



HAL
open science

Note sur une famille de polynomes issue du crible de Hawkins

G. Kreweras

► **To cite this version:**

G. Kreweras. Note sur une famille de polynomes issue du crible de Hawkins. Annales de l'ISUP, 1983, XXVIII (1-2), pp.1-5. hal-03711556

HAL Id: hal-03711556

<https://hal.science/hal-03711556>

Submitted on 1 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NOTE SUR UNE FAMILLE DE POLYNOMES

ISSUE DU CRIBLE DE HAWKINS

G. Kreweras, Institut de Statistique

Dans [1], P. DEHEUVELS est amené à considérer la suite des nombres $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ définis par l'identité en z

$$(1) \quad \text{Log}(1 + uz + z \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k ;$$

il démontre que a_n a nécessairement une expression polynomiale de degré n en u et formule explicitement ces polynômes $a_n(u)$ pour $0 \leq n \leq 4$, avec la convention supplémentaire naturelle que $a_0(u) = u$.

Le but de la présente note est de montrer que ces polynômes $a_n(u)$ sont identiques aux polynômes $b_n(u)$ définis par

$$(2) \quad b_n(u) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} s(n,i) \frac{n!}{i!} ,$$

où $s(n,i)$ désigne un nombre de Stirling de première espèce. Faute d'une notation universellement admise, nous adoptons

ici les conventions résumées par le tableau suivant, dans lequel $s(n,i)$ est, pour $n \geq 2$, la somme des produits $i-1$ à $i-1$ des entiers $1,2,\dots,n-1$;

$s(n,i)$	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$i = 1$	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	3	6	10	15	21
3	0	0	0	2	11	35	85	175
4	0	0	0	0	6	50	225	735

Remarquons d'abord que les $a_n(u)$, comme les $b_n(u)$, n'ont jamais de terme constant ; il suffira donc de montrer l'égalité des dérivées $a'_n(u)$ et $b'_n(u)$. La méthode consistera à établir que les $a_n(u)$ et les $b_n(u)$ satisfont à une même relation de récurrence, qu'il sera commode d'écrire sous la forme

$$(3) \quad \frac{X'_n - X'_{n+1}}{n} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n X_i X'_{n-i}, \text{ avec } X_0 = u.$$

(α) Si l'on pose

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

et que l'on dérive (1) par rapport à z , on a

$$\frac{z f' + f}{1 + z f} = f', \text{ d'où } f = f'(1 - z + z f);$$

en égalant les coefficients de z^n , on obtient

$$a_n = (n+1)a_{n+1} + na_n(a_0-1) + \underline{(n-1)a_{n-1}a_1 + (n-2)a_{n-2}a_2 + \dots + 1a_1a_{n-1}}$$

Si l'on remarque, en rapprochant les termes soulignés extrêmes, que la somme des termes soulignés n'est autre que la moitié de $n(a_n a_0 + a_{n-1} a_1 + \dots + a_n a_0)$, on voit que la récurrence sur les a_n prend la forme plus simple (valable $\forall n \geq 0$) :

$$2(n+1)(a_n - a_{n+1}) = n(a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \dots + a_n a_0) .$$

Par dérivation, on obtient la forme équivalente, valable pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{a'_n - a'_{n+1}}{n} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a_i a'_{n-i} .$$

Puisque $a_0(u) = u$, les $a_n(u)$ satisfont bien à (3) .

(β) Les polynômes $b_n(u)$, de leur côté, satisfont à une première récurrence qui résulte d'une propriété bien évidente des nombres de Stirling, à savoir que

$$s(n+1, i) - s(n, i) = n s(n, i-1)$$

(le second membre est la somme des produits dans lesquels figure le facteur n). En multipliant par $(-1)^i u^{i-1}/(i-1)!$ et en sommant par rapport à i , on voit que l'on peut écrire, pour tout entier $n \geq 1$:

$$(4) \quad \frac{b'_n - b'_{n+1}}{n} = b_n.$$

Montrons en outre, par récurrence sur n , que les $b_n(u)$ définis par (4) à partir de $b_0 = u$ satisfont à

$$(5) \quad \sum_{i=0}^n b_i b'_{n-i} = (n+1)b_n.$$

En effet, on a, par suite de (4) :

$$b'_0 = 1$$

$$b'_1 = b'_0 - 0 \cdot b_0$$

$$b'_2 = b'_1 - 1 \cdot b_1$$

$$b'_3 = b'_2 - 2 \cdot b_2$$

$$b'_n = b'_{n-1} - (n-1)b_{n-1}$$

Si l'on combine linéairement ces $n+1$ équations à l'aide des coefficients b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 , on voit que

$$\sum_{i=1}^n b_i b'_{n-i} = b_n + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i b'_{n-1-i}}{b_n}$$

$$-(0 \cdot b_0 b_{n-1} + 1 b_1 b_{n-2} + 2 b_2 b_{n-3} + \dots + (n-1) b_{n-1} b_0)$$

$$= b_n + \frac{b_{n-1}}{b_n} - \frac{n-1}{2} (b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \dots + b_{n-1} b_0).$$

(l'égalité des termes soulignés exprime l'hypothèse de récurrence).

Pour montrer que ce second membre est égal à $(n+1)b'_n$, il suffit de montrer que sa dérivée est égale à $(n+1)b'_n$. Mais cette dérivée est en fait

$$b'_n + n b'_{n-1} - (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} b_i b'_{n-1-i}$$

$$= b'_n + n b'_{n-1} - (n-1) n b_{n-1} .$$

On vérifie immédiatement que cette dernière expression, par suite de (4), est bien égale à $(n+1)b'_n$; ce qui achève la démonstration de (5).

Enfin (5) peut s'écrire

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n b_i b'_{n-i} = b_n = \frac{b'_n - b'_{n+1}}{n} ,$$

(5) (4)

et l'égalité du 1^{er} et du 3^{ème} membre montre que les $b_n(u)$, eux aussi, satisfont à (3).

Bibliographie

- [1] DEHEUVELS, P. (1982) Asymptotic expansions for prime numbers and improvements of the Riemann hypothesis based on Hawkins' random sieve, soumis pour publication.

Reçu en Juin 1982