



HAL
open science

Sur la trivialité de certains modules d'Iwasawa

Jean-François Jaulent

► **To cite this version:**

Jean-François Jaulent. Sur la trivialité de certains modules d'Iwasawa. *Fonctions et Approximations*, A paraître, 10.7169/facm/2092 . hal-03704436v2

HAL Id: hal-03704436

<https://hal.science/hal-03704436v2>

Submitted on 17 Aug 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la trivialité de certains modules d'Iwasawa

Jean-François JAULENT

Résumé. Nous étudions la trivialité de certains modules d'Iwasawa classiques en liaison avec la notion de ℓ -rationalité pour les corps de nombres totalement ℓ -adiques.

Abstract. We discuss the triviality of some classical Iwasawa modules in connection with the notion of ℓ -rationality for totally ℓ -adic number fields.

Mathematics Subject Classification : Primary 11R23 ; Secondary 11R37.

Keywords : Iwasawa modules, rational fields, genus theory, Greenberg conjecture

Table des matières

Introduction et définitions de base	1
1 Trivialité dans la tour cyclotomique	3
2 Trivialité dans le compositum des \mathbb{Z}_ℓ-extensions	4
3 Exemple des corps quadratiques totalement ℓ-adiques	5
Appendice : Groupe des nœuds, quotient des genres et classes centrales	6
Bibliographie	6

Introduction et définitions de base

Plusieurs des conjectures classiques sur les corps de nombres reviennent à postuler, sous certaines hypothèses, la finitude (ou la pseudo-nullité) d'un module d'Iwasawa convenable.

La *conjecture de Greenberg* (cf. [10, 11]) affirme ainsi que, si K est un corps de nombres totalement réel qui vérifie la conjecture de Leopoldt pour le nombre premier ℓ (autrement dit qui admet une unique \mathbb{Z}_ℓ -extension $K_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$), la limite projective $\mathcal{C}_{K_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}_{K_n}$ des ℓ -groupes de classes d'idéaux attachés aux divers étages de la tour K_∞/K est un groupe fini. Et, sous sa forme généralisée, elle affirme que, si K est un corps de nombres arbitraire vérifiant la conjecture de Leopoldt pour le premier ℓ , i.e. admettant exactement $d = c_K + 1$ \mathbb{Z}_ℓ -extensions linéairement indépendantes (où c_K désigne le nombre de places complexes de K), la même limite projective $\mathcal{C}_{\bar{K}}$ prise dans le compositum \bar{K} de ces \mathbb{Z}_ℓ -extensions est un module pseudo-nul sur l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda_d = \mathbb{Z}_\ell[[\text{Gal}(\bar{K}/K)]] \simeq \mathbb{Z}_\ell[[T_1, \dots, T_d]]$.

Or, plus généralement encore, on a :

Lemme 1. *Tout corps de nombres K ayant exactement r_K places réelles et c_K places complexes possède une pro- ℓ -extension abélienne canonique Z de groupe de Galois $\text{Gal}(Z/K) \simeq \mathbb{Z}_\ell^{c_K+1}$.*

Preuve. Sous la conjecture de Leopoldt, Z est simplement le compositum des \mathbb{Z}_ℓ -extensions. Mais, indépendamment de toute conjecture, on peut caractériser Z comme suit : soient K_∞ la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique de K , puis $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$ le groupe procyclique $\text{Gal}(K_\infty/K)$ et M_∞ la pro- ℓ -extension abélienne ℓ -ramifiée maximale de K_∞ . Soit alors \mathcal{T}_∞ le sous-module de Λ -torsion du groupe de Galois $\mathcal{X}_\infty = \text{Gal}(M_\infty/K_\infty)$. On sait par la théorie d'Iwasawa (cf. e.g. [28]) que le quotient $\mathcal{X}_\infty/\mathcal{T}_\infty$ s'injecte avec un indice fini dans un Λ -module libre de dimension c_K . Alors Z est

le sous-corps de M_∞ fixé par la racine dans \mathcal{X}_∞ du sous-module $\mathcal{T}_\infty \mathcal{X}_\infty^{\gamma-1}$. En d'autres termes, Z est le compositum des \mathbb{Z}_ℓ -extensions de K contenues dans le sous-corps de M_∞ fixé par $\mathcal{T}_\infty \mathcal{X}_\infty^{\gamma-1}$.

On peut ainsi étendre inconditionnellement la conjecture de Greenberg en postulant :

Conjecture 2 (Conjecture de Greenberg étendue). *Soient K un corps de nombres arbitraire ayant r_K places réelles et c_K places complexes, Z sa pro- ℓ -extension abélienne canonique de groupe de Galois $\text{Gal}(Z/K) \simeq \mathbb{Z}_\ell^{c_K+1}$ et $\mathcal{C}_Z = \varprojlim \mathcal{C}_L$ la limite projective (pour les applications normes) des ℓ -groupes de classes d'idéaux attachés aux sous-corps L de Z de degré fini sur K . Le groupe \mathcal{C}_Z est alors pseudo-nul comme module sur l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_\ell[[\text{Gal}(Z/K)]] \simeq \Lambda_{c_K+1}$.*

Le but de cette note est d'étudier la trivialité du module \mathcal{C}_Z , lorsque le corps K est *totale*ment ℓ -adique au sens de [16], i.e. lorsque ses complétés aux places au-dessus de ℓ sont tous de degré 1 :

Définition 3. *Étant donné un nombre premier ℓ , un corps de nombres K est dit totale*ment ℓ -adique lorsque ses complétés aux places au-dessus de ℓ sont tous de degré 1 sur \mathbb{Q}_ℓ , autrement dit lorsque la place ℓ est complètement décomposée dans l'extension K/\mathbb{Q} .

