



**HAL**  
open science

# Propriétés asymptotiques des extrêmes d'un processus stationnaire gaussien a temps continu

Fred Amram

► **To cite this version:**

Fred Amram. Propriétés asymptotiques des extrêmes d'un processus stationnaire gaussien a temps continu. Annales de l'ISUP, 1982, XXVII (2), pp.1-16. hal-03709313

**HAL Id: hal-03709313**

**<https://hal.science/hal-03709313>**

Submitted on 29 Jun 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DES EXTRÊMES  
D'UN PROCESSUS STATIONNAIRE GAUSSIEN A TEMPS CONTINU

Fred AMRAM  
Université Paris VI

Summary :

Let  $\{\xi(t), -\infty < t < +\infty\}$  be a continuous parameter stationary Gaussian process with mean zero, variance one and covariance  $r(t)$ . Let  $M^{(k)}(T)$  the  $k^{\text{th}}$  largest local maximum of  $\xi(t)$  in the interval  $[0, T]$ . We show that if  $\int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)|^p dt < \infty$  and if the second and fourth spectral moments  $\lambda_2, \lambda_4$  are finite, then  $\lim_{T \rightarrow \infty} P(a_T(M^{(k)}(T) - b_T) \leq x) = \exp(-e^{-x}) \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(e^{-x})^s}{s!}$  where  $a_T = (2 \log T)^{1/2}$  and  $b_T = (2 \log T)^{-1/2} (\log((2\pi)^{-1} \lambda_2)) + (2 \log T)^{1/2}$ .

Mots-clés:

Processus gaussien stationnaire. Valeurs extrêmes. Fonction de répartition spectrale. Transformée de Fourier. Produit de convolution.

Introduction :

Soit  $\{\xi(t), -\infty < t < +\infty\}$  un processus à temps continu, stationnaire, gaussien, ayant respectivement pour espérance et covariance:  $E(\xi(t))=0, E(\xi(s) \xi(s+t))=r(t), r(0)=1$ . Posons  $M(T) = \sup \{\xi(t), 0 \leq t \leq T\}$ .

.../...

Soit  $\lambda_k$  le moment spectral de  $k^{\text{ième}}$  ordre, cad  
 $\lambda_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^k dF(\lambda)$  où  $F$  est la fonction de répartition  
 spectrale associée à  $r(t)$ .

Nous dirons que  $\xi(t)$  a une traversée montante de niveau  $u$  à l'instant  $t_0$  si pour  $\varepsilon > 0$  nous avons,  $\xi(t) \leq u$  si  $t \in ]t_0 - \varepsilon, t_0[$  et  $\xi(t) \geq u$  si  $t \in ]t_0, t_0 + \varepsilon[$ . Nous noterons  $N_u(T)$  le nombre de traversées montantes de niveau  $u$  dans l'intervalle  $[0, T]$ .

Nous dirons que  $\xi(t)$  a une traversée descendante de niveau  $u$  à l'instant  $t_0$  si pour  $\varepsilon > 0$  nous avons,  $\xi(t) \geq u$  si  $t \in ]t_0 - \varepsilon, t_0[$  et  $\xi(t) \leq u$  si  $t \in ]t_0, t_0 + \varepsilon[$ .

Nous dirons que  $\xi(t)$  a un maximum local si  $\xi'(t)$  a une traversée descendante de niveau 0. Soit  $N'_u(T)$  le nombre de maxima locaux supérieurs à  $u$  dans l'intervalle  $[0, T]$ .

Nous allons nous intéresser aux propriétés asymptotiques de  $M^{(k)}(T)$ , cad le  $k^{\text{ième}}$  plus grand maximum local de  $\xi(t)$  dans l'intervalle  $[0, T]$ .

THEOREME :

Si  $\int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)|^p dt < \infty$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ) et si  $\lambda_2 < \infty$  et  $\lambda_4 < \infty$

alors  $\lim_{T \rightarrow \infty} P(a_T(M^{(k)}(T) - b_T) \leq x) = \exp(-e^{-x} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(e^{-x})^s}{s!})$

où  $a_T = (2 \text{Log } T)^{1/2}$  et

$$b_T = (2 \text{Log } T)^{-1/2} (\text{Log}((2\pi)^{-1} \lambda_2^{1/2})) + (2 \text{Log } T)^{1/2}.$$

Démonstration :

Puisque  $\lambda_2 < \infty$  et  $\lambda_4 < \infty$  cela implique que  $\lambda_2 = -r''(0)$  et  $\lambda_4 = r^{(4)}(0)$  (cf [3], p191) et ainsi nous avons

$$r(t) = 1 - \frac{\lambda_2}{2!} t^2 + \frac{\lambda_4}{4!} t^4 + o(t^4) \text{ quand } t \rightarrow 0. \text{ Nous allons}$$

.../...



démontrer ce théorème en plusieurs étapes qui sont les suivantes.

