



HAL
open science

P.R. Gould, 1967, On the Geographical Interpretation of Eigenvalues, version traduite et commentée

Peter Gould, Françoise Bahoken, Laurent Beauguitte

► To cite this version:

Peter Gould, Françoise Bahoken, Laurent Beauguitte. P.R. Gould, 1967, On the Geographical Interpretation of Eigenvalues, version traduite et commentée. 2022. hal-03699723

HAL Id: hal-03699723

<https://hal.science/hal-03699723>

Submitted on 20 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

P. R. Gould, 1967, On the Geographical
Interpretation of Eigenvalues,
*Transactions of the Institute of British
Geographers*, 42, p. 53-86.
Version traduite et commentée

groupe f.m.r.



Mai 2022

Version traduite et commentée par Françoise Bahoken (Université Gustave-Eiffel) et Laurent Beauguitte (CNRS, UMR Géographie-cités). En raison de la longueur de l'article, et de [sa disponibilité en ligne](#), seule la traduction française est présentée ici.

Présentation

Peter Robin Gould (1932-2000) est un géographe anglais qui a fait ses études de géographie et sa carrière de professeur de géographie aux États-Unis, essentiellement à l'Université d'État de Pennsylvanie (1963-1998). Spécialiste de l'Afrique (séjour en Tanzanie, thèse soutenue en 1960 sur les transports au Ghana), il s'intéresse également aux méthodes quantitatives (algèbre linéaire, théorie des jeux, diffusion des innovations, etc.) et aux cartes mentales (Haggett, 2003).

Cet article illustre l'intérêt de l'étude des valeurs propres pour l'analyse spatiale en géographie. Très pédagogique, détaillant soigneusement chaque étape, l'auteur illustre les principes de l'algèbre linéaire à l'aide de nombreux exemples issus de contextes très variés (géomorphologie, typologie d'église, réseaux routiers syrien et ougandais, etc.). Basé entièrement sur le calcul matriciel, le raisonnement de l'auteur ne fait jamais appel à la théorie des graphes, même s'il rappelle la formalisation sous forme de réseaux faite par les premiers géographes quantitativistes nord-américains (Garrison notamment). La bibliographie frappe par son ampleur et son caractère pluridisciplinaire (mathématique, biologie, informatique, physique, économie, etc.). Cette curiosité pluridisciplinaire s'explique d'après Haggett par les principales influences de Gould, à savoir la géographie, l'anthropologie, la géologie et l'économie (Haggett, 2003, p. 926).

Références

Peter Haggett, 2003, In Memoriam : Peter Robin Gould, 1932-2000, *Annals of the Association of American Geographers*, 93(4) :925-934.

Toutes les notes en bleu sont des traductrices.

Sur l'interprétation géographique des valeurs propres

P. R. GOULD, M.A., PH.D.

(Associate Professor of Geography, The Pennsylvania State University)

Manuscrit révisé reçu le 10 mars 1967

(Communiqué par le professeur P. Haggett)

Dans l'histoire des sciences, on peut trouver de nombreux cas où une personne a pris des informations accessibles et les a réorganisées pour éclairer un domaine qui était auparavant sombre et obscur. De nombreux exemples viennent à l'esprit, depuis les tentatives classiques de Linné d'ordonner les informations sur les plantes et les animaux en imposant un système de classification jusqu'à la mise en ordre par W. Heisenberg des faits connus sur la structure atomique (B. Hoffman, 1963 ; Heisenberg, 1930). Ce dernier exemple est particulièrement pertinent pour l'objectif de cet exposé. Prenant les fréquences des électrons, qui avaient été précédemment exprimées sous la forme d'une liste nommée échelle de Balmer-Ritz, Heisenberg réordonna cette information dans un tableau carré appelé matrice. Les opérations sur la matrice ont conduit à des résultats surprenants et éclairants. Non seulement des fondements théoriques ont été fournis pour le demi-quantique résiduel d'énergie qui restait dans une particule oscillante mais certains nombres caractéristiques des matrices, appelés valeurs propres, ont été interprétés comme les mêmes fréquences d'excitation que les lignes de Fraunhofer, ces valeurs critiques que nous pouvons voir dans le spectre de la lumière visible sous la forme de fines bandes sombres.

L'analyse d'Heisenberg, qui fait apparaître des motifs et un ordre là où il n'y en avait pas auparavant, n'est pas le premier exemple d'agencement de données sous forme de matrice. L'arrangement du tableau périodique par Mendeleïev en 1869, la découverte par William Hamilton en 1835 de la puissance du quaternion en mécanique et les études de Laplace en 1772 sur les perturbations des orbites planétaires ont établi une tradition d'ordonnement et de manipulation des matrices bien des années auparavant. Le fait d'ordonner les divers éléments d'une discipline académique dans un tableau matriciel a également mis en évidence des modèles et des structures qui ont été utiles et ont suscité la réflexion. L'examen de l'anthropologie du point de vue d'un économiste par J. Berliner, la délicieuse « carte » de la culture par E. Hall et la matrice à trois dimensions de la géographie par J.L. Berry en sont autant d'exemples (Berliner, 1962 ; Hall, 1959 ; Berry, 1964).

Souvent, les faits géographiques peuvent également être rassemblés ou disposés dans des tableaux carrés et rectangulaires appelés matrices. En manipulant de manière particulière de tels classements d'informations facilement disponibles, nous pouvons parfois être en mesure de découvrir un modèle et un ordre dans des situations très complexes où de nombreuses

variables entrent en jeu et se disputent notre attention. Bien entendu, ces exercices de manipulation s'appuient implicitement sur la conviction de tout scientifique, à savoir que l'ordre existe si nous parvenons à démêler le chaos qui nous entoure. En nous en tenant à cet acte de foi, aussi métaphysique qu'il puisse être, nous allons tout d'abord essayer de voir si nous pouvons extraire de tableaux carrés de données des valeurs numériques très particulières et ensuite essayer de leur donner un sens, une interprétation géographique pertinente.

Valeurs propres

Les valeurs numériques concernées sont les *valeurs propres*, les *racines latentes* ou les *valeurs caractéristiques* d'une matrice carrée (les termes sont interchangeables) et, afin de saisir *ce qu'elles sont*, nous allons recourir à la géométrie. Ce n'est pas un hasard si les liens anciens et honorables entre la géométrie et la géographie sont à nouveau mis en évidence après une rupture de plusieurs millénaires, et le géographe, avec sa perspective spatiale, trouve souvent que les idées d'un domaine connexe sont particulièrement utiles.

Tout d'abord, notons que toute matrice carrée possède une équation associée ou caractéristique¹. L'équation aura la forme d'un polynôme du même ordre que celui de la matrice, de sorte qu'une matrice de 2×2 sera associée à une équation caractéristique quadratique tandis qu'une matrice de 3×3 sera associée à une équation cubique etc. C'est aux racines, et donc au terme « racine latente », de ces équations caractéristiques, que nous nous intéresserons tout au long de cet article. Toute matrice carrée possède autant de racines que son ordre, bien que certaines d'entre elles puissent être nulles. Dans le cas des matrices de Gram, nous pouvons prouver par simple examen de la matrice que les racines sont toutes des nombres réels. Parfois, la matrice possède certaines caractéristiques spécifiques : les racines de son équation sont réelles et positives. Dans d'autres cas, notamment celui des matrices non symétriques, nous ne pouvons pas déterminer ces propriétés par examen mais seulement en essayant vainement de trouver toutes les racines réelles. Bien qu'il existe des méthodes pour trouver les racines ou les valeurs propres des matrices non symétriques, les algorithmes, ou les procédures étape par étape qui mènent à la solution souhaitée², s'effondrent lorsque nous rencontrons des racines imaginaires dans toute équation polynomiale au-delà du quartique³ et, pour autant que l'on sache (1967⁴), il n'existe aucun programme

1. Le terme *auxiliaire*, non employé par Gould, est synonyme.

2. En 1967, Gould doit définir le terme *algorithme* pour son doctorat.

3. Une *équation quartique* est une équation polynomiale de degré 4 (source : Wikipédia).

4. Le nom de l'auteur manque dans le texte original. Il est probable que Gould cite son article à paraître dans le *Journal of Regional Science* - seules quatre références datées de 1967 apparaissent dans sa volumineuse bibliographie.

informatique pour évaluer les matrices non symétriques ayant des racines imaginaires d'ordre supérieur à quatre.

Avant d'aborder la question de l'équation caractéristique, nous aurons besoin d'un élément de base appelé le *déterminant*. Habituellement, il s'agit d'un objet aride pour le non-mathématicien, où l'on extrait un seul nombre par de nombreuses manipulations algébriques (R.V. Andree, 1959 ; P.J. Davis, 1965 ; W.G. Bickley et R.S.H.G. Thompson, 1964 ; G. Kron, 1959 ; B. Higman, 1964 ; R.A. Frazer, W.J. Duncan et A.R. Collar, 1963). Examinons-le avec un peu plus de soin en prenant pour exemple une matrice 2×2 .

Pour des raisons de notation, les matrices sont toujours entourées de parenthèses. Les déterminants sont les mêmes matrices entourées de barres verticales, de sorte que si :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ alors le déterminant de } A \text{ ou } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Nous avons maintenant besoin de quelques règles pour calculer le déterminant. Pour une matrice 2×2 , nous prenons simplement la différence entre le produit des diagonales :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (3 \times 4) - (1 \times 6) = 6$$

Dans ce cas, la valeur du déterminant est positive et la matrice est appelée *définie positive*. Si le déterminant est égal à 0, la matrice est dite semi-définie positive. Un déterminant peut également être négatif.

Avec une matrice 3×3 , les règles d'extraction des déterminants sont simples mais deviennent fastidieuses. Pour la plupart des problèmes appliqués, où la taille d'une matrice dépasse presque toujours 4×4 , le déterminant est aujourd'hui toujours calculé par un ordinateur. Pour une matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Il existe plusieurs façons d'évaluer $\det A$, mais la plus simple pour nos besoins actuels est de réécrire simplement les première et deuxième colonnes à droite de la matrice et d'évaluer le déterminant par la règle suivante (F.E. Walker, 1963) :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{matrix} (a_{11} a_{22} a_{33}) + (a_{12} a_{23} a_{31}) + \\ (a_{13} a_{21} a_{32}) - (a_{31} a_{22} a_{13}) - \\ (a_{32} a_{23} a_{11}) - (a_{33} a_{21} a_{12}) \end{matrix}$$

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (6 + 12 + 4) - (32 + 9 + 1) = -20$$

Si une ligne ou une colonne est entièrement constituée de 0, le déterminant est égal à 0. Cela est évident dans l'exemple de la matrice 3×3 puisque nous multiplierions par 0. De même, si une ligne ou une colonne peut être construite à partir d'une combinaison linéaire de n'importe quelle autre ligne ou colonne, le déterminant sera également égal à 0. Par exemple, admettons :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

et remarquez que les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles entre elles de sorte que nous pouvons écrire la relation linéaire :

$$\begin{aligned} Y &= bX \\ \text{ou colonne 1} &= 2 \times (\text{colonne 3}) \end{aligned}$$

Il existe une *dépendance* linéaire (Higman, 1964, 14-16) et, pour le confirmer, évaluons le déterminant :

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (12 + 54 + 12) - (12 + 12 + 54) = 0$$

La dépendance linéaire dans ce cas implique une simple *proportion* linéaire. Toutefois, cela ne signifie pas que si nous dérivons la colonne 1 de la relation $Y = a + bX$, le déterminant sera nul. De même, tautologiquement, il ne sera pas nul s'il existe une relation non linéaire $Y = X^n$ entre deux colonnes ou deux lignes.

