x, y), (z, t)) / ((x, y), (z, t)) \in H(E) \cap (E_{i_1} \times E_{i_2}) \times (E_{i_1} \times E_{i_4}) \} \quad (34)$$

représente le nombre d'éléments $((x,y),(z,t))$ de $H(E)$ tels que

$$(x,y) \in R(\eta) \cap E_{i_1} \times E_{i_2} \text{ et } (z,t) \in R(\eta) \cap E_{i_1} \times E_{i_4}.$$

Pour tout système de trois indices j, j' et j'' tels que $1 \leq j < j', j'' \leq j' \leq J$, il y a $n(i_1 \wedge j) n(i_2 \wedge j') [n(i_1 \wedge j) - 1] n(i_4 \wedge j'')$ éléments contribuant à la somme (34) pour lesquels x et z appartiennent à $F_{j i_1}$, y appartient à $F_{j' i_2}$ et t à $F_{j'' i_4}$.

Pour tout système de quatre indices j, j', h et h' tels que $1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq h < h' \leq J$ et $j \neq h$, il y a $n(i_1 \wedge j) n(i_2 \wedge j') n(i_1 \wedge h) n(i_4 \wedge h')$ éléments qui contribuent à la somme (34) pour lesquels x appartient à $F_{j i_1}$, y à $F_{j' i_2}$, z à $F_{h i_1}$ et t à $F_{h' i_4}$.

Le cardinal $c[(H, L) / \mathcal{L} \in G_1(\bar{I})]$ est par conséquent égal à

$$\begin{aligned} & \{ [n(i_1 \wedge j) [n(i_1 \wedge j) - 1] n(i_2 \wedge j') n(i_4 \wedge j'') / 1 \leq j < j', j < j'' \leq J] \\ & + \{ [n(i_1 \wedge j) n(i_2 \wedge j') n(i_1 \wedge h) n(i_4 \wedge h') / 1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq h < h' \leq J, j \neq h] \}. \end{aligned} \quad (35)$$

Nous allons encore envisager une dernière situation

3.4. Calcul de $\gamma(G'_1, \mathcal{L})$ (resp. $c(G'_1, \mathcal{L})$) pour $\mathcal{L} \in K_3(\bar{I})$.

$\gamma[(G'_1, \mathcal{L}) / \mathcal{L} \in K_3(\bar{I})] = \frac{1}{\#} \{ \Psi'(u) \Psi'(v) / (u,v) \in G'_1(E) \cap (E_{i_1} \times E_{i_1}) \times (E_{i_3} \times E_{i_1}) \}$,
où $((i_1, i_1), (i_3, i_1)) \in K_3(\bar{I})$.

Cette espérance est définie par la proportion de couples de préordres totaux (θ'_1, θ'_3) tels que θ'_1 situe l'objet x (première composante de u et deuxième composante de v) dans sa k -ème classe et l'objet y (deuxième composante de u) dans sa k' -ème classe, avec $k < k'$ et d'autre part, θ'_3 situe l'objet z (première composante de v) dans sa k'' -ème classe, avec $k'' < k$. Cette proportion est donc égale à

$$\sum \left\{ \frac{n(i_1 \wedge k) n(i_1 \wedge k')}{n(i_1) [n(i_1) - 1]} \times \frac{n(i_3 \wedge k'')}{n(i_3)} / 1 \leq k'' \leq k \leq k' \leq K \right\}. \quad (37)$$

Par ailleurs,

$$c(G'_1, \mathcal{L}) = \sum \{ \phi((x,y), (z,x)) / ((x,y), (z,x)) \in (E_{i_1} \times E_{i_1}) \times (E_{i_3} \times E_{i_1}) \} \quad (38)$$

est un cardinal qui peut être énuméré par rapport à l'indice j de la classe $F_{j i_1}$ de l'objet x . On obtient

$$\sum \{ [n(i_1 \wedge j) n(i_1 \wedge j') n(i_3 \wedge j'') / 1 \leq j'' < j < j' \leq J] \}. \quad (39)$$

Nous n'irons pas plus loin dans le détail des calculs qui permettent la détermination des différents éléments de l'expression (23), en attendant leur programmation, délicate certes, mais tout à fait possible.

Considérons à présent la v.a. duale $S(\eta', \theta'; \mathcal{L})$ dont on comprend aisément la définition (cf. § 1 ci-dessus). On remarquera que pour des raisons de symétrie formelle, les deux premiers moments de la distribution de la

v.a. $S(\eta', \theta; \xi)$ sont respectivement identiques à ceux de la v.a. $S(\eta, \theta'; \xi)$. Cette propriété doit, pour des raisons liées à la structure du calcul, être étendue à n'importe quel moment. Comme nous l'avons fait dans le cas total (LERMAN(1973)), ce calcul suppose l'examen de la structure propre d'un q-uple de couples d'objets distincts de E (resp. d'un q-uple de couples d'indices de I) (q entier). Nous n'irons pas plus loin dans cette analyse en nous permettant toutefois d'avancer la propriété suivante :

THEOREME 2. La distribution de la v.a. $S(\eta', \theta; \xi)$ est identique à celle de la v.a. $S(\eta, \theta'; \xi)$.

Par rapport aux expressions calculées, l'indice d'association partielle se met sous la forme

$$\rho_{\eta\theta;\xi} = \frac{s(\eta, \theta) - \mu_1(\eta, \theta'; \xi)}{\sqrt{\mu_2(\eta, \theta'; \xi) - \mu_1^2(\eta, \theta'; \xi)}} \quad (40)$$

(cf. formules (4), (16) et (23)).

4. Indépendance conditionnelle

L'indépendance conditionnelle entre les deux variables totalement préordinales η et θ , relativement à la variable de même nature ξ , s'exprime comme suit :

- Pour tout $i, 1 \leq i \leq I$ et tout ensemble de quatre indices j, j', k et k' tels que $1 \leq j < j' \leq J$ et $1 \leq k < k' \leq K$, la proportion relative de couples (x, y) appartenant à $(F_j \cap G_k \cap E_i) \times (F_{j'} \cap G_{k'} \cap E_i)$ est égale à la proportion relative de couples (x, y) appartenant à $(F_j \cap E_i) \times (F_{j'} \cap E_i)$, multipliée par la proportion relative de couples (x, y) appartenant à $(G_k \cap E_i) \times (G_{k'} \cap E_i)$; ces différentes proportions conditionnelles étant relatives à l'ensemble des couples d'éléments distincts de $E_i \times E_i$:

$(\forall i, 1 \leq i \leq I)$ et $(\forall (j, j', k, k'), 1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq k < k' \leq K)$,

$$\frac{n(i \wedge j \wedge k) n(i \wedge j' \wedge k')}{n(i) [n(i) - 1]} = \frac{n(i \wedge j) n(i \wedge j')}{n(i) [n(i) - 1]} \times \frac{n(i \wedge k) n(i \wedge k')}{n(i) [n(i) - 1]} \quad (41)$$

- Pour tout (i, i') de $\bar{I}^{[2]}$ et tout ensemble de quatre indices j, j', k et k' tels que $1 \leq j < j' \leq J$ et $1 \leq k < k' \leq K$, la proportion relative de couples (x, y) appartenant à $(F_j \cap G_k \cap E_i) \times (F_{j'} \cap G_{k'} \cap E_{i'})$ est égale au produit de la proportion relative de couples (x, y) appartenant à $(F_j \cap E_i) \times (F_{j'} \cap E_{i'})$ par la proportion relative de couples (x, y) appartenant à $(G_k \cap E_i) \times (G_{k'} \cap E_{i'})$; ces différentes proportions conditionnelles étant relatives à l'ensemble $E_i \times E_{i'}$:

$(\forall (i, i') \in \bar{I}^2)$ et $(\forall (j, j', k, k'), 1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq k < k' \leq K)$,

$$\frac{n(i \wedge j \wedge k) n(i' \wedge j' \wedge k')}{n(i) n(i')} = \frac{n(i \wedge j) n(i' \wedge j')}{n(i) n(i')} \times \frac{n(i \wedge k) n(i' \wedge k')}{n(i) n(i')} \quad (42)$$

PROPRIETE. Le coefficient d'association partielle $\rho_{\eta\theta;\xi}$ est nul en cas d'indépendance conditionnelle caractérisée par les relations (41) et (42)

ci-dessus.

Pour le voir, il suffit de décomposer $R(\eta) \cap R(\theta)$ conformément à la partition suivante de $E^{[2]}$:

$$E^{[2]} = \sum \{E_i^{[2]} / i \in \bar{I}\} + \sum \{E_i \times E_{i'} / (i, i') \in \bar{I}^{(2)}\}, \quad (43)$$

où la somme est ensembliste.

III.2. CAS D'UN INDICE D'ASSOCIATION PARTIELLE DANS LE CADRE D'UNE H.A.L. A CARACTERE GLOBAL

Les notations restent les mêmes que celles du paragraphe III.1. précédent, l'indice cherché ici sera noté $r_{\eta\theta, \ell}$.

L'indice brut entre les deux variables qualitatives ordinales η et θ , $s(\eta, \theta)$ reste toujours défini par la relation (4) du paragraphe précédent.

1. Expression de l'h.a.l.

A l'indice brut $s(\eta, \theta)$ (défini par l'expression (4) du paragraphe III.1. ci-dessus), on associe la v.a. $S_1(\eta, \theta; \ell)$ (resp. $S_1(\eta', \theta; \ell)$) qui sera en fait définie à partir de l'expression de ses moments calculés d'une façon particulière dans le cadre de la même h.a.l. que ci-dessus (§ III.1.) Cette façon particulière consiste à effectuer les calculs des proportions conditionnelles de façon globale, "en moyenne". Relativement au préordre total ℓ , on ne retiendra de la connaissance de la position d'un couple d'objets distincts (x, y) de $E \times E$ que son appartenance à $R(\ell)$ ou à $S(\ell)$ (partie complémentaire de $R(\ell)$ dans $E^{[2]}$), en "oubliant" la position relative des deux composantes x et y par rapport aux diverses classes E_i , $1 \leq i \leq I$, du préordre total ℓ . D'autre part, pour ce qui concerne un couple de couples $((x, y), (x', y'))$, on tiendra d'une part compte de la structure propre de ce dernier selon son appartenance à $G_1(E)$, $G'_1(E)$, $G_2(E)$, $G'_2(E)$ ou $H(E)$ et d'autre part, relativement à ℓ , de son appartenance à $R(\ell) \times R(\ell)$, $R(\ell) \times S(\ell)$, $S(\ell) \times R(\ell)$ ou à $S(\ell) \times S(\ell)$, en "oubliant" la position relative des différents objets composants par rapport aux différentes classes E_i , $1 \leq i \leq I$.

Cette approche se justifie en ce sens qu'il s'agit de l'attitude statistique générale devant l'ignorance ; d'ailleurs si nous accentuons cette démarche jusqu'à ne distinguer relativement à un couple de couples d'objets (c, d) , que $c=d$ et $c \neq d$, on se retrouve dans la même situation que celle de la comparaison partielle d'attributs (cf. § II) où on aurait ici à comparer les deux parties $R(\eta)$ et $R(\theta)$ de $E^{[2]}$, en neutralisant l'influence de la partie $R(\ell)$. Cette dernière procédure correspond bien à celle de M.G. Kendall dans la comparaison partielle de variables "rang" (cf. paragraphe suivant). Ainsi, en tenant compte de la structure du couple de couples d'objets, nous espérons fournir un calcul de la variance plus précis que le dernier mentionné.

2. Calcul de la moyenne de la v.a. $S_1(\eta, \theta; \ell)$.

ϕ (resp. ψ') désigne toujours la fonction indicatrice de $R(\eta)$ (resp. $R(\theta')$). La v.a. $S_1(\eta, \theta; \ell)$ s'exprime par la formule suivante :

$$S_1(\eta, \theta; \ell) = \sum \{\phi(u)\psi'(u) / u \in R(\zeta)\} + \sum \{\phi(u)\psi'(u) / u \in S(\zeta)\}, \quad (1)$$

où, rappelons-le,

$$\begin{aligned} R(\zeta) &= \sum \{E_i \times E_{i'} / 1 \leq i < i' \leq I\}, \\ S(\zeta) &= \sum \{E_i \times E_{i'} / 1 \leq i < i' \leq I\} + \sum \{(E_i)^{[2]} / 1 \leq i \leq I\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Le calcul de $\mathcal{C}[S_1(n, \theta'; \zeta)]$ suppose la détermination des valeurs des deux expressions suivantes :

$$\Pr\{\psi'(u)=1/u \in R(\zeta)\} \quad (3)$$

et $\Pr\{\psi'(u)=1/u \in S(\zeta)\}. \quad (4)$

Nous désignerons par $r[(n;t);\zeta]$ le cardinal de l'ensemble des préordres totaux θ_1 de composition $t=(n(1), n(2), \dots, n(k), \dots, n(K))$ pour lesquels la table de contingence de l'intersection des deux préordres se trouve définie par $\{n(i\lambda k) / 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq K\}$. Bien qu'il puisse être aisément déterminé, nous n'aurons pas besoin d'explicitier ce cardinal dans les raisonnements par symétrie que nous allons conduire.