L'intérêt de cette restriction est le lemme de ramification suivant, plus ou moins bien connu, qui joue un rôle essentiel dans notre étude en excluant toute ramification abélienne sauvage au-dessus de la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique d'un tel corps :

Lemme 4. *Soient ℓ un nombre premier impair, K un corps de nombres totale*ment ℓ -adique, K_∞ sa \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique et N_∞ une pro- ℓ -extension de K_∞ . Si N_∞ est localement abélienne sur K aux places au-dessus de ℓ (par exemple si N_∞ est une pro- ℓ -extension abélienne de K), elle est modérément ramifiée sur K_∞ (i.e. non-ramifiée aux places au-dessus de ℓ).

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la théorie ℓ -adique du corps de classes (cf. e.g. [15], §2.1) : le groupe de Galois de la pro- ℓ -extension abélienne maximale de \mathbb{Q}_ℓ s'identifie à la limite projective $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_\ell} = \varprojlim \mathbb{Q}_\ell^\times / \mathbb{Q}_\ell^{\times \ell^n} = (1 + \ell)^{\mathbb{Z}_\ell} \ell^{\mathbb{Z}_\ell}$ et le sous-groupe d'inertie au groupe procyclique $(1 + \ell)^{\mathbb{Z}_\ell}$. Les places au-dessus de ℓ étant totalement ramifiées dans la tour K_∞/K , elles ne peuvent plus se ramifier dans N_∞/K_∞ dès lors que N_∞ est localement abélienne sur K .

Les deux résultats principaux de cette étude (Th. 6, dans le cas totalement réel ; Th. 10, dans le cas CM) mettent en avant la ℓ -rationalité. Rappelons ce dont il s'agit :

Définition 5. *Un corps de nombres K possédant exacte*ment c_K places complexes est dit ℓ -rationnel pour un nombre premier arbitraire ℓ lorsque le groupe de Galois $\text{Gal}(M/K)$ de sa pro- ℓ -extension abélienne ℓ -ramifiée ∞ -décomposée (i.e. non-ramifiée en dehors de ℓ et complètement décomposée aux places à l'infini) maximale M est un \mathbb{Z}_ℓ -module libre de dimension $c_K + 1$.

La notion de ℓ -rationalité d'un corps de nombres K , déjà rencontrée par I.R. Shafarevich dans [26], a été formellement introduite par A. Movahhedi dans [21]¹ et étudiée en collaboration avec T. Nguyen Quang Do dans [22] parallèlement à la notion voisine de ℓ -régularité introduite par G. Gras et l'auteur dans [9] suite aux travaux de [5]. Les deux notions coïncident lorsque K contient le sous-corps réel du corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta_\ell]$ et donnent lieu au même théorème de montée (cf. [20] pour une synthèse des deux points de vue ou [6] pour plus de détails).

Le théorème de Chebotarev permet ainsi de construire étage par étage des pro- ℓ -tours infinies de corps ℓ -rationnels en imposant à chaque étape la primitivité de la ramification modérée.

Dans le cas CM, intervient également la notion de corps logarithmiquement principal (pour le premier donné ℓ). Le ℓ -groupe des classes logarithmiques $\tilde{\mathcal{C}}_K$ a été introduit dans [14] et son calcul effectif, aujourd'hui implanté directement dans PARI, est exposé dans [1] et [3]. Il se présente comme un analogue du ℓ -groupe des classes au sens ordinaire et sa finitude est équivalente à la conjecture de Gross-Kuz'min (cf. e.g. [6, 14, 15, 17]).

Remarque. Les corps K qui vérifient simultanément la conjecture de Leopoldt et celle de Gross-Kuz'min satisfont plus généralement la conjecture cyclotomique exposée dans [19].

1. En fait, dans sa thèse de doctorat, *Sur les p -extensions des corps p -rationnels*, Paris (1988).

1 Trivialité dans la tour cyclotomique

Intéressons-nous pour commencer au module d'Iwasawa classique attaché à la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique d'un corps de nombres.

Théorème 6. *Soient ℓ un nombre premier impair, K un corps de nombres totalement ℓ -adique, $K_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ sa \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique et $\mathcal{C}_{K_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}_{K_n}$ la limite projective (pour la norme) des ℓ -groupes de classes d'idéaux attachés aux divers étages de la tour K_∞/K .*

On a alors $\mathcal{C}_{K_\infty} = 1$ si et seulement si le corps K est ℓ -rationnel et totalement réel, auquel cas il vérifie banalement les conjectures de Greenberg, de Leopoldt et de Gross-Kuz'min.

Preuve. Conformément au Lemme 4, le corps K étant pris totalement ℓ -adique, sa pro- ℓ -extension abélienne ℓ -ramifiée maximale M est non-ramifiée sur K_∞ .

