



HAL
open science

Modélisation de la propagation de rumeur: Impact de la distribution des distances dans un réseau

David Jaurès Fotsa-Mbogne, Bulcard Brandone Chiegang-Sape

► To cite this version:

David Jaurès Fotsa-Mbogne, Bulcard Brandone Chiegang-Sape. Modélisation de la propagation de rumeur: Impact de la distribution des distances dans un réseau. 2022. hal-03702760

HAL Id: hal-03702760

<https://hal.science/hal-03702760>

Preprint submitted on 23 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation de la propagation de rumeur: Impact de la distribution des distances dans un réseau

David Jaurès Fotsa-Mbogne^{1,*} and Bulcard Brandone Chiegang-Sape²

¹Département de Mathématiques et Informatique, ENSAI, Univ. de Ngaoundéré, Cameroun

²Département de Mathématiques et Informatique, FS, Univ. de Ngaoundéré, Cameroun

*E-mail : jauresfotsa@gmail.com; mjd.fotsa@univ-ndere.cm

Résumé

Le nombre de réseaux sociaux est en pleine croissance dans l'univers du numérique. En même temps qu'ils offrent de nombreuses opportunités, ils représentent également des risques en matière de désinformation et d'influence négative des comportements individuels. Bien que plusieurs études de propagation de rumeurs existent dans la littérature, nous n'en avons pas identifié qui étudie explicitement l'impact de la distribution des distances inter-sommets. Nous proposons un modèle compartimental *IS2R* pour lequel la force de propagation intègre la distribution des distances et la proportion des ignorants. L'activité des étouffeurs est également prise en compte. Une analyse qualitative du modèle révèle plusieurs invariants et une multi-stabilité. Une analyse de la sensibilité à la distribution des degrés montre que selon la configuration du réseau les facteurs influençant la force de propagation sont de niveaux variables. La distribution de degrés selon la loi des puissances semble limiter la propagation de rumeur pour un facteur de forme relativement élevé.

Mots-Clés

Rumeur, propagation, réseau social, sensibilité, stabilité.

I INTRODUCTION

Internet fait partie intégrante du mode de vie contemporain. Le rôle des canaux d'information traditionnels tels que les journaux et la télévision, sur la façon dont nous recueillons et consommons les nouvelles, est devenu moins important que par le passé. La croissance des plateformes de réseaux sociaux a joué un rôle crucial dans cette transformation. D'après [1], un réseau social est un service basé sur le Web permettant de construire un profil public ou semi-public au sein d'un système délimité, d'établir une liste d'autres utilisateurs avec lesquels ils partagent une connexion et de visualiser et parcourir leur liste de connexions et celles établies par d'autres personnes au sein du système. Les réseaux sociaux permettent de communiquer et recueillir des informations [2]. Ils se sont avérés extrêmement utiles, en particulier dans les situations de crise telles que la sensibilisation face à la COVID-19. Cependant, il est difficile de vérifier les faits évoqués dans les messages et de contenir les rumeurs (éventuellement

fausses). Une rumeur est une affirmation non vérifiée, faite par des utilisateurs sur des plateformes de réseaux sociaux et pouvant potentiellement se propager au-delà de leur réseau privé [16]. La diffusion des rumeurs influence la compréhension des événements ainsi que la vie professionnelle et personnelle des utilisateurs. La propagation des rumeurs peut entraîner la panique, l'angoisse, la division et même des guerres politiques [19]. Ceci a été le cas dans la gestion de la pandémie de maladie à coronavirus (COVID-19) [20].

Plusieurs stratégies de contrôle de rumeurs ont été développées dans la littérature. L'une des stratégies consistait à étiqueter les messages par degré de véracité de façon à influencer la décision de retransmission de la rumeur. Dans cette démarche, les auteurs de [4, 5, 11, 18] ont utilisé une classification par apprentissage automatique. Ceux de [8-10, 13] ont utilisé une classification par réseau de neurones artificiels. Une autre approche consiste à adopter des modèles épidémiologiques mathématiques. Ces derniers ont pour avantage la possibilité d'analyse qualitative et asymptotique aboutissant à une prise de décision optimale de complexité computationnelle réduite. Les auteurs de [7, 12] ont étudié des modèles compartimentaux *SIR* ou *SEIR* assimilant les comportements (ignorant, propagateur et étouffeur) face à la rumeur à des états cliniques (susceptible, latent, infectieux, guéris). Ils ont pris en compte la variation de connectivité entre utilisateurs par la distribution des degrés et ont déterminé un seuil critique R_0 influençant le comportement qualitatif du système. Les auteurs dans [6, 14, 17] ont utilisé des modèles *ISR* et *I2S2R*, de comportement vis à vis de la rumeur avec des résultats similaires aux précédents. Ces travaux ne prennent pas en compte l'activité des étouffeurs qui en plus de ne pas transmettre la rumeur peut dissuader les ignorants et les propagateurs. En outre, la connectivité des sommets est limitée au voisinage d'ordre 1. Ceci ne permet pas par exemple de prendre en compte le fait que certains ignorants partagent des messages sans même les avoir consultés pour s'en faire une opinion. L'objectif général de ce travail est de prendre en compte la connectivité d'ordre supérieure et de l'activité partielle des étouffeurs dans la modélisation de la force de propagation d'une rumeur.