1. Nous savons d'après le théorème 2.1 de QUALLS et WATANABE (cf [8]) que si  $\{\xi(t), -\infty < t < +\infty\}$  est un processus stationnaire, gaussien réduit de fonction de covariance

$$r(t) = 1 - |t|^\alpha H(|t|) + o(|t|^\alpha H(|t|)) \text{ quand } t \rightarrow 0 \text{ où}$$

$0 < \alpha \leq 2$  et  $H(t)$  est une fonction possédant certaines propriétés (cf [8]) alors pour tout  $h > 0$ ,

$$P(M(h) > u) \sim h H_\alpha \phi(u) [\sigma^{-1}(1/u)]^{-1} \text{ quand } u \rightarrow \infty \text{ où } H_\alpha \in \mathbb{R}^{**},$$

$$\phi(u) = (2\pi)^{-1/2} u^{-1} \exp(-u^2/2), \quad \sigma^2(u) = u^\alpha H(u).$$

Dans notre cas  $\alpha = 2$ ,  $H(|t|) = \frac{\lambda_2}{2}$ ,  $H_2 = (\pi)^{-1/2}$ ,

$$[\sigma^{-1}(1/u)]^{-1} = \left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^{1/2} u. \text{ On en déduit que :}$$

$$P(M(h) > u) \sim h (2\pi)^{-1} \lambda_2^{1/2} \exp(-u^2/2) = h \psi(u) \text{ quand } u \rightarrow \infty.$$

Remarquons d'après [3] (P 194 et 197) que si  $\lambda_2 < \infty$  alors  $\mu = E N_u(1) = \Psi(u)$ .

2. Nous savons d'après le lemme 3.2.1 de [6] que si  $\{\xi(t), -\infty < t < +\infty\}$  est un processus stationnaire, gaussien réduit, de moment spectral de 2ème ordre  $\lambda_2 < \infty$ , alors

$$\frac{1}{q} P(\xi(0) < u < \xi(q)) \sim \mu v_a \text{ où } \lim_{a \rightarrow 0} v_a = 1, \text{ si } u \rightarrow \infty \text{ quand } q_a(u) = q \rightarrow 0 / q \rightarrow a \text{ (} a > 0 \text{)}.$$

De plus  $P(\xi(0) < u, \xi(q) < u, M(q) > u) =$

$$P(\xi(0) < u, M(q) > u) - P(\xi(0) < u < \xi(q)) \leq$$

$$P(N_u(q) \geq 1) - P(\xi(0) < u < \xi(q)) \leq$$

$$\mu q - \mu q v_a (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty \text{ quand } q_a(u) = q \rightarrow 0 / q \rightarrow a.$$

.../...

Cette dernière expression résultant du lemme énoncé précédemment et de l'inégalité de Bienayme -Tchébychev.

On en déduit que :

$$\frac{P(\xi(0) < u, \xi(q) < u, M(q) > u)}{\mu q} \leq 1 - u_a, \quad u \rightarrow \infty \text{ quand } q \rightarrow 0 / q \rightarrow a$$

et ainsi

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\xi(0) < u, \xi(q) < u, M(q) > u)}{\mu q} \rightarrow 0 \text{ quand } a \rightarrow 0$$

pour une suite  $q_a(u) = q \rightarrow 0 / q \rightarrow a \quad (a > 0)$ .

3. Comme  $\int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)|^p dt < \infty$  cela implique que  $F^{*p}$  est absolument continue, car  $r^D(t)$  est la transformée de Fourier de  $F^{*p}$  ( $F^{*p}$  étant le  $p^{\text{ième}}$  produit de convolution de  $F$ ).

Ainsi, nous pouvons déduire du théorème 3.1 de [2] que  $\lim_{T \rightarrow \infty} P(a_T(M(T) - b_T) \leq x) = \exp(-e^{-x})$ .

4. De plus si  $U_T = a_T^{-1} x + b_T$ , alors  $T \Psi(U_T) \rightarrow e^{-x} = \tau$  pour  $x$  fixé et  $\Psi(U_T) \sim \Psi(U_{[T/h]h})$  quand  $T \rightarrow \infty$  pour  $h > 0$ .

5. Nous dirons que le processus satisfait la condition  $D_c(U_T)$  relativement à la suite  $q_T = q_a(U_T)$  où  $q_T \rightarrow 0$  quand  $U_T \rightarrow \infty / q_T U_T \rightarrow a \quad (a > 0)$  si pour tous les points  $s_1, s_2, \dots, s_p, t_1, \dots, t_p$  appartenant à la famille  $\{kq_T, 0 \leq k \leq \lfloor \frac{T}{q_T} \rfloor\}$  tels que  $s_1 < s_2 < \dots < s_p < t_1 < \dots < t_p$  et pour  $\gamma > 0$  donné,  $t_1 - s_p \geq \gamma$  nous avons :

$$|F_{s_1 \dots s_p t_1 \dots t_p}^{(U_T)} - F_{s_1 \dots s_p}^{(U_T)} F_{t_1 \dots t_p}^{(U_T)}| \leq \alpha_{T, \gamma} \quad \text{où}$$

$$\alpha_{T, \lambda T} \rightarrow 0 \text{ quand } T \rightarrow \infty \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

.../...