L'égalité $\mathcal{C}_{K_\infty} = 1$ entraîne donc $M = K_\infty$. Ainsi K_∞ est alors l'unique \mathbb{Z}_ℓ -extension de K , de sorte que K est totalement réel et vérifie la conjecture de Leopoldt (donc aussi celle de Gross-Kuz'min). Enfin la trivialité de $\text{Gal}(M/K_\infty)$ traduit précisément la ℓ -rationalité de K .

Inversement, si K est totalement réel et ℓ -rationnel, on a $M = K_\infty$; et, plus généralement, $M_n = K_\infty$ si M_n désigne la pro- ℓ -extension abélienne ℓ -ramifiée de K_n , puisque chacun des K_n est encore totalement réel et ℓ -rationnel en vertu du théorème de propagation de la ℓ -rationalité donné dans [6, 9, 20, 21, 22]. Or, la \mathbb{Z}_ℓ -extension K_∞/K étant totalement ramifiée (puisque K est pris totalement ℓ -adique), pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ le ℓ -corps de classes de Hilbert H_n de K_n est linéairement disjoint de K_∞ sur K_n et on a donc : $\mathcal{C}_{K_n} \simeq \text{Gal}(H_n/K_n) \simeq \text{Gal}(K_\infty H_n/K_\infty) = 1$, puisque $K_\infty H_n$ est contenu dans M_n . D'où l'égalité : $\mathcal{C}_{K_\infty} = 1$.

Remarque. Dans [7] G. Gras a montré que la condition $\mathcal{C}_{K_\infty} = 1$, qui affirme de façon générale la trivialité des ℓ -groupes de classes \mathcal{C}_{K_n} des étages finis K_n de la tour cyclotomique K_∞/K pour tout n assez grand, est vérifiée dès lors qu'elle a lieu pour $n = 1$, sous réserve que les places au-dessus de ℓ soient totalement ramifiées dans la tour, auquel cas elle a lieu pour tout $n \geq 1$. En particulier, la condition $\mathcal{C}_{K_\infty} = 1$, qui équivaut alors à l'égalité $\mathcal{C}_{K_1} = 1$, se lit de ce fait dans K_1 .

Le Théorème 6 ci-dessus montre que, sous la condition plus forte de complète décomposition de ℓ dans K/\mathbb{Q} , elle se lit directement dans K .

Le théorème de propagation de la ℓ -rationalité par ℓ -extension fournit alors un critère nécessaire et suffisant de propagation de la condition de trivialité $\mathcal{C}_{K_\infty} = 1$ par ℓ -extension ℓ -décomposée :

Corollaire 7. *Soit L/K une ℓ -extension de corps totalement ℓ -adiques, $K_\infty = \bigcup K_n$ et $L_\infty = \bigcup L_n$ leurs \mathbb{Z}_ℓ -extensions cyclotomiques respectives. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

- (i) *Le groupe de Galois $\mathcal{C}_{L_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}_{L_n}$ est trivial.*
- (ii) *Le groupe $\mathcal{C}_{K_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}_{K_n}$ est trivial et l'extension L/K est primitivement ramifiée.*

Preuve. C'est la transposition directe, via le Théorème 6, du théorème de propagation donné dans [9, 21, 20] et [6]. Rappelons qu'une ℓ -extension L/K est dite *primitivement ramifiée* lorsque les logarithmes de Gras (i.e. les images dans le groupe de Galois $\text{Gal}(Z/K)$ du compositum Z des \mathbb{Z}_ℓ -extensions de K) des places *modérément* ramifiées dans L/K peuvent être complétées en une \mathbb{Z}_ℓ -base de $\text{Gal}(Z/K)$.

Scolie 8. *Sous les hypothèses du Théorème 6, soit $\mathcal{C}'_{K_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}'_{K_n}$ la limite projective (pour la norme) des ℓ -groupes de ℓ -classes des corps K_n (i.e. des quotients respectifs des ℓ -groupes \mathcal{C}_{K_n} par leurs sous-groupes engendrés par les classes des idéaux au-dessus de ℓ).*

On a alors $\mathcal{C}'_{K_\infty} = 1$ si et seulement si le corps K est logarithmiquement principal : $\tilde{\mathcal{C}}_K = 1$.

Preuve. En effet, le ℓ -groupe des classes logarithmiques $\tilde{\mathcal{C}}_K$ s'interprète par la théorie ℓ -adique du corps de classes comme groupe de Galois $\text{Gal}(K^{\text{lc}}/K_\infty)$ attaché à la pro- ℓ -extension abélienne de K localement cyclotomique (i.e. complètement décomposée sur K_∞ en chaque place) maximale K^{lc} . Or, celui-ci n'est autre que le quotient des genres ${}^\Gamma \mathcal{C}'_{K_\infty}$ de \mathcal{C}'_{K_∞} relativement au groupe procyclique $\Gamma = \text{Gal}(K_\infty/K)$ (cf. [14, 15] ou [6]).

2 Trivialité dans le compositum des \mathbb{Z}_ℓ -extensions

Soit maintenant K un corps totalement ℓ -adique de degré $2c_K$, extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps K^+ totalement réel. Notons M^+ la pro- ℓ -extension abélienne ℓ -ramifiée maximale de K^+ et Z la $\mathbb{Z}_\ell^{c_K+1}$ -extension canonique de K (cf. Lemme 1).