Nous noterons $r[u/u \in R(\zeta)]$ (resp. $r[u/u \in S(\zeta)]$) le nombre moyen de fois où la première composante x de u précède strictement (pour θ_1) la deuxième composante y de u , lorsque θ_1 décrit son espace d'évolution qu'on indiquera par $\Omega((n;t);\zeta)$ ($\text{card}[\Omega((n;t);\zeta)] = r[(n;t);\zeta]$).

Dans ces conditions, les expressions (3) et (4) ci-dessus peuvent se mettre sous la forme

$$\Pr\{\psi'(u)=1/u \in R(\zeta)\} = \frac{r[u/u \in R(\zeta)]}{r[(n;t);\zeta]}, \quad (5)$$

$$\Pr\{\psi'(u)=1/u \in S(\zeta)\} = \frac{r[u/u \in S(\zeta)]}{r[(n,t);\zeta]} \quad (6)$$

Nous dirons qu'un couple (x,y) se trouve "spécifié" par θ_1 si (x,y) appartient à $R(\theta_1)$. Pour déterminer le rapport (5) (resp. (6)), on calcule de deux façons différentes le nombre de spécifications qui s'opèrent de couples de $R(\zeta)$ (resp. $S(\zeta)$), lorsque θ_1 décrit son espace d'évolution $\Omega((n;t);\zeta)$. On a

$$r[u/u \in R(\zeta)] \text{card}[R(\zeta)] = \text{card}[R(\zeta) \cap R(\theta)] r[(n;t);\zeta] \quad (7)$$

et $r[u/u \in S(\zeta)] \text{card}[S(\zeta)] = \text{card}[S(\zeta) \cap R(\theta)] r[(n;t);\zeta] \quad (8)$

Ainsi

$$\Pr\{\psi'(u)=1/u \in R(\zeta)\} = \frac{\text{card}[R(\zeta) \cap R(\theta)]}{\text{card}[R(\zeta)]} \quad (9)$$

et

$$\Pr\{\psi'(u)=1/u \in S(\zeta)\} = \frac{\text{card}[S(\zeta) \cap R(\theta)]}{\text{card}[S(\zeta)]} \quad (10)$$

Dans ces conditions, on obtient

$$\mathcal{C}[S_1(n, \theta'; \zeta)] = \frac{\text{card}[R(\zeta) \cap R(n)] \text{card}[R(\zeta) \cap R(\theta)]}{\text{card}[R(\zeta)]} + \frac{\text{card}[S(\zeta) \cap R(n)] \text{card}[S(\zeta) \cap R(\theta)]}{\text{card}[S(\zeta)]} \quad (11)$$

On connaît déjà l'expression de $\text{card}[R(\zeta) \cap R(\eta)]$ en fonction des cardinaux des classes de l'intersection des deux préordres totaux ζ et θ (cf. formule (4) du paragraphe précédent). Par ailleurs, une expression de la forme $\text{card}[S(\zeta) \cap R(\eta)]$ se met sous la forme

$$\text{card}[S(\zeta) \cap R(\eta)] = \sum \{n(i \wedge j) n(i' \wedge j') / 1 \leq j' < j \leq J, 1 \leq i \leq i' \leq I\} \quad (12)$$

3. Calcul de la variance de la v.a. $S_1(\eta, \theta'; \zeta)$.

Le moment absolu d'ordre 2 de $S_1(\eta, \theta'; \zeta)$ se met sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \mu_1(\eta, \theta'; \zeta) + \sum \{ \phi(u) \phi(v) \mathcal{G}[\psi'(u) \psi'(v)] / (u, v) \in (R(\zeta))^{[2]} \} \\ & + \sum \{ \phi(u) \phi(v) \mathcal{G}[\psi'(u) \psi'(v)] / (u, v) \in (S(\zeta))^{[2]} \} \\ & + 2 \sum \{ \phi(u) \phi(v) \mathcal{G}[\psi'(u) \psi'(v)] / (u, v) \in (R(\zeta) \times S(\zeta)) \}, \quad (13) \end{aligned}$$

où $\mu_1(\eta, \theta'; \zeta)$ n'est autre que $\mathcal{G}[S_1(\eta, \theta'; \zeta)]$ (cf. (11)).

Chacune des sommes aura à être décomposée selon la structure propre du couple (u, v) ; c'est-à-dire, conformément à la partition $\{G_1, G'_1, G_2, G'_2, H\}$ de $(E^{[2]})^{[2]}$ (cf. § III.1.3.). Nous aurons dans ces conditions à évaluer les expressions de la forme :

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}[\psi'(u) \psi'(v) / (u, v) \in K \cap (R(\zeta))^{[2]}] \\ & \sum \{ \phi(u) \phi(v) / (u, v) \in K \cap (R(\zeta))^{[2]} \} \\ & \mathcal{G}[\psi'(u) \psi'(v) / (u, v) \in K \cap (S(\zeta))^{[2]}] \\ & \sum \{ \phi(u) \phi(v) / (u, v) \in K \cap (S(\zeta))^{[2]} \} \quad (14) \\ & \mathcal{G}[\psi'(u) \psi'(v) / (u, v) \in K \cap (R(\zeta) \times S(\zeta))] \\ & \sum \{ \phi(u) \phi(v) / (u, v) \in K \cap (R(\zeta) \times S(\zeta)) \}, \end{aligned}$$

où K désigne ici l'un des ensembles G_1, G'_1, G_2, G'_2 et H .

Les expressions précédentes seront respectivement notées $\Gamma(K, R2)$, $C(K, R2)$, $\Gamma(K, S2)$, $C(K, S2)$, $\Gamma(K, RS)$ et $C(K, RS)$.

Nous nous contenterons d'expliciter le calcul des expressions les plus typiques pour préciser la nature des calculs, en laissant le soin au lecteur d'achever sans difficulté la détermination des dernières expressions.

3.1. Calcul de $\Gamma(G_1, R2)$

Nous dirons qu'un couple (u, v) de $(E^{[2]})^{[2]}$ se trouve "spécifié" par le préordre total θ_1 si (u, v) appartient à $(R(\theta_1))^{[2]}$. Nous allons dans ces conditions, pour déterminer $\Gamma(G_1, R2)$ calculer de deux façons différentes le nombre total de spécifications qui s'opèrent au niveau de l'ensemble $G_1 \cap (R(\zeta))^{[2]}$ lorsque θ_1 décrit son espace $\Omega[n; t; \zeta]$ d'évolution. Pour cela, on introduit le nombre moyen de fois où (u, v) de $G_1 \cap (R(\zeta))^{[2]}$ se trouve spécifié lorsque θ_1 décrit son espace d'évolution ; ce dernier est noté

$$r[(u, v) / (u, v) \in G_1 \cap (R(\zeta))^{[2]}] \quad (15)$$

On a

$$r[(u,v)/(u,v) \in G_1 \cap (R(\zeta))^{[2]}] \times \text{card}[G_1 \cap (R(\zeta))^{[2]}] \\ = r[(n;t;\zeta)] \times \text{card}[G_1 \cap (R(\zeta))^{[2]} \cap (R(\theta))^{[2]}], \quad (16)$$

puisque chaque θ_1 spécifie exactement

$$\text{card}[G_1 \cap (R(\zeta))^{[2]} \cap (R(\theta))^{[2]}] \text{ couples } (u,v) \text{ de } G_1 \cap (R(\zeta))^{[2]}.$$

Pour achever de déterminer l'expression cherchée qui est représentée par la proportion

$$r[(u,v)/(u,v) \in G_1 \cap (R(\zeta))^{[2]}] / r[(n;t;\zeta)],$$

il nous faut achever de préciser $\text{card}[G_1 \cap (R(\zeta))^{[2]}]$ et $\text{card}[G_1 \cap (R(\zeta))^{[2]} \cap (R(\theta))^{[2]}]$. On a

$$\text{card}[G_1 \cap (R(\zeta))^{[2]}] = \sum \{n(i)n(i') [n(i')-1] / 1 \leq i < i' \leq I\} \\ + \sum \{n(i)n(i')n(i'') / 1 \leq i < i', i < i'' \leq I, i' \neq i''\}; \quad (17)$$

d'autre part, le deuxième cardinal à déterminer peut se mettre sous la forme :

$$\text{card}[G_1 \cap [(R(\zeta) \cap R(\theta_1)) \times (R(\zeta) \cap R(\theta_1))]] = \sum \{n(i \wedge k)n(i' \wedge k') [n(i' \wedge k')-1] / \\ 1 \leq i < i' \leq I, 1 \leq k < k' \leq K\} + \sum \{n(i \wedge k)n(i' \wedge k'')n(i'' \wedge k'') / 1 \leq i < i', i < i'' \leq I, 1 \leq k < k', k < k'' \leq K, \\ (i'', k'') \neq (i', k')\} \quad (18)$$

Dans ces conditions $\Gamma(G_1, R_2)$ représente le rapport de l'expression (18) sur celle, (17).

3.1'. Calcul de $C(G_1, R_2)$

Il s'agit de $\text{card}[G_1 \cap (R(\zeta))^{[2]} \cap (R(\eta))^{[2]}]$ dont l'expression est analogue à celle (18).

3.2. Calcul de (G_1, S_2)

Le principe de ce calcul est analogue à celui du paragraphe 3.1. ci-dessus ; nous avons à déterminer

$$\text{card}[G_1 \cap (S(\zeta))^{[2]}] \text{ et } \text{card}[G_1 \cap (S(\zeta))^{[2]} \cap (R(\theta))^{[2]}].$$

$$\text{card}[G_1 \cap (S(\zeta))^{[2]}] = \sum \{n(i)m(i')m(i'') / 1 \leq i' \leq i, i'' \leq i\}, \quad (19)$$

où il y a lieu de préciser $m(i')$ et $m(i'')$ selon la position relative des trois indices i , i' et i'' . On a les situations suivantes et les valeurs associées de $m(i')$ et de $m(i'')$:

$$\begin{aligned} i=i'=i'' &\rightarrow m(i')=n(i)-1 \text{ et } m(i'')=n(i)-2 \\ i=i' > i'' &\rightarrow m(i')=n(i)-1 \text{ et } m(i'')=n(i'') \\ i=i'' > i' &\rightarrow m(i')=n(i') \text{ et } m(i'')=n(i)-1 \\ i > i'=i'' &\rightarrow m(i')=n(i') \text{ et } m(i'')=n(i')-1 \\ i > i', i > i'' \text{ et } i' \neq i'' &\rightarrow m(i')=n(i') \text{ et } m(i'')=n(i''), \end{aligned}$$

où, relativement à $(u,v)=((x,y),(x,z))$, i désigne le numéro de la classe de l'objet x , i' celui de la classe de l'objet y et i'' celui de la classe de l'objet z .

D'autre part,

$$\text{card}[G_1 \cap (S(\zeta))^{[2]} \cap (R(\theta))^{[2]}] = \sum \{n(i \wedge k)n(i' \wedge k') [n(i' \wedge k') - 1] / 1 \leq i' \leq i \leq I, 1 \leq k < k' \leq K\} \\ + \sum \{n(i \wedge k)n(i' \wedge k')n(i'' \wedge k'') / 1 \leq i' \leq i, i'' \leq i \leq I, 1 \leq k < k', k < k'' \leq K, k' \neq k''\}; \quad (20)$$

la première somme s'obtenant dans le cas où, relativement à un élément courant $((x, y), (x, z))$ de G_1 , la classe de y est la même que celle de z pour l'intersection des deux préordres totaux ζ et θ .

La proportion cherchée définie par $\Gamma(G_1, S2)$ est représentée par le rapport de l'expression (20) sur celle, (19).

3.2'. Calcul de $C(G_1, S2)$.

Il s'agit du cardinal $\text{card}[G_1 \cap (S(\zeta))^{[2]} \cap R(\eta)^{[2]}]$ dont l'expression est analogue à celle (20) ci-dessus.