Le reste du document est structuré comme il suit. La première section est dédiée à la modélisation compartimentale par des équations différentielles ordinaires, de la dynamique de propagation des rumeurs. Dans la prochaine section, nous étudions les propriétés qualitatives du modèle en déterminant les invariants et les propriétés de stabilité. La troisième section est consacrée à l'analyse de la sensibilité de la force de propagation de la rumeur à la structure du réseau et à la proportion d'ignorants. Le travail s'achève avec une conclusion.

II MODÉLISATION COMPARTIMENTALE DE LA PROPAGATION DE RUMEUR

Dans cette section nous proposons un modèle agrégé de propagation de rumeur dans un réseau en prenant en compte la structure de ce dernier. Nous considérons trois catégories d'individus comme dans la plupart des travaux de la littérature : les ignorants d'effectif I , les propagateurs d'effectif S , et les étouffeurs d'effectif R [17]. Pour mieux refléter le comportement humain nous considérons deux catégories d'étouffeurs : les étouffeurs inactifs (R_1) qui prennent connaissance de la rumeur et ne la propage pas tout en ne déployant aucun effort pour limiter sa propagation, et les

étouffeurs actifs (R_2) qui prennent connaissance de la rumeur et cherche à limiter sa diffusion. Un étouffeur à priori connaît la rumeur mais ne la propage pas [15]. Le rôle d'étouffeurs actifs peut être assuré par un "Community Manager" ou un pair éducateur. On considère que la population totale est de taille constante valant $N = I + S + R_1 + R_2$, bien que les sous-populations ne soient pas de tailles constantes à cause des interactions conduisant à des changements de comportement.

L'interaction entre un propagateur et ignorant peut aboutir à une conversion de l'ignorant en propagateur. Une telle interaction peut se faire par interconnexion directe ou indirecte selon un taux $\beta_1 S \phi(I, N) / N$. La connexion indirecte s'explique par exemple par le fait que certains individus font suivre des messages dans des réseaux sociaux sans avoir nécessairement pris connaissance du contenu. Ainsi, un chemin de transmission de la rumeur est constitué initialement d'un propagateur, puis d'une succession d'ignorants. Le facteur $\phi(I, N)$ représente la moyenne de l'inverse de la distance entre un propagateur et un ignorant pris au hasard, tandis que $\beta_1 > 0$ est le taux de contact adéquat entre un propagateur et un ignorant directement voisins dans le réseau. En effet, le taux d'interaction est supposée inversement proportionnel à la distance. S/N désigne enfin la proportion de propagateurs dans le réseau. L'interaction entre un étouffeur actif et un ignorant peut aboutir à une conversion de l'ignorant en un étouffeur inactif dans un premier temps. De façon similaire au principe de conversion d'un ignorant en propagateur, la conversion d'un ignorant en étouffeur inactif se fait avec un taux adéquat $\beta_2 R_2 \phi(I, N) / N$. De même, l'interaction entre un étouffeur actif et un propagateur peut aboutir à une conversion du propagateur en étouffeur inactif avec un taux adéquat $\beta_3 R_2 \phi(I, N) / N$. En effet, un étouffeur actif peut sensibiliser un propagateur au point de modifier son comportement. L'activité des étouffeurs s'estompe de façon naturelle avec un taux δ . Toutefois les étouffeurs inactifs peuvent être réactivés de façon naturelle ou par des mécanisme de contrôle suivant un taux α . La dynamique ainsi décrite peut se résumer de façon graphique par la figure 1.