Cependant, ces règles et propriétés basiques sur les déterminants ne nous disent pas vraiment ce qu'ils sont. Voyons si la géométrie peut nous aider (P.J. Davis, 1965, 194-200). Supposons que nous ayons un triangle dont les coordonnées sont (3, 8), (1, 2) et (8, 4) (figure 1). Nous y ajoutons les lignes de construction verticales BD , AE et CF . En se rappelant que l'aire d'un trapèze est :

$$\text{Aire} = \frac{(\text{Somme des côtés parallèles})(\text{altitude})}{2}$$

nous pouvons trouver l'aire du triangle ABC en additionnant les aires de $AEDB$ et $ACFE$ et en soustrayant de l'aire totale du polygone résultant $ACFDB$ l'aire $BCFD$. Donc

$$\begin{aligned}
 ABC &= AEDB + ACFE - BCFD \\
 &= \frac{(2+8)(3-1)}{2} + \frac{(8+4)(8-3)}{2} - \frac{(2+4)(8-1)}{2} \\
 &= 19
 \end{aligned}$$

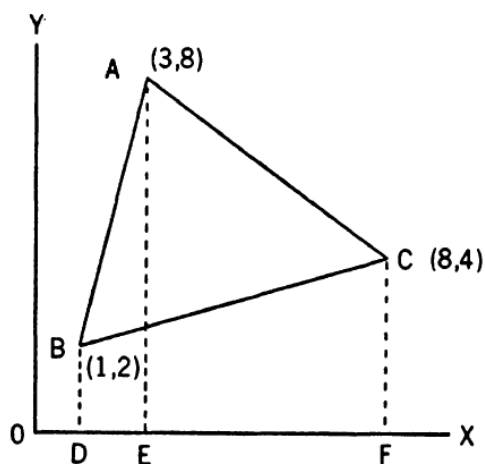


Figure 1 : Le triangle défini par trois vecteurs

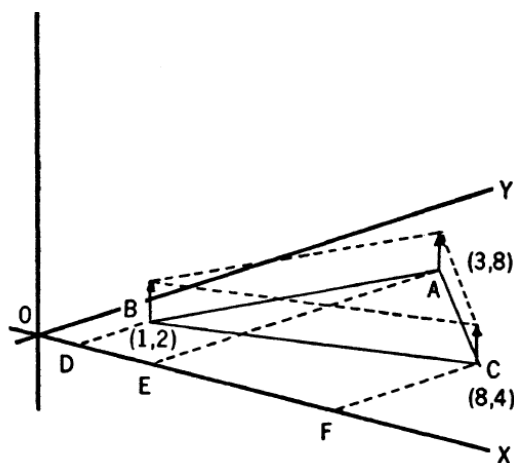


Figure 2 : Le volume du triangle de hauteur 1

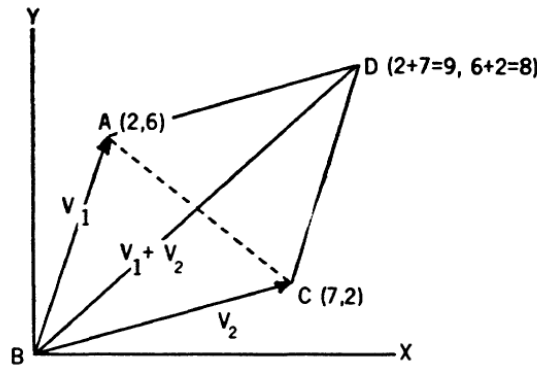


Figure 3 : L'expression géométrique d'un déterminant

L'important est que cette aire du triangle ABC puisse être considérée comme un déterminant. Si l'on place les coordonnées du triangle dans un tableau et que l'on ajoute une colonne de 1⁵, alors :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

L'aire du triangle ABC sera égale à la moitié du déterminant de A , qui est :

$$\frac{1}{2} \det A = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(6 + 64 + 4) - (16 + 12 + 8)] = \frac{38}{2} = 19$$

Deux questions se posent. Premièrement, d'où vient la colonne des 1, et que signifient-ils par rapport à la géométrie du problème? En fait, nous évaluons le *volume* d'un triangle tridimensionnel dont la hauteur est 1 (figure 2). Ceci, bien sûr, est la même chose que la mesure « carrée ». Deuxièmement, pourquoi l'aire devrait-elle être $\frac{1}{2} \det A$? Si nous déplaçons nos axes vers le point B du triangle ABC , alors les coordonnées de B seront $(0, 0)$, les coordonnées de A seront $(3-1, 8-2)$ ou $(2, 6)$ et celles de C seront $(8-1, 4-2)$ ou $(7, 2)$. Nous pouvons considérer les lignes BA et BC comme des vecteurs V_1 et V_2 dont la résolution est la ligne BD (figure 3). En évaluant le déterminant, nous calculons donc l'aire (volume « unitaire ») du parallélogramme $ABCD$, de sorte que notre triangle ABC a exactement la moitié de l'aire, soit $\frac{1}{2} \det A$.

Nous avons noté précédemment que chaque matrice carrée avait une équation polynomiale qui lui était caractéristique. L'équation caractéristique d'une matrice carrée A est définie comme suit :

5. Cela ne modifie pas le calcul du déterminant et cela permet d'obtenir une matrice carrée.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

La matrice λI ⁶ est implicitement la matrice identité (matrice avec des 1 dans la diagonale principale et des 0 ailleurs) multipliée par la matrice scalaire λ , nous pouvons donc considérer l'équation caractéristique comme un simple déterminant, avec les λ soustraits de chaque élément de la diagonale qui a été fixée à 0. Ainsi :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} - \lambda & a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Mais ce déterminant sera une équation polynomiale en n correspondant à l'ordre ($n \times n$) de la matrice. Prenons l'exemple d'une matrice 2×2 . Supposons que nous ayons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } \det(A - \lambda I) = 0 \text{ est } \det \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 4 \\ 5 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

En multipliant, on obtient :

$$(2 - \lambda)(1 - \lambda) - (5 \times 4) = 0$$

ou

$$\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$$

une équation quadratique avec des racines, des valeurs propres ou des valeurs caractéristiques de :

$$\frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} \text{ d'où } \lambda_1 = 6.00, \quad \lambda_2 = -3.00$$

Bien que ces racines soient des nombres réels, l'une d'entre elles est négative. On peut le constater en examinant A : son déterminant est négatif donc il ne s'agit pas d'une matrice définie positive.

Nous nous intéresserons souvent aux valeurs propres des matrices symétriques où les éléments hors diagonale sont des nombres décimaux et les éléments diagonaux sont des 1. On peut montrer que toutes les matrices symétriques ont des valeurs propres réelles et que si elles sont également définies positives, les valeurs propres seront positives. Par exemple :

6. Il y a sans doute ici une faute de frappe dans le manuscrit original : la matrice identité est I et non λI .

$$A = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.75 & 0.83 \\ 0.75 & 1.00 & 0.41 \\ 0.83 & 0.41 & 1.00 \end{pmatrix}$$

a l'équation caractéristique :

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 1.5805\lambda + 0.0909 = 0$$

dont les racines sont :

$$\lambda_1 = 2.3416$$

$$\lambda_2 = 0.5929$$

$$\lambda_3 = 0.0655$$

Toutes ces valeurs sont réelles et positives donc A est définie positive. La somme des valeurs propres est égale à 3, l'ordre de la matrice, l'ordre de l'équation caractéristique et la somme des éléments de la diagonale principale connue sous le nom de *trace* de la matrice.

Jusqu'à présent, nous nous sommes limités à des manipulations algébriques. Passons à nouveau à la géométrie et traitons, pour simplifier, des matrices 2×2 . Supposons que nous ayons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons considérer les éléments de la ligne ou de la colonne (nous traiterons des lignes dans ces exemples) comme les coordonnées de points dans un plan qui définissent deux vecteurs à partir de l'origine (figure 4).

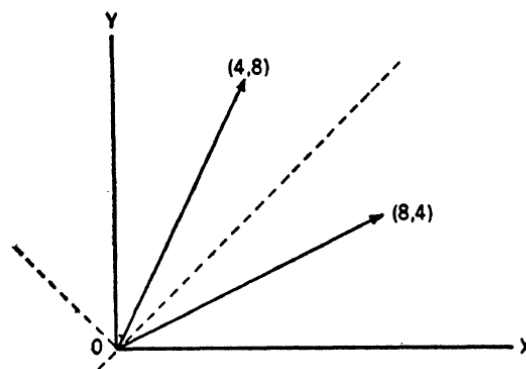


Figure 4 : L'étirabilité (lignes pointillées) résultant de deux vecteurs de ligne (lignes pleines)

La matrice A a pour équation caractéristique $\lambda^2 - 8\lambda - 48 = 0$ avec des racines $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = -4$. Que signifient *réellement* les valeurs de λ_1 et λ_2 ? La meilleure façon de comprendre leur signification est peut-être de les considérer comme des « coefficients d'étirabilité ». Imaginez nos deux vecteurs comme un petit « cluster » entouré d'une ellipse. Si les vecteurs sont proches l'un de l'autre, nous pourrions « ajuster » une ellipse très allongée le long de l'axe primaire dont le segment le plus large correspondrait à la longueur de l'axe secondaire. En gros, λ_1 est la quantité d'extension le long du premier axe et λ_2 est la quantité d'extension le long du second.

Si nous rapprochons de plus en plus V_1 de V_2 (ou vice versa), nous obtiendrons :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

dont l'équation caractéristique est :

$$\lambda^2 - 12\lambda + 0 = 0 \quad \text{alors} \quad \lambda_1 = 12, \lambda_2 = 0$$

L'étirabilité de notre ellipse est encore de 12 le long de l'axe principal mais elle est de 0 le long du second car notre « ellipse » s'est réduite à une ligne qui, bien sûr, a une largeur nulle. Supposons que nous ayons deux vecteurs orthogonaux ou à angle droit l'un par rapport à l'autre (figure 5). Soit :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

dont l'équation caractéristique est $\lambda^2 + 0\lambda - 80 = 0$ avec les valeurs propres $\lambda_1 = +8.95$, $\lambda_2 = -8.95$.

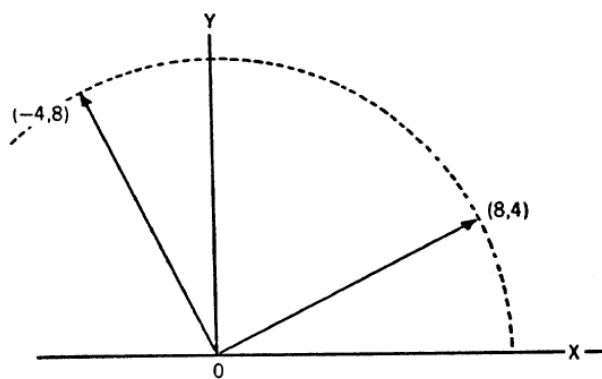


Figure 5 : La figure circulaire ou « ellipse » à partir de vecteurs orthogonaux

Comme on peut s'y attendre, lorsque les vecteurs de même longueur sont à angle droit l'un par rapport à l'autre, notre ellipse est étirée de la même

manière dans les deux directions et devient donc un cercle avec les mêmes indices d'étirabilité pour ses axes.