Notons que  $F_{s_1 \dots s_p} t_1 \dots t_p, (U_T)$  est égale à

$$P(\xi(s_1) \leq U_T, \dots, \xi(s_p) \leq U_T, \xi(t_1) \leq U_T, \dots, \xi(t_p) \leq U_T).$$

D'après le lemme 3.1 de [1] nous savons que si  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$

et  $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$  sont deux suites de variables aléatoires gaussiennes réduites ayant respectivement pour matrice de covariance  $(\lambda_{ij})$  et  $(v_{ij})$  avec  $|\lambda_{ij}| \geq |v_{ij}|, i, j \in \{1, \dots, n\}$  alors pour tout  $u$  :

$$|P\{\prod_{j=1}^n (\xi_j \leq u)\} - P\{\prod_{j=1}^n (\eta_j \leq u)\}| \leq$$

$$K \sum_{i < j} |\lambda_{ij} - v_{ij}| (1 - \lambda_{ij}^2)^{-1/2} e^{-u^2/1 + \lambda_{ij}}, K \in \mathbb{R}.$$

Si nous appliquons ce lemme au  $(p+p')$ -uplet de variables aléatoires gaussiennes réduites  $(\xi(s_1), \dots, \xi(s_p), \xi(t_1), \dots, \xi(t_p))$

de matrice de covariance  $(\lambda_{ij})_{i, j \in \{1, \dots, p\}}$  et au  $(p+p')$ -uplet  $(v_{ij})_{i, j \in \{1, \dots, p'\}}$

de variables aléatoires gaussiennes réduites  $(\eta(s_1), \dots, \eta(s_p), \eta(t_1), \dots, \eta(t_p))$  de matrice de covariance

$$(v_{ij}) = (\lambda_{ij})_{i, j \in \{1, \dots, p\}} \text{ et } \text{cov}(\eta(s_i), \eta(t_j)) = 0 \quad \begin{matrix} i \in \{1, \dots, p\} \\ j \in \{1, \dots, p'\} \end{matrix}$$

nous déduisons que :

$$|F_{s_1 \dots s_p t_1 \dots t_p, (U_T)} - F_{s_1 \dots s_p (U_T)} F_{t_1 \dots t_p, (U_T)}| \leq$$

$$K \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p'} |r(t_j - s_i)| (1 - r^2(t_j - s_i))^{-1/2} e^{-U_T^2 / 1 + |r(t_j - s_i)|}.$$

.../...

Dans la suite nous écrirons  $q$  pour  $q_T = q_a(U_T)$ . Ainsi, par stationnarité nous déduisons que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p'} |r(t_j - s_i)| (1 - r^2(t_j - s_i))^{1/2} e^{-U_T^2/1 + |r(t_j - s_i)|} \\ & \leq \frac{T}{q} \sum_{\gamma \leq kq \leq T} |r(kq)| (1 - r^2(kq))^{1/2} e^{-U_T^2/1 + |r(kq)|} . \end{aligned}$$

Comme  $r^p(t)$  est la transformée de Fourier de  $F^{*p}$  qui est absolument continue, il résulte d'après le lemme de Riemann-Lebesgue (cf [5] p 486) que  $r^p(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

Montrons que pour tout  $t > 0$ ,  $|r(t)| \neq 1$ . Pour cela supposons qu'il existe un  $t > 0$  telle que  $|r(t)| = 1$ , cela implique (cf lemme 4 p 475 de [5]) que pour tout  $t'$  et  $n$   $|r(t' + nt)| = |r(t')|$  et en particulier pour  $t' = t$  et pour tout  $n$ ,  $|r(t(n+1))| = 1$ , ce qui contredit le fait que  $r(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Ainsi pour tout  $t > 0$ ,  $|r(t)| < 1$ ; il en résulte que pour tout  $\varepsilon > 0$  (en particulier pour  $\varepsilon = \gamma$ ) il existe  $n, 0 < n < 1$ , telle que  $\delta = \sup \{|r(t)|, t \geq \varepsilon\} < n$ .