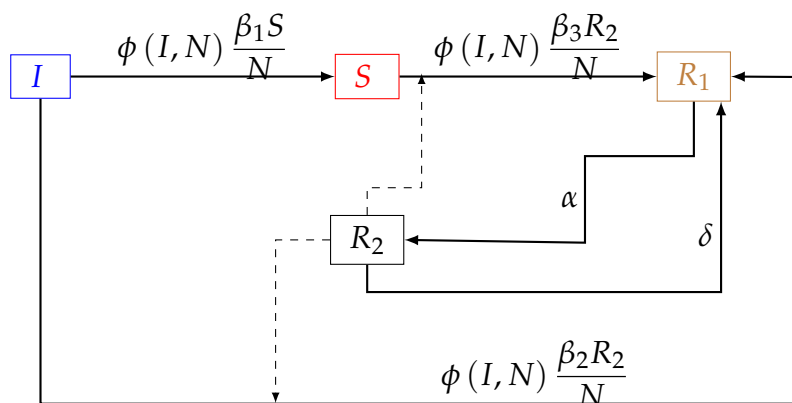


FIGURE 1 – Diagramme compartimental Ignorant (I)- Propagateur (S)- Etouffeur inactif (R_1)- Etouffeur actif (R_2).

On pose $l = \frac{I}{N}$, $s = \frac{S}{N}$, $r_1 = \frac{R_1}{N}$ et $r_2 = \frac{R_2}{N}$. La figure 1 peut être traduite par le modèle agrégé d'équation différentielles (1) – (4) suivant dont l'existence et l'unicité de solution sont garanties par les théorèmes de Cauchy-Lipschitz et de prolongement de solution locale bornée :

$$\dot{l} = -\iota\phi(\iota)(\beta_1 s + \beta_2 r_2), \quad (1)$$

$$\dot{s} = s\phi(\iota)(\beta_1 \iota - \beta_3 r_2), \quad (2)$$

$$\dot{r}_1 = \phi(\iota)(\beta_2 \iota + \beta_3 s)r_2 - \alpha r_1 + \delta r_2, \quad (3)$$

$$\dot{r}_2 = \alpha r_1 - \delta r_2. \quad (4)$$

Dans ce modèle,

$$\phi(\iota) = p_1 + \sum_{k=2}^{N-1} \frac{p_k}{k} \iota^{k-1} \quad (5)$$

représente comme annoncé ci-avant l'espérance mathématique de l'inverse d'une variable aléatoire D représentant la longueur géodésique (chemin le plus court) entre deux sommets choisis au hasard tels que tous les sommets intermédiaires sont exclusivement des ignorants. p_k désigne la distribution de distance dans le graphe pour deux sommets choisis au hasard. En considérant que la moyenne des degrés dans le réseau vaut $N\theta$, $\theta \in [0, 1]$, nous supposons que

$$p_k = \frac{\theta(1-\theta)^{k-1}}{1-(1-\theta)^{N-1}}, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (6)$$

Il s'agit en effet d'une loi géométrique $\mathcal{G}(\theta)$ censurée par le fait que dans un réseau à N sommets, le plus long chemin est au plus de longueur $N-1$.

III INVARIANTS ET STABILITÉ

Dans cette section, nous nous intéressons aux invariants du modèle (1) – (4). Il s'agit de déterminer des variétés données comme des lieux géométriques des équations de la forme

$$g(\iota(t), s(t), r_1(t), r_2(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

g étant une application au moins continue définie de \mathbb{R}_+^4 vers \mathbb{R}_+^d , $d \in \{1, 2, 3, 4\}$. Des invariants particuliers et d'intérêt majeur sont les invariants se résumant à des singletons nommés équilibres. Un équilibre du modèle considéré est donné par la relation $\dot{l} = \dot{s} = \dot{r}_1 = \dot{r}_2 = 0$. Ainsi, pour le cas d'espèces on en dénombre une infinité dont trois vont principalement attirer notre attention :

— L'équilibre sans rumeur où toute la population est ignorante :

$$(\iota, s, r_1, r_2)_{RFE_1} = (1, 0, 0, 0)$$

— L'équilibre sans rumeur où toute la population est constituée d'étouffeurs (actifs ou non) :

$$(\iota, s, r_1, r_2)_{RFE_2} = r_2(0, 0, \frac{\delta}{\alpha + \delta}, \frac{\alpha}{\alpha + \delta})$$

— L'équilibre de rumeur endémique :

$$(\iota, s, r_1, r_2)_{REE} = (0, 1, 0, 0)$$

Théorème III.1:

L'ensemble Ω suivant est un invariant du système (1) - (4) :

$$\Omega = \left\{ (\iota, s, r_1, r_2) \in [0, 1]^4; \iota + s + r_1 + r_2 = 1 \right\}.$$