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres

À chaque valeur propre, ou coefficient d'étirement d'une matrice, est associé un vecteur propre. Mathématiquement, il s'agit d'un vecteur dont la *direction* n'est pas modifiée par sa multiplication par la matrice d'origine qui est considérée dans ce contexte comme un opérateur (Higman, 1964, 16-17). Un opérateur linéaire est simplement une matrice qui peut modifier la valeur d'un vecteur. Par exemple, si un groupe d'agriculteurs polynésiens pionniers en Alaska choisit de cultiver des fruits à pain et rejette le seigle, nous pourrions décrire leur choix pendant l'année de colonisation (t_0) comme un vecteur fruits à pain-seigle :

$$V_{br} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

Si Mère Nature récompense le choix du seigle mais punit le choix culturel du fruit à pain, on peut s'attendre à ce que certains agriculteurs en tirent une leçon et fassent un meilleur choix l'année suivante (R. Bush et F. Mosteller, 1955). Soit A l'opérateur matriciel :

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$$

qui multiplie le vecteur pain-seigle à des périodes successives (figure 6).

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t_0 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Breadfruit} \\ \text{Rye} \end{matrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 0.60 \\ 0.40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2 \\ 0.48 \\ 0.52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_3 \\ 0.444 \\ 0.556 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_4 \\ 0.4332 \\ 0.5668 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_5 \\ 0.42996 \\ 0.57004 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_6 \\ 0.428988 \\ 0.571012 \end{pmatrix}$$

Ici, nous changeons la *direction* du vecteur, donc le vecteur original V_{br} n'était pas un des vecteurs propres de l'opérateur A . Mais remarquez comment les éléments de V_{br} convergent vers les valeurs :

$$V_{bf}^n = \begin{pmatrix} 0.428 \\ 0.572 \end{pmatrix}$$

et comment les vecteurs successifs oscillent progressivement vers ce point fixe. À terme, selon ce modèle un peu naïf, les agriculteurs cultiveront 57%

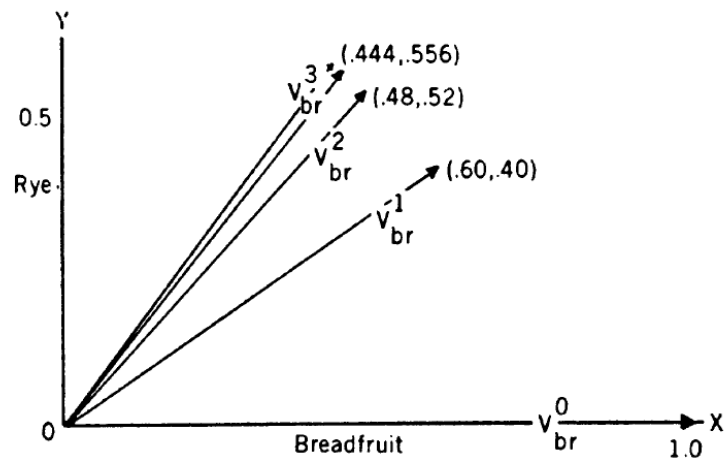


Figure 6 : Un modèle d'apprentissage simple : le vecteur pain - seigle convergeant vers le vecteur propre principal

de seigle, mais il y aura toujours, dans la profession agricole polynésienne, un groupe qui résistera au changement et continuera de se languir du fruit à pain. Cette résistance aux idées nouvelles n'est pas inconnue dans d'autres professions⁷. Prenons d'autres exemples et continuons à considérer les aspects géométriques et algébriques (figure 7). Si :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

l'équation caractéristique est $\lambda^2 - 8\lambda - 48 = 0$ avec les racines $\lambda_1 = 12$ et $\lambda_2 = -4$.

À chacune de ces valeurs propres est associé un vecteur propre : une fois encore, il s'agit d'un vecteur dont la *direction* n'est pas modifiée par la multiplication par la matrice, bien que sa longueur *puisse* être augmentée ou diminuée. Nous pouvons évaluer les vecteurs propres de ces exemples simples en substituant tour à tour les valeurs propres. Ainsi, lorsque $\lambda_1 = 12$:

$$\begin{aligned} 4v_1 + 8v_2 &= 12v_1 \\ 8v_1 + 4v_2 &= 12v_2 \\ \text{ou } 8v_1 &= 8v_2 \\ \text{donc } \frac{v_1}{v_2} &= \frac{8}{8} = 1 \end{aligned}$$

La plus grande valeur propre est associée à un vecteur dont les éléments sont toujours dans le rapport 1 : 1. Il s'agit d'une droite partant de l'origine et

7. Ce jugement de valeur n'est sans doute pas nécessaire à la démonstration de l'auteur.

ayant une pente de 1. Dans ce cas particulier, elle coupe en deux les deux vecteurs $(4, 8)$ et $(8, 4)$. De même, associé à la plus petite valeur propre ($\lambda = -4$), on a :

$$\begin{aligned} 4v_1 + 8v_2 &= -4v_1 \\ 8v_1 + 4v_2 &= -4v_2 \\ \text{ou } 8v_1 &= -8v_2 \\ \text{donc } \frac{v_1}{v_2} &= \frac{-1}{1} \end{aligned}$$

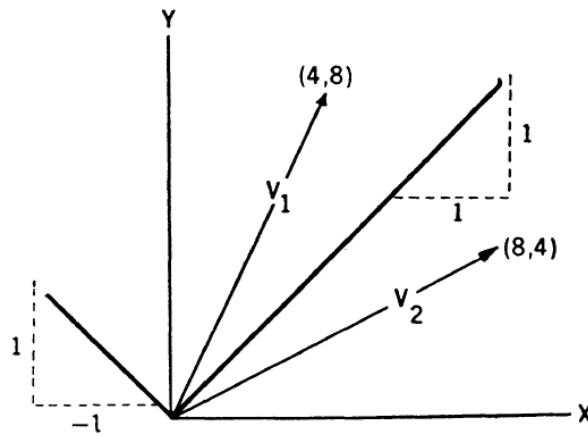


Figure 7 : Les pentes des vecteurs propres (lignes épaisses) résultant des vecteurs de ligne

Il s'agit d'un vecteur dont la pente est de -1 et qui est donc clairement à angle droit avec le premier. Cette propriété d'orthogonalité sera toujours valable pour les matrices symétriques.

Pour en revenir à nos agriculteurs polynésiens en Alaska, nous avons l'opérateur :

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$$

dont l'équation caractéristique est $\lambda^2 - 1.30\lambda + 0.30 = 0$ et les valeurs propres $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 0.3$.

Les vecteurs propres sont :

$$\begin{array}{lcl}
0.6v_1 + 0.3v_2 = 1.0v_1 & & 0.6v_1 + 0.3v_2 = 0.3v_1 \\
0.4v_1 + 0.7v_2 = 1.0v_2 & \text{et} & 0.4v_1 + 0.7v_2 = 0.3v_2 \\
\text{d'où } \frac{v_1}{v_2} = \frac{0.3}{0.4} & & \text{d'où } \frac{v_1}{v_2} = \frac{0.3}{0.3}
\end{array}$$

Remarquez, en ce qui concerne le premier vecteur propre, que si nous prenons $3/7$ et $4/7$ de 100%, nous obtenons 42.8% et 57.2%, la proportion d'« état stable » des producteurs d'arbres à pain et de seigle.

L'interprétation géographique des valeurs propres et des vecteurs propres

Après avoir indiqué que tout tableau carré d'informations peut être considéré comme une matrice pour laquelle il existe une équation polynomiale caractéristique dont les racines, ou valeurs propres, peuvent présenter un intérêt, revenons à l'intention initiale de cet article et voyons comment ces valeurs peuvent être interprétées dans un contexte géographique.

En tant que géographes, nous sommes continuellement confrontés à des cartes. Compression, abstraction et simplification de la réalité (D. Hawkins, 1964 ; M. Polyani, 1963 ; S.Toulmin, 1960), la carte est notre modèle de base, un moyen de sélectionner certaines caractéristiques du monde chaotique qui nous entoure tout en les conservant dans leur contexte spatial. Pourtant, la carte nous offre peu de possibilités de manipuler directement ses informations afin d'étendre notre compréhension des phénomènes ou de la région représentés. Pour réaliser de tels gains de connaissance, nous pouvons toujours questionner les modèles et les structures que nous observons sur la carte et spéculer sur les processus spatiaux sous-jacents. Une observation simple et directe n'est pas toujours suffisante pour révéler ces hypothèses dont la confirmation ou l'infirmité augmente nos connaissances. Il peut être tout aussi important de transformer les éléments d'information représentés sur la carte en nombres, présents à diverses échelles, pouvant être manipulés mathématiquement (figure 8).

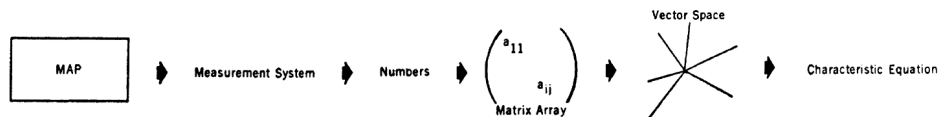


Figure 8 : Le flux d'informations de la carte à l'équation caractéristique

Bien qu'ils soient très différents, les exemples qui suivent ont tous en commun le schéma procédural décrit ci-dessus. Les informations facilement

disponibles sur une carte sont extraites sous forme numérique. Elles sont ensuite présentées sous forme de matrice carrée et traduites dans la géométrie de l'espace vectoriel approprié. Les valeurs propres, et parfois les vecteurs propres de la matrice, sont ensuite examinés pour voir si l'on peut obtenir des informations utiles en interprétant ces valeurs caractéristiques, littéralement des valeurs qui sont *caractéristiques* de la *structure* des informations que nous avons extraites de notre carte originale.

Valeurs propres et rugosité du terrain

Bien que la notion de rugosité soit difficile à définir, nous reconnaissons intuitivement différents degrés de convolution du terrain, des plaines « plates » aux collines « vallonnées » en passant par les sommets « déchiquetés ». Supposons que nous extrayons des feuilles topographiques les informations sur les hauteurs relatives des points dans un espace d'échantillonnage triangulaire. Notre matrice triangulaire inférieure est un enregistrement des courbes de niveaux correspondant aux localisations des éléments de la matrice (figure 9). Ainsi, si T est une « matrice de terrain » triangulaire, nous pouvons définir $A = T + T^t + I$, une matrice symétrique carrée avec son équation caractéristique, ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Nous entrons une trace, ou diagonale principale des 1, afin de disposer d'une norme commune à des fins de comparaison. L'extraction de cette partie triangulaire, plutôt que de la matrice carrée, est une simple commodité mathématique, à la fois parce que nous voulons des valeurs propres réelles (bien que les valeurs imaginaires ne doivent pas être écartées trop rapidement) et parce que les routines informatiques actuellement disponibles traitent les matrices symétriques plus facilement. La matrice enregistre en fait les valeurs des contours sous forme de nombres décimaux relatifs au point le plus élevé après réduction à un repère qui peut être le niveau de la mer.

Considérons les différentes options. Si une matrice triangulaire était placée sur une surface absolument plane, chaque élément serait identique. Après réduction, nous pourrions considérer la matrice résultante de $n \times n$ comme une série de n vecteurs de longueur 1, tous superposés. Le sphéroïde dans l'espace n s'effondrerait en une seule ligne et nous aurions une valeur propre principale de n et $(n - 1)$ valeurs propres restantes à 0. Supposons que notre surface plane soit parsemée de drumlins⁸, ou d'autres caractéristiques morphologiques tout aussi intéressantes [pour la démonstration]. Notre matrice refléterait l'écart croissant par rapport au plan (la « rugosité » ?) et réduirait notre première valeur propre à une valeur légèrement inférieure à n . À l'autre extrême, nous pourrions nous attendre à ce que l'équation caractéristique d'une matrice de terrain très montagneux ait une racine principale relativement petite. Si nous disposions d'une caméra mobile à image fractionnée, nous pourrions montrer qu'à mesure qu'une surface plane devient de

8. « Un drumlin [...] est une colline allongée constituée par les restes de la moraine de fond d'un ancien glacier ». Source : Wikipédia.

plus en plus irrégulière, sa représentation vectorielle ressemblerait de plus en plus à un porc-épic à n dimensions dont les épines changeraient de longueur et de direction.