3.3. Calcul de $\Gamma(G_1, RS)$.

Conformément à la même démarche, nous avons à déterminer $\text{card}[G_1 \cap (R(\zeta) \times S(\zeta))] \text{ et } \text{card}[G_1 \cap (R(\zeta) \times S(\zeta)) \cap R(\theta)^{[2]}]$

On a

$$\text{card}[G_1 \cap (R(\zeta) \times S(\zeta))] = \sum \{n(i)n(i')m(i'') / 1 \leq i'' \leq i' \leq I\} \\ \text{ où } m(i'') = n(i'') \text{ (resp. } [n(i'') - 1]) \text{ si } i'' \neq i' \text{ (resp. } = i'). \quad (21)$$

D'autre part,

$$\text{card}[G_1 \cap [(R(\zeta) \cap R(\theta)) \times (S(\zeta) \cap R(\theta))]] = \sum \{n(i \wedge k)n(i' \wedge k')n(i'' \wedge k'') / \begin{matrix} 1 \leq i'' \leq i' \leq I, \\ 1 \leq k < k', k < k'' \leq K \end{matrix} \} \quad (22)$$

en précisant que, relativement à un élément courant $((x, y), (x, z))$ de G_1 , i, i' et i'' (resp. k, k' et k'') désignent respectivement les numéros des classes de ζ (resp. θ) auxquelles appartiennent les objets x, y et z .

La proportion cherchée que définit $\Gamma(G_1, RS)$ est le rapport de l'expression (22) sur celle (21).

3.3'. Calcul de $C(G_1, RS)$.

Il s'agit de $\text{card}[G_1 \cap (R(\zeta) \times S(\zeta)) \cap R(\eta)^{[2]}]$ dont l'expression est analogue à celle (22) ci-dessus.

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, nous laissons le soin au lecteur d'effectuer les calculs de $\Gamma(K, R2), \Gamma(K, S2)$ et $\Gamma(K, RS)$ (resp. $C(K, R2), C(K, S2)$ et $C(K, RS)$) pour $K = G_1, G_2$ et G_2' ; mais, nous allons nous occuper du calcul pour $K=H$.

3.4. Calcul de $\Gamma(H, R2)$

Nous avons à déterminer

$$\text{card}[H \cap (R(\zeta))^{[2]}] \text{ et } \text{card}[H \cap (R(\zeta) \cap R(\theta))^{[2]}] \\ \text{card}[H \cap (R(\zeta))^{[2]}] = \sum \{n(i)n(i')m(i'')m(i''') / 1 \leq i' < i' < i'' \leq I\} \quad (23) \\ \text{ où } \\ m(i'') = n(i'') - 1 \text{ si } i'' = i \text{ ou } i'' = i', \\ m(i''') = n(i''') - 1 \text{ si } i''' = i \text{ ou } i''' = i'.$$

D'autre part

$$\text{card}[\mathbb{H} \cap ((R(\zeta) \cap R(\theta)) \times (R(\zeta) \cap R(\theta)))] \\ = \sum \{n(i \wedge k)n(i' \wedge k')m(i'' \wedge k'')m(i''' \wedge k''') / 1 \leq i \leq i', i'' \leq i''' \leq I, 1 \leq k < k', k'' < k''' \leq K\} \quad (24)$$

où

$$m(i'' \wedge k'') = \lfloor n(i'' \wedge k'') - 1 \rfloor \quad \text{si } (i'', k'') = (i, k) \text{ ou } (i', k'), \\ m(i''' \wedge k''') = \lfloor n(i''' \wedge k''') - 1 \rfloor \quad \text{si } (i''', k''') = (i, k) \text{ ou } (i', k').$$

Dans les formules (23) et (24), relativement à un élément courant $((x, y), (z, t))$ de H , i, i', i'' et i''' (resp. k, k', k'' et k''') désignent respectivement les numéros des classes de ζ (resp. θ) auxquelles appartiennent les objets x, y, z , et t .

La proportion que définit $\Gamma(H, R2)$ est le rapport de l'expression (24) sur celle (23).

3.4'. Calcul de $C(H, R2)$

Il s'agit de $\text{card}[\mathbb{H} \cap R(\zeta) \cap R(\eta)]$ dont l'expression est analogue à celle (24) ci-dessus.

3.5. Calcul de $\Gamma(H, S2)$

Il y a lieu de déterminer

$$\text{card}[\mathbb{H} \cap (S(\zeta) \cap R(\theta))] \quad \text{et} \quad \text{card}[\mathbb{H} \cap (S(\zeta) \cap R(\theta))] \\ \text{card}[\mathbb{H} \cap (S(\zeta) \cap R(\theta))] = \sum \{n(i)m(i'')m(i''') / 1 \leq i' \leq i, i''' \leq i'' \leq I\} \quad (25)$$

Pour préciser $m(i'), m(i'')$ et $m(i''')$, il y a lieu de distinguer les situations suivantes où seuls les indices égaux sont mentionnés :

$$i=i'=i''=i''' \rightarrow m(i') = \lfloor n(i') - 1 \rfloor, m(i'') = \lfloor n(i'') - 2 \rfloor \quad \text{et} \quad m(i''') = \lfloor n(i''') - 3 \rfloor,$$

$$i=i'=i'' \rightarrow m(i') = \lfloor n(i') - 1 \rfloor, m(i'') = \lfloor n(i'') - 2 \rfloor \quad \text{et} \quad m(i''') = n(i'''),$$

$$i=i'=i''' \rightarrow m(i') = \lfloor n(i') - 1 \rfloor, m(i'') = n(i'') \quad \text{et} \quad m(i''') = \lfloor n(i''') - 2 \rfloor,$$

$$i=i''=i''' \rightarrow m(i') = n(i'), m(i'') = \lfloor n(i'') - 1 \rfloor \quad \text{et} \quad m(i''') = \lfloor n(i''') - 2 \rfloor,$$

$$i=i''=i' \rightarrow m(i') = n(i'), m(i'') = \lfloor n(i'') - 1 \rfloor \quad \text{et} \quad m(i''') = \lfloor n(i''') - 2 \rfloor,$$

$$i=i' \rightarrow m(i') = \lfloor n(i') - 1 \rfloor, m(i'') = n(i'') \quad \text{et} \quad m(i''') = n(i'''),$$

$$i=i'' \rightarrow m(i') = n(i'), m(i'') = \lfloor n(i'') - 1 \rfloor \quad \text{et} \quad m(i''') = n(i'''),$$

$$i=i''' \rightarrow m(i') = n(i'), m(i'') = n(i'') \quad \text{et} \quad m(i''') = \lfloor n(i''') - 1 \rfloor,$$

$$i=i''=i''' \rightarrow m(i') = n(i'), m(i'') = n(i'') \quad \text{et} \quad m(i''') = \lfloor n(i''') - 1 \rfloor, \quad \text{enfin}$$

$$i=i''' \rightarrow m(i') = n(i'), m(i'') = n(i'') \quad \text{et} \quad m(i''') = \lfloor n(i''') - 1 \rfloor.$$

D'autre part,

$$\text{card}[\mathbb{H} \cap ((S(\zeta) \cap R(\theta)) \times (S(\zeta) \cap R(\theta)))] \\ = \sum \{n(i \wedge k)n(i' \wedge k')m(i'' \wedge k'')m(i''' \wedge k''') / 1 \leq i' \leq i, i'' \leq i''' \leq I, 1 \leq k < k', k'' < k''' \leq K\} \quad (26)$$

où $m(i'' \wedge k'') = n(i'' \wedge k'')$ (resp. $\lfloor n(i'' \wedge k'') - 1 \rfloor$) si $(i'', k'') \neq (i, k)$ et $(i'', k'') \neq (i', k')$ (resp. si $(i'', k'') = (i, k)$ ou $(i'', k'') = (i', k')$), de même $m(i''' \wedge k''') = n(i''' \wedge k''')$ (resp. $m(i''' \wedge k''') = \lfloor n(i''' \wedge k''') - 1 \rfloor$) si $(i''', k''') \neq (i, k)$ et $(i''', k''') \neq (i', k')$ (resp. $(i''', k''') = (i, k)$ ou $(i''', k''') = (i', k')$).

Il est entendu que dans les formules (25) et (26) l'indexation des classes par rapport à la position des objets x, y, z et t d'un élément cou-

rant $((x,y),(z,t))$ de H est la même que celle considérée au paragraphe 3.4 ci-dessus.

La proportion que définit $\Gamma(H,S_2)$ est le rapport de l'expression (26) sur celle (25).

3.5'. Calcul de $C(H,S_2)$

Il s'agit de $\text{card}[H \cap (S(\zeta) \cap R(\eta) \cap R(\eta)^{[2]})]$ dont l'expression est analogue à celle (26) ci-dessus.

3.6. Calcul de $\Gamma(H,RS)$

Il y a lieu de déterminer

$\text{card}[H \cap (R(\zeta) \times S(\zeta))] \text{ et } \text{card}[H \cap (R(\zeta) \times S(\zeta)) \cap R(\theta)^{[2]}]$.

$$\text{card}[H \cap (R(\zeta) \times S(\zeta))] = \sum \{n(i)n(i')m(i'')m(i''') / \prod_{1 \leq i < i' \leq I} \prod_{1 \leq i'' < i''' \leq I} \}, (27)$$

où, pour préciser $m(i'')$ et $m(i''')$, il y a lieu de considérer les situations suivantes :

$$\begin{aligned} i=i''=i''' < i' &\rightarrow m(i'') = \binom{n(i'')-1}{1} \text{ et } m(i''') = \binom{n(i''')-2}{1}, \\ i < i' = i'' = i''' &\rightarrow m(i'') = \binom{n(i'')-1}{1} \text{ et } m(i''') = \binom{n(i''')-2}{1}, \\ i=i''' < i' = i'' &\rightarrow m(i'') = \binom{n(i'')-1}{1} \text{ et } m(i''') = \binom{n(i''')-1}{1}, \text{ enfin} \\ i < i', i'' < i''', i''' \neq i, i'' \neq i' &\text{ et } i'' \neq i' \quad m(i'') = n(i'') \text{ et } m(i''') = n(i'''). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} &\text{card}[H \cap (R(\zeta) \times R(\theta)) \cap (S(\zeta) \times R(\theta))] \\ &= \sum \{n(i \wedge k)n(i' \wedge k')m(i'' \wedge k'')m(i''' \wedge k''') / \prod_{1 \leq i < i', i'' \leq I} \prod_{1 \leq k < k', k'' < k''' \leq K} \}, (28) \end{aligned}$$

où $m(i'' \wedge k'') = n(i'' \wedge k'')$ (resp. $\binom{n(i'' \wedge k'')-1}{1}$) si $(i'', k'') \neq (i, k)$ et $(i'', k'') \neq (i', k')$ (resp. si $(i'', k'') = (i, k)$ ou $(i'', k'') = (i', k')$),
 $m(i''' \wedge k''') = n(i''' \wedge k''')$ (resp. $\binom{n(i''' \wedge k''')-1}{1}$) si $(i''', k''') \neq (i, k)$ et $(i''', k''') \neq (i', k')$ (resp. si $(i''', k''') = (i, k)$ ou $(i''', k''') = (i', k')$).

Il est toujours entendu que les formules (27) et (28) ont été établies dans le cadre d'une indexation des classes de même type que ci-dessus, relativement à la position des objets x, y, z et t d'un élément courant $((x,y),(z,t))$ de H .

La proportion définie par $\Gamma(H,RS)$ est le rapport de l'expression (28) sur celle (27).

3.6'. Calcul de $C(H,RS)$

Il s'agit de $\text{card}[H \cap (R(\zeta) \times S(\zeta)) \cap R(\eta)^{[2]}]$ dont l'expression est analogue à celle (28) ci-dessus.

THEOREME 1. La moyenne $\mu_1(\eta, \theta'; \zeta)$ de la v.a. $S_1(\eta, \theta'; \zeta)$ est donnée par la formule (11) ci-dessus. La variance $\text{var}_1(\eta, \theta'; \zeta)$ de cette v.a. est donnée par la formule suivante dont les éléments viennent d'être ci-dessus précisés :

$$\begin{aligned} \text{var}_1(\eta, \theta'; \zeta) = &\mu_1(\eta, \theta'; \zeta) + \Gamma(G_1, R_2)C(G_1, R_2) + \Gamma(G_1', R_2) \times C(G_1', R_2) + \Gamma(G_2, R_2)C(G_2, R_2) + \\ &\Gamma(G_2', R_2) \times C(G_2', R_2) + \Gamma(H, R_2)C(H, R_2) + \Gamma(G_1, S_2)C(G_1, S_2) + \\ &\Gamma(G_1', S_2)C(G_1', S_2) + \Gamma(G_2, S_2)C(G_2, S_2) + \Gamma(G_2', S_2)C(G_2', S_2) + \\ &\Gamma(H, S_2)C(H, S_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2[\Gamma(G_1, RS) C(G_1, RS) + \Gamma(G'_1, RS) C(G'_1, RS) + \Gamma(G_2, RS) C(G_2, RS) + \\
& \Gamma(G'_2, RS) C(G'_2, RS) + \Gamma(H, RS) C(H, RS) \\
& - \mu_1^2(\eta, \theta'; \zeta)]. \quad (29)
\end{aligned}$$

L'indice d'association partielle $r_{\eta\theta.\zeta}$ est donné par la formule

$$r_{\eta\theta.\zeta} = \frac{[s(\eta, \theta) - \mu_1(\eta, \theta; \zeta)]}{\sqrt{\text{var}_1(\eta, \theta; \zeta)}}, \quad (30)$$

où $s(\eta, \theta)$ est l'indice brut déj) défini.