Il existe plusieurs sous-invariants dans Ω donnés par :

$$\Omega_1 = \left\{ (\iota, s, r_1, r_2) \in [0, 1]^4; \iota + s = 1 \right\}, \quad (7)$$

$$\Omega_2 = \left\{ \right\} \text{ si } \alpha > 0 \quad \text{ou} \quad \left\{ (\iota, s, r_1, r_2) \in [0, 1]^4; s + r_1 = 1 \right\} \text{ si } \alpha = 0, \quad (8)$$

$$\Omega_3 = \left\{ \right\} \text{ si } \alpha > 0 \quad \text{ou} \quad \left\{ (\iota, s, r_1, r_2) \in [0, 1]^4; \iota + r_1 = 1 \right\} \text{ si } \alpha = 0, \quad (9)$$

$$\Omega_4 = \left\{ \right\} \text{ si } \alpha > 0 \quad \text{ou} \quad \left\{ (\iota, s, r_1, r_2) \in [0, 1]^4; \iota + s + r_1 = 1 \right\} \text{ si } \alpha = 0, \quad (10)$$

$$\Omega_5 = \left\{ (\iota, s, r_1, r_2) \in [0, 1]^4; \iota + r_1 + r_2 = 1 \right\}, \quad (11)$$

$$\Omega_6 = \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_5). \quad (12)$$

En outre, les équilibres REE et RFE_1 sont inconditionnellement instables. L'ensemble $\Omega_1 \setminus \{RFE_1\}$ est attiré par l'équilibre endémique de rumeur REE . Si $\alpha = 0$ alors l'ensemble Ω_4 est attiré par l'ensemble Ω_2 tandis que l'ensemble Ω_5 est attiré par l'ensemble Ω_3 . Tout élément de $\Omega_2 \cup \Omega_3$ est un équilibre. Si $\alpha > 0$ alors l'ensemble $\Omega_5 \cup \Omega_6 \setminus \{RFE_1\}$ est attiré par l'équilibre sans rumeur RFE_2 .

Le Théorème III.1 montre l'importance de la population des étouffeurs et du taux d'activation (α) pour contenir la propagation des rumeurs dans un réseau. Par ailleurs, une perturbation de RFE_1 suivant la direction de $(0, 1, 0, 0)$ conduit à l'invariant $\iota + s = 1$ qui est attiré par l'équilibre endémique de rumeur REE . Autrement dit, si l'on introduit un propagateur sans aucun étouffeur, la rumeur envahira la population. De même, en perturbant RFE_1 dans une direction de $(0, 0, a, b)$, $a \geq 0, b > 0$, conduit vers l'invariant $\iota + r_1 + r_2 = 1$: sans l'introduction d'un propagateur, aucune rumeur n'apparaîtra. Chaque point du sous-ensemble $\iota + r_1 = 1$ est un équilibre si et seulement si $\alpha = 0$. Tout orbit partant d'un état $(a, 0, b, c)$ avec $a, b \geq 0$ et $c > 0$ est attiré par RFE_2 . Enfin, une perturbation de RFE_1 dans une direction de $(0, a, b, c)$, $a, b \geq 0, c > 0$ conduit le système vers la RFE_2 .

IV SIMULATIONS ET ANALYSE DE SENSIBILITÉ

Dans cette section, nous étudions à l'aide de la statistique du coefficient de corrélation de rang partiel (PRCC, pour Partial Rank Correlation Coefficient en anglais) l'effet de la structure d'un graphe sur le facteur de propagation ϕ . Nous distinguons pour cela trois configurations de réseau (étudiées dans [3]) qui vont nécessairement modifier l'expression du paramètre θ des p_k apparaissant dans ϕ :

— Distribution binomiale des degrés (Graphe d'Erdős-Rényi) :

$$\theta = p \in [0; 1];$$

- Distribution de Poisson censurée par la limite supérieure des degrés fixée à $N - 1$, N désignant le nombre de sommets :

$$\theta = \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right) / \left(N \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \lambda/N, \lambda \in \mathbb{R}_+^*;$$

- Distribution de puissance censurée par la limite supérieure des degrés fixée à $N - 1$, N désignant le nombre de sommets :

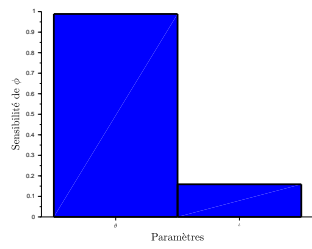
$$\theta = \left(\sum_{k=1}^{N-1} k^{1-\rho} \right) / \left(N \sum_{k=1}^{N-1} k^{-\rho} \right), \rho \in \mathbb{R}_+^*,$$

avec $\rho > 2$ lorsque N tend vers l'infini.

