



HAL
open science

NOMBRES PREMIERS DE SOPHIE GERMAIN et VARIANTES

René-Louis Clerc

► **To cite this version:**

René-Louis Clerc. NOMBRES PREMIERS DE SOPHIE GERMAIN et VARIANTES. 2022. hal-03705777v4

HAL Id: hal-03705777

<https://hal.science/hal-03705777v4>

Preprint submitted on 9 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NOMBRES PREMIERS DE SOPHIE GERMAIN et VARIANTES

René-Louis Clerc (27/06/2022) (*)

ABSTRACT

Number theory (prime numbers)

PRIME NUMBERS OF SOPHIE GERMAIN and VARIANTS. We are interested here in the prime numbers of Sophie Germain (prime p such that $2p+1$ is also prime), not as the first stone of the long process ([SG](#)) towards the resolution of the Fermat conjecture, which led to the Fermat-Wiles theorem ([9]) in 1994, but as a certain set of prime numbers, denoted PSG (strictly included in the set P of all primes), of which we will study, as for P ([4], [7], [15], [16], ...), couples (twins, cousins, sexy, ...), triplets or other arithmetic tuples or not. This analysis will be made (as in [15], [16]) within the framework of the modular arithmetic of Gauss, with always the essential role played by the classes modulo 6 of $N/6N$.

In PSG, we will show, in particular, that there are only for a gap $e = 0(6)$ that there exist several pairs and that there can exist several arithmetic triples; for e not $0(6)$, there is no triple or pair, except possibly (if $3+e \in \text{PSG}$), the unique pair $(3, 3+e)$ for $e = 2(6)$. We will also consider other sets of prime numbers of the same type (inspired by the generalized Cunningham chains ([3], [5])) ([AC](#)), by swapping the $2p+1$ bond of PSG for $ap+b$, with a and b relatively prime; a property of the prime number 3 then one of the odd integer 3 will result.

For the sets PSG, G_2^{-1} (defined by $2p-1$) and G_4 (defined by $2p+4$), with a deviation e not $0(6)$, there is at best in some cases only one possible pair but never an arithmetic triple and it takes $e = 0(6)$ for several representatives to be possible; for a and b not $0(6)$, there exists at best any triple starting with $p = 3$. G_6 (defined by $6p+1$) is much richer and comes close to the situation in P ([15], [16]), with at least one representative (case of couples and arithmetic triples) for almost each value of e . We can [list online](#) prime numbers belonging to the sets PSG, G_2^{-1} , G_4 and G_6 .

INTRODUCTION

On s'intéresse ici aux nombres premiers de Sophie Germain (premiers p tels que $2p+1$ soit aussi premier), non pas en tant que première pierre de la longue démarche ([SG](#)) vers la résolution de la conjecture de Fermat, qui a abouti au théorème de Fermat-Wiles ([9]) en 1994, mais en tant qu'un certain ensemble de nombres premiers, noté PSG (strictement inclus dans l'ensemble P de tous les premiers), dont on étudiera, comme pour P ([4], [7], [15], [16], ...), les couples (jumeaux, cousins, sexy, ...), triplets ou autres n -uplets arithmétiques ou non. Cette analyse sera faite (comme dans [15], [16]) dans le cadre de l'arithmétique modulaire de Gauss, avec toujours le rôle essentiel joué par les classes modulo 6 de $N/6N$.

Dans PSG, on montrera, en particulier, qu'il n'y a que pour un écart $e = 0(6)$ qu'il existe plusieurs couples et qu'il peut exister plusieurs triplets arithmétiques; pour e non $0(6)$, il n'existe aucun triplet ni couple, sauf, éventuellement (si $3+e \in \text{PSG}$), l'unique couple $(3, 3+e)$ pour $e = 2(6)$.

On considèrera aussi d'autres ensembles de nombres premiers du même type (en s'inspirant des chaînes de Cunningham généralisées ([3], [5])) ([AC](#)), en troquant la liaison $2p+1$ de PSG contre $ap+b$, avec a et b premiers entre eux; une propriété du nombre premier 3 puis une de l'entier impair 3 en résulteront.

Pour les ensembles PSG, G_2^{-1} (défini par $2p-1$) et G_4 (défini par $2p+4$), avec un écart e non $0(6)$, il y a au mieux dans quelques cas un seul couple possible mais jamais de triplet arithmétique et il faut $e = 0(6)$ pour que plusieurs représentants soient possibles; pour a et b non $0(6)$, il existe au mieux un triplet quelconque débutant par $p = 3$. G_6 (défini par $6p+1$) est beaucoup plus riche et se rapproche de la situation dans P ([15], [16]), avec au moins un représentant (cas des couples et des triplets arithmétiques) pour quasiment chaque valeur de e .

On pourra [lister en ligne](#) des nombres premiers appartenant aux ensembles PSG, G_2^{-1} , G_4 et G_6 .

1-LES PREMIERS DE SOPHIE GERMAIN.

L'ensemble infini dénombrable des nombres premiers P est riche en sous-ensembles, eux-mêmes infinis, avec, en particulier, les jumeaux, les cousins, les sexy, ..., les n -uplets arithmétiques ([15]) ou

quelconques ([16])..., les premiers sûrs et les premiers de Sophie Germain ([1]).

Rappelons qu'un **nombre premier sûr** est un nombre premier de la forme $2p+1$, où p est lui-même un nombre premier; de tels nombres forment l'ensemble $PS = \{5, 7, 11, 23, 47, 59, 83, 107, 167, \dots\}$. Un nombre premier p , tel que $2p+1$ soit aussi premier, est un **nombre premier de Sophie Germain**, dont l'importance historique bien connue ([1]) pour l'étude de la conjecture de Fermat (devenue le théorème de Fermat-Wiles ([9]) en 1994) sera rappelée plus bas ([SG](#)).

On va s'intéresser ici aux suites arithmétiques ou non (couples, triplets, ...) pouvant exister dans l'ensemble de ces nombres, comme cela a été fait dans l'ensemble de tous les premiers P ([4], [7], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], ...).

Il est conjecturé que les premiers de Sophie Germain (comme d'ailleurs, les premiers sûrs) sont en nombre infini. Dans cet ensemble qu'on pourra appeler $PSG = \{2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113, 173, \dots\}$ inclus bien sûr (comme PS) dans l'ensemble des premiers P , on pourra considérer en particulier des couples de premiers jumeaux, cousins, sexy, ..., et de manière plus générale des n -uplets, comme pour le cas de P ([15], [16]).