Nous avons donc l'inégalité suivante :

$$\frac{T}{q} \sum_{\gamma \leq kq \leq T} |r(kq)| (1 - r^2(kq))^{1/2} e^{-U_T^2/1 + |r(kq)|} <$$

$$(1 - \delta^2)^{-1/2} \frac{T}{q} \sum_{\gamma \leq kq \leq T} |r(kq)| e^{-U_T^2/1 + |r(kq)|} .$$

Montrons que cette dernière expression tend vers zéro quand

$$T \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)|^p dt < \infty .$$

$$\frac{T}{q} \sum_{\gamma \leq kq \leq T} |r(kq)| e^{-U_T^2/1 + |r(kq)|} =$$

$$\frac{T}{q} \sum_{\gamma \leq kq \leq T} |r(kq)| e^{-U_T^2/1 + |r(kq)|} + \frac{T}{q} \sum_{T^\beta \leq kq \leq T} |r(kq)| e^{-U_T^2/1 + |r(kq)|} = \dots / \dots$$



$$A + B \quad \text{où} \quad 0 < \beta < \frac{1 - \delta}{1 + \delta} .$$

Montrons que  $A \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow \infty$ .

$$A \leq \frac{T}{q} \frac{T^\beta}{q} e^{-U_T^2/1+\delta} \leq K' \frac{T^{\beta+1}}{q^2} T^{-2/1+\delta}$$

car  $\exp(-U_T^2/2) \leq \frac{K''}{T}$  avec  $K'' \in \mathbb{R}^{**}$  et  $K' \in \mathbb{R}^{**}$ .

$$\frac{T^{\beta+1}}{q^2} T^{-2/1+\delta} \sim T^{\beta+1-\frac{2}{1+\delta}} \frac{1}{(U_{Tq})^2} (\text{Log } T) \rightarrow 0 \quad \text{quand } T \rightarrow \infty$$

car  $U_{Tq} \rightarrow a$  et  $U_T^2 \sim 2 \text{Log } T$  quand  $T \rightarrow \infty$ .

Montrons que  $B \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow \infty$ .

$$B \leq \frac{T}{q} \sum_{T^\beta < kq \leq T} |r(kq)| \exp(-U_T^2) \exp(U_T^2 |r(kq)|)$$

car  $(1+r)^{-1} \geq (1-r)$  quand  $|r| < 1$ .

Comme  $U_T^2 = 2 \text{Log } T + o(1)$  quand  $T \rightarrow \infty$  et  $r(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  on obtient donc quand  $kq > T^\beta$  et pour tout  $\alpha > 0$  l'inégalité suivante :  $\exp(U_T^2 |r(kq)|) \leq C T^\alpha$ ,  $C \in \mathbb{R}^{**}$ .

Ainsi on déduit que ,

$$B \leq C' \frac{T}{q} T^{-2} T^\alpha \sum_{T^\beta < kq \leq T} |r(kq)| \quad \text{car} \quad \exp(-U_T^2) \leq \frac{K''}{T^2}, \quad K'' \in \mathbb{R}^{**}$$

$$\leq C' \frac{T^{\alpha-1}}{q} \sum_{q \leq kq \leq T} |r(kq)|, \quad C' \in \mathbb{R}^{**} .$$

Nous allons montrer que si  $\alpha$  est choisi de façon convenable, alors l'expression

$$\frac{T^{\alpha-1}}{q} \sum_{q \leq kq \leq T} |r(kq)| \rightarrow 0 \quad \text{quand } T \rightarrow \infty .$$

.../...



D'après l'inégalité de Hölder, nous avons :

$$\sum_{q \leq kq \leq T} |r(kq)| \leq \left(\frac{T}{q}\right)^{1-\frac{1}{2p}} \left(\sum_{q \leq kq \leq T} |r(kq)|^{2p}\right)^{1/2p}.$$

Soit  $f^{*p}(\lambda)$  la dérivée de Radon Nikodym de  $F^{*p}(\lambda)$ . Alors nous savons que  $f^{*2p}(\lambda)$  est une fonction continue (cf [5] p.482) et que  $r^{2p}(kq) = 2 \int_0^\infty \cos(\lambda kq) f^{*2p}(\lambda) d\lambda$ .

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq kq \leq T} |r(kq)| &\leq \left(\frac{T}{q}\right)^{1-\frac{1}{2p}} \left(\sum_{q \leq kq \leq T} 2 \int_0^\infty \cos(\lambda kq) f^{*2p}(\lambda) d\lambda\right)^{1/2p} \\ &\leq \left(\frac{T}{q}\right)^{1-\frac{1}{2p}} \left(\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda T + \frac{\lambda q}{2})}{\sin(\frac{\lambda q}{2})} f^{*2p}(\lambda) d\lambda\right)^{1/2p} \\ &\leq \left(\frac{T}{q}\right)^{1-\frac{1}{2p}} \left(\int_0^\infty \left|\frac{\sin(\lambda T + \frac{\lambda q}{2})}{\sin(\frac{\lambda q}{2})}\right| f^{*2p}(\lambda) d\lambda\right)^{1/2p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{câ r } 2 \sum_{q \leq kq \leq T} \cos(\lambda kq) &= \sum_{q \leq kq \leq T} e^{i\lambda kq} + e^{-i\lambda kq} \\ &= \frac{\sin(\lambda T + \frac{\lambda q}{2})}{\sin(\frac{\lambda q}{2})} - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Or } \left|\frac{\sin(\lambda T + \frac{\lambda q}{2})}{\sin(\frac{\lambda q}{2})} f^{*2p}(\lambda)\right| \sim \left|\frac{2}{\lambda q} \sin(\lambda T) f^{*2p}(\lambda)\right| \text{ quand } T \rightarrow \infty \text{ car}$$