Rappelons que, ℓ étant impair, si $\bar{\tau}$ désigne la conjugaison complexe, tout $\mathbb{Z}_\ell[\langle\bar{\tau}\rangle]$ -module \mathcal{X} est somme directe de ses composantes réelle et imaginaire $\mathcal{X}^\pm = \mathcal{X}^{e_\pm}$, avec $e_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \bar{\tau})$. Ainsi :

Lemme 9. *Le $\mathbb{Z}_\ell[\langle\bar{\tau}\rangle]$ -module imaginaire $\mathcal{D}_{K_\infty}^{[\ell]-}$ construit sur les idéaux premiers de K_∞ au-dessus de ℓ est un \mathbb{Q}_ℓ -espace de dimension c_K . Et le sous-module $\mathcal{P}_{K_\infty}^{[\ell]-}$ construit sur les idéaux principaux est un \mathbb{Z}_ℓ -module libre de même dimension. Il suit : $\mathcal{C}_{K_\infty}^{[\ell]-} \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{c_K}$.*

Preuve. Ce résultat est essentiellement bien connu : D'un côté les idéaux premiers au-dessus de ℓ étant totalement ramifiés dans la tour cyclotomique, on a : $\mathcal{D}_{K_n}^{[\ell]-} = (\mathcal{D}_K^{[\ell]-})^{\ell^{-n}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; d'où, à la limite : $\mathcal{D}_{K_\infty}^{[\ell]-} \simeq \mathbb{Q}_\ell^{c_K}$. D'un autre côté, les ℓ -unités imaginaires de K_∞ provenant directement de K , on a, en revanche $\mathcal{P}_{K_n}^{[\ell]-} = \mathcal{P}_K^{[\ell]-} \simeq \mathbb{Z}_\ell^{c_K}$. D'où : $\mathcal{C}_{K_n}^{[\ell]-} = \mathcal{D}_{K_n}^{[\ell]-}/\mathcal{P}_{K_n}^{[\ell]-} \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{c_K}$.

Théorème 10. *Soient ℓ un nombre premier impair, K un corps de nombres totalement ℓ -adique, extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps K^+ totalement réel et Z la $\mathbb{Z}_\ell^{c_K+1}$ -extension canonique de K . Si le groupe de Galois $\mathcal{C}_Z = \text{Gal}(H_Z/Z)$ de la pro- ℓ -extension abélienne non-ramifiée maximale H_Z de Z est trivial, on a les conséquences suivantes :*

- (i) *Le corps réel K^+ est ℓ -rationnel et au plus de degré 3.*
- (ii) *Le ℓ -groupe des classes logarithmiques de K est trivial : $\tilde{\mathcal{C}}_K = 1$.*

Preuve. Supposons $\mathcal{C}_Z = 1$, introduisons la pro- ℓ -extension non-ramifiée maximale \bar{H}_Z de Z et notons \mathcal{G}_Z son groupe de Galois. Son abélianisé \mathcal{C}_Z étant trivial par hypothèse, il en va de même de \mathcal{G}_Z . Ainsi \bar{H}_Z coïncide avec Z . Or, Z étant non-ramifiée sur la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique K_∞ de K en vertu du Lemme 4, par construction \bar{H}_Z est encore la pro- ℓ -extension non-ramifiée maximale de K_∞ . En fin de compte Z est donc la réunion $H_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ des ℓ -corps de classes de Hilbert respectifs des étages finis K_n de la tour K_∞ . Il suit : $\mathcal{C}_{K_\infty} = \text{Gal}(H_\infty/K_\infty) = \text{Gal}(Z/K_\infty)$.

Le groupe de Galois $\text{Gal}(Z/K_\infty)$ étant imaginaire, prenant les composantes réelles, on conclut : $\mathcal{C}_{K_\infty}^+ = \mathcal{C}_{K_\infty}^+ = 1$; et K^+ est ℓ -rationnel en vertu de Théorème 6. Il suit : $\tilde{\mathcal{C}}_K^+ = \tilde{\mathcal{C}}_{K^+} = 1$.

Regardons maintenant les composantes imaginaires. Par surjectivité de la norme $\mathcal{C}_{K_n} \rightarrow \mathcal{C}_{K_\infty}$, nous avons $\text{rg}_\ell \mathcal{C}_{K_n}^- \leq c_K$ pour tout $n \geq 1$, donc $\text{rg}_\ell \mathcal{C}_{K_n}^- = c_K$ pour $n \geq 1$, en vertu du Lemme. Il en résulte que $\mathcal{C}_{K_n}^- \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{c_K}$ est engendré par les classes des idéaux au-dessus de ℓ .

En particulier le ℓ -groupe des ℓ -classes $\mathcal{C}'_{K_n}^-$ est trivial; et, comme il n'y a pas de capitulation pour les ℓ -classes dans la tour puisque les ℓ -unités imaginaires sont contenues dans K , ce résultat vaut à tous les étages finis : $\mathcal{C}'_{K_n}^- = 1$. On conclut : $\mathcal{C}'_{K_\infty}^- = \varprojlim \mathcal{C}'_{K_n}^- = 1$; puis : $\tilde{\mathcal{C}}_K^- = 1$.