En analysant les nombres premiers dans $N/6N$, on peut observer que, à part 2 et 3, tout $p \in PSG$ est nécessairement 5(6) (car pour $p = 1(6)$, $2p+1$ serait 3(6) et donc non premier); il en résulte que pour tout $p > 3$, on aura toujours un écart 0(6) entre deux premiers de PSG consécutifs ou pas.

Ajoutons que l'on montre facilement que tout PSG $p (> 5)$ est nécessairement soit 11(30), soit 23(30), soit 29(30) (en effet 5(30) est multiple de 5 et 17(30) n'est jamais PSG , son $2p+1$ étant multiple de 5). On peut donc affirmer que parmi les 5(6), seuls les 11(30), 23(30), 29(30) sont des PSG possibles.

Par la suite, par abus, on dira premier PSG (ou simplement PSG) pour premier $\in PSG$ (en nommant, par commodité, de la même manière l'ensemble et un de ses éléments).

1-1- COUPLES de PSG

On soupçonne bien sûr qu'il existera dans PSG moins de couples que dans P .

On appellera e l'écart entre deux premiers appartenant à PSG constituant un éventuel couple ($p, p+e$) et on exprimera (comme dans [15], [16]) la valeur de cet entier pair dans $N/6N$.

-Théorème 1.

Pour $p \in PSG$, l'existence de couple ($p, p+e$), avec $p+e \in PSG$, dépend de l'écart e de la manière suivante:

1) Pour $e = 2(6)$ il existe le seul couple ($3, 3+e$) si $3+e$ est dans PSG , et en particulier ($3, 5$) est le seul couple de jumeaux ($e = 2$).

2) Pour $e = 4(6)$ il n'existe pas de couple, et en particulier pas de cousin ($e = 4$).

3) Pour $e = 0(6)$ plusieurs couples existent, et en particulier plusieurs sexy ($e = 6$).

Démonstration

A part 2 et 3, on sait que tout $p \in PSG$ est nécessairement 5(6); par ailleurs 2 ne convient jamais et 3 ne peut convenir qu'avec $e = 2(6)$ (cf. cas 2)), sinon $3+e$ serait 1(6) ou 3(6).

1) Avec $e = 2(6)$, $2(p+e)+1$ est 3(6) et donc ne peut être premier sauf si $p = 3$, d'où, si $3+e \in PSG$, on a le seul couple ($3, 3+e$) (par exemple pour $e = 2$ ou 8), et pas de couple sinon (cas de $e = 14$ ou 32).

2) Avec $e = 4(6)$, il vient $p + 4(6) = 3(6)$ qui ne peut être premier, donc pas de couple pour $e = 4(6)$.

3) Avec $e = 0(6)$, tous les p , $2p+1$, $p+e$, $2p+2e+1$ sont 5(6) et plusieurs couples existent.

On a par exemple, pour $e = 6$, ($5, 11$), ($23, 29$), ($83, 89$), ($173, 179$), ..., ($7643, 7649$), ..., pour $e = 24$, ($5, 29$), ($29, 53$), ($89, 113$), ..., ($148829, 148853$), ...

Dans PSG , il existe donc un seul couple de jumeaux, ($3, 5$), et aucun couple de cousin, alors que l'on peut facilement exhiber dans P de nombreux couples de jumeaux et de cousins (et même une infinité suivant la conjecture de Polignac [2]); on sait d'ailleurs qu'il existe dans P des suites arithmétiques de toute longueur d'après le théorème de Green-Tao ([10]).

On observera que pour $e = 6$ il n'existe pas d'élément de couple jumeaux de PSG qui appartiennent à 2 couples distincts, alors que pour $e = 12$, il en existe, comme ($29, 41$), ($41, 53$), ($419, 431$), ($431, 443$), ($274259, 274271$), ($274271, 574286$), ...ce qui permet de noter que pour $e = 6$ il n'existe pas de triplet arithmétique (comparer avec [15]) de PSG , alors qu'il en existe pour $e = 12$...

A côté de ces couples, il existe aussi des paires de PSG du type ($p, 2p+1$), comme par exemple ($2, 5$), ($5, 11$), ($11, 23$), ..., ($70769, 141539$), ... On les appellera plus bas des chaînes et il en existera d'ordre supérieur à 2.

1-2-TRIPLETS de PSG

1-2-1-TRIPLETS ARITHMETIQUES de PSG

-Théorème 2.

Pour $p \in \text{PSG}$, l'existence de triplet arithmétique de raison e , $(p, p+e, p+2e)$, avec $p+e$ et $p+2e \in \text{PSG}$ dépend de e :

- 1) Pour $e = 2(6)$, il n'existe pas de triplet.
- 2) Pour $e = 4(6)$, il n'existe pas de triplet.
- 3) Pour $e = 0(6)$, plusieurs triplets sont possibles si $p+e$ et $p+2e$ sont PSG.
- 4) Pour $e = 0(30)$, il existe toujours des triplets.

Démonstration

1) Comme $p = 5(6)$ on aura $p+2e = 3(6)$; pour $p = 3$, on aura, avec $e = 2$, $p+2e = 7$ qui n'est pas PSG, et $p+2e = 1(6)$ pour tout autre e , et donc pas de triplet.

2) Comme $p = 5(6)$ on aura $p+e = 3(6)$; pour $p = 3$, on aura $p+e = 7$ qui n'est pas PSG, et $p+e = 1(6)$ pour tout autre e , et donc pas de triplet.

3) Comme $p = 5(6)$, $p+e$ et $p+2e$ sont bien $5(6)$ et $p = 5$ peut aussi convenir (par exemple pour $e = 18$).

Ici les PSG ne conservent pas toujours leur valeur modulo 30 ($0(6)$ pas nécessairement $0(30)$...)

4) Les p de PSG conservent leur valeur modulo 30 (11, 23 ou 29) et donc il y a toujours des solutions

Pour $e = 6$, aucun triplet possible: il faudrait deux écarts consécutifs de 6 dans PSG.

Pour $e = 6^a$ pour tout a non nul, il n'y a aucun triplet ... a priori numériquement.

Exemples

$e = 12, 18, 30, 42, 48, 72, \dots$ donnent plusieurs triplets;

$e = 24, 84$ donnent un seul triplet issu de 5.