La symétrie des expressions des moments absolus d'ordres 1 et 2 par rapport aux cardinaux des classes de $\zeta \wedge \eta$ d'une part et de $\zeta \wedge \theta$ d'autre part, montre que si les calculs avaient été effectués par rapport à la v.a. $S_1(\eta', \theta; \zeta)$, on aurait obtenu le même résultat.

La définition de la v.a. $S_1(\eta, \theta'; \zeta)$ (resp. $S_1(\eta', \theta; \zeta)$) se comprend à partir de l'expression de ses moments calculés de la même manière "globale" que l'ont été les deux premiers moments, de la v.a. $S_1(\eta', \theta; \zeta)$ est identique à celui de la v.a. $S_1(\eta, \theta'; \zeta)$. Dans ces conditions, nous avancerons la propriété suivante :

Cette technique de calcul suppose la décomposition de l'ensemble $(E_{[2]})^{[q]}$ des q -uplets de couples dont deux quelconques sont distincts, en sous-ensembles dont chacun est formé des q -uplets de couples de même configuration (cf. [LERMAN(1973)]), on pourra montrer que le moment absolu d'ordre quelconque fixé, calculé "globalement" de la même manière que l'ont été les deux premiers moments, de la v.a. $S_1(\eta', \theta; \zeta)$ est identique à celui de la v.a. $S_1(\eta, \theta'; \zeta)$. Dans ces conditions, nous avancerons la propriété suivante :

THEOREME 2. Dans le cadre de l'h.a.l. à caractère partiel et "global", la distribution de la v.a. $S_1(\eta, \theta'; \zeta)$ est la même que celle de la v.a. $S_1(\eta', \theta; \zeta)$.

4. Indépendance conditionnelle

Nous désignerons dans l'énoncé suivant par $E_{j,k}$ la classe (j,k) de l'intersection des deux préordres totaux η et θ . La j,k définition de la notion de l'indépendance conditionnelle dans le cadre de l'h.a.l. considérée ici, est la suivante :

- La proportion relative de couples appartenant à $E_{j,k} \times E_{j',k'}$, ($1 \leq j < j' \leq J$, $1 \leq k < k' \leq K$) et à $R(\zeta)$ est égale au produit de la proportion relative de couples appartenant à $(F_j \times F_{j'}) \cap R(\zeta)$ par la proportion relative de couples appartenant à $(G_k \times G_{k'}) \cap R(\zeta)$; ces proportions étant relatives à l'ensemble $R(\zeta)$.

- La proportion relative de couples appartenant à $(E_{j,k} \times E_{j',k'}) \cap S(\zeta)$ ($1 \leq j < j' \leq J$, $1 \leq k < k' \leq K$) est égale au produit de la proportion relative de couples appartenant à $(F_j \times F_{j'}) \cap S(\zeta)$ par la proportion relative de couples appartenant à $(G_k \times G_{k'}) \cap S(\zeta)$; ces proportions étant relatives à l'ensemble $S(\zeta)$.

La première assertion s'exprime par les relations :

$$\begin{aligned}
 & (\forall (j, j', k, k') ; 1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq k < k' \leq K), \\
 & \sum \{n(i_{\lambda j \lambda k}) n(i'_{\lambda j' \lambda k'}) / 1 \leq i < i' \leq I\} / \sum \{n(i) n(i') / 1 \leq i < i' \leq I\} \\
 & = \left(\sum \{n(i_{\lambda j}) n(i'_{\lambda j'}) / 1 \leq i < i' \leq I\} / \sum \{n(i) n(i') / 1 \leq i < i' \leq I\} \right) \\
 & \times \left(\sum \{n(i_{\lambda k}) n(i'_{\lambda k'}) / 1 \leq i < i' \leq I\} / \sum \{n(i) n(i') / 1 \leq i < i' \leq I\} \right) \quad (31)
 \end{aligned}$$

La deuxième assertion s'exprime par les relations :

$$\begin{aligned}
 & (\forall (j, j', k, k') ; 1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq k < k' \leq K), \\
 & \sum \{n(i_{\lambda j \lambda k}) n(i'_{\lambda j' \lambda k'}) / 1 \leq i' \leq i \leq I\} / \text{card}(S(\zeta)) \\
 & = \left(\sum \{n(i_{\lambda j}) n(i'_{\lambda j'}) / 1 \leq i' \leq i \leq I\} / \text{card}(S(\zeta)) \right) \\
 & \times \left(\sum \{n(i_{\lambda k}) n(i'_{\lambda k'}) / 1 \leq i' \leq i \leq I\} / \text{card}(S(\zeta)) \right), \quad (32)
 \end{aligned}$$

où rappelons-le,

$$\text{card}(S(\zeta)) = \sum \{n(i) n(i') / 1 \leq i' < i \leq I\} + \sum \{n(i) [n(i) - 1] / 1 \leq i \leq I\}. \quad (33)$$

PROPRIETE. L'indice d'association partielle $r_{\Pi^{\theta, \zeta}}$ est nul dans le cas de l'indépendance conditionnelle caractérisée par les relations (31) et (32).

Pour j, j', k et k' fixés ($1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq k < k' \leq K$), on décompose $E_{j k} \times E_{j' k'}$ conformément à la partition de $E^{[2]}$ en $R(\zeta)$ et en $S(\zeta)$. On obtient pour les cardinaux

$$\begin{aligned}
 n(j_{\lambda k}) n(j'_{\lambda k'}) &= \sum \{n(i_{\lambda j \lambda k}) n(i'_{\lambda j' \lambda k'}) / 1 \leq i < i' \leq I\} \\
 &+ \sum \{n(i_{\lambda j \lambda k}) n(i'_{\lambda j' \lambda k'}) / 1 \leq i' < i \leq I\}. \quad (34)
 \end{aligned}$$

En décomposant la première somme (resp. la seconde) de (34) conformément à la formule (31) (resp. (32)) et en sommant par rapport à j, j', k et k' ($1 \leq j < j' \leq J, 1 \leq k < k' \leq K$), on obtient le résultat.

IV - COEFFICIENT DE CORRELATION ENTRE DEUX VARIABLES "RANG" PARTIELLE RELATIVEMENT A UNE TROISIEME VARIABLE "RANG".

1. Indice brut et h.a.l.

Soient σ, ω et \emptyset trois ordres totaux respectivement définis sur l'ensemble E des sujets à partir de trois variables "rang". Il s'agit de définir un coefficient d'association partielle entre les deux dernières variables, neutralisant l'effet de la première variable qui définit σ . Nous noterons cet indice $r_{\omega \emptyset, \sigma}$.

Comme dans le cas total, nous commençons par représenter chacun des ordres totaux par son graphe dans ExE :

$$\begin{aligned}
 R(\sigma) &= \{(x, y) / (x, y) \in ExE, x < y \text{ (pour } \sigma)\} \\
 R(\omega) &= \{(x, y) / (x, y) \in ExE, x < y \text{ (pour } \omega)\} \\
 R(\emptyset) &= \{(x, y) / (x, y) \in ExE, x < y \text{ (pour } \emptyset)\}
 \end{aligned} \quad (1)$$

L'indice brut entre ω et \emptyset est le même que celui considéré dans le cas total [cf. [LERMAN(1973)]], il prend la forme

$$s(\omega, \emptyset) = \text{card}[R(\omega) \cap R(\emptyset)] = \sum \{\phi(x, y) \psi(x, y) / (x, y) \in ExE\} \quad (2)$$

où nous avons noté ψ (resp. ϕ) la fonction indicatrice de $R(\omega)$ (resp. $R(\emptyset)$) dans ExE .

Comme d'habitude $\text{card}[R(\omega) \cap R(\emptyset)]$ et $\text{card}[R(\omega') \cap R(\emptyset)]$ désigneront les deux v.a. duales associées dans l'h.a.l. pour laquelle \emptyset' (resp. ω') est un élément aléatoire dans l'ensemble $\Omega(\emptyset; \sigma)$ (resp. $\Omega(\omega; \sigma)$), de tous les ordres totaux sur E qui remplissent par rapport à σ une condition particu-

lière que nous allons préciser. $\Omega(\omega; \sigma)$ est l'ensemble des ordres totaux ω_1 pour lesquels l'ordre partiel intersection de ω_1 avec σ , a la même structure que celui, intersection de ω avec σ . Dans ces conditions, H, G_1, G'_1, G_2 et G'_2 désignant respectivement l'ensemble des couples de couples d'objets de E de la forme $((x,y), (z,t)), ((x,y), (x,t)), ((x,y), (z,x)), ((x,y), (z,y))$ et $((x,y), (y,t))$, où des lettres distinctes désignent des objets différents, les cardinaux suivants sont invariants lorsque ω_1 décrit son espace d'évolution $\Omega(\omega; \sigma)$:

$$\begin{aligned} & \text{card}[H \cap (R(\sigma) \cap R(\omega_1))^{[2]}], & \text{card}[H \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega_1))^{[2]}], \\ & \text{card}[G_1 \cap (R(\sigma) \cap R(\omega_1))^{[2]}], & \text{card}[G_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega_1))^{[2]}], \\ & \text{card}[G'_1 \cap (R(\sigma) \cap R(\omega_1))^{[2]}], & \text{card}[G'_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega_1))^{[2]}], & (3) \\ & \text{card}[G_2 \cap (R(\sigma) \cap R(\omega_1))^{[2]}], & \text{card}[G_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega_1))^{[2]}], \\ & \text{card}[G'_2 \cap (R(\sigma) \cap R(\omega_1))^{[2]}], & \text{card}[G'_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega_1))^{[2]}]. \end{aligned}$$

où, rappelons-le, nous notons $X^{[2]}$ l'ensemble des couples d'éléments distincts de X .

On a, bien entendu, une définition analogue de l'ensemble $\Omega(\omega; \sigma)$ dont nous laissons l'analyse au spécialiste de la combinatoire des ordres.

On peut vouloir étendre l'espace de variation de ω_1 (resp. ω_1) à l'ensemble $\Omega(\sigma, r)$ (resp. $\Omega(\sigma, s)$) de tous les ordres totaux pour lesquels

$$\begin{aligned} \omega_1 \in \Omega(\sigma, r) & \Leftrightarrow \text{card}[R(\omega_1) \cap R(\sigma)] = \text{card}[R(\omega) \cap R(\sigma)] = r \\ (\text{resp. } \omega_1 \in \Omega(\sigma, s) & \Leftrightarrow \text{card}[R(\omega_1) \cap R(\sigma)] = \text{card}[R(\omega) \cap R(\sigma)] = s) \end{aligned}$$

Cependant, le problème combinatoire qui consiste à appréhender la structure de l'ensemble $\Omega(\sigma, r)$, jusqu'à pouvoir résoudre tous les calculs de proportions conditionnelles que suppose l'évaluation de la moyenne et de la variance de la v.a. associée à l'indice brut $s(\omega, \omega)$, est un problème difficile. Relativement à la question de l'énumération et de la génération algorithmique de $\Omega(\sigma, r)$ nous avons pu en numérotant les objets conformément à σ et en associant à chaque ordre ω_1 une permutation sur $\{1, 2, \dots, n\}$, engendrer algorithmiquement, conformément à l'ordre produit lexicographique des ordres σ , l'ensemble des $n!$ permutations sur $\{1, 2, \dots, n\}$. Nous avons de plus pu exprimer $\text{card}[R(\omega_1) \cap R(\sigma)]$ en fonction du rang de la permutation associée à ω_1 pour l'ordre "lexicographique" [LERMAN(1970)]. Ce résultat nous permet d'envisager de façon nettement plus efficace l'étude par simulation de la distribution de la v.a. $\text{card}[R(\omega) \cap R(\omega')]$ où ω' est un élément aléatoire dans l'ensemble $\Omega(\sigma, r)$ muni d'une probabilité uniformément répartie, (voir [MORAN(1951)]).