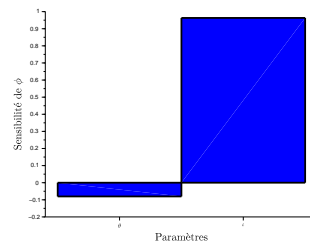
D'après les analyses de quantiles présentées dans [3], la queue de la distribution de puissance est plus épaisse que celles des distributions binomiales et de Poisson. Une queue de distribution plus épaisse offre une structure plus diversifiée du réseau.

Pour calculer la PRCC, nous avons généré un échantillon de taille $N = 1000$. La statistique $\hat{r}(N-2) / \sqrt{(1-\hat{r}^2)}$, fonction de l'estimateur du coefficient de corrélation \hat{r} , suit la loi de Student à $N - 2$ degrés de liberté. Ainsi, on valide la non-significativité de \hat{r} avec une confiance de 95% si $|\hat{r}| \leq t_{0,975}^{N-2} / \sqrt{N-2 + (t_{0,975}^{N-2})^2}$, $t_{0,975}^{N-2} = 0.06199742$ désignant le quantile d'ordre 0,975 à $N - 2$ degrés de liberté. La figure 2 montre que pour une distribution de degrés selon la loi binomiale, θ et ι influencent positivement ϕ , avec des valeurs respectives de PRCC, 0,99 et 0.16. L'impact relatif de θ est grand. Pour une distribution de degrés selon la loi géométrique, on a des valeurs respectives de PRCC, $-0,08$ et 0,96. Bien que l'influence de θ soit très faible, elle est significative et négative. Pour la loi des puissances, l'influence de θ est prédominante et négative, tandis que celle de ι est peu significative. En effet, les valeurs de PRCC sont respectivement -0.53 et -0.031 . On peut conclure globalement que le facteur de diffusion ϕ est influencé par la probabilité d'interconnexion pour une distribution de degrés binomiale, par la proportion d'ignorants pour la distribution de Poisson, et par le facteur de forme ρ .

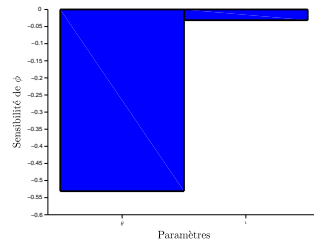
Pour compléter notre analyse d'impact de la structure du réseau, nous procédons à des simulations des dynamiques des comportements. Nous nous restreignons aux conditions initiales prises dans le bassin d'attraction de l'équilibre sans rumeur RFE_2 : $\iota = 1/2$, $s = 3/8$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1/8$. En effet, c'est le cas qui permet de visualiser toutes les interactions entre les compartiments. Les simulations sont réalisées par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Nous prenons $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.1 \text{ jour}^{-1}$, $\alpha = 0.1 \text{ jour}^{-1}$ et $\delta = 0.15 \text{ jour}^{-1}$. Les figures 3 et 4 montrent que plus grands sont la probabilité d'interconnexion ou le degré moyen des sommets, plus rapide est la diffusion d'une rumeur introduite. La figure 5 montre un comportement similaire, mais pour un grand facteur de forme ρ , la diffusion d'une rumeur est lente, voire difficile. Un réseau à distribution de degrés suivant la loi des puissances semble donc optimal pour en termes d'imperméabilité aux rumeurs.