Il faut considérer les écarts successifs entre les premiers de PSG; jamais 6 suivi de 6, ni 6^a suivi de 6^a (pour a non nul), mais 12 suivi de 12 existe ...

Exemples

Pour $e = 12$, les plus petits triplets débutent par $p = 29, 419, 112559, \dots$, pour $e = 30$, ils débutent par $p = 5, 1013, 4373, \dots$, Pour $e = 78$, ils débutent par $p = 1733, 11393, 257093, \dots$, et pour $e = 630$, ils débutent par $p = 29, 179, 809, \dots$

On distinguera bien les triplets (ou n-uplets) arithmétiques de PSG des chaînes de Cunningham (AC) de première espèce ($[3],[5]$) qui sont de la forme $(p, 2p+1, 2(2p+1)+1, \dots)$ p étant un PSG, le dernier élément d'une telle chaîne étant un premier non PSG (mais seulement un premier sûr).

Si l'on appelle S l'application $q \rightarrow 2q+1$ de PSG dans PSG, on peut observer qu'il existe des chaînes de 3 éléments PSG par itération de S (de type $a \rightarrow S(a) \rightarrow S(S(a))$), comme (509, 1019, 2039), (1229, 2459, 4919), (1409, 2819, 5639), (2699, 5399, 10799), (3539, 7079, 14159), ..., (27479, 54959, 109919), ..., mais aussi (en poursuivant l'itération) de 4 éléments (2, 5, 11, 23), 5 éléments (89, 179, 359, 719, 1439), ... Dans $[2, 10^7]$, on aura trois chaînes de 6 éléments, débutant respectivement par $p = 1122659, 2164229, 2329469$, et de nombreuses de 5 éléments.

En les complétant d'un dernier premier non PSG, ces chaînes sont classiquement citées comme chaînes de Cunningham de première espèce.

Finalement, dans PSG, il n'y a que pour $e = 0(6)$ qu'il existe plusieurs couples et qu'il peut exister plusieurs triplets; pour e non $0(6)$, il n'existe aucun triplet ni couple, sauf, éventuellement (si $3+e \in \text{PSG}$), l'unique couple $(3, 3+e)$ pour $e = 2(6)$.

1-2-2-TRIPLETS QUELCONQUES de PSG

On cherche l'existence de triplets quelconques de PSG $(p, p+a, p+b)$.

-Théorème 3.

Pour $p \in \text{PSG}$, $a < b$, a et b pairs strictement positifs, l'existence de triplet $(p, p+a, p+b)$ est régie par:

- 1) Pour a et b non tous les deux $0(6)$, il n'existe aucun triplet, sauf dans le cas ($a = 2(6)$, $b = 2(6)$) à condition que $3+a$ et $3+b$ soient PSG avec le seul $(3, 3+a, 3+b)$.
- 2) Pour a et b $0(6)$, on pourra avoir, soit 0 triplet, soit un seul issu de 5, soit plusieurs.
- 3) Pour a et b $0(30)$, il existera toujours plusieurs triplets.

Démonstration

1) Pour a et b $2(6)$: comme $p = 5(6)$, $p+a$ et $p+b$ sont toujours $1(6)$, la seule possibilité est $p = 3$; donc il y a un seul triplet si $3+a$ et $3+b$ sont PSG (par exemple $a = 2, b = 8$ avec $(3, 5, 11)$, $a = 8, b = 26$

avec (3, 11, 29).

Pour a et b 4(6): comme $p = 5(6)$, $p+a$ et $p+b$ sont toujours 3(6) et $3+a$, $3+b$ toujours 1(6), et donc il n'y a jamais de triplet.

Pour a = 2(6) b = 4(6) (de même pour l'inverse): $p+a = 1(6)$ $p+b = 3(6)$ et $3+4(6) = 1(6)$, donc il n'y a jamais de triplet.

Pour a non 0(6) b = 0(6) (de même pour l'inverse): $p+a = 1(6)$ ou 3(6), $3+0(6) = 3(6)$, donc jamais de triplet.

2) Pour a et b 0(6): jamais 3 mais $p+a$ et $p+b$ sont 5(6), donc des triplets sont possibles: aucun pour $(a,b) = (6,12)$ ou $(12,36)$, un seul pour $(6,24)$ ou $(6,84)$, et plusieurs pour $(6,36)$, $(6,48)$, $(12,24)$...

3) Pour a et b 0(30): $p+a$ et $p+b$ sont toujours soit 11(30), soit 23(30), soit 29(30) et il existe toujours des triplets.

Exemples: pour (6,18) on aura des triplets débutant par $p = 5, 23, 173, \dots, 726413, \dots$; pour (30,60) par $p = 23, 53, 1451, \dots, 978149, \dots$

Finalement (cas arithmétique et quelconque) il faut que $e = 0(6)$ ou que a et b soient au moins 0(6) (ou 0(30)) pour qu'il puisse exister plusieurs triplets (sinon il n'y a pas de solution ou au mieux une seule).

La comparaison avec le cas de P (théorème 1 de [16]) montre bien qu'il y a ici moins de couples (a,b) associés à plusieurs triplets solutions.

1-3- QUADRUPLETS de PSG

1-3-1- QUADRUPLETS ARITHMETIQUES de PSG

Pour les quadruplets arithmétiques de PSG, il faut $e = 30$ ou 0(210) pour obtenir des représentants, tous les e inférieurs ou différents ne donnent pas de solution.

Pour $e = 2, 4, 6, 12, 18, 80, 120, 300, \dots$ il n'existe aucun quadruplet.

$e = 30$ produit des quadruplets dont les plus petits débutent par $p = 23, 3299, 6491, \dots$

$e = 60$ produit des quadruplets dont les plus petits débutent par $p = 53, 113, 467471, \dots$

$e = 150$ produit des quadruplets dont les plus petits débutent par $p = 293, 359, 53951, \dots$

$e = 210$ produit des quadruplets dont les plus petits débutent par $p = 23, 809, 11699, \dots$

$e = 420$ produit des quadruplets dont les plus petits débutent par $p = 2129, 13901, 61331, \dots$

$e = 840$ produit des quadruplets dont les plus petits débutent par $p = 88079, 102551, 167873, \dots$

On aura plusieurs quadruplets pour certains $e = 0(30)$ et pour tous les $e = 0(210)$.

1-3-2- QUADRUPLETS QUELCONQUES de PSG

On cherche l'existence de quadruplets quelconques de PSG ($p, p+a, p+b, p+c$), $a < b < c$, pairs et strictement positifs.