Nous considérons ici que ω' est un élément aléatoire de l'ensemble $\Omega(\omega; \sigma)$ muni d'une probabilité uniforme, de plus, les calculs conditionnels que nous ferons le seront "en moyenne"; ils ne retiendront d'un couple (x, y) d'objets de E que son appartenance $R(\sigma)$ ou à $S(\sigma)$ (partie complémentaire dans $E \times E$ de $R(\sigma)$), d'un couple de couples $((x, y), (x', y'))$ que sa structure (i.e. appartenance à H, G_1, G'_1, G_2 ou G'_2) ainsi que son appartenance à $R(\sigma) \times R(\sigma), R(\sigma) \times S(\sigma)$ ou à $S(\sigma) \times S(\sigma)$.

Nous avons cherché au paragraphe III.2. précédent, dans le cas de la comparaison de *preordres*, à justifier une telle approche. En revenant ici sur le dernier type d'argument pour signaler qu'on obtiendrait le même indice d'association partielle que celui proposé par M.G. Kendall si on se

contentait de ne distinguer dans la structure propre d'un couple de couples $((x, y), (x', y'))$ que $(x', y') = (x, y)$ et $(x', y') \neq (x, y)$.

2. Moyenne de la v.a. $\mathcal{F}(\omega, \omega'; \sigma) = \text{card}[R(\omega) \cap R(\omega')]$.

$$\mathcal{F}(\omega, \omega'; \sigma) = \sum \{ \phi(x, y) \psi'(x, y) / (x, y) \in \text{ExE} \}, \quad (4)$$

où ψ' est la fonction indicatrice de la partie aléatoire $R(\omega')$ de ExE .

$$\mathcal{F}(\omega, \omega'; \sigma) = \sum \{ \phi(x, y) \psi'(x, y) / (x, y) \in R(\sigma) \} + \sum \{ \phi(x, y) \psi'(x, y) / (x, y) \in S(\sigma) \} \quad (5)$$

Le calcul de $\mathcal{F}(\sigma, \omega')$ nécessite l'évaluation de chacune des deux expressions

$$\left. \begin{aligned} & \mathcal{F}[\psi'(x, y) / (x, y) \in R(\sigma)] \\ & \mathcal{F}[\psi'(x, y) / (x, y) \in S(\sigma)]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Comme nous l'avons annoncé, cette évaluation se fera en moyenne par rapport aux différents couples de $R(\sigma)$ (resp. $S(\sigma)$). Pour cela, nous désignerons par $s[(x, y) / (x, y) \in R(\sigma)]$ (resp. $s[(x, y) / (x, y) \in S(\sigma)]$) le nombre moyen de fois où un couple (x, y) de $R(\sigma)$ (resp. $S(\sigma)$) tombe dans $R(\omega_1)$ lorsque ω_1 décrit son espace d'évolution $\Omega(\sigma, r)$. On a

$$s[(x, y) / (x, y) \in R(\sigma)] = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum \{ \{ \omega_1(x, y) / \omega_1 \in \Omega(\sigma, r) \} / (x, y) \in R(\sigma) \}, \quad (7)$$

$$s[(x, y) / (x, y) \in S(\sigma)] = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum \{ \{ \omega_1(x, y) / \omega_1 \in \Omega(\sigma, r) \} / (x, y) \in S(\sigma) \}. \quad (8)$$

En disant qu'un couple (x, y) se trouve "spécifié" par ω_1 si $(x, y) \in R(\omega_1)$, nous allons calculer de deux façons différentes le nombre total de spécifications qui s'opèrent relativement aux couples appartenant à $R(\sigma)$ (resp. $S(\sigma)$), lorsque ω_1 décrit $\Omega(\sigma, r)$.

Pour $R(\sigma)$, ce nombre total est d'une part défini par

$$s[(x, y) / (x, y) \in R(\sigma)] \times \text{card}[R(\sigma)], \quad (9)$$

et d'autre part, par

$$\text{card}(\Omega(\sigma, r)) \times r, \quad (10)$$

puisque, par définition, chaque ω_1 de $\Omega(\sigma, r)$ spécifie r couples de $R(\sigma)$.

Il en résulte la valeur de la première expression (6) qui s'écrit

$$\text{Pr}\{\psi'(x, y) = 1 / (x, y) \in R(\sigma)\} = \frac{r}{\binom{n}{2}} = \frac{\text{card}[R(\sigma) \cap R(\omega)]}{\text{card}[R(\sigma)]} \quad (11)$$

Par une démarche analogue on obtient la deuxième expression (6) :

$$\text{Pr}\{\psi'(x, y) = 1 / (x, y) \in S(\sigma)\} = \frac{\binom{n}{2} - r}{\binom{n}{2}} = \frac{\text{card}[S(\sigma) \cap R(\omega)]}{\text{card}[S(\sigma)]};$$

en effet, si r est le cardinal de l'intersection (12) de $R(\sigma)$ avec $R(\omega_1)$, $(\binom{n}{2} - r)$ est le cardinal de l'intersection de $S(\sigma)$ avec $R(\omega_1)$.

² ϕ étant la fonction indicatrice de $R(\omega)$, on a finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\omega, \mathcal{B}'; \sigma) &= \frac{\text{card}[R(\sigma) \cap R(\omega)]}{\text{card}[R(\sigma)]} \frac{\text{card}[R(\sigma) \cap R(\mathcal{B})]}{\text{card}[R(\sigma)]} \\ &+ \frac{\text{card}[S(\sigma) \cap R(\omega)]}{\text{card}[S(\sigma)]} \frac{\text{card}[S(\sigma) \cap R(\mathcal{B})]}{\text{card}[S(\sigma)]} \quad (13) \end{aligned}$$

Il en résulte l'expression de l'indice centré
 $\text{card}[R(\omega) \cap R(\mathcal{B})] - \mathcal{J}(\omega, \mathcal{B}'; \sigma) = \text{card}[R(\omega) \cap R(\mathcal{B})] - \mathcal{J}(\omega', \mathcal{B}'; \sigma)$, (14)
 compte tenu de la symétrie de l'expression (13).

3. Indépendance conditionnelle

Nous allons préciser la notion d'indépendance conditionnelle sous jacente à notre coefficient d'association partielle dont nous venons de déterminer le numérateur :

La proportion relative de couples de $R(\omega) \cap R(\mathcal{B})$ qui appartiennent à $R(\sigma)$ (resp. à $S(\sigma)$) est égale au produit de la proportion relative de couples de $R(\omega) \cap R(\sigma)$ (resp. $R(\omega) \cap S(\sigma)$) par la proportion relative de couples de $R(\mathcal{B}) \cap R(\sigma)$ (resp. $R(\mathcal{B}) \cap S(\sigma)$) ; ces proportions étant relatives à l'ensemble des couples de $R(\sigma)$ (resp. $S(\sigma)$).

Ainsi, une telle notion de l'indépendance conditionnelle se trouve caractérisée par les relations :

$$\begin{aligned} \frac{\text{card}[R(\omega) \cap R(\mathcal{B}) \cap R(\sigma)]}{\text{card}[R(\sigma)]} &= \frac{\text{card}[R(\omega) \cap R(\sigma)]}{\text{card}[R(\sigma)]} \times \frac{\text{card}[R(\mathcal{B}) \cap R(\sigma)]}{\text{card}[R(\sigma)]} \\ \frac{\text{card}[R(\omega) \cap R(\mathcal{B}) \cap S(\sigma)]}{\text{card}[S(\sigma)]} &= \frac{\text{card}[R(\omega) \cap S(\sigma)]}{\text{card}[S(\sigma)]} \times \frac{\text{card}[R(\mathcal{B}) \cap S(\sigma)]}{\text{card}[S(\sigma)]} \quad (15) \end{aligned}$$

La première (resp. la seconde) des relations (15) donne $\text{card}[R(\omega) \cap R(\mathcal{B}) \cap R(\sigma)]$ (resp. $\text{card}[R(\omega) \cap R(\mathcal{B}) \cap S(\sigma)]$) et la décomposition $\text{card}[R(\omega) \cap R(\mathcal{B})] = \text{card}[R(\omega) \cap R(\mathcal{B}) \cap R(\sigma)] + \text{card}[R(\omega) \cap R(\mathcal{B}) \cap S(\sigma)]$ montre que le coefficient d'association partielle est nul dans le cas de l'indépendance conditionnelle ainsi définie.

4. Calcul de la variance de la v.a. $\mathcal{J}(\omega, \mathcal{B}'; \sigma)$.

Le carré de la v.a. $\mathcal{J}(\omega, \mathcal{B}'; \sigma)$ peut, avec des notations déjà introduites, se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & \sum \{ \phi(u) \phi(v) \psi'(u) \psi'(v) / (u, v) \in (R(\sigma)) \}^{[2]} \\ & + \sum \{ \phi(u) \phi(v) \psi'(u) \psi'(v) / (u, v) \in (S(\sigma)) \}^{[2]} \\ & + 2 \sum \{ \phi(u) \phi(v) \psi'(u) \psi'(v) / (u, v) \in R(\sigma) \times S(\sigma) \}. \quad (16) \end{aligned}$$

En décomposant l'ensemble d'indexation conformément à la structure propre du couple de couples $(u, v) = ((x, y), (x', y'))$, nous allons obtenir pour (16) quinze expressions sommes dont chacune se trouvera indexée de façon différente ; et ce, à raison de cinq expressions pour chacune des trois sommes. Ainsi, l'ensemble d'indexation $(R(\sigma))^{[2]}$ se décomposera en

$H \cap (R(\sigma))^{[2]} + G_1 \cap (R(\sigma))^{[2]} + G_1' \cap (R(\sigma))^{[2]} + G_2 \cap (R(\sigma))^{[2]} + G_2' \cap (R(\sigma))^{[2]}$ (somme
 ensembliste);
 (17)
 en effet, l'intersection de $(R(\sigma))^{[2]}$ avec l'ensemble I des couples de
 couples d'objets de la forme $((x, y), (y, x))$, est vide.

Il en résulte la suite des calculs suivants à travers les différents
 sous paragraphes dont les numéros respectifs chercheront à suggérer au
 mieux le contenu.

4.r2.h - Calcul de $\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v)/(u, v) \in H \cap (R(\sigma))^{[2]}]$

Pour la détermination de cette espérance qui est une proportion condi-
 tionnelle, nous désignerons par $s[(u, v)/(u, v) \in H \cap (R(\sigma))^{[2]}]$ le nombre
 moyen de fois où un couple (u, v) de la forme $((x, y), (z, t))$ et appartenant
 à $(R(\sigma))^{[2]}$ tombe dans $R(\mathcal{O}_1) \times R(\mathcal{O}_1)$ lorsque \mathcal{O}_1 décrit son espace d'évolu-
 tion $\Omega(\mathcal{O}; \sigma)$.

$$s[(u, v)/(u, v) \in H \cap (R(\sigma))^{[2]}] = \frac{1}{\text{card}[H \cap (R(\sigma))^{[2]}]} \sum_{\{(\mathcal{O}_1(u)\mathcal{O}_1(v)/\mathcal{O}_1 \in \Omega(\mathcal{O}; \sigma)\}} \{ (u, v) \in H \cap (R(\sigma))^{[2]} \} \quad (18)$$

On obtient aisément

$$\text{card}[H \cap (R(\sigma))^{[2]}] = \binom{n}{2} x \binom{n-2}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} \quad (19)$$

En disant que (u, v) se trouve "spécifié" par \mathcal{O}_1 si $\mathcal{O}_1(u)\mathcal{O}_1(v)=1$, nous
 allons compter de deux façons différentes le nombre total de spécifica-
 tions qui s'opèrent relativement aux couples de couples de $H \cap (R(\sigma))^{[2]}$
 lorsque \mathcal{O}_1 décrit $\Omega(\mathcal{O}; \sigma)$. Ce nombre total est d'une part égal à

$$s[(u, v)/(u, v) \in H \cap (R(\sigma))^{[2]}] \times \text{card}[H \cap (R(\sigma))^{[2]}] \quad (20)$$

et d'autre part, à

$$\text{card}(\Omega(\mathcal{O}; \sigma) \times \text{card}(H \cap (R(\sigma) \cap R(\mathcal{O}))^{[2]}), \quad (21)$$

puisque par définition chaque \mathcal{O}_1 de $\Omega(\mathcal{O}; \sigma)$ spécifie le même nombre

$$v(h; \mathcal{O}, r_2) = \text{card}(H \cap (R(\sigma) \cap R(\mathcal{O}))^{[2]}) \quad (22)$$

de couples (u, v) de $H \cap (R(\sigma))^{[2]}$ (cf. expressions (3)).