$U_T \rightarrow \infty$  implique que  $q \rightarrow 0$  et de ce fait

$$\left(\frac{T}{q}\right)^{1-\frac{1}{2p}} \left(\int_0^\infty \left|\frac{\sin(\lambda T + \frac{\lambda q}{2})}{\sin(\frac{\lambda q}{2})}\right| f^{*2p}(\lambda) d\lambda\right)^{1/2p} \sim$$

$$\left(\frac{T}{q}\right)^{1-\frac{1}{2p}} \left(\int_0^\infty \left|\frac{2}{\lambda q} \sin(\lambda T) f^{*2p}(\lambda) d\lambda\right|\right)^{1/2p} \text{ quand } T \rightarrow \infty.$$

.../...

Comme nous savons que  $|\sin \lambda T| \leq |\lambda T|^u$ , pour  $u$  arbitraire,  $0 < u < 1$ , nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{T}{q}\right)^{1-\frac{1}{2p}} \left(\int_0^\infty \left|\frac{2}{\lambda q} \sin(\lambda T) f^{*2p}(\lambda) d\lambda\right|^{1/2p}\right) \\ & \leq \left(\frac{T}{q}\right)^{1-\frac{1}{2p}} \left(\int_0^\infty \frac{2}{\lambda q} \lambda^u T^u f^{*2p}(\lambda) d\lambda\right)^{1/2p} \\ & = \frac{T^{1+\frac{u-1}{2p}}}{q} \left(\int_0^\infty 2\lambda^{u-1} f^{*2p}(\lambda) d\lambda\right)^{1/2p} \\ & = C'' \frac{T^{1+\frac{u-1}{2p}}}{q} \text{ avec } C'' \in \mathbb{R}^{**}, \end{aligned}$$

car  $\int_0^\infty 2\lambda^{u-1} f^{*2p}(\lambda) d\lambda < \infty$  d'après le critère de convergence de Dirichlet (cf [4] p 74).

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } B & \sim C' C'' \frac{T^{\alpha+\frac{u-1}{2p}}}{q^2} \sim C' C'' \frac{\text{Log } T}{(U_T q)^2} T^{\alpha+\frac{u-1}{2p}} \\ & \sim (\text{Log } T) T^{\alpha+\frac{u-1}{2p}} \text{ quand } T \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

car  $U_T^2 \sim (2 \text{Log } T)$  et  $U_T q \rightarrow a$  quand  $T \rightarrow \infty$ . Donc si  $\alpha \in ]0, \frac{1-u}{2p}[$ ,  $(\text{Log } T) T^{\alpha+\frac{u-1}{2p}} \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow \infty$  et de ce fait  $B \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow \infty$ .

La condition  $D_c(U_T)$  est vérifiée car on peut choisir

$$\alpha_{T,\gamma} = \frac{T}{q} \sum_{\gamma \leq kq \leq T} |r(kq)| e^{-U_T^2/1+|r(kq)|}, \text{ puisque}$$

$$\alpha_{T,\lambda T} \leq \alpha_{T,\gamma} \text{ quand } \lambda T > \gamma \text{ } (\gamma > 0, \lambda > 0) \text{ et comme}$$

$$\alpha_{T,\gamma} \rightarrow 0 \text{ quand } T \rightarrow \infty \text{ cela implique que } \alpha_{T,\lambda T} \rightarrow 0 \text{ quand } T \rightarrow \infty.$$

.../...



6. Nous dirons que  $\xi(t)$  a une  $\varepsilon$ -traversée montante de niveau  $u$  à l'instant  $t_0$ , si  $\xi(t)$  a une traversée montante de niveau  $u$  et s'il n'y a aucune traversée montante de niveau  $u$  dans l'intervalle  $]t_0 - \varepsilon, t_0[$ .

Soit  $N_{\varepsilon, u}(t)$  le nombre d' $\varepsilon$ -traversées montantes de niveau  $u$  dans l'intervalle  $[0, t]$ .

Posons  $\mu_{\varepsilon, u} = E N_{\varepsilon, u}(1)$ . Nous dirons que la condition  $D'_c(U_T)$  est vérifiée si  $\limsup_{T \rightarrow \infty} T |\mu_{\varepsilon T, U_T} - \Psi(u_T)| \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

D'après le lemme 4.5 de [7] nous savons que si  $\{\xi(t), -\infty < t < +\infty\}$  est un processus stationnaire et si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1)  $P(M(h) > u) \sim h \Psi(u)$  quand  $u \rightarrow \infty$ , pour tout  $h > 0$ .

(2) Pour une suite  $q_a(u) = q \rightarrow 0$  quand  $u \rightarrow \infty$  /  $qu \rightarrow a$  ( $a > 0$ )

$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\xi(0) < u, \xi(q) < u, M(q) > u)}{\mu q} \rightarrow 0$  quand  $a \rightarrow 0$ .