Comme plus haut, il y aura plusieurs quadruplets avec certains (a, b, c) tous 0(30) et avec tous les cas des (a, b, c) tous 0(210), et aucun représentant pour des (a, b, c) inférieurs ou différents.

Pour (a, b, c) = (30, 90, 120) ou (30, 150, 330) ou... il n'y a pas de quadruplet.

Pour (30, 90, 240) il existe plusieurs quadruplets débutant par $p = 3299, 2369201, 3340679, \dots$

Pour (30, 60, 150) il existe plusieurs quadruplets débutant par $p = 23, 1451, 3299, \dots$

Pour (210, 1050, 2310) il existe plusieurs quadruplets débutant par $p = 431, 509, 1019, \dots$

Pour (210, 420, 630) il existe plusieurs quadruplets débutant par $p = 23, 809, 11699, \dots$

Dans le cas des quadruplets arithmétiques ou non il faut donc des écarts tous 0 (7#) pour assurer plusieurs représentants.

2- VARIANTES des PSG

On peut considérer que l'ensemble PSG résulte d'une liaison imposée à chacun de ses éléments: tout p de PSG est tel que $2p+1$ appartient à P.

Dans le même ordre d'idée on envisagera la liaison $4p+1$ qui définira l'ensemble G4, la liaison $6p+1$ qui définira l'ensemble G6 et la liaison $2p-1$ qui définira l'ensemble G_2^{-1} .

A cette liaison, on associera une application (comme S pour PSG), par exemple S4: $q \rightarrow 4q+1$ de G4 dans G4, et l'on cherchera s'il existe des suites (ou chaînes) d'éléments de G4 par itération de cette application.

Ces suites d'éléments de G4, G6 ou G_2^{-1} sont assez proches des chaînes de Cunningham ([3], [5], [6], [8]) généralisées (G4, G6) ou de deuxième espèce (G_2^{-1}). Mais dans ces chaînes, il y a un dernier élément 'supplémentaire' qui est seulement un premier n'appartenant pas à l'ensemble initial considéré.

Ces 4 ensembles PSG, G4, G6, G_2^{-1} sont strictement inclus dans l'ensemble P des premiers, sont

conjecturés infinis, mais possèdent 'un peu moins' d'éléments, ce que tente de décrire la notion de rareté ([4], [15]) d'un ensemble d'entiers (avec en particulier le théorème de Brun [4] qui établit la convergence de cette rareté pour l'ensemble infini des premiers jumeaux):

(1) $R_E = \sum 1^m/p$, pour p décrivant l'ensemble E considéré et $m \rightarrow \infty$.

Si l'on calcule la rareté de nos ensembles de premiers pour l'intervalle fini $[2, 10^9]$, on obtient respectivement:

$R_{PSG} = 1.470771$, $R_{G2^{-1}} = 1.296024$, $R_{G4} = 0.830302$, $R_{G6} = 1.905927$;

dans le même intervalle, un calcul analogue pour tous les premiers donne $R_p = 3.292755$, et pour tous les entiers $R_N = 20.300481$, sachant que l'on sait que pour N (série harmonique) et P (démonstration d'Euler en 1737) il y a divergence pour $m \rightarrow \infty$...

Naturellement c'est la convergence de R_E pour $m \rightarrow \infty$ qu'il faudrait étudier (voire établir) pour nos quatre sous-ensembles de P ..., nous nous contenterons de la conjecturer.

2-1-Les PREMIERS de G4

Considérons l'ensemble des premiers tels que $4p+1$ soit aussi premier et appelons G4 un tel premier (et, toujours par abus, G4 sera aussi l'ensemble de ces premiers); $G4 = \{3, 7, 13, 37, 43, 67, 73, 79, 97, 127, 139, 163, \dots\}$.

Tout $p > 3$ de G4 est nécessairement 1(6), car avec $p = 5(6)$, $4p+1$ serait 3(6), et, comme pour PSG, on aura toujours (pour $p > 3$) un écart 0(6) entre deux premiers de G4 consécutifs ou pas.

-Théorème 4.

Pour $p \in G4$, l'existence de couple $(p, p+e)$, avec $p+e \in G4$, dépend de l'écart e de la manière suivante:

1) Pour $e = 2(6)$ il n'existe pas de couple, et en particulier pas de jumeau ($e = 2$).

2) Pour $e = 4(6)$ il existe le seul couple $(3, 3+e)$ si $3+e$ est dans G4, et en particulier $(3, 7)$ est le seul couple de cousins ($e = 4$).

3) Pour $e = 0(6)$ plusieurs couples existent, et en particulier plusieurs sexy ($e = 6$).

Démonstration

1) Avec $e = 2(6)$, $p+e$ est 3(6) (ou, pour $e = 2$ et $p = 3$, égal à 5 qui n'est pas G4), donc pas de couple pour $e = 2(6)$.

2) Avec $e = 4(6)$, $p+e$ est 5(6) (et donc non G4) ou $3+e$, d'où un seul couple $(3, 3+e)$ si $3+e$ est G4, et en particulier $(3, 7)$ seul couple cousin pour $e = 4$.

3) Avec $e = 0(6)$ plusieurs couples existent.

Par exemple pour $e = 6$, $(7, 13)$, $(37, 43)$,...; pour $e = 18$, $(79, 97)$, $(709, 727)$,...; pour $e = 42$, $(37, 79)$, $(97, 139)$, ...

2-1-1-TRIPLETS ARITHMETIQUES de G4

Toujours suivant les valeurs de e, nous aurons:

Pour $e = 2(6)$, comme $p = 1(6)$ ou 3, $p+e = 3(6)$ et $3+2 = 5$ n'étant pas G4, il n'existe pas de triplet

Pour $e = 4(6)$, comme $p = 1(6)$ ou 3, $p+2e = 3(6)$ et $3+2e = 11$ n'étant pas G4, il n'existe pas de triplet

Pour $e = 0(6)$, comme $p = 1(6)$ ou 3, 3 donne des 3(6) et pour $p > 3$, $p+e$, $p+2e$ sont 1(6) (et $4p+1$, $4p+8e+1$, $4p+8e+1$ sont bien 5(6)), donc plusieurs triplets sont possibles avec les p tels que $p+e$ et $p+2e$ soient G4.