Intéressons-nous enfin aux groupes des nœuds respectifs \mathcal{K}_n des ℓ -extensions abéliennes H_n/K_n (cf. DProp. 14 infra). D'après ce qui précède, les ℓ -corps de classes de Hilbert respectifs H'_n des corps H_n sont tous contenus dans $H_\infty = Z$. Ils sont donc abéliens sur K et l'on a identiquement $H'_n = H_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Il suit de là que les ℓ -corps des classes centrales H_{H_n/K_n}^{cen} comme les ℓ -corps des genres H_{H_n/K_n}^{gen} coïncident avec les H_n ; de sorte que dans la suite exacte (i) de la Proposition 14 le terme de droite $\text{Gal}(H_{H_n/K_n}^{\text{cen}}/H_{H_n/K_n}^{\text{gen}})$ est trivial; d'où par (ii) l'isomorphisme :

$$E_{K_n}/E_{K_n} \cap N_{H_n/K_n}(H_n^\times) \simeq \mathcal{K}_n \simeq \mathcal{C}_{K_n} \wedge \mathcal{C}_{K_n},$$

puisque l'on a ici : $\text{Gal}(H_n/K_n) \simeq \mathcal{C}_{K_n}$ via le corps de classes. Prenant alors les limites projectives pour les applications normes dans la tour cyclotomique K_∞/K , on obtient tout comme dans [4], Lem. 3.9, un morphisme surjectif de $\tilde{\mathcal{E}}_{K_\infty} = \varprojlim E_{K_n}$ sur $\mathcal{C}_{K_\infty} \wedge \mathcal{C}_{K_\infty}$ qui se factorise modulo $\tilde{\mathcal{E}}_{K_\infty}^{\gamma^{-1}}$, puisque \mathcal{C}_{K_∞} (et donc son carré alterné) est invariant par $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell} = \text{Gal}(K_\infty/K)$.

Or, $\tilde{\mathcal{E}}_{K_\infty}^{\gamma^{-1}}/\tilde{\mathcal{E}}_{K_\infty}^{\gamma^{-1}}$ est un \mathbb{Z}_ℓ -module de rang essentiel c_K (cf. e.g. [4] §3); et $\mathcal{C}_{K_\infty} \wedge \mathcal{C}_{K_\infty}$ est \mathbb{Z}_ℓ -libre de dimension $\frac{1}{2}c_K(c_K - 1)$, puisque $\mathcal{C}_{K_\infty} \simeq \text{Gal}(Z/K_\infty)$ est \mathbb{Z}_ℓ -libre de dimension c_K . Il suit :

$$c_K \geq \frac{1}{2}c_K(c_K - 1), \text{ i.e. } [K^+ : \mathbb{Q}] = c_K \leq 3, \text{ comme annoncé.}$$

3 Exemple des corps quadratiques totalement ℓ -adiques

Pour illustrer les résultats précédents, regardons plus attentivement le cas non-trivial le plus simple : celui des corps quadratiques totalement ℓ -adiques.

Partons donc d'un corps quadratique $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, notons $G = \{1, \tau\}$ le groupe $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$, prenons un nombre premier impair ℓ complètement décomposé dans K ; écrivons $(\ell) = \mathfrak{l}'$ dans K et, plus généralement $(\ell) = \mathfrak{l}_n \mathfrak{l}'_n$ à chaque étage fini K_n de la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique K_n ; notons M la pro- ℓ -extension abélienne ℓ -ramifiée et Z le compositum des \mathbb{Z}_ℓ -extensions de K , puis $\mathcal{T}_K = \text{Gal}(M/Z)$ et \mathcal{C}_Z la limite projective des ℓ -groupes \mathcal{C}_L pour L/K de degré fini dans Z/K .

Écrivons $\mathcal{U}_{K_\ell} = \mathcal{U}_{K_i} \mathcal{U}_{K_{i'}}$ le groupe des unités semi-locales attaché aux places ℓ -adiques, puis $\tilde{\mathcal{U}}_{K_\ell} = \tilde{\mathcal{U}}_{K_i} \tilde{\mathcal{U}}_{K_{i'}}$, son analogue logarithmique, \mathcal{E}_K et $\tilde{\mathcal{E}}_K$ les groupes d'unités globales correspondants. Notons enfin $\mathcal{U}_{K_\ell}^* = \mathcal{U}_{K_\ell}^{1-\tau}$ le noyau de la norme dans \mathcal{U}_{K_ℓ} . Avec ces notations :

Proposition 11. *Pour K quadratique réel totalement ℓ -adique, il y a équivalence entre :*

- (i) *Le pro- ℓ -groupe $\mathcal{C}_Z = \mathcal{C}_{K_\infty}$ est trivial : $\mathcal{C}_Z = 1$.*
- (ii) *Le corps K est ℓ -rationnel : $\mathcal{T}_K = 1$.*
- (iii) *On a $\mathcal{C}_K = 1$ et l'application de semi-localisation envoie \mathcal{E}_K sur $\mathcal{U}_{K_\ell}^*$.*
- (iv) *On a $\tilde{\mathcal{C}}_K = 1$ et l'application de semi-localisation envoie $\tilde{\mathcal{E}}_K$ sur $\tilde{\mathcal{U}}_{K_\ell}$.*

Preuve. Le corps quadratique réel K admettant pour unique \mathbb{Z}_ℓ -extension $Z = K_\infty$, le Théorème 6 nous assure l'équivalence des deux premières assertions. Il reste simplement à vérifier que la trivialité de \mathcal{T}_K se lit sur les groupes de classes et d'unités au sens ordinaire comme logarithmique.