(3)  $\lim_{T \rightarrow \infty} P(M(T) \leq U_T) = e^{-\tau}$  pour  $\tau > 0$ .

(4) La fonction  $T \Psi(U_T)$  est bornée et

$\Psi(U_T) \sim \Psi(U_{\lfloor T/h \rfloor})$  quand  $T \rightarrow \infty$  pour  $h > 0$ .

(5)  $D_c(U_T)$  est satisfaite relativement à la suite  $q_a(U_T)$ .

Alors  $\limsup_{T \rightarrow \infty} T |\mu_{\varepsilon T, U_T} - \tau| \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Remarquons que toutes les conditions de ce lemme étant vérifiées (cf démonstrations précédentes) dans notre cas pour  $\Psi(u) = (2\pi)^{-1} \lambda_2^{1/2} \exp(-u^2/2)$ ,  $U_T = a_T^{-1} x + b_T$ ,  $\tau = e^{-x}$ , on en déduit que  $\limsup_{T \rightarrow \infty} T |\mu_{\varepsilon T, U_T} - \tau| \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

.../...

De plus,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} |T u_{\varepsilon T, u_T} - T \Psi(U_T)| \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} |T u_{\varepsilon T, U_T} - \tau| + \limsup_{T \rightarrow \infty} |\tau - T \Psi(U_T)|;$$

cette dernière expression tendant vers zéro d'après 4. et ce qui précède, il résulte que la condition  $D'_c(U_T)$  est vérifiée.

7. Comme  $\{\xi(t), -\infty < t < +\infty\}$  est un processus stationnaire, gaussien et comme  $\lambda_4 < \infty$  nous savons d'après [3] (chapitre 11.6) que

$$E N'_u(1) = \int_u^{+\infty} dx \int_{-\infty}^0 |z| p(x, 0, z) dz \text{ où } p(x, y, z) \text{ est la densité de } (\xi(t), \xi'(t), \xi''(t)).$$

Dans notre cas,

$$E N'_u(1) = (2\pi)^{-1} \left(\frac{\lambda_4}{\lambda_2}\right)^{1/2} \Phi\left(-\left(\frac{\lambda_4}{\Delta}\right)^{1/2} u\right) + \mu \Phi\left(\frac{\lambda_2 u}{\Delta^{1/2}}\right)$$

$$\sim \mu = E N_u(1) \text{ quand } u \rightarrow \infty \text{ où } \Phi(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^u e^{-x^2/2} dx \text{ et}$$

$$\Delta = \lambda_4 - \lambda_2^2.$$

D'après le corollaire 2 de [7] nous savons que si

$\{\xi(t), -\infty < t < +\infty\}$  est un processus stationnaire, si les conditions

(1), (2), (5),  $D'_c(U_T)$  sont vérifiées, si  $\lim_{T \rightarrow \infty} P(M(T) \leq U_T) = G(x)$

et  $\Psi(U_T) \sim \Psi(U_{[T/h]_h})$  quand  $T \rightarrow \infty$  pour  $h > 0$  avec  $U_T = a_T^{-1}x + b_T$  et

si  $E N'_u(1) \sim E N_u(1)$  quand  $u \rightarrow \infty$ , alors

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(M^{(k)}(T) \leq a_T^{-1}x + b_T) = G(x) \sum_{s=0}^{k-1} \frac{[-\text{Log } G(x)]^s}{s!}.$$

Toutes les hypothèses de ce corollaire étant vérifiées (cf démonstrations précédentes) dans notre cas pour  $G(x) = \exp(-e^{-x})$  et

$$\Psi(U_T) = (2\pi)^{-1} \lambda_2^{-1/2} \exp(-U_T^2/2) \text{ nous en déduisons la conclusion voulue.}$$

REMARQUE : si  $\int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)|^p dt < \infty$  et si  $\lambda_2 < \infty$  et  $\lambda_4 < \infty$ , alors

$M^{(k)}(T)$  est stable en probabilité et relativement stable en probabilité,

$$\text{cad } M^{(k)}(T) - a_T \rightarrow 0 \text{ p et } \frac{M^{(k)}(T)}{a_T} \rightarrow 1 \text{ p.}$$



BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] BERMAN S.M. (1964) Limit theorems for the maximum term in stationary sequences. AMS. 35. p 502-516.
- [ 2 ] BERMAN S.M. (1971) Maxima and high level excursions for stationary Gaussian processes. Trans Amer Math Soc. 160. p 65-85.
- [ 3 ] CRAMER H., LEADBETTER M.R. (1967) Stationary and related stochastic processes. J. Wiley and Sons.
- [ 4 ] DEHEUVELS P. (1980) L'intégrale . PUF.
- [ 5 ] FELLER W. (1966) An introduction to probability theory and its applications. Vol II. J. Wiley and Sons.
- [ 6 ] LEADBETTER M.R. (1978) Extreme value theory under weak mixing conditions. Studies in probability theory Vol 18. ed M. ROSENBLATT p. 46-110.
- [ 7 ] LEADBETTER M.R (1980) Extreme value theory for continuous parameter stationary processes. Mimeo series 1276. University of North Carolina at Chapel Hill
- [ 8 ] QUALLS C., WATANABE H. (1972) Asymptotic properties of the maximum in stationary Gaussian process . AMS. 43. T I. p. 580-596.