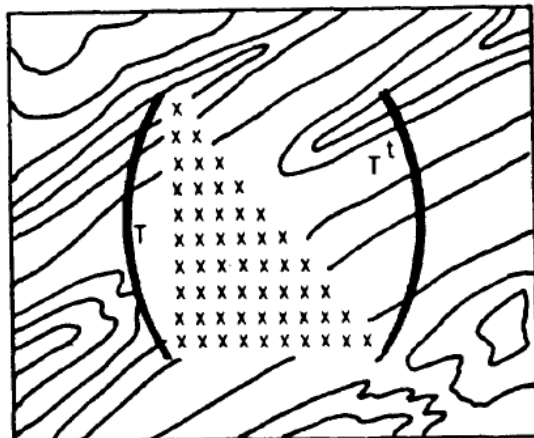


Figure 9 : Une « matrice de terrain » triangulaire et sa transposition superposée à une carte d'isolignes

Trois zones contrastées de l'est des États-Unis ont été échantillonnées à des fins d'illustration : (1) la plaine côtière du New Jersey ; (2) une zone sur le plateau vallonné d'Allegheny ; et (3) une zone adjacente au sud-est de la région *Ridge and Valley* (crêtes et vallées)⁹ du centre de la Pennsylvanie.

Tableau I : Valeurs propres des matrices de terrain

<i>Localisation</i>	$\lambda_1 / \sum_{i=1}^{40} t_i$	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$
Plaine côtière du New Jersey	0.6628	8.34
Plateau d'Allegheny	0.2451	3.84
<i>Ridge and Valley</i>	0.2096	3.12

L'examen de la première valeur propre des trois équations caractéristiques (tableau I) semble confirmer les notions intuitives ci-dessus. La plaine plate du New Jersey a de loin la valeur propre la plus élevée (exprimée comme une proportion de la somme des éléments traces) et il y a une progression plausible à travers la région du plateau vers la section *Ridge and Valley*.

Cinq éléments doivent être notés comme pistes possibles pour une exploration plus approfondie. Premièrement, il pourrait être intéressant de faire

9. Allegheny se situe dans les Appalaches en Pennsylvanie, la *Ridge and Valley Province* désigne une partie des Appalaches à cheval sur plusieurs États.

tourner la matrice dans le plan x, y pour voir si la question de l'orientation du terrain pourrait être éclairée. Avec les exemples du plateau et de la plaine côtière, on ne s'attend pas à obtenir des valeurs propres très différentes. Ce n'est peut-être pas le cas de l'exemple des crêtes et des vallées qui présente un modèle linéaire distinct et fortement orienté. Deuxièmement, une étude des tendances générales de la surface pourrait être intégrée. Un *plan incliné* est-il lisse ? L'extraction des principales tendances (rotations dans les plans x, z et x, y) et l'examen des valeurs propres de la surface « résiduelle » pourraient être fructueux. Troisièmement, nous devons nous rappeler que notre matrice est également un « filtre » du terrain. Si nous espaçons les éléments de l'échantillon (points) dans l'espace, nous captions de grandes « ondes » ; si nous réduisons la distance et augmentons la résolution de notre lentille matricielle, nous payons le prix pour capter les petites caractéristiques (W.R. Tobler, 1966a et 1966b ; F.W. Preston, 1966 ; W.C. Krumbein, 1966). Ensuite, supposons que nous ayons pris une matrice carrée, non symétrique, directement sur le terrain, plutôt que de construire une matrice symétrique à partir de notre échantillon triangulaire, de sa transposée et de la matrice d'identité. Les vecteurs propres associés aux lignes ne seraient pas les mêmes que ceux associés aux colonnes. Nous pourrions représenter la matrice de terrain originale en fonction de ses valeurs propres et de ses vecteurs propres de lignes et de colonnes (Bickley et Thompson, 1964, 94-101). La décomposition d'une telle matrice en composantes additives est appelée résolution spectrale et une telle analyse du terrain pourrait bien mener à des découvertes fructueuses qui sont véritablement *morphologiques et géographiques* plutôt que simplement géologiques. Enfin, des recherches récentes sur l'analyse des vecteurs propres topographiques ont indiqué que nous pourrions avoir des pistes fructueuses sur la question de la compaction des données cartographiques. En effet, alors que d'énormes matrices de l'ordre de plusieurs milliers d'unités imposent des exigences impossibles à satisfaire pour le stockage des ordinateurs, même géants, des approximations très efficaces par l'addition de vecteurs propres réduisent ces exigences de plusieurs ordres de grandeur (M.A. Holley, 1966).

Valeurs propres et matrices de connectivité

Tout réseau peut être considéré comme un nombre de points ou de nœuds reliés par des lignes. Considéré de cette manière très simple, nous pouvons traduire un réseau de cours d'eau, de routes ou de lignes aériennes sur une carte, par exemple, en une matrice de connectivité en enregistrant sur une échelle binaire (1 ou 0) l'existence ou non de connexions directes entre les points (W. Garrison et D. Marble, 1965). Dans les exemples suivants, nous définirons chaque lieu comme étant connecté à lui-même ¹⁰, nous aurons donc

10. Manipuler une matrice avec une diagonale non nulle est un choix relativement rare en théorie des graphes et en analyse de réseau.

affaire à des matrices de connectivité symétriques avec des diagonales remplies de 1.

Tableau II : Vecteurs propres associés à la matrice de connectivité. Réseau routier ougandais, 1921

Nœud	<i>Vecteur propre associé à :</i>			
	$\lambda_1 = 3.65$	$\lambda_2 = 2.83$	$\lambda_3 = 2.62$	$\lambda_4 = 2.45$
I. Kampala	64	7	0	20
2. Luweru	24	4	0	14
3. Mityana	29	8	32	-3
4. Mubende	13	8	51	-25
5. Kyenjojo	6	6	51	-33
6. Fort Portal	2	3	32	-23
7. Entebbe	24	4	0	14
8. Jinja	24	5	0	27
9. Busenbatia	11	3	0	19
10. Masaka	35	14	-32	-36
11. Mbirizi	15	11	-32	-48
12. Mbarabara	6	6	-20	-33
13. Bukata	13	8	-20	-25
14. Kiboga	29	-22	0	13
15. Hoima	14	-47	0	-1
16. Masindi	7	-64	0	-15
17. Butiaba	3	-35	0	-10
18. Masindi Port	3	-35	0	-10

Le réseau routier de l'Ouganda, 1921 et 1935

Considérons le schéma de base du réseau routier principal de l'Ouganda en 1921 (la matrice de connectivité est trop encombrante pour être reproduite ici), traduit de la carte en un polynôme d'ordre 18 (figure 10). Au moins les quatre premières racines de l'équation caractéristique sont positives et à chacune de ces valeurs propres est associé un vecteur propre qui présente un intérêt considérable du point de vue du géographe (tableau II). Le premier vecteur propre est une ligne partant de l'origine et située dans un espace à dix-huit dimensions. Les vecteurs représentant les villes bien connectées non seulement se situeront au milieu d'un grand nombre de dimensions mais auront tendance, à leur tour, à se situer près de l'axe principal de notre sphéroïde aplati enveloppant. Les villes moyennement bien connectées ne se trouveront pas au milieu d'autant de dimensions que les villes bien connectées, elles auront tendance à former de petits groupes structurels à part.

Tableau III : Vecteurs propres associés à la matrice de connectivité. Réseau routier ougandais, 1935

<i>Noeud</i>	<i>Vecteur propre associé à :</i>			
	$\lambda_1 = 4.64$	$\lambda_2 = 4.08$	$\lambda_3 = 4.00$	$\lambda_4 = 3.43$
1. Kampala	44	11	7	28
2. Luweru	23	9	3	27
3. Mityana	34	13	1	27
4. Mubende	37	12	-11	-12
5. Kyenjojo	16	-4	-13	-9
6. Fort Portal	5	-1	-5	-11
7. Entebbe	21	8	3	23
8. Jinja	18	-10	30	5
9. Busenbatia	11	-20	38	-7
10. Masaka	35	15	-5	-22
11. Mbirizi	23	11	-7	-33
12. Mbarabara	12	8	-5	-46
13. Bukata	10	5	-2	-9
14. Kiboga	27	0	-9	7
15. Hoima	17	-22	-22	2
16. Masindi	11	-43	-29	3
17. Butiaba	8	-21	-17	2
18. Masindi Port	3	-14	-10	1
19. Nakasongolo	6	3	1	11
20. Ntungamo	4	3	-3	-31
21. Busia	12	-23	45	-9
22. Mbale	9	-26	39	-12
23. Bukoba	13	8	-3	-28
24. Ibanda	3	3	-1	-19
25. Katunguru	3	1	-3	-17
26. Kabale	1	1	-1	-13
27. Gulu	6	-35	-20	2
28. Lira	7	-40	-18	1
29. Tororo	6	-16	28	-9
30. Soroti	4	-22	7	-5
31. Kitgum	4	-25	-13	1

structurels bien avant avec son système de correspondance avec les chefs suprêmes. Ainsi, en 1921, les Britanniques n'avaient fait que des superpositions et des extensions d'un système de liens antérieur et nous pouvons considérer

à 1966. Source : Wikipédia.

le réseau routier principal comme la hiérarchie administrative littéralement gravée dans le paysage. Les valeurs de chaque ville sont intuitivement plausibles, ce qui procure un certain confort intellectuel. Remarquez comment Kampala elle-même, de loin la ville la mieux connectée en raison du nombre de ses liaisons directes *et* de sa position centrale, a la valeur la plus élevée (64). Entebbe est également élevée (24) mais, en raison de sa nature terminale, elle est inférieure à Masaka (35), Mityana (29) et Jinja (28) qui ont un caractère plus central. Cela se répète également à un niveau inférieur, car bien que Mbirizi (15) et Bukata (13) soient tous deux à une connexion de Masaka (35), la nature terminale de Bukata sur le lac Victoria abaisse sa valeur en dessous de Mbirizi sur la route du point terminal de Mbarabara.

La deuxième valeur propre et le deuxième vecteur propre « font ressortir » un petit réseau régional autour du nœud de Masindi, tandis que le troisième différencie les modèles linéaires des routes de Mityana à Fort Portal et de Bukata à Mbarabara. Enfin, le quatrième vecteur pourrait peut-être être interprété comme un contraste entre « interconnexion interne » et « périphérie ». La première notion est donc liée à la première composante qui a été interprétée comme un effet de champ. Ainsi, nous pourrions avoir ici la composante *non linéaire* de l'effet de champ, ceci apparaît vraisemblable au vu de ce que nous savons de la décroissance non linéaire du champ d'une ville avec la distance. Il est peut-être utile de noter que si nous pondérons chaque élément de nos vecteurs propres par la racine carrée de la valeur propre ($v_i\sqrt{\lambda}$), de sorte que les éléments des vecteurs propres associés aux plus petites valeurs propres voient successivement leur échelle réduite, nous nous retrouvons plongés dans une analyse en composantes principales.