Or, d'un côté le ℓ -corps de classes de Hilbert H de K est linéairement disjoint de K_∞ , puisque K_∞/K est ici totalement ramifiée, de sorte qu'on a : $\mathcal{C}_K \simeq \text{Gal}(H/K) \simeq \text{Gal}(HK_\infty/K_\infty)$. De façon semblable, le ℓ -groupe des classes logarithmiques vérifie : $\tilde{\mathcal{C}}_K \simeq \text{Gal}(K^{\text{lc}}/K_\infty)$, où K^{lc} désigne la pro- ℓ -extension abélienne localement cyclotomique maximale de K . Ainsi, comme HK_∞ et K^{lc} sont toutes deux contenues dans M , on a l'implication : $\mathcal{T}_K = 1 \Rightarrow \mathcal{C}_K = 1$ et $\tilde{\mathcal{C}}_K = 1$.

D'un autre côté, la théorie ℓ -adique du corps de classes (cf. [15] et, plus spécifiquement, [18] §2.3) nous donne ici les isomorphismes $\text{Gal}(M/HK_\infty) \simeq \mathcal{U}_\ell^*/s_\ell(\mathcal{E}_K)$ et $\text{Gal}(M/K^{\text{lc}}) \simeq \tilde{\mathcal{U}}_\ell/s_\ell(\tilde{\mathcal{E}}_K)$. D'où l'équivalence de (ii) avec (iii) comme avec (iv).

Remarque. La condition $\mathcal{C}_K = 1$ est vérifiée par presque tous les ℓ pour K fixé. Il est conjecturé dans [17] que c'est également le cas de la condition $\tilde{\mathcal{C}}_K = 1$ pour K quadratique réel. La Proposition est donc cohérente avec les heuristiques de Gras qui suggèrent que K est ℓ -rationnel pour presque tout ℓ , de sorte que \mathcal{C}_{K_∞} serait ainsi presque toujours trivial ici. Pour ℓ fixé, en revanche, il résulte de [8], §6 qu'il existe une infinité de corps quadratiques réels K avec $\tilde{\mathcal{C}}_K \neq 1$.

Proposition 12. *Pour K quadratique imaginaire, le pro- ℓ -groupe \mathcal{C}_Z est trivial si et seulement si K est ℓ -logarithmiquement principal :*

$$\mathcal{C}_Z = 1 \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{C}}_K = 1.$$

Preuve. Le Théorème 10 donne l'implication : $\mathcal{C}_Z = 1 \Rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_K = 1$. Reste à vérifier la réciproque. Supposons donc $\tilde{\mathcal{C}}_K = 1$. Comme $\tilde{\mathcal{C}}_K$ est le quotient des genres de la limite projective des ℓ -groupes de ℓ -classes $\mathcal{C}'_{K_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}'_{K_n}$, cette hypothèse entraîne $\mathcal{C}'_{K_\infty} = 1$, donc finalement $\mathcal{C}'_{K_n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En d'autres termes les ℓ -groupes de classes \mathcal{C}_{K_n} sont engendrés par les classes des premiers au-dessus de ℓ . Plus précisément, puisque sa composante unité $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}_n}$, qui correspond à l'idempotent $\frac{1}{2}(1 + \tau)$, est triviale, \mathcal{C}_{K_n} est engendré par la classe de l'idéal $\mathfrak{l}_n/\mathfrak{l}'_n$ (ou, si l'on préfère, par l'image de la classe $[\mathfrak{l}_n]$ par l'idempotent $\frac{1}{2}(1 - \tau)$) et le ℓ -corps de classes de Hilbert H_n de K_n est ainsi une ℓ -extension cyclique de groupe $G_n \simeq \mathcal{C}_{K_n}$. Notons H'_n le ℓ -corps de classes de Hilbert de H_n . La formule des classes ambiges de Chevalley (cf. [2]) appliquée à l'extension H_n/K_n s'écrit $|\mathcal{C}_{H'_n}^{G_n}| = |\mathcal{C}_{K_n}|/[H_n : K_n] = 1$ et donne $\mathcal{C}_{H'_n} = 1$, i.e. $H'_n = H_n$. Ainsi H_n est la pro- ℓ -extension non-ramifiée maximale de K_n et $H_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ est celle de K_∞ . Maintenant, par le Lemme 4, le compositum Z des \mathbb{Z}_ℓ -extensions de K est contenu dans H_∞ . Et, comme on a $\text{Gal}(H_\infty/K_\infty) \simeq \varprojlim \mathcal{C}_{K_n} \simeq \mathbb{Z}_\ell \simeq \text{Gal}(Z/K_\infty)$, l'identité des rangs donne l'égalité $Z = H_\infty$. Il suit $\mathcal{C}_Z = 1$, comme attendu.

Appendice : Groupe des nœuds, genres et classes centrales

Pour la commodité du lecteur, nous rassemblons ci-dessous quelques résultats classiques sur les relations entre groupe des nœuds et théorie des genres. Pour plus de détails, cf. e.g. [13], III.2.1.