Ainsi, nous aurons plusieurs triplets pour $e = 6$ (débutant par $p = 67, 4987, \dots$), $e = 24$ (débutant par $p = 1039, 315199, \dots$), $e = 36$ (débutant par $p = 7, 127, \dots$) .. et aucun pour $e = 12, 18, 30 \dots$

Pour $e = 0(30)$, il existe toujours des triplets.

Dans G4 il n'existe donc pas de couple de jumeau et un seul couple de cousins $(3, 7)$, mais plusieurs couples de sexy; les résultats sont analogues à ceux de PSG, l'unique couple de cousins 'remplaçant' l'unique couple de jumeaux de PSG.

Pour les triplets la structure est sensiblement la même pour G4 et PSG, avec le seul écart $e = 0(6)$ qui donnera souvent plusieurs représentants.

Si l'on considère l'application $S4$, $q \rightarrow 4q+1$ pour q dans G4, on observe que, sauf pour $q = 3$, il n'y a jamais d'image de q dans G4 et donc qu'il existe la seule paire $(3, 13)$ et aucune autre chaîne (de longueur quelconque) par l'itération associée à S4. En effet, tout élément de G4 (supérieur à 3) étant un premier 1(6), son image par S4 est 5(6) et donc n'appartient pas à G4.

2-1-2-TRIPLETS QUELCONQUES de G4

Si a ou b n'est pas 0(6), $p+a$ et $p+b$ seront 3(6) ou 5(6), seul $p = 3$ est possible ($a = 4$, $b = 10$ ou $a = 10$,

$b = 34 \dots$): le plus souvent pas de solution, au plus un seul triplet.

Si a et b sont $0(6)$, $p+a$ et $p+b$ sont bien $1(6)$ et donc plusieurs triplets sont possibles si $p+a$ et $p+b$ sont dans G_4 .

$(a, b) = (6, 24), (12, 36), (6, 42), (6, 72)$ donnent plusieurs triplets, mais $(a, b) = (6, 18), (6, 48)$ ou $(24, 72)$ n'en donnent aucun.

Si a et b sont $0(30)$, il existe toujours plusieurs triplets.

2-2-Les PREMIERS de G_6

Considérons l'ensemble des premiers tels que $6p+1$ soit aussi premier et appelons G_6 un tel premier (G_6 étant aussi l'ensemble de ces premiers); $G_6 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 37, 47, 61, 73, 83, 101, \dots\}$.

Tout $p > 3$ de G_6 est (comme un premier) soit $1(6)$, soit $5(6)$; ceci lui assurera une grande richesse de couples.

On montrera en effet facilement que (comme P) G_6 possède plusieurs couples de jumeaux, cousins et sexy et avec plusieurs représentants pour toutes les valeurs de e .

2-2-1-TRIPLETS ARITHMETIQUES de G_6

Pour $e = 2(6)$, comme $p = 1(6)$ ou $5(6)$ ou 3 , on aura respectivement soit $p+e = 3(6)$ soit $p+2e = 3(6)$, et le seul triplet possible est $(3, 5, 7)$ pour $e = 2$.

Pour $e = 4(6)$, comme $p = 1(6)$ ou $5(6)$ ou 3 , on aura respectivement soit $p+2e = 3(6)$ soit $p+e = 3(6)$, et le seul triplet possible est $(3, 7, 11)$ pour $e = 4$.

Pour $e = 0(6)$, comme $p = 1(6)$ ou $5(6)$, $p+e$ et $p+2e$ sont toujours $1(6)$ ou $5(6)$, et plusieurs triplets sont possibles, si $p+e$ et $p+2e$ sont G_6 .

Ainsi, il y aura plusieurs triplets pour $e = 6$ (débutant par $p = 5, 11, 271, \dots$), $e = 24$ (débutant par $p = 13, 83, 5393, \dots$), ou $e = 36$ (débutant par $p = 11, 101, 241, \dots$), $e = 54$ (débutant par $p = 1063, 1973, 6803, \dots$), ..., mais aucun pour $e = 12, 18, 42, 72 \dots$

Pour $e = 0(30)$, il existe toujours des triplets.

Les résultats pour G_6 sont très semblables à ceux pour l'ensemble de tous les premiers P ([15], [16]).

Si l'on appelle S_6 l'application $q \rightarrow 6q+1$, on peut observer qu'il existe des chaînes d'éléments de G_6 par itération de S_6 (de type $a \rightarrow S_6(a) \rightarrow S_6(S_6(a)) \rightarrow S_6(S_6(S_6(a))) \dots$); les chaînes de 3 éléments sont $(61, 367, 2203)$, $(101, 607, 3643)$, ..., $(3250811, 19504867, 117029203)$, ..., $(6067361, 36404167, 218425003)$,...; il ne semble pas y avoir de chaînes plus longues du moins pour les valeurs numériques envisagées...

2-2-2-TRIPLETS QUELCONQUES de G_6

De nombreuses valeurs de (a,b) peuvent produire des triplets.

Pour a et b $2(6)$, $p = 3$ et les $p = 5(6)$ sont possibles.

Pour a et b $4(6)$, $p = 3$ et les $p = 1(6)$ sont possibles.

Pour $a = 2(6)$ et $b = 0(6)$ (ou l'inverse), les $p = 5(6)$ sont possibles.

Pour $a = 4(6)$ et $b = 0(6)$ (ou l'inverse), les $p = 1(6)$ sont possibles.

Pour $a = 2(6)$ et $b = 4(6)$ (ou l'inverse), seul $p = 3$ est possible.

Pour a et b $0(6)$, les $p = 1(6)$ et $p = 5(6)$ sont possibles.

Pour a et b $0(30)$, il existe toujours des triplets.

Par exemple, pour $(a, b) = (2, 14)$ on a un seul triplet $(3, 5, 17)$, pour $(4, 28)$ on a des triplets débutant par $p = 103, 1423, 5413, \dots$, pour $(2, 42)$ débutant par $p = 5, 1061, 3581, \dots$ pour $(6600, 3600030)$ débutant par $p = 577, 10867, 13577, \dots$ et pour $(4, 12)$ ou $(8, 26)$ aucun triplet.

2-3-Les PREMIERS de G_2^{-1}

Considérons l'ensemble des premiers tels que $2p-1$ soit aussi premier et appelons G_2^{-1} un tel premier (G_2^{-1} étant aussi l'ensemble de ces premiers); $G_2^{-1} = \{2, 3, 7, 19, 31, 37, 79, 97, 139, 157, 199, 211, \dots\}$.