ANNEXE

3. L'énoncé du théorème 3.1 de [2] est le suivant :

si  $\{\xi(t), -\infty < t < +\infty\}$  est un processus stationnaire gaussien réduit de fonction de covariance  $r(t) \sim 1 - g(|t|)|t|^\alpha$  quand  $t \rightarrow 0$  où  $0 < \alpha \leq 2$  et  $g$  est une fonction continue croissante

telle  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(ct)}{g(t)} = 1$  pour tout  $c > 0$  et si  $F^{*p}$  est absolument continue alors

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(M(T) \leq \sqrt{2 \text{Log } T} + \left( \frac{\text{Log}(v V_\alpha / 2\sqrt{\pi \text{Log } T})}{\sqrt{2 \text{Log } T}} + \frac{x}{\sqrt{2 \text{Log } T}} \right) = \exp(-e^{-x})$$

où  $v$  est l'unique solution de l'équation  $2 \text{Log } T g(1/v)v^{-\alpha} = 1$  et  $V_\alpha \in \mathbb{R}^{**}$ .

Dans notre cas  $\alpha = 2$ ,  $g(|t|) = \frac{\lambda_2}{2}$ ,  $V_2 = (\pi)^{1/2}$  et  $v$

est l'unique solution de  $2 \text{Log } T \frac{\lambda_2}{2} v^{-2} = 1$  cad  $v = (\lambda_2 \text{Log } T)^{1/2}$ .

On en déduit bien que  $\lim_{T \rightarrow \infty} P(a_T(M(T) - b_T) \leq x) = \exp(-e^{-x})$ .

4. Montrons que  $T \Psi(U_T) \rightarrow e^{-x}$  quand  $T \rightarrow \infty$  pour  $x$  fixé.

Nous savons que  $U_T = a_T^{-1} x + b_T$  ce qui implique que

$$\frac{U_T^2}{2} =$$

$$\frac{x^2}{4 \text{Log } T} + \text{Log } T + \frac{(\text{Log}((2\pi)^{-1} \lambda_2^{1/2}))^2}{4 \text{Log } T} + x + \frac{(\text{Log}((2\pi)^{-1} \lambda_2^{1/2}))x}{2 \text{Log } T} + \text{Log}((2\pi)^{-1} \lambda_2^{1/2}).$$

Ainsi,  $\frac{U_T^2}{2} = \text{Log } T + x + \text{Log}((2\pi)^{-1} \lambda_2^{1/2}) + o(1)$  quand  $T \rightarrow \infty$  et de ce

fait,  $e^{-U_T^2/2} \sim T^{-1} e^{-x} (2\pi)^{-1/2}$  quand  $T \rightarrow \infty$ .

.../...



Nous déduisons donc que,

$$T \Psi(U_T) = T(2\pi)^{-1} \lambda_2^{1/2} e^{-U_T^2/2} \sim T(2\pi)^{-1} \lambda_2^{1/2} T^{-1} e^{-x(2\pi)\lambda_2^{-1/2}} = e^{-x}$$

quand  $T \rightarrow \infty$ .

5. Montrons que pour tout  $\alpha > 0$ ,  $\exp(U_T^2 |r(kq)|) \leq C T^\alpha$  où  $C \in \mathbb{R}^{**}$ , quand  $kq > T^\beta$ .

Comme  $r(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , cela équivaut à dire que pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $t > \eta$ ,  $|r(t)| \leq \varepsilon$ . Cela implique que pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous avons  $\exp(U_T^2 |r(kq)|) \leq \exp(U_T^2 \varepsilon)$  quand  $kq > T^\beta$ .

Comme  $U_T^2 = 2 \log T + O(1)$  quand  $T \rightarrow \infty$  nous avons donc  $\exp(U_T^2 \varepsilon) \leq \exp((2 \log T + M)\varepsilon) = \exp(M\varepsilon) T^{2\varepsilon} = C T^\alpha$ , où  $M \in \mathbb{R}^{**}$ .