Pour chaque corps de nombres K , nous notons J_K le groupe des idèles, U_K le sous-groupe des idèles unités et $C_K = J_L/K^\times$ le groupe des classes d'idèles. Le corps de classes de Hilbert H_K de K , i.e. son extension abélienne non-ramifiée ∞ -décomposée maximale, est ainsi associé au groupe d'idèles $U_K K^\times$ ou, si l'on préfère, au groupe de classes d'idèles $U_K K^\times / K^\times$.

Définition & Proposition 13. *Soit L/K une extension arbitraire de corps de nombres. Alors :*

- (i) *Le compositum LH_K de L avec le corps de classes de Hilbert de K est l'extension abélienne non-ramifiée de L associée au sous-groupe du groupe d'idèles de L défini par :*

$$J_{L/K}^* = \{\mathfrak{r} \in J_L \mid N_{L/K}(\mathfrak{r}) \in U_K K^\times\}.$$

- (ii) *Le corps des genres $H_{L/K}^{\text{gen}}$ est la plus grande extension non-ramifiée de L qui provient d'une extension abélienne de K . Le sous-groupe d'idèles qui lui correspond est ainsi :*

$$J_{L/K}^{\text{gen}} = \{\mathfrak{r} \in J_L \mid N_{L/K}(\mathfrak{r}) \in N_{L/K}(U_L)K^\times\}.$$

- (iii) *Le corps des classes centrales $H_{L/K}^{\text{cen}}$ est, lui, l'extension abélienne de L fixée par :*

$$J_{L/K}^{\text{cen}} = \{\mathfrak{r} \in J_L \mid N_{L/K}(\mathfrak{r}) \in N_{L/K}(U_L L^\times)\} = {}_N J_L U_L L^\times.$$

Lorsque L/K est galoisienne, $H_{L/K}^{\text{cen}}$ est la plus grande extension abélienne non-ramifiée M de L , galoisienne sur K et telle que $\text{Gal}(M/L)$ soit contenu dans le centre de $\text{Gal}(M/K)$.

- (iv) *Tous sont contenus dans le corps de classes de Hilbert H_L de L fixé par $U_L L^\times$.*

Définition & Proposition 14. *Le groupe des nœuds de L/K est le quotient du groupe des normes locales modulo les normes globales : $\mathcal{K}_{L/K} = (K^\times \cap N_{L/K}(J_L)) / N_{L/K}(L^\times)$.*

- (i) *De façon générale, $\mathcal{K}_{L/K}$ est relié au groupe de Galois $\text{Gal}(H_{L/K}^{\text{cen}}/H_{L/K}^{\text{gen}})$ par la suite exacte :*
- $$1 \rightarrow E_K \cap N_{L/K}(J_L) / E_K \cap N_{L/K}(L^\times) \rightarrow (K^\times \cap N_{L/K}(J_L)) / N_{L/K}(L^\times) \rightarrow \text{Gal}(H_{L/K}^{\text{cen}}/H_{L/K}^{\text{gen}}) \rightarrow 1.$$

- (ii) *Et pour L/K abélienne, il s'identifie au quotient du carré alterné de $G = \text{Gal}(L/K)$ par l'image des carrés alternés des sous-groupes de décomposition G_v des places de K :*

$$\mathcal{K}_{L/K} \simeq (G \wedge G) / \sum_v \phi_v(G_v \wedge G_v).$$

La suite exacte (i) résulte directement des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} \text{Gal}(H_{L/K}^{\text{cen}}/H_{L/K}^{\text{gen}}) &\simeq {}^{-1}N(N(U_L)K^\times / {}_N J_L U_L L^\times) \simeq (N(J_L) \cap N(U_L)K^\times) / N(U_L L^\times) \\ &\simeq (K^\times \cap N(J_L)) / (K^\times \cap N(U_L L^\times)) \simeq (K^\times \cap N(J_L)) / N(L^\times) (E_K \cap N(U_L)). \end{aligned}$$

Par ailleurs, lorsque l'extension L/K est galoisienne, J. Tate a donné dans [27] une interprétation homologique du groupe $\mathcal{K}_{L/K}$: la suite exacte de cohomologie associée à la suite courte qui définit le groupe des classes d'idèles $1 \rightarrow L^\times \rightarrow J_L \rightarrow C_L \rightarrow 1$ fait apparaître la séquence

$$\cdots \rightarrow \hat{H}^{-1}(G, J_L) \xrightarrow{g} \hat{H}^{-1}(G, C_L) \rightarrow \hat{H}^0(G, L^\times) \xrightarrow{f} \hat{H}^0(G, J_L) \rightarrow \cdots$$

avec $\mathcal{K}_{L/K} = \text{Ker } f \simeq \text{Coker } g$. Or ce dernier groupe s'interprète via les isomorphismes du corps de classes $\hat{H}^{-1}(G, C_L) \simeq \hat{H}^{-3}(G, \mathbb{Z}) \simeq H_2(G, \mathbb{Z})$ et $\hat{H}^{-1}(G, J_L) \simeq \bigoplus_v \hat{H}^{-3}(G_v, \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_v H_2(G_v, \mathbb{Z})$, où, pour chaque place non complexe v de K , on désigne par G_v le sous-groupe de décomposition de l'une des places de L au-dessus de v . Cela étant, comme observé par Razar [25], lorsque G est abélien, le groupe d'homologie $H_2(G, \mathbb{Z})$ s'identifie au carré alterné $G \wedge G$ de G et les groupes locaux $H_2(G_v, \mathbb{Z})$ aux carrés alternés $G_v \wedge G_v$ des sous-groupes G_v . D'où l'isomorphisme (ii).