Tout $p > 3$ de G_2^{-1} est nécessairement $1(6)$ (car avec $p = 5(6)$, $2p-1$ serait $3(6)$), et, comme pour PSG et G_4 , on aura toujours (pour $p > 3$) un écart $0(6)$ entre deux premiers de G_2^{-1} consécutifs ou pas. Comme pour G_4 , on montrera facilement qu'ici il n'existe pas de couple pour $e = 2(6)$ et en particulier pas de jumeau (puisque $p+e$ est $3(6)$ pour $p = 1(6)$ et $5(6)$ pour $p = 3$), et qu'il y a un seul

couple $(3, 3+e)$ pour $e = 4(6)$, si $3+e$ est G_4 , avec en particulier le couple cousin $(3, 7)$ pour $e = 4$ (puisque $p+e$ est $5(6)$ pour $p = 1(6)$), et plusieurs couples pour tout $e = 0(6)$.

2-3-1-TRIPLETS ARITHMETIQUES de G_2^{-1}

Comme pour PSG, on distinguera bien les triplets (ou n-uplets) arithmétiques de G_2^{-1} des chaînes de Cunningham de deuxième espèce $([3], [5])$ qui sont de la forme $(p, 2p-1, 2(2p-1)-1, \dots)$ p étant un G_2^{-1} , le dernier élément d'une telle chaîne étant un premier non G_2^{-1} .

Pour $e = 2(6)$, comme $p = 1(6)$ ou $p = 3$, $p+e = 3(6)$ et $3+2 = 5$ n'étant pas G_2^{-1} , il n'existe pas de triplet.

Pour $e = 4(6)$, comme $p = 1(6)$ ou $p = 3$, $p+2e = 3(6)$ et $3+8 = 11$ n'étant pas G_2^{-1} , il n'existe pas de triplet.

Pour $e = 0(6)$, comme $p = 1(6)$ ou $p = 3$, 3 ne convient pas mais $1(6)$ peut donner des $p+e$ et $p+2e$ qui soient G_2^{-1} , ce sera par exemple le cas pour $e = 12, 18, 30, 42 \dots$, mais pas pour $e = 6, 36, 144, 216 \dots$

Notons que pour $e = 12$, le premier triplet est $(7, 19, 31)$ et le suivant $(108517, 108529, 108541) \dots$

Pour $e = 18$, on obtient $(9091, 9109, 9127), (22111, \dots), \dots, (970201, \dots)$.

Pour $e = 0(30)$, il existe toujours des triplets.

Le comportement des premiers de G_2^{-1} est donc très semblable à celui de ceux de G_4 : comme pour G_4 et PSG pas de triplet si e n'est pas $0(6)$.

Si l'on appelle $S*2$ l'application $q \rightarrow 2q-1$, on peut observer qu'il existe des chaînes d'éléments de G_2^{-1} par itération de $S*2$ (de type $a \rightarrow S*2(a) \rightarrow S*2(S*2(a)) \rightarrow S*2(S*2(S*2(a))) \dots$); la plus petite de 3 éléments est $(2131, 4261, 8521)$, celle de 4 éléments $(1531, 3061, 6121, 12241)$, ...et la plus petite de 6 éléments débute par 16651 ...

2-3-2-TRIPLETS QUELCONQUES de G_2^{-1}

Pour a et b non $0(6)$, pas de triplet (p étant $1(6)$, $p+a$ et $p+b$ sont $3(6)$ ou $5(6)$), sauf avec $p = 3$ et a et b $4(6)$ si $p+a$ et $p+b$ sont G_2^{-1} : par exemple pour $a = 4$ et $b = 34$ on a $(3, 7, 37)$.

Pour a et b $0(6)$, $p+a$ et $p+b$ sont $1(6)$, il peut donc y avoir plusieurs triplets (pour $(a,b) = (6,18), (6,36), \dots$), mais pas pour $(a,b) = (6,12), (12,36), \dots$

Pour a et b $0(30)$, il existe toujours des triplets.

Ainsi $(a, b) = (6, 36)$ produit plusieurs triplets débutant par $p = 331, 99871, 132631, \dots$, $(a, b) = (30,90)$ des triplets débutant par $p = 7, 6121, 6271, \dots$, $(a, b) = (240, 600000030)$ des triplets débutant par $p = 28447, 47389, 58789, \dots$

3- Les SOUS-ENSEMBLES de PREMIERS PSG, G_2^{-1} , G_4 , G_6 , et quelques autres.

Pour PSG, G_2^{-1} et G_4 , avec e non $0(6)$, il n'y a jamais de triplet arithmétique (et un seul triplet quelconque pour $p = 3$), et au mieux un seul couple possible (pour $e = 2(6)$ dans PSG, pour $e = 4(6)$ dans G_2^{-1} ou G_4); avec $e = 0(6)$, on aura pour les trois ensembles plusieurs couples et, soit plusieurs triplets soit pas de triplet.

G_6 est beaucoup plus riche et se rapproche de la situation dans P ([15], [16]), avec au moins un représentant (cas des couples et des triplets) pour quasiment chaque valeur de e .

On montre très facilement que le seul premier appartenant à nos quatre sous-ensembles de P (G_2^{-1} , PSG, G_4 et G_6) est le nombre 3 (le fameux multiplicateur dans l'itération de Syracuse ou problème $3x+1$ ([17]), si différent d'un problème $kx+1$, avec k impair > 3),

$$(2) \quad \text{PSG} \cap G_2^{-1} \cap G_4 \cap G_6 = \{3\};$$

en effet un premier $p = 1(6)$ donne $3(6)$ pour $2p+1$, un $p = 5(6)$ donne $3(6)$ pour $4p+1$ et seul $p = 3$ convient, en produisant respectivement 5, 7, 13 et 19 ($p = 2$ ne convient pas, puisque $4p+1 = 9$).

On peut ajouter que par l'application de Syracuse compressée, $k \rightarrow (3k+1)/2$, 3 a pour image le premier 5, ce qui permet d'améliorer (2) en:

PROPRIETE 1

Le nombre 3 est le seul PREMIER p tel que $2p-1, 2p+1, 4p+1, 6p+1$ et $(3p+1)/2$ soient tous premiers.