Si nous examinons maintenant la même zone en 1935, nous pouvons voir comment les caractéristiques structurelles de 1921 ont été renforcées par les extensions du réseau dans les années intermédiaires (tableau III). Le premier vecteur propre peut toujours être interprété comme le nœud de Kampala et, tandis que le second correspond toujours principalement à la sous-région de Masindi, les villes nouvellement reliées de Lira et de Gulu ont clairement une importance structurelle. Elles deviennent ensuite de plus en plus compétitives et importantes en terme d'organisation spatiale, comme nœuds d'une zone rendue accessible par le développements du coton dans les années 1940 et 1950. Les villes de l'est ont également des valeurs un peu plus élevées sur ce vecteur propre et, si on les inclut, la deuxième plus grande racine et son vecteur propre associé semblent faire ressortir un sous-réseau du nord qui contraste fortement avec le sud et le sud-ouest. Une certaine confirmation vient du troisième vecteur propre qui divise clairement le grand réseau nord en deux sous-régions nord-ouest et nord-est distinctes et contrastées. Seul le quatrième vecteur propre fait finalement ressortir un réseau sud centré sur le nœud de Mbarabara, il s'agit du développement du schéma purement linéaire d'organisation des connexions existant 14 ans auparavant.

Le réseau routier syrien

Le réseau de transport de la Syrie représente un exemple intéressant de la manière dont les caractéristiques structurelles ou de connectivité peuvent être perturbées par les changements politiques (N. Kanaan, 1965). La Syrie est issue du démembrement de l'empire turc après la première guerre mondiale et les anciennes routes vers les grands ports de Beyrouth et d'Alexandrette ont été coupées par de nouvelles frontières politiques, de sorte que le port mineur d'Al Latiqiya a dû supporter le poids des exportations. De manière significative, la réorganisation spatiale que ces changements disloquants ont suscités ne se reflète toujours pas dans les caractéristiques structurelles du réseau routier près d'un demi-siècle plus tard (figure 11).

Tableau IV : Vecteurs propres associés à la matrice de connectivité. Réseau routier syrien, 1963

<i>Nœud</i>	<i>Vecteur propre associé à :</i>			
	$\lambda_1 = 5.11$	$\lambda_2 = 4.26$	$\lambda_3 = 3.90$	$\lambda_4 = 3.67$
Ain Deiwar	0.00	-0.00	0.00	0.02
Karatchok	0.00	-0.00	0.00	0.01
Tell Kotchek	0.00	-0.00	0.00	0.02
Dmir Kabar	0.00	-0.00	0.01	0.05
Al Kamishli	0.00	-0.00	0.02	0.08
Al Aasakeh	0.02	-0.02	0.05	0.16
Ras-el-Ain	0.00	-0.00	0.01	0.06
Abou Kamal	0.01	-0.01	0.04	0.11
Deir-ez-Zor	0.07	-0.05	0.11	0.30
Rakkah	0.19	-0.00	0.00	0.27
Tell Abyad	0.06	0.00	-0.02	0.14
Ain-el-Arab	0.06	0.01	-0.09	0.10
Manbij	0.07	0.02	-0.12	0.08
Jarablus	0.18	0.05	-0.23	0.14
Al-Bab	0.12	0.03	-0.12	0.07
Aleppo	0.45	0.08	-0.25	0.11
Izaz	0.18	0.05	-0.21	0.08
Ifrin	0.11	0.04	-0.14	-0.03
Rajon	0.02	0.01	-0.04	-0.01
Harem	0.13	0.03	-0.05	-0.18
Ibilib	0.24	0.06	-0.15	-0.16
Jisr-esh-Shagour	0.31	0.04	0.00	-0.32
El Ma'arra	0.19	0.04	-0.10	0.00
Maarrat-en-Nouman	0.33	0.04	-0.06	-0.08
Al Lataquiya	0.08	0.01	0.02	-0.17
Al-Haffeh	0.09	0.00	0.08	-0.23
Jebleh	0.02	0.00	0.05	-0.14

Banias	0.02	-0.00	0.15	-0.21
Kadmous	0.07	-0.01	0.24	-0.28
Misyaf	0.13	-0.03	0.24	-0.13
Hama	0.40	-0.01	0.17	-0.02
Salamiya	0.19	-0.05	0.19	0.16
Horns	0.20	-0.15	0.37	0.19
Safita	0.04	-0.02	0.23	-0.17
Tartous	0.01	-0.01	0.13	-0.14
Tell Kalakh	0.09	-0.06	0.29	-0.04
Palmayra	0.08	-0.13	0.23	0.25
Douma	0.08	-0.22	0.18	0.17
Damascus	0.03	-0.45	-0.05	0.02
Zabadani	0.00	-0.14	-0.01	0.00
Sab-Biar	0.00	-0.14	-0.01	0.00
Shahba	0.00	-0.23	-0.07	-0.02
Suweida	0.00	-0.32	-0.15	-0.10
Salkhad	0.00	-0.16	-0.09	-0.07
Bosra	0.00	-0.22	-0.12	-0.09
Dar'a	0.00	-0.25	-0.11	-0.07
Feek	0.00	-0.17	-0.07	-0.04
Onietra	0.01	-0.32	-0.09	-0.03
Sheikh Miskin	0.01	-0.41	-0.14	-0.07

Le premier vecteur propre fait ressortir deux fortes régions nodales centrées sur Alep et Hama, tandis que les deuxième et troisième font ressortir les nœuds de Damas et Homs. Ainsi, les principaux centres d'intérêt sont toujours les vieilles villes situées au pied des montagnes qui longent la côte, des villes qui ont eu une importance historique considérable en tant que points de rupture de charge ou ports du désert pour les chameaux qui suivaient les anciennes pistes des caravanes vers l'est. C'est là qu'ils étaient déchargés et que les cargaisons étaient divisées en petits lots pour être transportées à dos d'âne sur les sentiers montagneux escarpés jusqu'aux ports maritimes de la Méditerranée. Seul le quatrième vecteur propre révèle un sous-réseau intérieur, dans le désert, et, de manière significative, Al Latiquiya n'apparaît jamais comme un point initial de réseaux, même mineurs. L'organisation de l'espace, telle qu'elle est reflétée par les caractéristiques structurelles pures du réseau routier, semble encore concentrée de manière séculaire malgré les efforts déployés au cours des 46 dernières années pour réorganiser la zone et l'orienter vers un nouveau débouché d'exportation.

Mesures d'orientation et champs tensoriels

Lorsque nous parlons de motifs, de formes et de structures spatiales, nous sommes souvent confrontés à des questions d'orientation (A.E. Scheidegger,

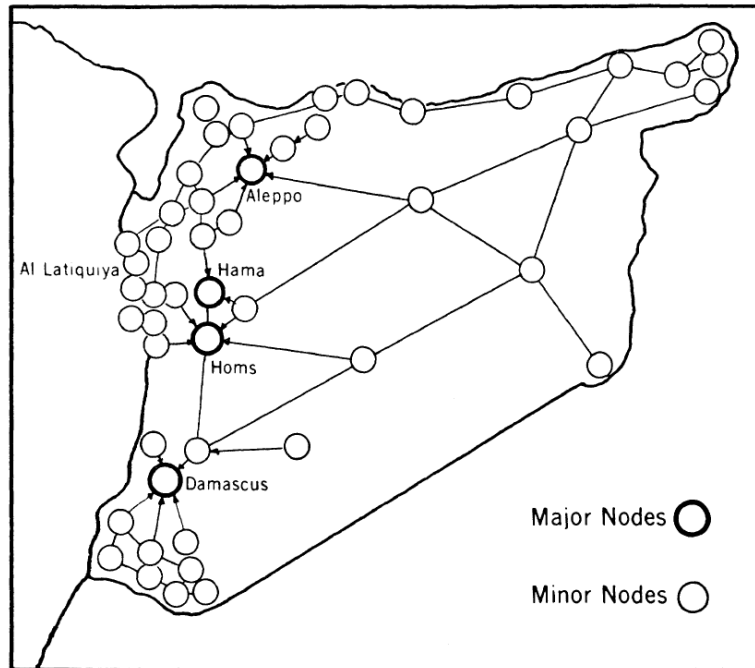


Figure 11 : Le réseau routier simplifié de la Syrie

1965). Un grand nombre de mesures directionnelles sont disponibles et, à partir de celles-ci, nous pouvons souhaiter calculer la « meilleure » direction ou la direction moyenne. En géomorphologie, les mesures de l'orientation des plans d'assise, des grains de sable, des galets des cours d'eau, etc. peuvent être intéressantes; en géographie humaine, les exemples peuvent aller des études culturelles de l'orientation des habitations en Chine par la géomancie, actuellement étudiée par le géographe B. Boxer, aux composantes d'orientation des réseaux de transport.

Suivant la notation d'A.E. Scheidegger, nous supposons que chaque axe n_i est un vecteur unitaire avec des composantes n_{ix} , n_{iy} et n_{iz} dans un système orthogonal de coordonnées. Dans un espace bidimensionnel, n_i n'aura que les composantes n_{ix} et n_{iy} (figure 12) et, si nous mesurons l'orientation toujours sous la forme d'un azimut (nord ou sud « quelques degrés » est ou ouest), alors :

$$n_{ix} = \cos \alpha$$

$$n_{iy} = \sin \alpha$$

Notez trois choses : (1) nos vecteurs d'orientation sont supposés être d'une longueur 1 (nous ne nous soucions pas de savoir si notre caillou de rivière fait

3 ou 4 pouces de long puisque nous ne nous intéressons qu'à la *direction*) ; (2) bien qu'il soit pratique de mesurer notre azimut à partir de l'axe nord-sud, la direction dans laquelle nous prenons nos relevés n'a pas d'importance si, bien sûr, nous sommes cohérents ; et (3) nous devons nous rappeler de surveiller les signes de nos sinus et cosinus, c'est-à-dire que si les relevés sont dans les quadrants nord-est et sud-est, les signes de nos sinus seront positifs et négatifs ailleurs ; et si les relevés sont dans les quadrants sud-est ou sud-ouest, les signes des cosinus seront négatifs et positifs ailleurs. Ainsi, pour chaque relevé azimutal, nous aurons deux informations : un n_{ix} , c'est-à-dire plus ou moins $\cos \alpha$ selon le quadrant, et un n_{iy} , c'est-à-dire plus ou moins $\sin \alpha$.

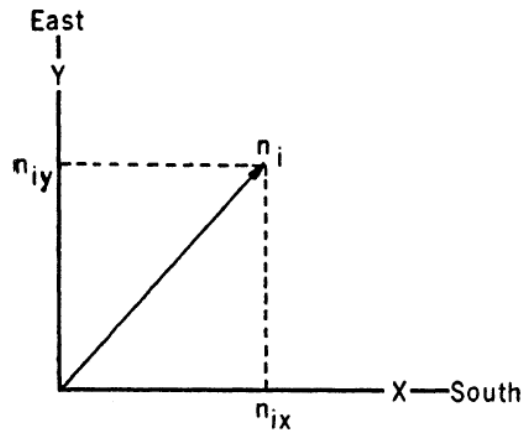


Figure 12 : Les composantes dans l'espace à deux dimensions d'un vecteur d'orientation

Pour le cas tridimensionnel, nous devons prendre en compte la *pen*te, dont nous représenterons l'angle par p . Alors :

$$\begin{aligned} n_{ix} &= \cos \alpha \cdot \cos p \\ n_{iy} &= \sin \alpha \cdot \cos p \\ n_{iz} &= -\sin p \end{aligned}$$

En supposant que les écarts des différents axes par rapport à la moyenne sont normalement distribués, le vecteur moyen X est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de la matrice symétrique A dont les éléments sont les sommes des carrés et des produits croisés des composantes n_{ix} , n_{iy} et n_{iz} . Prenons un exemple.

L'orientation moyenne des galets d'un cours d'eau

Supposons que nous disposions des mesures d'orientation suivantes des axes longs des galets de ruisseau (tableau V).