Finalement, la proportion cherchée qui représente l'espérance exprimée
 en titre de ce sous paragraphe, se met sous la forme

$$\pi(h; \mathcal{O}, r_2) = \frac{s[(u, v)/(u, v) \in H \cap (R(\sigma))^{[2]}]}{\text{card}(\Omega(\mathcal{O}; \sigma))} = \frac{v(h; \mathcal{O}, r_2)}{[n(n-1)(n-2)(n-3)/4]} \quad (23)$$

D'autre part, conformément à (22), on notera

$$v(h; \omega, r_2) = \sum_{\{\phi(u)\phi(v)/(u, v) \in H \cap (R(\sigma))^{[2]}\}} = \text{card}[H \cap (R(\sigma) \cap R(\omega))^{[2]}] \quad (24)$$

Les autres expressions-calculs qui interviennent dans l'évaluation du
 moment d'ordre 2 de la v.a. $\mathcal{Y}'(\omega, \mathcal{O}; \sigma)$ s'obtiennent par un procédé tout à
 fait analogue. Nous allons chercher à les exprimer plus rapidement en utili-
 sant des notations de même forme que ci-dessus.

4.r2.g₁ - Expression de $\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v)/(u,v) \in G_1 \cap (R(\sigma))^{[2]}]$.

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\begin{aligned} \pi(g_1; \theta, r_2) &= \frac{s[(u,v)/(u,v) \in G_1 \cap (R(\sigma))^{[2]}]}{\text{card}(\Omega(\theta; \sigma))} \\ &= \frac{v(g_1; \theta, r_2)}{\text{card}[G_1 \cap (R(\sigma))^{[2]}]} = \frac{v(g_1; \theta, r_2)}{[n(n-1)(n-2)/3]}; \quad (25) \end{aligned}$$

après avoir montré que

$$\text{card}[G_1 \cap (R(\sigma))^{[2]}] = n(n-1)(n-2)/3, \quad (26)$$

et où, on a noté

$$v(g_1; \theta, r_2) = \text{card}(G_1 \cap (R(\sigma) \cap R(\theta)))^{[2]}. \quad (27)$$

D'autre part,

$$v(g_1; \omega, r_2) = \sum \{ \phi(u)\phi(v)/(u,v) \in G_1 \cap (R(\sigma))^{[2]} \} = \text{card}[G_1 \cap (R(\sigma) \cap R(\omega))^{[2]}]. \quad (28)$$

4.r2.g₁' - Expression de $\mathcal{E}[\Psi'(u)\Psi'(v)/(u,v) \in G_1' \cap (R(\sigma))^{[2]}]$.

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\begin{aligned} \pi(g_1'; \theta, r_2) &= \frac{s[(u,v)/(u,v) \in G_1' \cap (R(\sigma))^{[2]}]}{\text{card}(\Omega(\theta; \sigma))} \\ &= \frac{v(g_1'; \theta, r_2)}{\text{card}[G_1' \cap (R(\sigma))^{[2]}]} = \frac{v(g_1'; \theta, r_2)}{[n(n-1)(n-2)/6]}, \quad (29) \end{aligned}$$

après avoir montré que

$$\text{card}[G_1' \cap (R(\sigma))^{[2]}] = n(n-1)(n-2)/6 \quad (30)$$

et où, on a noté

$$v(g_1'; \theta, r_2) = \text{card}[G_1' \cap ((R(\sigma) \cap R(\theta)))^{[2]}] \quad (31)$$

D'autre part,

$$v(g_1'; \omega, r_2) = \sum \{ \phi(u)\phi(v)/(u,v) \in G_1' \cap (R(\sigma))^{[2]} \} = \text{card}[G_1' \cap (R(\sigma) \cap R(\omega))^{[2]}] \quad (32)$$

4.r2.g₂ - Expression de $\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v)/(u,v) \in G_2 \cap (R(\sigma))^{[2]}]$.

Cette espérance représente la proportion suivante :

$$\begin{aligned} \pi(g_2; \theta, r_2) &= \frac{s[(u,v)/(u,v) \in G_2 \cap (R(\sigma))^{[2]}]}{\text{card}(\Omega(\theta; \sigma))} \\ &= \frac{v(g_2; \theta, r_2)}{\text{card}[G_2 \cap (R(\sigma))^{[2]}]} = \frac{v(g_2; \theta, r_2)}{[n(n-1)(n-2)/3]}, \quad (33) \end{aligned}$$

après avoir montré que

$$\text{card}[G_2 \cap (R(\sigma))^{[2]}] = \text{card}[G_1 \cap (R(\sigma))^{[2]}] = [n(n-1)(n-2)/3], \quad (34)$$

et où, on a noté

$$v(g_2; \emptyset, r_2) = \text{card}[G_2 \cap (R(\sigma) \cap R(\emptyset))]^{[2]} \quad (35)$$

D'autre part,

$$v(g_2; \omega, r_2) = \sum \{ \phi(u)\phi(v) / (u,v) \in G_2 \cap (R(\sigma)) \}^{[2]} = \text{card}[G_2 \cap (R(\sigma) \cap R(\omega))]^{[2]} \quad (36)$$

$$4.r_2.g_2' - \text{Expression de } \mathcal{G}[\psi'(u)\psi'(v) / (u,v) \in G_2' \cap (R(\sigma))]^{[2]}$$

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\begin{aligned} \pi(g_2'; \emptyset, r_2) &= \frac{s[(u,v) / (u,v) \in G_2' \cap (R(\sigma))]^{[2]}}{\text{card}(\Omega(\emptyset; \sigma))} \\ &= \frac{v(g_2'; \emptyset, r_2)}{\text{card}[G_2' \cap (R(\sigma))]^{[2]}} = \frac{v(g_2'; \emptyset, r_2)}{[n(n-1)(n-2)/6]}, \quad (37) \end{aligned}$$

après avoir établi que

$$\text{card}[G_2' \cap (R(\sigma))]^{[2]} = \text{card}[G_1' \cap (R(\sigma))]^{[2]} = n(n-1)(n-2)/6 \quad (38)$$

et où, on note

$$v(g_2'; \emptyset, r_2) = \text{card}[G_2' \cap (R(\sigma) \cap R(\omega))]^{[2]} \quad (39)$$

D'autre part,

$$v(g_2'; \omega, r_2) = \sum \{ \phi(u)\phi(v) / (u,v) \in G_2' \cap (R(\sigma)) \}^{[2]} = \text{card}[G_2' \cap (R(\sigma) \cap R(\omega))]^{[2]} \quad (40)$$

On peut maintenant vérifier que la somme des cardinaux représentés dans les formules (19), (26), (30), (34) et (38) correspond bien au cardinal de $(R(\sigma))^{[2]}$ qui est égal à $(n-2)(n-1)n(n+1)/4$.

$$4.rs.h - \text{Expression de } \mathcal{H}[\psi'(u)\psi'(v) / (u,v) \in H \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))]^{[2]}.$$

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\begin{aligned} \pi(h; \emptyset, rs) &= \frac{s[(u,v) / (u,v) \in H \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))]^{[2]}}{\text{card}(\Omega(\emptyset; \sigma))} \\ &= \frac{v(h; \emptyset, rs)}{\text{card}(H \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)))^{[2]}} = \frac{v(h; \emptyset, rs)}{[n(n-1)(n-2)(n-3)/4]}, \quad (41) \end{aligned}$$

après avoir montré que

$$\text{card}[H \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))]^{[2]} = n(n-1)(n-2)(n-3)/4 \quad (42)$$

et où, on note

$$v(h; \emptyset, rs) = \text{card}[H \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\emptyset))]^{[2]}, \quad (43)$$

qui est supposé invariable dans le cadre de l'h.a.l. (cf. § 1 ci-dessus).

D'autre part,

$$v(h; \omega, rs) = \sum \{ \phi(u)\phi(v) / (u,v) \in H \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \}^{[2]} = \text{card}[H \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega))]^{[2]} \quad (44)$$

$$4.rs.g_1 - \text{Expression de } \mathcal{G}[\psi'(u)\psi'(v) / (u,v) \in G_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))]^{[2]}.$$

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\pi(g_1; \omega, rs) = \frac{s[(u, v)/(u, v) \in G_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))]}{\text{card}(\Omega(\omega; \sigma))}$$

$$= \frac{v(g_1; \omega, rs)}{\text{card}[G_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))]} = \frac{v(g_1; \omega, rs)}{[n(n-1)(n-2)/6]}, \quad (45)$$

après avoir montré que

$$\text{card}[G_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))] = n(n-1)(n-2)/6 \quad (46)$$

et où on note

$$v(g_1; \omega, rs) = \text{card}[G_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega))]^{[2]}, \quad (47)$$

qui est constant dans le cadre de l'h.a.l. considérée ici, (cf. § 1)

Par ailleurs,

$$v(g_1; \omega, rs) = \sum \{ \phi(u) \phi(v) / (u, v) \in G_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \}$$

$$= \text{card}[G_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega))]^{[2]}. \quad (48)$$

4.rs.g'_1 - Expression de $\int \psi'(u) \psi'(v) / (u, v) \in G'_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))$

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\pi(g'_1; \omega, rs) = \frac{s[(u, v)/(u, v) \in G'_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))]}{\text{card}(\Omega(\omega; \sigma))}$$

$$= \frac{v(g'_1; \omega, rs)}{\text{card}[G'_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))]} = \frac{v(g'_1; \omega, rs)}{[n(n-1)(n-2)/3]}, \quad (49)$$

en ayant montré que

$$\text{card}[G'_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))] = n(n-1)(n-2)/3 \quad (50)$$

et où on note

$$v(g'_1; \omega, rs) = \text{card}[G'_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega))]^{[2]}, \quad (50)$$

(cf. § 1)

D'autre part,

$$v(g'_1; \omega, rs) = \sum \{ \phi(u) \phi(v) / (u, v) \in G'_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \} = \text{card}[G'_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega))]^{[2]} \quad (51)$$

4.rs.g_2 - Expression de $\int \psi'(u) \psi'(v) / (u, v) \in G_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))$.

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\pi(g_2; \omega, rs) = \frac{s[(u, v)/(u, v) \in G_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))]}{\text{card}(\Omega(\omega; \sigma))}$$

$$= \frac{v(g_2; \omega, rs)}{\text{card}[G_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))]} = \frac{v(g_2; \omega, rs)}{[n(n-1)(n-2)/6]}, \quad (52)$$

en ayant montré que

$$\text{card}[G_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))] = \text{card}[G_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))] = n(n-1)(n-2)/6 \quad (53)$$

et où on note

$$v(g_2; \omega, rs) = \text{card}[G_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega))]^{[2]} \quad (54)$$

D'autre part,

$$v(g_2; \omega, rs) = \sum \{ \phi(u)\phi(v) / (u,v) \in G_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \} \\ = \text{card}[G_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega))]^{[2]} \quad (55)$$

4. rs. g'_2 - Expression de $\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v) / (u,v) \in G'_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))]$.

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\pi(g'_2; \omega, rs) = \frac{s \{ (u,v) / (u,v) \in G'_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \}}{\text{card}(\Omega(\omega; \sigma))} \\ = \frac{v(g'_2; \omega, rs)}{\text{card}[G'_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))]} = \frac{v(g'_2; \omega, rs)}{[n(n-1)(n-2)/3]}, \quad (56)$$

après avoir montré que

$$\text{card}[G'_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))] = \text{card}[G'_1 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))] = n(n-1)(n-2)/3 \quad (57)$$

et où on note

$$v(g'_2; \omega, rs) = \text{card}[G'_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega))]^{[2]} \quad (58)$$

D'autre part,

$$v(g'_2; \omega, rs) = \sum \{ \phi(u)\phi(v) / (u,v) \in G'_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \} = \text{card}[G'_2 \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega))]^{[2]} \quad (59)$$

Désignons ici par I l'ensemble des couples de couples de la forme $((x,y), (y,x))$, on a immédiatement

$$\text{card}[I \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))] = n(n-1)/2, \quad (60)$$

$$\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v) / (u,v) \in I \cap (R(\sigma) \times S(\sigma))] = 0, \quad (61)$$

$$\sum \{ \phi(u)\phi(v) / (u,v) \in I \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \} = \text{card}[I \cap (R(\sigma) \times S(\sigma)) \cap (R(\omega))]^{[2]} = 0 \quad (62)$$

On peut maintenant vérifier que la somme des cardinaux (42), (46), (50), (53), (57) et (60) correspond bien au cardinal de $(R(\sigma) \times S(\sigma))$ qui est égal à $[n(n-1)/2]^2$.