En revanche, il existe une infinité d'entiers impairs $k > 3$ tels que $2k-1, 2k+1, 4k+1, 6p+1$ et $(3p+1)/2$ soient tous premiers et on peut montrer qu'ils sont tous nécessairement $0(5)$. En effet, pour $k = 1(5)$, $4k+1$ serait $0(5)$ et donc non premier; pour $k = 2(5)$, $2k+1$ serait $0(5)$; pour $k = 3(5)$, $2k-1$ serait $0(5)$ et pour $k = 4(5)$, $6k+1$ serait $0(5)$. Les plus petits de ces impairs ($k > 3$) sont: 26775, 91755, 177555,

216195, 250515, 313635,...

Donc, seuls les impairs $k = 3$ ou $k = 0(5)$ peuvent produire 5 premiers $2k-1, 2k+1, 4k+1, 6k+1, (3k+1)/2$.

On peut montrer que ces k sont, en outre, tous $3(6)$; en effet si k était $1(6)$, $2k+1$ serait $3(6)$ donc non premier, et si k était $5(6)$, $2k-1$ serait $3(6)$, donc k est $3(6)$.

Il faut donc être au moins $3(6)$ pour pouvoir produire les 5 premiers indiqués plus haut.

Par exemple, 26775 (le plus petit > 3 de la liste précédente) produit respectivement les premiers 53549, 53551, 107101, 160651 et 40163.

On pourra ranger 3 dans la famille des nombres remarquables ([18]) même s'il n'est pas associé à une transformation agréable a priori (tant que la conjecture de Syracuse n'est pas démontrée ...). Comme pour les chaînes de Cunningham généralisées, on peut systématiser les variantes des PSG et envisager des liaisons $ap + b$, avec a et b premiers entre eux pour traiter des G_a^b .

Par exemple la liaison $6p-5$ définit G_6^{-5} . On peut montrer que $G_6^{-5} = \{2, 3, 7, 11, 13, 17, 19, 31, 41, \dots\}$ et que tous ses éléments, en dehors de 2 et 3, sont soit $1(6)$, soit $5(6)$ (comme les P). Par ailleurs, 3 appartient à G_6^{-5} et a pour image 13 par l'application $k \rightarrow 6k-5$, et donc la propriété 1 devient: 3 est le seul premier tel que $2p-1, 2p+1, 4p+1, 6p+1, 3p+1/2$ et $6p-5$ soient tous premiers, et même le seul impair puisque pour $p = 0(5)$, $6p-5$ est aussi $0(5)$ et donc n'est pas premier:

PROPRIETE 2

Le nombre 3 est le seul IMPAIR k tel que $2k-1, 2k+1, 4k+1, 6k+1, 3k+1/2$ et $6k-5$ soient tous premiers.

Ajoutons que tous les ensembles de type G ne contiennent pas nécessairement 3, comme par exemple G_8, G_{16} ou G_{12}^{-1} , alors que nos 5 ensembles précédents mais aussi, par exemple G_{10}, G_{12} ou G_4^{-1} le contiennent, ce qui permettrait d'élargir encore la propriété 1 ...

On peut montrer qu'en particulier G_8 ($p = 2$ ou $5(6)$) et G_6^{-5} ($p = 2, 3$ ou $1(6)$ ou $5(6)$) sont assez riches en couples et n-uplets et que leurs raretés dans $[2, 10^9]$ sont respectivement: $R_{G_8} = 1,089777$ et $R_{G_6^{-5}} = 1,876961$.

Ces ensembles possèdent aussi des n-chaînes. Pour G_8 , avec l'application $q \rightarrow 8q+1$ on a, par exemple, des 5-chaînes qui débutent par $p = 831167, 1154567, 2502767, \dots$; pour G_6^{-5} avec l'application $q \rightarrow 6q-5$, il y a, en particulier, des 7-chaînes qui débutent par $p = 456553, 4349687, 23463331, \dots$

On peut envisager de nombreux sous-ensembles G_a^b de P dans lesquels il existera divers n-uplets et n-chaînes ...

Dans la famille de ceux qui vérifient $b = 1$, notés G_a , on pourra distinguer les cas $a = 0(6), 2(6)$ et $4(6)$.

Les $G_2(6)$ se comportent comme PSG (= G_2), avec des $p > 3$ qui sont nécessairement $5(6)$ et possèdent des n-uplets pour des e au moins $0(6)$ et des n-chaînes; ces $G_2(6)$ peuvent être considérés comme des ensembles de nombres premiers de Sophie Germain généralisés.

Les $G_0(6)$ (avec des $p > 3$ qui sont $1(6)$ ou $5(6)$) sont beaucoup plus riches (voir G_6), se rapprochent de la situation dans P et possèdent aussi des n-chaînes.

La famille des $G_4(6)$ (avec des $p > 3$ qui sont uniquement $1(6)$) est plus pauvre et on peut montrer, en particulier, que les $G_4(6)$ possèdent au plus une unique n-chaîne pour la seule valeur $n = 2$; en effet $ap+1$ est toujours $5(6)$ sauf si $p = 3$ et $3a+1 \in G_4(6)$. Ainsi on a, par exemple, (3, 13) pour G_4 , (3, 31) pour G_{10} , mais aucune chaîne pour G_{16} ou G_{34} ...

CONCLUSION

L'ensemble des nombres premiers de Sophie Germain PSG possède plusieurs couples et peut posséder des triplets (arithmétiques ou non) dès que les écarts (e ou a et b) sont $0(6)$, et il a toujours des triplets dès que les écarts sont $0(30)$.

Pour e non $0(6)$, il existe au mieux le seul couple (3, $3+e$) si $3+e$ est un PSG (et sinon aucun), et il n'y a aucun triplet arithmétique. Pour a et b non $0(6)$, il existe au mieux le triplet (3, $3+a, 3+b$) si $3+a$ et $3+b$ sont des PSG (et sinon aucun). On pourra comparer avec les résultats dans P ([15], [16]) et noter que dans le sous-ensemble PSG de P la liaison $2p+1$ diminue certes le nombre de n-uplets mais il reste encore un grand nombre d'écarts qui conduisent à plusieurs représentants. On

retrouve aussi le rôle important des primorielles 3#, 5# et au-delà (7# pour les quadruplets de PSG). D'autres ensembles de premiers sont considérés en utilisant une liaison $ap+b$ (en place de $2p+1$), avec a et b premiers entre eux, et permettent en particulier d'établir une propriété du nombre premier 3 puis une de l'entier impair 3.