Alors :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \sum n_{ix}^2 = 2.5950 \\
 a_{22} &= \sum n_{iy}^2 = 2.7370 \\
 a_{33} &= \sum n_{iz}^2 = 0.5353 \\
 a_{12} &= a_{21} = \sum n_{ix}n_{iy} = 0.7359 \\
 a_{13} &= a_{31} = \sum n_{ix}n_{iz} = -0.4000 \\
 a_{23} &= a_{32} = \sum n_{iy}n_{iz} = -0.6789
 \end{aligned}$$

D'où :

$$A = \begin{pmatrix} 2.5950 & & \\ 0.7359 & 2.7370 & \\ -0.4000 & -0.6789 & 0.5353 \end{pmatrix}$$

Une matrice symétrique avec les valeurs propres $\lambda_1 = 3.6005$, $\lambda_2 = 1.9409$ et $\lambda_3 = 0.3260$

et les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 0.6342 \\ 0.7333 \\ -0.2452 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0.7678 \\ 0.6346 \\ -0.0880 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0.0910 \\ 0.2441 \\ 0.9655 \end{pmatrix}$

Comme ces vecteurs propres sont normalisés, ou de longueur 1 :

$$norm||e^{\lambda_i}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 e_i^2}$$

le premier élément du vecteur propre associé à λ_1 est $n_{ix} = \cos \alpha \cdot \cos p$.
Puisque $-\sin p = -0.2452$, $\cos p = 0.9694$. Ainsi :

$$\cos \alpha = \frac{0.6342}{0.9694} = 0.634$$

Et puisque le cosinus (0.6342) et le sinus (0.7333) sont tous deux positifs, le vecteur d'orientation moyen doit se trouver dans le quadrant nord-est, ou N. 50° 42'E. Le dernier vecteur propre est orthogonal aux deux. La pente est de -0.2452.

Tableau V : Exemple hypothétique de l'orientation moyenne des galets d'un cours d'eau

Galet	Azimuth (α)	Pente (p)	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos p$	$-\sin p$	$n_{ix} = \cos \alpha \cdot \cos p$	$n_{iy} = \sin \alpha \cdot \cos p$	$n_{iz} = -\sin p$
1	N. 30 E.	24	0.8660	0.5000	0.9135	-0.4067	0.7911	0.4568	-0.4067
2	N. 20 W.	8	0.9397	-0.3420	0.9903	-0.1392	0.9306	-0.3387	-0.1392
3	S. 40 W.	16	-0.7660	-0.6428	0.9613	-0.2756	-0.7364	-0.6180	-0.2756
4	N. 40 E.	18	0.7660	-0.6428	0.9511	-0.3090	0.7285	0.6114	-0.3090
5	S. 85 E.	13	-0.0872	0.9962	0.9744	-0.2250	-0.0850	0.9707	-0.2250
6	N. 65 E.	21	0.4226	0.9063	0.9336	-0.3584	-0.1515	0.8461	0.3584

L'orientation des réseaux de transport

Peu d'attention semble avoir été accordée à la question de l'orientation des réseaux de transport, bien qu'il puisse être intéressant d'étudier ces propriétés générales et profondément géographiques, notamment sur une base comparative. Par exemple, un pays développé, dont le réseau de transport contemporain reflète de très longs processus historiques et de grands mouvements associés à un niveau élevé d'échanges internes, pourrait n'avoir qu'une très faible orientation générale. D'un autre côté, un pays dont le réseau de transport actuel est le reflet d'un régime colonial ou d'une économie extractive « drainante » pourrait avoir une orientation générale plus forte. En prenant sur la carte un échantillon de l'orientation des principales liaisons routières et en les réduisant à la matrice des composantes 2×2 , on pourrait avoir un aperçu de cette question en comparant le rapport des valeurs propres. Dans certains pays, la différence entre les valeurs propres peut être très faible. La figure englobant les vecteurs n_{ix} et n_{iy} serait presque circulaire avec deux axes de longueur approximativement égale. Cependant, des pays tels que la Tanzanie et la Sierra Leone, qui ont une histoire coloniale et dont l'économie est axée sur l'exportation de matières premières en vrac, pourraient bien avoir un réseau avec une orientation globale assez forte. Cela serait indiqué par des paires assez disparates de valeurs propres associées à leurs matrices d'orientation.

À titre d'illustration, les principaux réseaux routiers de la Sierra Leone et de la Tanzanie ont été échantillonnés avec vingt-sept et dix-neuf quadrats circulaires ne se chevauchant pas (figure 13). À l'intérieur de chaque quadrat, des segments de route ont été délimités entre les principales villes, les terminaux des principaux embranchements routiers et les points limites où les principales routes traversaient les quadrats circulaires. L'orientation des liens routiers a été mesurée sur les lignes droites joignant les nœuds ainsi définis et les composantes n_{ix} et n_{iy} obtenues.

Même lorsqu'elles sont mesurées à une échelle très grossière, il est possible d'interpréter les résultats obtenus de manière plausible. Si l'on prend le rapport des deux valeurs propres comme mesure de la force d'orientation du réseau routier dans un quadrat, des valeurs élevées apparaissent généralement dans les zones où les routes servent principalement de liens de « drainage » ou d'alimentation (figure 14). Ainsi, le long de la voie ferrée et dans des zones telles que la vallée de Kilombero, de nombreux quadrats ont une forte orientation nord-sud, tandis que les valeurs élevées dans le sud reflètent une forte orientation est-ouest. D'autre part, les « zones de développement », comme les régions de Bukoba (1.11), Mwanza (1.38), Tanga (1.29), Lindi (1.30) et Mbeya (1.05-1.36), ont des rapports de valeurs propres faibles qui reflètent leur faible « orientation ».

En Sierra Leone également (figure 15), des interprétations assez similaires peuvent être données. La plupart des quadrats situés le long de la principale

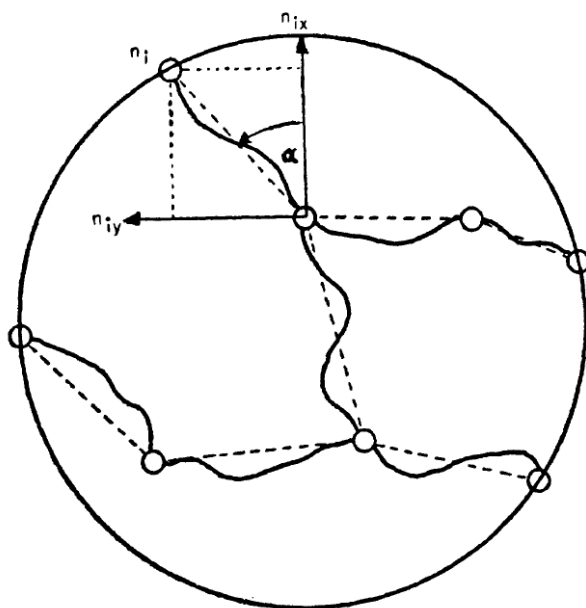


Figure 13 : Quadrat échantillon utilisé pour calculer l'orientation du réseau routier

ligne de chemin de fer présentent des valeurs élevées, reflétant la fonction d'alimentation des routes fortement orientées. La principale exception est le quadrat Bo (1.41) qui est certainement une « île » beaucoup plus développée que les zones environnantes. En général, les quadrats périphériques, moins développés, ont une orientation plutôt forte, tandis que les zones centrales, plus développées, ont des valeurs faibles.

La preuve est peu robuste mais suffisante peut-être pour explorer davantage la question de l'orientation du réseau. Il est certain que les rapports des valeurs propres semblent refléter le degré d'intégration des zones dans l'économie d'échanges internes du pays et, si nous acceptons l'idée que les routes sont le résultat final de nombreuses décisions probabilistes gravées dans le paysage, nous pourrions avoir une mesure valable de la fonction remplie par une zone et du degré d'abandon de l'économie traditionnelle pour entrer dans le monde moderne.

Trois autres points méritent d'être mentionnés comme des pistes à explorer plus avant. Il est clair que l'échelle d'observation est primordiale et, au fur et à mesure que nous décomposons un réseau de transport en ses composantes directionnelles, il serait utile de changer la résolution de notre quadrat pour voir ce que nous captions à diverses « longueurs d'onde » (L. Curry, 1966 ; W.R. Tobler, 1966c ; W.R. James, 1966 ; J.L. Holloway, 1958). Deuxièmement, un système de pondération est nécessaire, le plus évident et

le plus facile étant la multiplication de chaque segment de route (vecteur d'orientation) par sa longueur, et peut-être aussi l'incorporation des données de trafic. Enfin, et cela pourrait être assez surprenant, nous pourrions considérer les matrices des sommes des carrés et des produits croisés lorsque les éléments ont été divisés par N comme des tenseurs d'orientation (Scheidtger, 1965) puisqu'on peut montrer qu'elles sont conformes à la définition d'un tenseur de second rang :

$$f_{\alpha\beta} = i \sum_j f_{ij} \cdot \frac{x_\alpha}{x_i} \cdot \frac{x_\beta}{x_j}$$

Ou, en utilisant la convention de sommation d'Einstein :

$$f_{\alpha\beta} = f_{ij} \cdot c_{ij\alpha\beta}$$

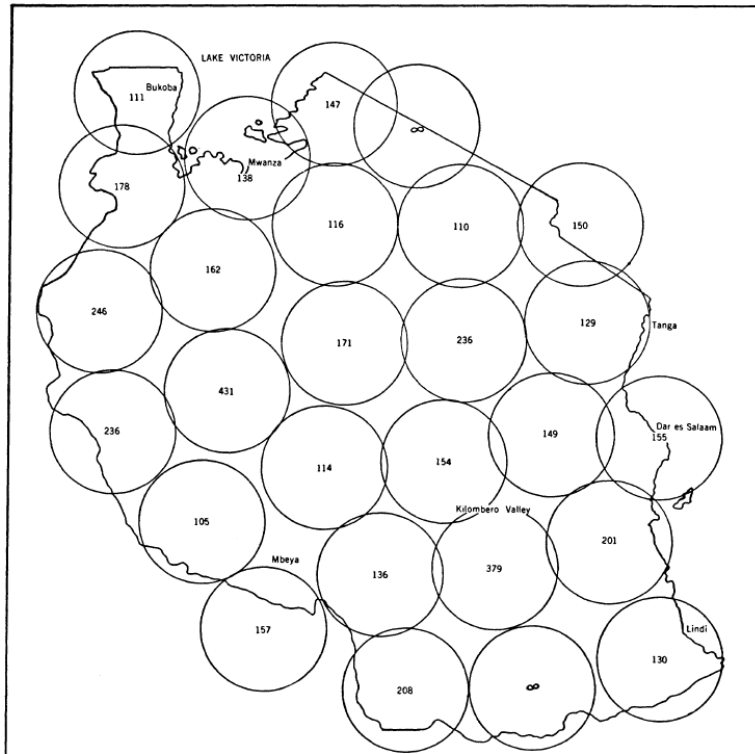


Figure 14 : Tanzania : le rapport des valeurs propres dans les quadrats d'orientation de l'échantillon

En déplaçant le quadrat d'échantillonnage par incréments progressifs sur la surface de la carte et en traçant les projections tangentes aux directions principales du tenseur à chaque point, nous pouvons considérer le résultat comme un champ tensoriel indiquant la variation spatiale de l'orientation

ou de l'« attraction » directionnelle d'une zone. Là encore, en ouvrant et en fermant la lentille de notre quadrat, nous pouvons examiner les composantes d'un tel champ par une sorte d'« analyse de Fourier » intuitive ¹³.