(a) : Loi binomiale

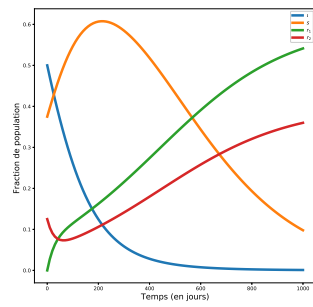


(b) : Loi de Poisson

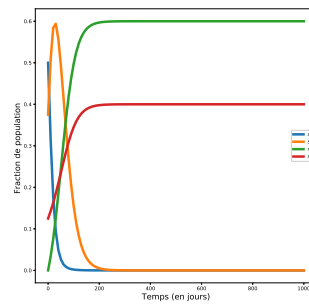


(c) : Loi des puissances

FIGURE 2 – Analyse de sensibilité de ϕ en fonction de θ et ι

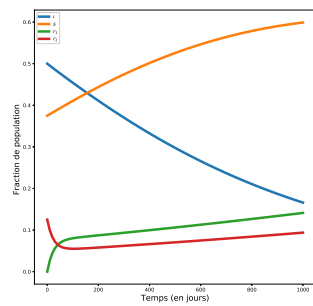


(a) : $\theta = 0.1$

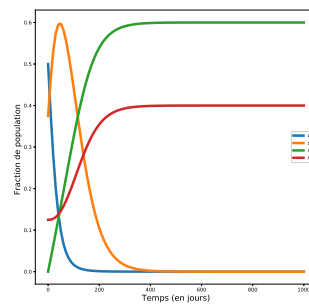


(b) : $\theta = 0.9$

FIGURE 3 – Dynamique compartimentale pour la loi binomiale



(a) : $\lambda = 1$



(b) : $\lambda = 50$

FIGURE 4 – Dynamique compartimentale pour la loi géométrique

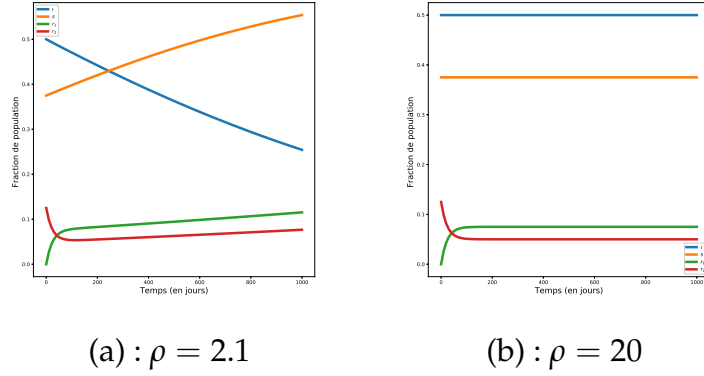


FIGURE 5 – Dynamique compartimentale pour la loi des puissances

V CONCLUSION

Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation de la propagation des rumeurs dans un réseau ayant une structure influencée par sa distribution de degrés. Nous proposons un modèle compartimental *IS2R* prenant en compte l'activité des étouffeurs, la proportion d'ignorants et la distribution des distances. Plusieurs invariants ainsi qu'une multi-stabilité ont été identifiés. Trois distributions de distances communes dans la littérature sont évaluées par analyse de sensibilité et simulation de dynamiques de population. Il ressort que la contenance d'une rumeur est plus évidente pour une faible interconnexion globale des sommets, en particulier pour une distribution de puissance à facteur de forme élevé. Comme perspectives immédiates, nous comptons évaluer sur la base de données réelles sur les réseaux sociaux, le taux et les mécanismes d'activation optimaux des étouffeurs. En outre, il peut être intéressant de proposer un protocole de dynamique de croissance du réseau garantissant une configuration (physique ou logique) sécurisante face à la propagation des rumeurs potentielles.

A PREUVE DU THÉORÈME III.1

Démonstration.

L'invariance de chaque sous-ensemble est liée au fait que la dérivée totale de l'équation qui l'exprime vaut 0 et le flot rentre dans le domaine lorsqu'on se trouve à la frontière. La matrice jacobienne du système (1) - (4) est donnée par

$$J(\iota, s, r_1, r_2) = \begin{bmatrix} -\left(\phi(\iota) + \iota \frac{\partial \phi(\iota)}{\partial \iota}\right) (\beta_1 s + \beta_2 r_2) & -\iota \phi(\iota) \beta_1 & 0 & -\iota \phi(\iota) \beta_2 \\ s \frac{\partial \phi(\iota)}{\partial \iota} (\beta_1 \iota - \beta_3 r_2) + s \phi(\iota) \beta_1 & \phi(\iota) (\beta_1 \iota - \beta_3 r_2) & 0 & -s \phi(\iota) \beta_3 \\ \frac{\partial \phi(\iota)}{\partial \iota} (\beta_2 \iota + \beta_3 s) + r_2 \phi(\iota) \beta_2 & r_2 \phi(\iota) \beta_3 & -\alpha & \delta + \phi(\iota) (\beta_2 \iota + \beta_3 s) \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta \end{bmatrix}. \quad (13)$$

La matrice jacobienne appliquée à des équilibres sans rumeur RFE_1 vaut

$$J(1,0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_1\phi & 0 & -\beta_2\phi \\ 0 & \beta_1\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & \beta_2\phi + \delta \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Les valeurs propres associées sont 0 , $\beta_1\phi$, $-\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha\beta_2\phi + \alpha^2 + 2\alpha\delta + \delta^2}$, et $-\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha\beta_2\phi + \alpha^2 + 2\alpha\delta + \delta^2}$. L'équilibre RFE_1 est donc inconditionnellement instable. Il est non-hyperbolique puisque 0 est une valeur propre du problème linéarisé.