4.s2.h - Expression de $\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v) / (u,v) \in H \cap (S(\sigma))]^{[2]}$

Nous avons besoin ici de l'invariance, non directement supposée (cf. formules (3) § 1' ci-dessus), du cardinal

$$v(h; \omega_1, s_2) = \text{card}[H \cap (S(\sigma) \cap R(\omega_1))]^{[2]} \quad (63)$$

lorsque ω_1 décrit son espace d'évolution $\Omega(\omega; \sigma)$. Toutefois, on a la formule

$$v(h; \omega_1, s_2) + 2v(h; \omega_1, rs) + v(h; \omega_1, r_2) = v(h; \omega_1) = \text{card}[H \cap (R(\omega))]^{[2]} = \\ n(n-1)(n-2)(n-3)/4, \quad (64)$$

qui montre que $v(h; \omega_1, s_2)$ est constant et s'exprime par rapport à $v(h; \omega_1, r_2)$ et à $v(h; \omega_1, rs)$.

Ce type de relation ne dépend pas de la nature de l'ensemble H, nous la reprendrons pour G_1, G_1', G_2 et G_2' .

Toujours avec le même type de notations, l'espérance représentée en titre de ce sous paragraphe est définie par la proportion suivante :

$$\begin{aligned} \pi(h; \omega, s_2) &= \frac{s[(u,v)/(u,v) \in H \cap (S(\sigma))]^{[2]}}{\text{card}(\Omega(\omega; \sigma))} \\ &= \frac{v(h; \omega, s_2)}{\text{card}[H \cap (S(\sigma))]^{[2]}} = \frac{v(h; \omega, s_2)}{[n(n-1)(n-2)(n-3)/4]} \quad (65) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$v(h; \omega, s_2) = \sum \{ \phi(u)\phi(v)/(u,v) \in H \cap (S(\sigma))^{[2]} \} = \text{card}[H \cap (S(\sigma) \cap R(\omega))]^{[2]} \quad (66)$$

4.s2.g₁ - Expression de $\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v)/(u,v) \in G_1 \cap (S(\sigma))]^{[2]}$

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\begin{aligned} \pi(g_1; \omega, s_2) &= \frac{s[(u,v)/(u,v) \in G_1 \cap (S(\sigma))]^{[2]}}{\text{card}(\Omega(\omega; \sigma))} \\ &= \frac{v(g_1; \omega, s_2)}{\text{card}[G_1 \cap (S(\sigma))]^{[2]}} = \frac{v(g_1; \omega, s_2)}{[n(n-1)(n-2)/3]} \quad (67) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$v(g_1; \omega, s_2) = \sum \{ \phi(u)\phi(v)/(u,v) \in G_1 \cap (S(\sigma))^{[2]} \} = \text{card}[G_1 \cap (S(\sigma) \cap R(\omega))]^{[2]} \quad (68)$$

4.s2.g₁' - Expression de $\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v)/(u,v) \in G_1' \cap (S(\sigma))]^{[2]}$

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\begin{aligned} \pi(g_1'; \omega, s_2) &= \frac{s[(u,v)/(u,v) \in G_1' \cap (S(\sigma))]^{[2]}}{\text{card}(\Omega(\omega; \sigma))} \\ &= \frac{v(g_1'; \omega, s_2)}{\text{card}[G_1' \cap (S(\sigma))]^{[2]}} = \frac{v(g_1'; \omega, s_2)}{[n(n-1)(n-2)/6]} \quad (69) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$v(g_1'; \omega, s_2) = \sum \{ \phi(u)\phi(v)/(u,v) \in G_1' \cap (S(\sigma))^{[2]} \} = \text{card}[G_1' \cap (S(\sigma) \cap R(\omega))]^{[2]} \quad (70)$$

4.s2.g₂ - Expression de $\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v)/(u,v) \in G_2 \cap (S(\sigma))]^{[2]}$

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\begin{aligned} \pi(g_2; \omega, s_2) &= \frac{s[(u,v)/(u,v) \in G_2 \cap (S(\sigma))]^{[2]}}{\text{card}(\Omega(\omega; \sigma))} \\ &= \frac{v(g_2; \omega, s_2)}{\text{card}[G_2 \cap (S(\sigma))]^{[2]}} = \frac{v(g_2; \omega, s_2)}{[n(n-1)(n-2)/3]} \quad (71) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$v(g_2; \omega, s_2) = \sum \{ \phi(u)\phi(v)/(u,v) \in G_2 \cap (S(\sigma))^{[2]} \} = \text{card}[G_2 \cap (S(\sigma) \cap R(\omega))]^{[2]} \quad (72)$$

4. $s_2.g_2'$ - Expression de $\mathcal{E}[\psi'(u)\psi'(v)/(u,v) \in G_2' \cap (S(\sigma))]^{[2]}$

Cette espérance est définie par la proportion suivante :

$$\begin{aligned} \pi(g_2'; \omega, s_2) &= \frac{s[(u,v)/(u,v) \in G_2' \cap (S(\sigma))]^{[2]}}{\text{card}(\Omega(\omega; \sigma))} \\ &= \frac{v(g_2'; \omega, s_2)}{\text{card}[G_2' \cap (S(\sigma))]^{[2]}} = \frac{v(g_2'; \omega, s_2)}{[n(n-1)(n-2)/6]} \quad (73) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$v(g_2'; \omega, s_2) = \{ \phi(u)\phi(v)/(u,v) \in G_2' \cap (S(\sigma)) \}^{[2]} = \text{card}[G_2' \cap (S(\sigma) \cap R(\omega))]^{[2]} \quad (74)$$

THEOREME 1. Sous les conditions de calcul précisées (cf. §1 ci-dessus), dans le cadre de l'h.a.l. définie (cf. §1 ci-dessus), la moyenne et la variance de la v.a. $\mathcal{J}(\omega, \omega'; \sigma)$ sont respectivement

$$\begin{aligned} \mu(\omega, \omega'; \sigma) &= \{ \text{card}[R(\sigma) \cap R(\omega)] + \text{card}[R(\sigma) \cap R(\omega')] \} / \text{card}[R(\sigma)] \\ &\quad + \{ \text{card}[S(\sigma) \cap R(\omega)] + \text{card}[S(\sigma) \cap R(\omega')] \} / \text{card}[S(\sigma)] \quad (75) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{var}(\omega, \omega'; \sigma) &= \frac{v(h; \omega, r_2)v(h; \omega', r_2)}{[n(n-1)(n-2)(n-3)/4]} + \frac{v(g_1; \omega, r_2)v(g_1; \omega', r_2)}{[n(n-1)(n-2)/3]} \\ &\quad + \frac{v(g_1'; \omega, r_2)v(g_1'; \omega', r_2)}{[n(n-1)(n-2)/6]} + \frac{v(g_2; \omega, r_2)v(g_2; \omega', r_2)}{[n(n-1)(n-2)/3]} + \frac{v(g_2'; \omega, r_2)v(g_2'; \omega', r_2)}{[n(n-1)(n-2)/6]} \\ &\quad + \frac{v(h; \omega, s_2)v(h; \omega', s_2)}{[n(n-1)(n-2)(n-3)/4]} + \frac{v(g_1; \omega, s_2)v(g_1; \omega', s_2)}{[n(n-1)(n-2)/3]} + \frac{v(g_1'; \omega, s_2)v(g_1'; \omega', s_2)}{[n(n-1)(n-2)/6]} \\ &\quad + \frac{v(g_2; \omega, s_2)v(g_2; \omega', s_2)}{[n(n-1)(n-2)/3]} + \frac{v(g_2'; \omega, s_2)v(g_2'; \omega', s_2)}{[n(n-1)(n-2)/6]} + 2 \left\{ \frac{v(h; \omega, rs)v(h; \omega', rs)}{[n(n-1)(n-2)(n-3)/4]} \right. \\ &\quad + \frac{v(g_1; \omega, rs)v(g_1'; \omega', rs)}{[n(n-1)(n-2)/6]} + \frac{v(g_1; \omega, rs)v(g_1'; \omega', rs)}{[n(n-1)(n-2)/3]} + \frac{v(g_2; \omega, rs)v(g_2; \omega', rs)}{[n(n-1)(n-2)/6]} \\ &\quad \left. + \frac{v(g_2'; \omega, rs)v(g_2'; \omega', rs)}{[n(n-1)(n-2)/3]} \right\}, \quad (76) \end{aligned}$$

où les notations ont été dûment explicitées dans les derniers sous paragraphes.

L'indice de corrélation partielle $r_{\omega\omega'.\sigma}$ est donné par la formule

$$r_{\omega\omega'.\sigma} = \{s(\omega, \omega') - \mu(\omega, \omega'; \sigma)\} / \sqrt{\text{var}(\omega, \omega'; \sigma)}, \quad (77)$$

où $s(\omega, \omega')$ est l'indice brut $\text{card}[R(\omega) \cap R(\omega')]$ (cf. formule (2) ci-dessus).

La v.a. $(\omega, \omega'; \sigma)$ se trouve en fait déterminée par l'expression calculée "globalement" (comme cela a été le cas pour la moyenne et le moment d'ordre 2) de la suite de ses moments successifs.

On a pu remarquer la symétrie parfaite, par rapport à ω et ω' , des expressions de la moyenne et de la variance de la v.a. $\mathcal{J}(\omega, \omega'; \sigma)$. De sorte

que le résultat aurait été le même si les calculs avaient été effectués par rapport à la v.a. $\mathcal{Y}(\omega', \theta; \sigma)$ dont la définition est claire conformément à celle de $\mathcal{Y}(\omega, \theta'; \sigma)$.

En décomposant l'ensemble $(E^{[2]})^{[q]}$ des q -uplets de couples à composantes distinctes et dont deux quelconques sont différents, en sous ensembles dont chacun est formé de l'ensemble des q -uplets de couples de même configuration (cf. [LERMAN(1973)]), on peut montrer, que le moment absolu d'ordre quelconque fixé, calculé "globalement" de la v.a. $\mathcal{Y}(\omega, \theta'; \sigma)$ est identique à celui de la v.a. $\mathcal{Y}(\omega', \theta; \sigma)$. Dans ces conditions, on peut proposer la propriété suivante :

THEOREME 2. Dans le cadre de l'h.a.l. à caractère partiel et "global" (cf. § 1 ci-dessus), la distribution de la v.a. $\mathcal{Y}(\omega, \theta'; \sigma)$ est la même que celle de $\mathcal{Y}(\omega', \theta; \sigma)$.

5. Analyse de l'approche de M.G. Kendall.

Comme nous le signalions dans l'introduction générale, M.G. Kendall [KENDALL(1942)] introduit le tableau suivant de croisement dans $R(\sigma)$ des deux attributs définis par les parties $R(\omega)$ et $R(\theta)$:

	$R(\sigma) \cap R(\omega)$	$R(\sigma) \cap S(\omega)$	
$R(\sigma) \cap R(\theta)$	a	b	a + b
$R(\sigma) \cap S(\theta)$	c	d	c + d
	a + c	b + d	a+b+c+d = card $[R(\sigma)]$

Il définit dans ces conditions, le coefficient d'association partielle entre ω et θ , relativement à σ , $\tau_{\omega\theta, \sigma}$, par le coefficient de K. Pearson :

$$\tau_{\omega\theta, \sigma} = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} \quad (78)$$

L'indépendance, ici conditionnelle relativement à $R(\sigma)$ se trouve nécessairement définie par la relation

$$\frac{a}{a+c} = \frac{a+b}{a+b+c+d}, \quad (79)$$

qu'on peut expliciter sous la forme :

$$\frac{\text{card}[R(\omega) \cap R(\theta) \cap R(\sigma)]}{\text{card}[R(\sigma)]} = \frac{\text{card}[R(\omega) \cap R(\sigma)]}{\text{card}[R(\sigma)]} \times \frac{\text{card}[R(\theta) \cap R(\sigma)]}{\text{card}[R(\sigma)]} \quad (80)$$

Les marges de la table de croisement étant fixées, la relation (79) est équivalente à la relation suivante :

$$\frac{d}{b+d} = \frac{c+d}{a+b+c+d} \quad (81)$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{\text{card}[S(\omega) \cap S(\theta) \cap R(\sigma)]}{\text{card}[R(\sigma)]} = \frac{\text{card}[S(\omega) \cap R(\sigma)]}{\text{card}[R(\sigma)]} \times \frac{\text{card}[S(\theta) \cap R(\sigma)]}{\text{card}[R(\sigma)]} \quad (82)$$

Or, il y a une correspondance bijective respectivement entre

$$\begin{array}{ll} R(\sigma) & \text{et } S(\sigma), \\ S(\omega) \cap R(\sigma) & \text{et } R(\omega) \cap S(\sigma), \\ S(\theta) \cap R(\sigma) & \text{et } R(\theta) \cap S(\sigma), \\ S(\omega) \cap S(\theta) \cap R(\sigma) & \text{et } R(\omega) \cap R(\theta) \cap S(\sigma); \end{array}$$

en effet, si (x,y) appartient à l'un des ensembles (de gauche), (y,x) appartient à l'ensemble associé (de droite). De sorte que la relation (82) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\text{card}[R(\omega) \cap R(\theta) \cap S(\sigma)]}{\text{card}[S(\sigma)]} = \frac{\text{card}[R(\omega) \cap S(\sigma)]}{\text{card}[S(\sigma)]} \times \frac{\text{card}[R(\theta) \cap S(\sigma)]}{\text{card}[S(\sigma)]} \quad (83)$$

Les relations (80) et (83) correspondent exactement aux relations (15) ci-dessus.