Les valeurs propres des champs d'information moyens

Une composante essentielle de presque tous les modèles de diffusion de Monte Carlo est le champ d'information moyen (C.I.M.), l'expression spatiale de base de la probabilité qu'un agent diffuse une innovation sur des distances données (T. Hägerstrand, 1957 et 1965 ; R. Yuill, 1964). Habituellement, mais pas toujours (L. Bowden, 1965 ; R. Colenutt, 1966), le champ d'information moyen est traité comme un tableau carré symétrique dont le total est 1.

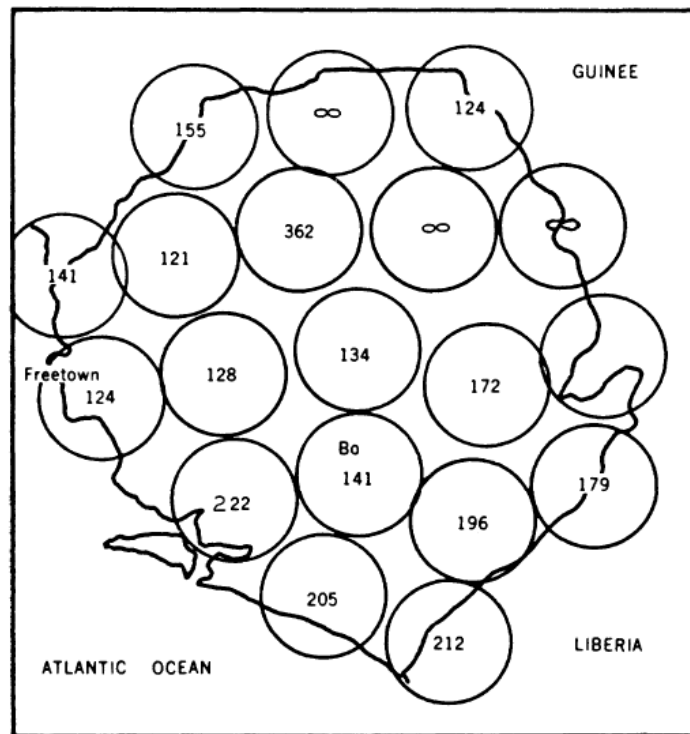


Figure 15 : Sierra Leone : le rapport des valeurs propres dans les quadrats d'orientation de l'échantillon

Considéré comme une matrice, le déterminant d'un C.I.M. symétrique est toujours égal à 0 car les lignes et les colonnes sont linéairement indépendantes

13. Si la première partie de l'article développe les étapes mathématiques pas à pas, le passage relatifs aux tenseurs et à l'analyse de Fourier est beaucoup plus synthétique et peut-être moins aisément compréhensible.

et le plus grand mineur ¹⁴ non nul sera d'ordre $1 + (n - 1)/2$. Ainsi, l'équation caractéristique d'un tel C.I.M. sera associée à $1 + (n - 1)/2$ valeurs propres réelles, le reste étant égal à 0. Cela peut également être vrai pour les champs d'information moyens où il existe un biais directionnel de forme symétrique. Les champs d'information moyens non symétriques, et donc biaisés, peuvent ne pas respecter cette règle.

Considérons le champ suivant de 3×3 utilisé par Yuill :

$${}_yF_{t_0} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.09 & 0.05 \\ 0.09 & 0.44 & 0.09 \\ 0.05 & 0.09 & 0.05 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont :

$$\begin{array}{r} \lambda_1 = 0.48237 \\ \lambda_2 = 0.05763 \\ \lambda_3 = 0.00000 \\ \hline 0.54000 \end{array}$$

dont la somme est 0.54, soit le total des éléments de la diagonale principale ou trace de la matrice. Si nous visualisons la représentation géométrique du C.I.M. dans un espace tridimensionnel, nous avons un grand vecteur et deux autres beaucoup plus petits qui coïncident l'un avec l'autre. À des fins de comparaison, considérons la « portée » ou la « puissance » du C.I.M. comme la valeur de la principale valeur propre exprimée en proportion de l'élément central du champ appelé α . Au fur et à mesure que la communication dans la région devient plus facile et que la friction de la distance diminue, les éléments périphériques du C.I.M. augmenteront aux dépens des valeurs internes et notre vecteur principal se réduira tandis que les autres, linéairement dépendants, augmenteront en longueur et changeront de direction, se rapprochant du vecteur principal contenant la valeur centrale à l'origine du champ. Par exemple, lorsque la friction de la distance diminue, le champ peut se transformer en :

$${}_yF_{t_1} = \begin{pmatrix} 0.06 & 0.11 & 0.06 \\ 0.11 & 0.32 & 0.11 \\ 0.06 & 0.11 & 0.06 \end{pmatrix}$$

avec les valeurs propres :

$$\begin{array}{r} \lambda_1 = 0.40493 \\ \lambda_2 = 0.03507 \\ \lambda_3 = 0.00000 \\ \hline 0.44000 \end{array}$$

14. « Les mineurs d'une matrice sont les déterminants de ses sous-matrices carrées ». Source : Wikipédia.

Le rapport α (tableau VI) est passé de 1.095 à 1.265. Si la friction de la distance diminue encore, alors :

$${}_yF_{t_2} = \begin{pmatrix} 0.07 & 0.13 & 0.07 \\ 0.13 & 0.20 & 0.13 \\ 0.07 & 0.13 & 0.07 \end{pmatrix}$$

avec les valeurs propres :

$$\begin{array}{r} \lambda_1 = 0.35628 \\ \lambda_2 = -0.01628 \\ \lambda_3 = 0.00000 \\ \hline 0.34000 \end{array}$$

d'où $\alpha = 1.78$

On s'approche clairement du cas limite (${}_yF_{lim}$) lorsque la distance n'a aucun effet sur l'espace du champ et que chaque élément est identique et approximativement égal à 0.111. Dans ce cas, tous les vecteurs sont identiques et α est égal à 3, l'ordre du C.I.M. Ainsi, les valeurs propres sont elles-mêmes une mesure de la friction de la distance, avec éventuellement une certaine utilité à des fins de comparaison sur une base interculturelle ainsi qu'à travers le temps. Par exemple, il apparaît rapidement que le C.I.M. de Yuill est assez similaire au champ de 5×5 de Hägerstrand :

$${}_HF = \begin{pmatrix} 0.010 & 0.014 & 0.017 & 0.014 & 0.010 \\ 0.014 & 0.030 & 0.055 & 0.030 & 0.014 \\ 0.017 & 0.055 & 0.443 & 0.055 & 0.017 \\ 0.014 & 0.030 & 0.055 & 0.030 & 0.014 \\ 0.010 & 0.014 & 0.017 & 0.014 & 0.010 \end{pmatrix}$$

avec les valeurs propres :

$$\begin{array}{r} \lambda_1 = 0.46001 \\ \lambda_2 = 0.05804 \\ \lambda_3 = 0.00445 \\ \lambda_4 = 0.00000 \\ \lambda_5 = 0.00000 \\ \hline 0.52250 \end{array}$$

le rapport α est de 1.037, ce qui diffère peu du 1.095 de Yuill.

Les mêmes conclusions s'appliquent aux effets de champ inversés, par exemple lorsqu'un processus est compétitif dans l'espace plutôt que contagieux, comme la propagation des centres de distribution à la frontière ou la propagation des sociétés coopératives de commercialisation du coton dans la province des lacs en Tanzanie. Dans ce dernier cas, les champs des coopératives, qui sont considérés comme des lieux centraux à fonction unique,

repoussent les autres sociétés à une certaine distance où la « viabilité des services de commercialisation » est atteinte. Un simple champ inversé pourrait être :

$${}_R F = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.09 & 0.15 \\ 0.09 & 0.04 & 0.09 \\ 0.15 & 0.09 & 0.15 \end{pmatrix}$$

avec les valeurs propres :

$$\begin{array}{r} \lambda_1 = 0.35193 \\ \lambda_2 = -0.01193 \\ \lambda_3 = 0.00000 \\ \hline 0.34000 \end{array}$$

et un ratio :

$$\alpha = 8.81$$

Notez la façon dont l'inversion du C.I.M. produit une extension considérable de la « portée ».

Enfin, considérons le cas asymétrique. Supposons que l'on puisse établir qu'un biais directionnel cohérent est présent dans la diffusion de l'information dans une zone. Par exemple, dans la section crêtes et vallées de Pennsylvanie, présentant de fortes barrières topographiques linéaires, il pourrait être intéressant de traiter le biais directionnel en déformant le champ d'information sur la base de connaissances au lieu, ou en plus, de faire varier les barrières dont la perméabilité est fondée sur des suppositions. Ces connaissances pourraient être établies, par exemple, à partir de paires de mouvements sociaux si souvent enregistrés dans le journal local. À titre d'exemple, déformons le champ de Hägerstrand dans une direction nord-est-sud-ouest. Nous avons :

$${}_h F b = \begin{pmatrix} 0.004 & 0.009 & 0.013 & 0.017 & 0.012 \\ 0.009 & 0.027 & 0.060 & 0.034 & 0.017 \\ 0.013 & 0.060 & 0.443 & 0.060 & 0.013 \\ 0.017 & 0.034 & 0.060 & 0.027 & 0.009 \\ 0.012 & 0.017 & 0.013 & 0.009 & 0.004 \end{pmatrix}$$

avec les valeurs propres :

$$\begin{array}{r} \lambda_1 = 0.46223 \\ \lambda_2 = 0.05468 \\ \lambda_3 = -0.01552 \\ \lambda_4 = 0.00000 \\ \lambda_5 = 0.00000 \\ \hline 0.50139 \end{array}$$

Le rapport (1.043) a à peine changé par rapport à la valeur du champ non déformé (1.037), ce qui confirme la notion intuitive selon laquelle la déformation ne représente pas une extension de la « portée » du champ mais seulement un biais d'orientation.

En résumant (tableau VI), nous pouvons voir comment α reflète la friction de la distance dans la zone et la façon dont il illustre l'extension de la « portée » d'un champ qui a été inversé.

Les valeurs propres et le problème de la classification

Les problèmes de classification, qui apparaissent fréquemment dans les sciences jeunes à la recherche d'ordre et de structure dans des masses de données empiriques, n'ont que très récemment reçu des fondements numériques et théoriques. Bien que les premières recherches sur l'analyse discriminante remontent à des travaux archéologiques de classification de crânes (M.M. Barnard, 1935) et à des travaux ultérieurs dans les domaines de la botanique et de la génétique (R.A. Fisher, 1936 ; M.G. Kendall, 1957), la plupart des progrès réalisés depuis la seconde guerre mondiale proviennent des sciences biologiques. Par exemple, un état de l'art caractéristique, énumérant cinquante-six références, n'en contient que six publiées avant 1948 (W.T. Williams et J.M. Lambert, 1961). Il est intéressant de noter que les problèmes complexes n'ont commencé à être résolus qu'avec le développement des ordinateurs à grande vitesse car la simple tâche de traitement et de tri de grandes quantités de données d'une manière un tant soit peu sophistiquée était beaucoup trop lourde jusqu'à ces dernières années (R. Sokal et P. Sneath, 1962 et 1963 ; Sokal et J. Camin, 1965a et 1965b ; D.F. Merriam, 1966).