On obtient donc quand  $kq > T^\beta$  et pour tout  $\alpha > 0$  l'inégalité suivante  $\exp(U_T^2 |r(kq)|) \leq C T^\alpha$  où  $C \in \mathbb{R}^{**}$ .

$$6. \text{ Montrons que } 2 \sum_{q \leq kq \leq T} \cos(\lambda kq) = \frac{\sin(\lambda T + \frac{\lambda q}{2})}{\sin(\frac{\lambda q}{2})} - 1.$$

$$\sum_{q \leq kq \leq T} \cos(\lambda kq) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{q \leq kq \leq T} (e^{i\lambda q})^k + \sum_{q \leq kq \leq T} (e^{-i\lambda q})^k \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ e^{i\lambda q} \frac{e^{i\lambda T} - 1}{e^{i\lambda q} - 1} + e^{-i\lambda q} \frac{e^{-i\lambda T} - 1}{e^{-i\lambda q} - 1} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{i\lambda q/2}}{e^{-i\lambda q/2}} \frac{e^{i\lambda T} - 1}{e^{i\lambda q} - 1} + \frac{e^{-i\lambda q/2}}{e^{i\lambda q/2}} \frac{e^{-i\lambda T} - 1}{e^{-i\lambda q} - 1} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{i(\lambda q/2 + \lambda T)} - e^{-i(\lambda q/2 + \lambda T)}}{e^{i\lambda q/2} - e^{-i\lambda q/2}} - 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(\lambda q/2 + \lambda T)}{\sin(\lambda q/2)} - 1 \right\}.$$

.../...

7.  $E N'_u(1) = \int_u^{+\infty} dx \int_{-\infty}^0 |z| p(x,0,z) dz$  où  $p(x,y,z)$  est la densité de  $(\xi(t), \xi'(t), \xi''(t))$  de matrice de covariance

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \text{ et de ce fait}$$

$$p(x,0,z) = (2\pi)^{-3/2} (\lambda_2 \Delta)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\Delta} (z^2 + 2\lambda_2 x z + \lambda_4 x^2) \right\}$$

où  $\Delta = \lambda_4 - \lambda_2^2$ . Posons  $\Phi(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^u e^{-t^2/2} dt$  et

$$\Phi'(u) = (2\pi)^{-1/2} e^{-u^2/2} \text{ et calculons } \int_{-\infty}^0 |z| p(x,0,z) dz .$$

$$\int_{-\infty}^0 |z| p(x,0,z) dz =$$

$$-(2\pi)^{-3/2} (\lambda_2 \Delta)^{-1/2} \int_{-\infty}^0 z \exp \left\{ -\frac{(z + \lambda_2 x)^2}{2\Delta} \right\} \exp \left\{ -\frac{(\lambda_4 - \lambda_2^2)}{2\Delta} x^2 \right\} dz =$$

$$-(2\pi)^{-3/2} (\lambda_2 \Delta)^{-1/2} \exp(-x^2/2) \int_{-\infty}^0 z \exp \left\{ -\frac{(z + \lambda_2 x)^2}{2\Delta} \right\} dz .$$

Si nous faisons un changement de variable en posant

$$t = \frac{z + \lambda_2 x}{\Delta^{1/2}} \text{ il vient que ,}$$

$$\int_{-\infty}^0 |z| p(x,0,z) dz =$$

$$(2\pi)^{-3/2} \lambda_2^{-1/2} \Delta^{1/2} \exp\left(\frac{-\lambda_4 x^2}{2\Delta}\right) + (2\pi)^{-1} \lambda_2^{1/2} x e^{-x^2/2} \Phi\left(\frac{\lambda_2 x}{\Delta^{1/2}}\right) .$$

Ainsi,

$$E N'_u(1) = (2\pi)^{-1} (\lambda_2 \lambda_4)^{-1/2} \Delta \Phi\left(-\frac{\lambda_4}{\Delta}\right)^{1/2} u + \theta(u) \text{ (car } 1 - \Phi(x) = \Phi(-x))$$

$$\text{où } \theta(u) = (2\pi)^{-1} \lambda_2^{1/2} \int_u^{+\infty} x e^{-x^2/2} \Phi\left(\frac{\lambda_2 x}{\Delta^{1/2}}\right) dx .$$

.../...



En intégrant par parties il vient que,

$$\theta(u) = (2\pi)^{-1/2} \lambda_2^{1/2} \phi'(u) \Phi\left(\frac{\lambda_2 u}{\Delta^{1/2}}\right) + (2\pi)^{-1} \lambda_2^{3/2} \lambda_4^{-1/2} \phi\left(-\left(\frac{\lambda_4}{\Delta}\right)^{1/2} u\right).$$

De ce fait,

$$EN'_u(1) = (2\pi)^{-1} \left(\frac{\lambda_4}{\lambda_2}\right)^{1/2} \phi\left(-\left(\frac{\lambda_4}{\Delta}\right)^{1/2} u\right) + (2\pi)^{-1/2} \lambda_2^{1/2} \phi'(u) \Phi\left(\frac{\lambda_2 u}{\Delta^{1/2}}\right)$$

$$\sim \mu(u) = EN_u(1) \quad \text{quand } u \rightarrow \infty.$$

Reçu en Avril 1982

I.S.U.P.

Tour 45-55, E3

4 Place Jussieu

75230 Paris Cedex 05