Pour les ensembles PSG, G_2^{-1} et G_4 , avec un écart e non $0(6)$, il y a au mieux dans quelques cas un seul couple possible mais jamais de triplet arithmétique et il faut $e = 0(6)$ pour que plusieurs représentants soient possibles; pour a et b non $0(6)$, il existe au mieux un triplet quelconque débutant par $p = 3$. G_6 est beaucoup plus riche et se rapproche de la situation dans P ([15], [16]), avec au moins un représentant (cas des couples et des triplets arithmétiques) pour quasiment chaque valeur de e .

(SG) RAPPELS HISTORIQUES ([1], [9]): de Fermat (1630) à Wiles (1994) en passant par Sophie Germain (1825).

Énonçons deux résultats de SOPHIE GERMAIN (1776-1831) en liaison avec ses PSG:

-Théorèmes de Sophie Germain:

T1- Si p impair et $2p + 1$ sont premiers, x , y et z étant des entiers,

alors $x^p + y^p = z^p$ implique que xyz est divisible par p .

T2- Si p impair et $2p + 1$ sont premiers (soit p est PSG),

l'équation $x^p + y^p = z^p$ n'admet aucune solution si xyz n'est pas divisible par p .

Ces résultats (on est en 1825) donnaient une résolution partielle de la conjecture de Fermat (1621), qui depuis est devenue le théorème de Fermat-Wiles ([9]) en 1994, pour tout entier $p > 2$.

Pour compléter, citons les nombres de Queneau (RQ) qui sont des entiers n tels que $2n+1$ soit premier ([19], [20]), pour observer que tout PSG est un nombre de Queneau (mais bien sûr pas réciproquement).

Rappelons aussi un autre beau résultat de Sophie Germain.

Pour tout couple (m, n) d'entiers > 1 , $n^4 + 4m^4$ n'est pas un nombre premier.

Il suffit de remarquer que $n^4 + 4m^4 = (n^2+2m^2+2mn)(n^2+2m^2-2mn)$.

(AC) ALLAN CUNNINGHAM (1842-1928) est à l'origine du projet Cunningham (débuté en 1925) qui avait pour objectif de donner la décomposition en produit de facteurs premiers de grands nombres, comme par exemple $a^n \pm 1$ pour $a=2,3,\dots,12$ et de grands exposants n , les nombres de cette forme étant appelés des nombres de Cunningham. Les chaînes de Cunningham sont utilisées en cryptographie, en particulier pour le chiffrement à clé publique et surtout dans les cas où il est difficile de calculer avec des logarithmes discrets; elles constituent des preuves de travail tout à fait comparables aux fonctions à sens unique. Le record de longueur de telles chaînes est régulièrement amélioré.

(RQ) RAYMOND QUENEAU (1903-1976) est l'un des fondateurs du mouvement Oulipo (ouvroir de littérature potentielle) en 1960. Il s'agit d'un groupe de recherche en littérature expérimentale qui veut appliquer à la littérature la rigueur et les techniques des mathématiques ([19]), pour en particulier inventer de nouvelles règles de composition poétique, ou mieux analyser des anciennes comme la sextine de A. Daniel datant du Moyen Âge qui fait intervenir dans ses mots rimes une permutation d'ordre 6 qui est un cycle d'ordre 6; le nombre 6 est un nombre de Queneau ([20]) puisque $2*6+1=13$ est premier ...

(*) Professeur honoraire Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Webmaster du site SAYRAC.

REFERENCES

[1] R.Laubenbacher, D.Pengelly, Voici ce que j'ai trouvé: Sophie Germain's grand plan to prove Fermat's Last Theorem, *Historia Mathematica*, Volume 37, Issue 4, Pages 641-692,

[arXiv:0801.1809](https://arxiv.org/abs/0801.1809), 2010.

[2] de Polignac A., *Recherches nouvelles sur les nombres premiers*, CRAc.Sc.Paris, t.29, p.397-401, 1849.

- [3] A. Cunningham, On hyper-even numbers and on Fermat's numbers, Proc. Lond. Math. Soc., series 2, 5, pp.237-274, 1907.
- [4] Vigo Brun, La série $1/5+1/7+1/11+1/13+1/17+1/19+1/29+1/31+1/41+1/43+1/59+1/61+\dots$, où les dénominateurs sont nombres premiers jumeaux est convergente ou finie, Bulletin des Sciences Mathématiques Vol. 43 : p.100-104, et p.124-128, 1919.
- [5] D.H. Lehmer, On certain chains of primes, Proc. Lond. Math. Soc., series 3, 14a, 183--186, 1965.
- [6] R.K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [7] E. Bombieri, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec, Primes in arithmetic progressions to large moduli, Acta Math. 156, 203–251, 1986.
- [8] G.Löh, Long chains of nearly doubled primes, Math. Comp., 53, 751-759, 1989.
- [9] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, Annals of Mathematics. 141 (3): 443–551, 1995.
- [10] Ben J. Green et Terence Tao, The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions, Annals of Mathematics, vol. 167, p. 481-547 ([arXiv math.NT/0404188](https://arxiv.org/abs/math.NT/0404188)), 2008.
- [11] D. A. Goldston, J. Pintz, and C. Y. Yildirim, Primes in tuples I, Ann. Math. 170, 819–862, 2009.
- [12] Yitang Zhang, Bounded gaps between primes, Annals of Mathematics, 179 :1121–1174, 2014.
- [13] James Maynard, Small gaps between primes, Annals of Mathematics, 181 :383–413, 2015.
- [14] A. Granville, Primes in intervals of bounded length, Bull. Amer. Math. Soc. 52, 171–222, 2015.
- [15] R.L.Clerc, Sous-ensembles et constellations arithmétiques de nombres premiers, p.1-10, (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03589472>), 2022.
- [16] R.L.Clerc, Constellations quelconques de nombres premiers, p.1-11, (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03606289>), 2022.
- [17] Terence Tao, Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values, p.1-58, [arXiv:1909.03562](https://arxiv.org/abs/1909.03562), 2022.
- [18] R.L.Clerc, Les transformations agréables et une nouvelle classe de nombres narcissiques parfaits, p.1-17, (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03619147>), 2022.
- [19] V.Vallet, Entre mathématiques et littérature: les nombres de Queneau (https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/L_Ouvert/n118/o_118_19-37.pdf), 2010.
- [20] M. Audin, Poésies, spirales et battements de cartes (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00598759>), 2011.
-