La matrice jacobienne appliquée à l'équilibre sans rumeur RFE_2 vaut

$$J(0,0,\frac{\delta}{\alpha+\delta},\frac{\alpha}{\alpha+\delta}) = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha p_1 \beta_2}{\alpha+\delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\alpha p_1 \beta_3}{\alpha+\delta} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha p_1 \beta_2}{\alpha+\delta} & \frac{\alpha p_1 \beta_3}{\alpha+\delta} & -\alpha & \delta \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Les valeurs propres associées sont $\frac{-\alpha p_1 \beta_2}{\alpha+\delta}$, $\frac{-\alpha p_1 \beta_3}{\alpha+\delta}$, $-\alpha$, $-\delta$. L'équilibre est hyperbolique si et seulement si $\alpha, \delta > 0$.

La matrice jacobienne appliquée à l'équilibre de rumeur endémique REE vaut quant à elle

$$J(0,1,0,0) = \begin{bmatrix} -\beta_1 p_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 p_1 & 0 & 0 & \beta_3 p_1 \\ \frac{p_2 \beta_3}{2} & 0 & -\alpha & \delta + \beta_3 p_1 \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta \end{bmatrix}. \quad (16)$$

L'équilibre endémique est donc non hyperbolique et inconditionnellement instable.

Pour étudier les domaines d'attractivité des équilibres REE et RFE_2 , nous introduisons des fonctions de Lyapunov. Considérons

$$V_1 = t^2 + (s-1)^2 + r_1^2 + r_2^2 \quad \text{et} \quad (17)$$

$$V_2 = (t+s) \left(1 - \ln \frac{\delta}{\alpha+\delta}\right) + \left(r_1 - \frac{\delta}{\alpha+\delta}\right) \ln \left(\frac{(\alpha+\delta)r_1}{\delta}\right) + \left(r_2 - \frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right) \ln \left(\frac{(\alpha+\delta)r_2}{\alpha}\right). \quad (18)$$

En posant $X = (t, s, r_1, r_2)$ et $f(X) = \begin{bmatrix} -t\phi(t)(\beta_1 s + \beta_2 r_2) \\ s\phi(t)(\beta_1 t - \beta_3 r_2) \\ \phi(t)(\beta_2 t + \beta_3 s)r_2 - \alpha r_1 + \delta r_2 \\ \alpha r_1 - \delta r_2 \end{bmatrix}$, on a

$$\nabla_X V_1 = \begin{bmatrix} 2t \\ 2(s-1) \\ 2r_1 \\ 2r_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla_X V_2 = \begin{bmatrix} \left(1 - \ln \left(\frac{\delta}{\alpha+\delta}\right)\right) \\ \left(1 - \ln \left(\frac{\delta}{\alpha+\delta}\right)\right) \\ 1 - \frac{\delta}{r_1(\alpha+\delta)} + \ln \left(\frac{(\alpha+\delta)r_1}{\delta}\right) \\ 1 - \frac{\alpha}{r_2(\alpha+\delta)} + \ln \left(\frac{(\alpha+\delta)r_2}{\alpha}\right) \end{bmatrix}$$

Le calcul des dérivées totales de V_1 et V_2 nous donne

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -2\iota^2\phi(\iota)(\beta_1s + \beta_2r_2) + 2s\phi(\iota)(s-1)(\beta_1\iota - \beta_3r_2) + 2r_1r_2\phi(\iota)(\beta_2\iota + \beta_3s) \\ & - 2\alpha r_1^2 + 2\delta r_2r_1 + 2\alpha r_1r_2 - 2\delta r_2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & (\beta_2\iota + \beta_3s)r_2\phi(\iota)\ln(r_1) - \frac{\delta r_2\phi(\iota)}{r_1(\alpha + \delta)}(\beta_2\iota + \beta_3s) - \frac{(-\alpha r_1 + \delta r_2)^2}{r_1r_2(\alpha + \delta)} \\ & + (-\alpha r_1 + \delta r_2)\ln\left(\frac{\alpha r_1}{\delta r_2}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

Si $r_1 = r_2 = 0$ sachant que $\iota, s \geq 0$ on a $\dot{V}_1 < 0$, d'où REE est un attracteur de $\Omega_1 \setminus \{RFE_1\}$. Si $\alpha, \delta > 0$, puisque $r_1 \leq 1$, $\ln(r_1) < 0$ et $\dot{V}_2 < 0$. D'où RFE_2 est un attracteur $\Omega_5 \cup \Omega_6 \setminus \{RFE_1\}$. \square

B REMERCIEMENTS

Les auteurs adressent leur reconnaissance aux relecteurs pour leurs précieuses remarques qui ont permis d'améliorer la qualité du papier.