Remarques. Dans l'isomorphisme (ii), les places v non-ramifiées dans L/K n'interviennent pas, puisque leurs sous-groupes de décomposition G_v sont cycliques, donc de carrés alternés triviaux.

Enfin, si L/K est une extension galoisienne de corps de nombres, K' une extension de K et $L' = K'L$ l'extension composée, alors dans la description du corps de classes la norme idélique $N_{K'/K}$ correspond à la restriction pour les groupes de Galois (cf. Tate [27] ou encore Ozaki [24]).

RÉFÉRENCES

- [1] K. BELABAS, J.-F. JAULENT, *The logarithmic class group package in PARI/GP*, Pub. Math. Besançon (2016).
- [2] C. CHEVALLEY *Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux* J. fac. Sci. Tokyo 2 (1933), 365–476.
- [3] F. DIAZ Y DIAZ, J.-F. JAULENT, S. PAULI, M. POHST, *A new algorithm for the Computation of logarithmic ℓ -class-groups of number fields*, Experimental Math. **14** (2005), 67–76.
- [4] S. FUJII *Reports on families of imaginary abelian fields with pseudo-null Iwasawa modules*, New York J. Math. **28** (2022), 523–533.
- [5] G. GRAS, *Remarks on K_2 of number fields*, J. Number Th. **23**, (1986), 322–335
- [6] G. GRAS, *Class Field Theory : from theory to practice*, Springer Monographs in Mathematics (2005).
- [7] G. GRAS, *On the λ -stability of p -class groups along cyclic p -towers of a number field*, Int. J. Number Th.
- [8] G. GRAS, *Unlimited list of fundamental units of quadratic fields – Applications*, Prépublication.
- [9] G. GRAS & J.-F. JAULENT, *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. **202** (1989), 343–365.
- [10] R. GREENBERG, *On a certain ℓ -adic representation*, Invent. Math. **21** (1973), 117–124.
- [11] R. GREENBERG, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math. **98** (1976), 263–284.
- [12] C. GREITHER, *Sur les normes universelles dans les \mathbb{Z}_p -extensions*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 205–220.
- [13] J.-F. JAULENT, *L'arithmétique des ℓ -extensions*, (Thèse d'État), Pub. Math. Fac. Sci. Besançon Théor. Nombres 1985–86 (1986).
- [14] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.
- [15] J.-F. JAULENT *Théorie ℓ -adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.
- [16] J.-F. JAULENT *Plongements ℓ -adiques et ℓ -nombres de Weil*, J. Théor. Nombres Bordeaux **20** (2008), 335–351.
- [17] J.-F. JAULENT, *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min*, Annales Math. Québec **41** (2017), 119–140.
- [18] J.-F. JAULENT, *Note sur la conjecture de Greenberg*, J. Ramanujan Math. Soc **34** (2019) 59–80.
- [19] J.-F. JAULENT, *Généralisation d'un théorème de Greenberg*, Archiv der Math. **111** (2018), 569–578.
- [20] J.-F. JAULENT & T. NGUYEN QUANG DO, *Corps p -réguliers, corps p -rationnels et ramification restreinte*, J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 343–363.
- [21] A. MOVAHHEDI, *Sur les p -extensions des corps p -rationnels*, Math. Nachr. **149** (1990) 163–176.
- [22] A. MOVAHHEDI & T. NGUYEN QUANG DO, *Sur l'arithmétique des corps de nombres p -rationnels*, Sémin. Th. Nombres Paris (1987/1988), Prog. in Math. **89** (1990), 155–200.
- [23] T. NGUYEN QUANG DO, *Formules de genres et conjecture de Greenberg*, Ann. Math. Québec. **42** (1990), 155–200., Sémin. Th. Nombres Paris (1987/1988), Prog. in Math. **89** (2018), 267–2800.
- [24] M. OZAKI, *Non-abelian Iwasawa theory of \mathbb{Z}_p -extensions*, J. reine angew. Math **602** (2007), 59–94.
- [25] M. RAZAR, *Central and genus class fields and the Hasse norm theorem*, Compositio Math. **35** (1977), 281–298.
- [26] I.R. SHAFAREVICH, *Extensions with prescribed ramification points*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **18** (1964), 295–319; Trans. Am. Math. Soc. **59** (1966), 128–149.
- [27] J.T. TATE, *Global Class Field Theory*, in *Algebraic Number Theory*, J.W.S CASSEL & A. FROHLICH editors, Academic Press, London & New York (1967).
- [28] L. WASHINGTON, *Introduction to cyclotomic fields*, second edition, Springer-Verlag (1997).
- [29] G. YAMAMOTO, *On the vanishing of Iwasawa invariants of absolutely abelian p -extensions*, Acta Arith. **94** (2000), 365–371.

Institut de Mathématiques de Bordeaux
 Université de BORDEAUX & CNRS
 351 cours de la libération
 F-33405 TALENCE Cedex
 courriel : Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux.fr
<https://www.math.u-bordeaux.fr/~jjaulent/>