PROPRIÉTÉ 1. L'indépendance dans $R(\sigma)$ entre les deux attributs représentés par $R(\omega)$ et $R(\theta)$ est équivalente à l'indépendance conditionnelle telle qu'elle a été définie ci-dessus (cf. § 3).

La démarche de M.G. Kendall n'aurait pas permis d'aboutir à ce résultat si les parties à comparer ne représentaient pas les graphes de relations d'ordre total. Nous allons en effet considérer l'exemple suivant où le cardinal n de E vaut 6 ; dans ces conditions, le cardinal de $E^{[2]}$ est 30 et celui d'un sous ensemble $E^{[2]}$ représentant un ordre total, 15. Codons $E^{[2]}$ par la suite des trente premiers entiers :

$$E^{[2]} = \{1, 2, \dots, 30\}.$$

A la place de $R(\sigma)$, $R(\omega)$ et $R(\theta)$, nous allons considérer trois parties A, B et C de même cardinal 15, mais ayant un caractère quelconque :

$$A = \{1, 2, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

Construisons les deux tables de croisement des deux attributs définis par B et C, dans A d'une part et dans A^c d'autre part :

	A ∩ B	A ∩ B ^c	
A ∩ C	a=2	b=4	a+b=6
A ∩ C ^c	c=3	d=6	c+d=9
	a+c=5	b+d=10	15

	A ^c ∩ B	A ^c ∩ B ^c	
A ^c ∩ C	a'=8	b'=1	a'+b'=9
A ^c ∩ C ^c	c'=2	d'=4	c'+d'=6
	a'+c'=10	b'+d'=5	15

On voit qu'on a la relation :

$$\frac{a}{a+c} = \frac{a+b}{a+b+c+d} = \frac{2}{5},$$

mais

$$\frac{a'}{a'+c'} = \frac{4}{5} \neq \frac{a'+b'}{a'+b'+c'+d'} = \frac{3}{5};$$

ainsi, les deux attributs représentés par B et C sont indépendants dans A, mais dépendantes dans A^c .

L'indice brut du lien entre $R(\omega)$ et $R(\theta)$ dans $R(\sigma)$ peut s'écrire :

$$\text{card}[R(\sigma) \cap R(\omega) \cap R(\theta)] = a,$$

celui dans $S(\sigma)$ peut à son tour s'écrire :

$$\text{card}[S(\sigma) \cap R(\omega) \cap R(\emptyset)] = \text{card}[R(\sigma) \cap S(\omega) \cap S(\emptyset)] = d. \quad (84)$$

Compte tenu de la relation

$$\begin{aligned} d &= a + \binom{n}{2} - (a+b) - (a+c) \\ &= a + \binom{n}{2} - \text{card}[R(\sigma) \cap R(\omega)] - \text{card}[R(\sigma) \cap R(\emptyset)], \quad (85) \end{aligned}$$

l'indice centré dans $R(\sigma)$ qui s'écrit

$$a - \frac{(a+b)(a+c)}{\binom{n}{2}}$$

est égal à celui centré dans $S(\sigma)$ qui peut s'écrire

$$d - \frac{(c+d)(b+d)}{\binom{n}{2}}, \quad (87)$$

leur valeur commune peut se mettre sous la forme

$$(ad - bc) / \binom{n}{2}. \quad (88)$$

Le numérateur de notre indice d'association partielle se met sous la forme de la somme des deux expressions (86) et (87) ; il est par conséquent égal à $(ad - bc)/n(n-1)$.

PROPRIÉTÉ 2. La part dans $R(\sigma)$ du lien "centré" entre $R(\omega)$ et $R(\emptyset)$ est identique à celle dans $S(\sigma)$.

COROLLAIRE. Le numérateur de notre indice d'association partielle est à un coefficient multiplicatif près identique à celui de M.G. Kendall.

Insistons encore une fois sur le fait que la cohérence de l'indice de M.G. Kendall est intimement liée à la structure particulière du graphe d'un ordre total (cf. (84)). On n'a pas une propriété analogue à celle 2 ci-dessus si les relations à comparer étaient d'une autre nature (cf. §II ci-dessus).

Comme c'est le cas pour l'indice de K. Pearson dans le cas total de la comparaison de deux attributs, l'indice d'association partielle $\tau_{\omega \emptyset, \sigma}$ peut être obtenu en centrant et en réduisant l'indice brut

$$s = \text{card}\{[R(\sigma) \cap R(\omega)] \cap [R(\sigma) \cap R(\emptyset)]\} \quad (89)$$

relativement à une h.a.l. où à la partie $B = R(\sigma) \cap R(\omega)$ (resp. $C = R(\sigma) \cap R(\emptyset)$) de $R(\sigma)$,

Répetons que, conformément à notre démarche de calcul exprimée au paragraphe 1 ci-dessus, on obtiendrait le même indice si dans le calcul de la variance (cf. §4), on ne distinguait relativement à un couple de couples d'objets $((x, y), (x', y'))$ que si les deux couples (x, y) et (x', y') sont différents ou identiques. Nous pensons dans ces conditions que le calcul que nous proposons de la variance est plus précis en ce sens qu'il tient mieux compte de la nature des structures à comparer. A cet égard, contrairement à ce qu'on peut rapidement croire, la réduction de l'indice centré revêt une importance capitale pour l'organisation des liens entre variables comme nous avons pu nous en rendre compte dans la pratique.

Nous allons maintenant chercher à comprendre d'une certaine façon le résultat suivant mentionné dans l'introduction générale (cf. §I) que

M.G. Kendall attribue avec étonnement à une coïncidence :

$$\tau_{\omega\theta,\sigma} = \frac{\tau_{\omega\theta} \tau_{\omega\sigma} \tau_{\theta\sigma}}{\sqrt{1 - \tau_{\omega\sigma}^2} \sqrt{1 - \tau_{\theta\sigma}^2}} \quad (90)$$

Notre explication reposera sur les résultats du paragraphe II précédent ainsi que sur l'analyse de la forme de l'indice τ entre deux variables "rang".

Désignons ici par σ , ω et θ les attributs qui sont relativement à E [2] représentés par les parties $R(\sigma)$, $R(\omega)$ et $R(\theta)$. L'indice τ de M.G. Kendall entre deux variables "rang" peut parfaitement être obtenu en ignorant complètement le caractère ordinal des structures à comparer, c'est-à-dire, à partir de celui de K. Pearson. Relativement par exemple à ω et θ , l'indice centré, conformément à une h.a.l. "libre" où à $R(\omega)$ (resp. $R(\theta)$), on associe un élément aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie, de toutes les parties de E [2] de même cardinal $n(n-1)/2$, se met sous la forme :

$$\text{card}[R(\omega) \cap R(\theta)] - n(n-1)/4 \quad (91)$$

qui représente la moitié du numérateur de l'indice $\tau_{\omega\theta}$. Le dénominateur s'obtient en évaluant le maximum de la valeur absolue de l'expression (91) qui est égal à $n(n-1)/4$. L'indice

$$\{\text{card}[R(\omega) \cap R(\theta)] - [n(n-1)/4]\} / [n(n-1)/4] \quad (92)$$

est exactement celui $\tau_{\omega\theta}$.

Il peut, conformément au calcul de ρ_{ab} du paragraphe II, se mettre sous la forme

$$4[p(\omega\wedge\theta) - p(\omega)p(\theta)] = \rho(\omega, \theta), \quad (93)$$

dans le sens que nous venons de donner à ω et θ .

Par ailleurs, par rapport à la définition du coefficient d'association partielle entre ω et θ relativement à σ , nous venons de voir que la part du lien centré dans $R(\sigma)$ est égale à celle dans $S(\sigma)$; de sorte que le numérateur du coefficient $\tau_{\omega\theta,\sigma}$ représente la moitié de celui où on regarderait ω , θ et σ comme des attributs (cf. § II). La relation de (9) du paragraphe II, ainsi que celle (93) ci-dessus, montrent que, à un coefficient multiplicatif près,

$$\tau_{\omega\theta,\sigma} = \tau_{\omega\theta} - \tau_{\omega\sigma} \tau_{\theta\sigma}. \quad (94)$$

Quant à la forme du dénominateur du deuxième membre de (90); elle s'explique par la relation (93) et pour des raisons de normalisations qui ne peuvent que coïncider: la première normalisation se concevant dans le cadre de l'indice d'association de K. Pearson et la seconde, dans le cadre classique du coefficient de corrélation partielle.

VII - CONCLUSION

Au terme de cette longue étude à la croisée de l'analyse non linéaire des données et de la statistique non paramétrique, il reste encore beaucoup à faire...

Le dernier paragraphe pourra stimuler le spécialiste de la combinatoire dans l'analyse, à des fins énumératives de la structure de l'intersection de deux ordres totaux sur un ensemble fini.

Nous avons déjà signalé que grâce à des résultats antérieurs, nous pouvions envisager une étude efficace par simulation dans le cas de la comparaison partielle entre ordres totaux, ce qui correspondrait à un net progrès par rapport à la tentative de Moran. Cette étude ne pourrait être sans un fin programme informatique.

Une recherche algorithmique particulière est également nécessaire pour l'informatisation du calcul des indices d'association partielle, dans les différents cas, surtout lorsqu'il s'agit d'établir toute la table des indices entre éléments d'un ensemble V de variables descriptives, partiels, relativement à une variable w exogène ($w \notin V$).

Signalons qu'une des motivations source de ce travail a été une étude sur la répartition des dépenses d'un ensemble de ménages sur différents postes, où on n'a pu dégager par la classification une organisation cohérente et nuancée de l'ensemble des postes de dépense qu'en neutralisant la variable "revenu du ménage".

Plus généralement, on peut se poser la question de savoir ce que deviennent les différents comportements dégagés à partir de la classification de l'ensemble V des variables descriptives si on neutralisait l'influence d'une variable w fortement discriminante ($w \notin V$). Cette approche répond à la démarche du chercheur en sciences humaines qui désire éliminer dans son analyse l'influence de facteurs bien connus. Nous espérons que ce dernier trouvera ici un outil adapté. Toutefois, pour qu'il puisse en tirer profit, la collaboration doit être plus que jamais étroite avec le statisticien qui cherche à valider sa méthode et l'informaticien appliqué, son programme.

BIBLIOGRAPHIE

- DANIELS H.E., *"The relation between measures of correlation in the universe of sample permutations"*, *Biometrika* 33, 129-35, (1974).
- DAUDIN J.J., *"Coefficient de Tschuprow partiel et indépendance conditionnelle"*, *Statistique et Analyse des Données*, 55-58, (1979).
- DAUDIN J.J., *"Partial association measures and an application to qualitative regression"*, *Biometrika* 67, 581-90 (1980).
- KENDALL M.G., *"Rank correlation methods"*, 4th edition, London : Griffin, (1970).
- LECALVE G., *"Problèmes d'analyse des données"*, thèse d'état (2ème partie), Université de Rennes I, (1976).
- LERMAN I.C., *"Les bases de la classification automatique"*, Gauthier-Villars, Paris, (1970).

- LERMAN I.C., "Etude distributionnelle de statistiques de proximité entre structures finies de même type ; application à la classification automatique", Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle, série recherche, n°19 (1973).
- LERMAN I.C., "Formal analysis of a general notion of proximity between variables", Actes du colloque "Congrès Européen des statisticiens", Grenoble, Septembre 1976, parus chez North Holland en 1977.
- LEMAN I.C., GRAS R. et ROSTAM H.,
"Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires" I et II, Revue Mathématiques et Sciences Humaines, n° 74, p. 5-35 et n° 75, p.5-47. (1981)
- LERMAN I.C., "Corrélation partielle dans le cas "qualitatif", Rapport IRISA n° 153 - Oct.(1981), Rennes - 125 pages.
- LERMAN I.C., "Classification et analyse ordinale des données", Dunod, Paris (1981), 760 pages.
- MORAN P.A.P., "Partial and multiple rank correlation", Biometrika, 38, 26-32, (1951).
- SAPORTA G., "Quelques applications des opérateurs d'Escoufier au traitement des variables qualitatives", Statistique et Analyse des Données, 1, 38-46, (1976).
- SOMMERS H.R., "Analysis of partial rank correlation measures based on the product-moment model : part one", Social forces, vol.53:2, (déc. 1974).

REÇU EN MARS 1982