RÉFÉRENCES

- [1] D. M. BOYD et N. B. ELLISON. « Social network sites : Definition, history, and scholarship ». In : *Journal of computer-mediated Communication* 13.1 (2007), pages 210-230.
- [2] J. SANKARANARAYANAN, H. SAMET, B. E. TEITLER, M. D. LIEBERMAN et J. SPERLING. « Twitterstand : news in tweets ». In : *Proceedings of the 17th acm sigspatial international conference on advances in geographic information systems*. 2009, pages 42-51.
- [3] M. O. JACKSON. *Social and economic networks*. Princeton university press, 2010.
- [4] C. CASTILLO, M. MENDOZA et B. POBLETE. « Information credibility on twitter ». In : *Proceedings of the 20th international conference on World wide web*. 2011, pages 675-684.
- [5] L. ZENG, K. STARBIRD et E. S. SPIRO. « # unconfirmed : Classifying rumor stance in crisis-related social media messages ». In : *Tenth International AAAI Conference on Web and Social Media*. 2016.
- [6] Z. JIN, J. CAO, H. GUO, Y. ZHANG et J. LUO. « Multimodal fusion with recurrent neural networks for rumor detection on microblogs ». In : *Proceedings of the 25th ACM international conference on Multimedia*. 2017, pages 795-816.
- [7] Q. LIU, T. LI et M. SUN. « The analysis of an SEIR rumor propagation model on heterogeneous network ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 469 (2017), pages 372-380.
- [8] T. N. NGUYEN, C. LI et C. NIEDERÉE. « On early-stage debunking rumors on twitter : Leveraging the wisdom of weak learners ». In : *International Conference on Social Informatics*. Springer. 2017, pages 141-158.
- [9] N. RUCHANSKY, S. SEO et Y. LIU. « Csi : A hybrid deep model for fake news detection ». In : *Proceedings of the 2017 ACM on Conference on Information and Knowledge Management*. 2017, pages 797-806.

- [10] S. VOLKOVA, K. SHAFFER, J. Y. JANG et N. HODAS. « Separating facts from fiction : Linguistic models to classify suspicious and trusted news posts on twitter ». In : *Proceedings of the 55th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 2 : Short Papers)*. 2017, pages 647-653.
- [11] S. VOSOUGHI, M. N. MOHSENVAND et D. ROY. « Rumor gauge : Predicting the veracity of rumors on Twitter ». In : *ACM transactions on knowledge discovery from data (TKDD)* 11.4 (2017), pages 1-36.
- [12] L. ZHU et Y. WANG. « Rumor spreading model with noise interference in complex social networks ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 469 (2017), pages 750-760.
- [13] T. CHEN, X. LI, H. YIN et J. ZHANG. « Call attention to rumors : Deep attention based recurrent neural networks for early rumor detection ». In : *Pacific-Asia conference on knowledge discovery and data mining*. Springer. 2018, pages 40-52.
- [14] Y. CHENG, C. LIU, F. DING et al. « Dynamic analysis of rumor spreading model for considering active network nodes and nonlinear spreading rate ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 506 (2018), pages 24-35.
- [15] M. YVES. « Analyse probabiliste de protocoles de population ». In : *HAL* (2018), page 25.
- [16] A. BONDIELLI et F. MARCELLONI. « A survey on fake news and rumour detection techniques ». In : *Information Sciences* 497 (2019), pages 38-55.
- [17] Y. ZHANG et J. ZHU. « Dynamic behavior of an I2S2R rumor propagation model on weighted contract networks ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 536 (2019), page 120981.
- [18] F. TCHAKOUNTÉ, A. FAISSAL, M. ATEMKENG et A. NTYAM. « A reliable weighting scheme for the aggregation of crowd intelligence to detect fake news ». In : *Information* 11.6 (2020), page 319.
- [19] M. H. ETOGA, S. A. ABOSSOLO, C. MENDOUA et A. A. MAMADE. « Tourisme et insécurité au Cameroun. Quelles stratégies pour le maintien de l'activité dans les Régions du Nord, de l'Extrême-Nord, du Nord-Ouest, du Sud-Ouest et de l'Est du Pays ? » In : *Espace Géographique et Société Marocaine* 47/48 (2021).
- [20] R. PIASTRA. « La gestion de la crise Covid19 selon la Cour des Comptes ». In : *Droit, Déontologie & Soins* 21.2 (2021), pages 175-182.