Tableau VI : Valeurs propres et valeurs associées des champs d'information moyens

C.I.M.	λ_1	$\alpha = \lambda_1/\text{élément central}$	$\alpha/\text{ordre C.I.M.}$	$\alpha/\text{rang C.I.M.}$
${}_yF_{t_0}$	0.482	1.095	0.365	0.548
${}_yF_{t_1}$	0.405	1.265	0.422	0.633
${}_yF_{t_2}$	0.356	1.780	0.594	0.891
${}_yF_{t_{im}}$	0.333	3.000	1.000	1.500
${}_HF$	0.460	1.037	0.208	0.346
${}_RF$	0.352	8.810	2.935	4.410
${}_HF_R$	0.462	1.043	0.209	0.348

Bien que les problèmes de classification soulèvent explicitement la question de la mesure, les critères sur lesquels se fonde un système de classification

ne doivent pas nécessairement, et parfois même *ne peuvent pas*, être mesurés sur les échelles de rapport et d'intervalle (W.S. Torgerson, 1958 ; C. Churchman et P. Ratoosh, 1959). Nous devons parfois nous contenter d'échelles ordinales et binaires, moins satisfaisantes, surtout lorsque nos critères sont essentiellement des attributs ou des mesures qualitatives. Il n'est plus nécessaire d'insister sur la fausse dichotomie entre le qualitatif et le quantitatif car le nombre croissant d'études non métriques dans les sciences sociales et comportementales montre clairement qu'en mathématiques appliquées, comme en mathématiques pures, c'est la *logique* plutôt que la *mesure* qui est déterminante (L. Guttman 1966 ; R. McGinnis, 1965 ; C.H. Coombs, 1964 ; Coombs et R.C. Kao, 1955 ; R.L. Carneiro et S. Tobias, 1963). En outre, les échelles de mesure plus simples, comme l'échelle ordinale, contiennent souvent un degré élevé d'information métrique qui peut être extraite lorsque des méthodes appropriées sont utilisées (J.B. Tukey et R.P. Abelson, 1959 ; Coombs et Kao, 1960 ; R.N. Shepard 1962 et 1963 ; J.B. Kruskal, 1964a et 1964b ; J.C. Lingoes 1964 et 1966).

La classification est essentiellement un processus de division : nous attribuons un objet à deux ou plusieurs « coupes » en fonction de sa position relative sur une ou plusieurs échelles. La répétition de la forme plurielle (échelles) est cruciale : en tant que géographes, nous pouvons fréquemment nous trouver face à des choses qui ont un caractère multidimensionnel, de sorte qu'elles ne peuvent être assignées en fonction de leur emplacement sur une seule dimension. Cela suppose, bien sûr, que nous souhaitons utiliser toutes les informations dont nous disposons. S'il n'y a que peu de règles, ou de dimensions, pertinentes dans un problème de classification donné, alors nous pourrions peut-être diviser nos objets en grands groupes intérieurement homogènes ; mais un grand nombre de dimensions, jugé pertinent, peut impliquer une hétérogénéité considérable dans les objets à classer. Les problèmes de régionalisation uniforme sont essentiellement taxonomiques (M.G. Kendall, 1939 ; M.J. Hagood, 1943 ; B.J.L. Berry, 1960, 1961 ; Berry et M. Ray, 1964 ; Gould *et al.*, 1961 ; E. Soja, 1966) et les schémas régionaux fondés sur l'organisation fonctionnelle peuvent être traités de la même façon (Berry, 1963, 1966 et 1967).

L'homogénéité des caractéristiques architecturales

Si les caractéristiques architecturales des églises, ainsi que d'autres critères tels que les sites, les dates de construction et les degrés de richesse, reflètent les origines culturelles des bâtisseurs, nous pourrions utiliser ces aspects relativement permanents du paysage comme mesures de substitution dans un schéma de classification culturelle. Si l'on considère chaque église comme un vecteur ligne, dont les éléments sont soit 1 soit 0 selon la présence ou l'absence d'un critère jugé pertinent, notre représentation géométrique

pourrait aller d'une coïncidence totale des vecteurs (églises identiques reflétant un milieu culturel totalement homogène) à une grande dispersion dans l'espace dont le nombre de dimensions est égal au nombre de critères utilisés. Il est cependant difficile de travailler avec de telles matrices rectangulaires, aussi pouvons-nous traduire l'information en une matrice carrée de cosinus qui mesurent les angles entre les vecteurs unitaires, chacun d'entre eux représentant un critère utilisé dans l'analyse. Une description plus familière serait simplement la matrice des coefficients de corrélation, qui est précisément ce que sont les cosinus entre les vecteurs unitaires.

Dans le comté de Centre en Pennsylvanie, trente-huit mesures sur une échelle binaire ont été enregistrées pour 192 églises. L'équation caractéristique de la matrice résultante de 38×38 (trop grande pour être reproduite ici) a les 6 plus grandes racines suivantes :

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 6.1378 & \lambda_4 = 1.9907 \\ \lambda_2 = 3.4421 & \lambda_5 = 1.6380 \\ \lambda_3 = 2.3418 & \lambda_6 = 1.5782 \end{array}$$

De toute évidence, s'il existait un degré extrêmement élevé d'homogénéité culturelle reflétée par les caractéristiques notamment architecturales des églises, la valeur propre associée au premier vecteur propre serait très grande. Ici, la première valeur n'est pas impressionnante et il n'y a qu'une très légère baisse des valeurs de chacune des valeurs successives¹⁵. Les éléments des vecteurs propres normalisés peuvent cependant être interprétés de manière plausible et la première échelle ou dimension décrit le « type d'église » dominant de la région, une église à pignon ouvert avec clocher, construite entre 1850 et 1900, avec des vitraux colorés, un presbytère attenant, un emplacement en ville et des paroissiens relativement riches. Une deuxième dimension, tout à fait indépendante de la première, oppose la modeste église rectangulaire en bois avec retours, construite entre 1800 et 1850, à l'édifice en briques en forme de T ou de L avec des fenêtres gothiques.

Il ne fait cependant aucun doute que cette partie de la Pennsylvanie est aujourd'hui peu homogène : la valeur propre principale exprimée en pourcentage de la somme des éléments traces en témoigne. De nouvelles perspectives semblent prometteuses. Il serait intéressant d'échantillonner des caractéristiques similaires le long de « corridors » hypothétiques de progression des foyers culturels de la côte Est. Le tracé des rapports des valeurs propres révélerait le modèle actuel d'homogénéité culturelle qui décline probablement en s'éloignant des anciens foyers mais avec beaucoup de « bruit », de sorte que les tendances seraient floues. En limitant les analyses aux églises construites au cours des périodes antérieures, on pourrait mettre en lumière la manière dont les caractéristiques architecturales se détériorent à partir de formes « pures » au cours du temps et dans l'espace.

15. [Le critère utilisé pour qualifier l'écart entre les valeurs n'est pas explicité par l'auteur.](#)

Composantes principales

Il devrait maintenant être clair que certains des exemples considérés jusqu'à présent sont étroitement liés à l'analyse en composantes principales (L.L. Thurstone, 1947 ; G.H. Thompson, 1951 et 1956 ; H.H. Harman, 1960 ; R.B. Cattell et W. Sullivan, 1960 ; Cattell, 1965a et 1965b ; P. Horst, 1966), un puissant outil multivarié qui est à son tour étroitement lié aux formes canoniques (Hotelling, 1936 ; W.W. Cooley et P.R. Lohnes, 1966 ; T.W. Anderson, 1958) et aux domaines plus généraux de l'analyse factorielle, de l'analyse de corrélation molaire et de la théorie du simplexe (M.B. Jones, 1958 et 1959). En effet, si nous examinons l'équation caractéristique d'une matrice de corrélation, les poids des composantes ou des facteurs ne sont rien d'autre que les éléments des vecteurs propres normalisés qui ont été « pondérés » par la racine carrée de leurs valeurs propres. Par exemple, si la matrice 3×3 de la page 10 est considérée comme une matrice de corrélation entre les variables V_1 , V_2 et V_3 , alors :

$$R = V_2 \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ 1.000 & 0.750 & 0.830 \\ 0.750 & 1.000 & 0.410 \\ 0.830 & 0.410 & 1.000 \end{pmatrix}$$

avec les valeurs propres et les vecteurs propres normalisés correspondant	$\lambda_1 = 2.3416$	$\lambda_2 = 0.5929$	$\lambda_3 = 0.0655$
	0.6403	0.0503	-0.7665
	0.5283	-0.7332	0.3919
	0.5576	0.6559	0.5088
de sorte que le poids des facteurs est	0.9798	0.0387	-0.1962
	0.8085	-0.7599	0.1003
	0.8532	0.5050	0.1302

Si l'on considère la géométrie du problème (figure 16), il est évident que les poids sont, en fait, les projections orthogonales des vecteurs unitaires (indiquant chaque variable ou mesure) sur les vecteurs propres normalisés. Ainsi, toutes les variables sont fortement représentées sur la première composante ou dimension du problème tandis que les variables V_2 et V_3 sont opposées sur la seconde à laquelle V_1 est peu liée. De plus, si les composantes (vecteurs propres) 1 et 2 sont considérées comme des dimensions importantes, chaque item utilisé pour calculer les coefficients de corrélation peut être « scoré » sur chaque composante ou « règle ». Une carte des scores peut souvent être révélatrice lorsque des notions intuitivement pertinentes comme le « développement économique », la « santé économique », la « modernisation politique », la « santé sociale » et les « préférences spatiales »

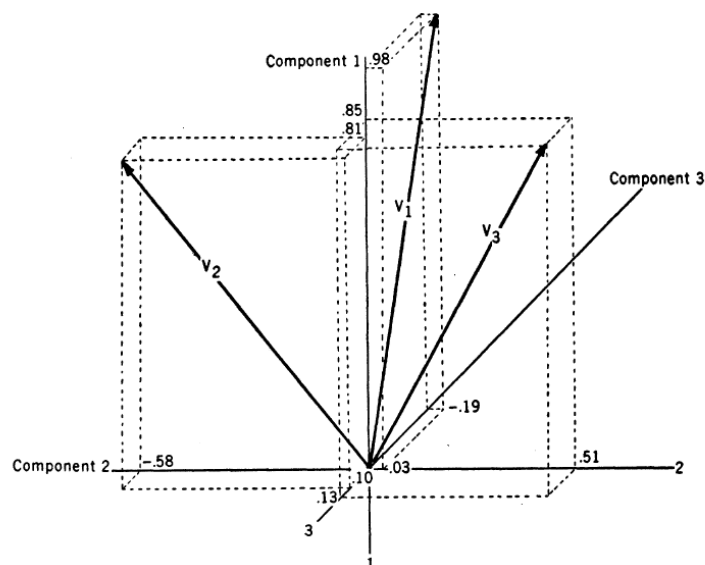


Figure 16 : La géométrie de l'analyse en composantes principales : vecteurs unitaires projetés sur les vecteurs propres dans un espace tridimensionnel

sont étudiées. Il convient toutefois de noter deux choses : premièrement, nous imposons une structure orthogonale ; deuxièmement, nous n'examinons et n'interprétons que les axes principaux de nos grappes de vecteurs. Le fait d'imposer une structure orthogonale implique que, lorsque nous interprétons nos « dimensions », celles-ci doivent être indépendantes, tant sur le plan conceptuel que mathématique. Nous pourrions, bien sûr, rendre les composantes obliques de sorte que les dimensions de base du phénomène étudié soient liées entre elles ; nous pourrions alors examiner la matrice d'intercorrélation des *composantes* et rechercher des *dimensions d'ordre supérieur*. Une autre possibilité serait de faire pivoter nos axes orthogonaux afin de maximiser la différence entre les poids de nos dimensions, de sorte que quelques variables contribuent fortement à chaque dimension et très peu à toutes les autres.

La perception de la désirabilité résidentielle

À mesure que les frontières entre les sciences sociales et les sciences du comportement s'estompent et que les liens autrefois ténus se densifient et se resserrent, il est évident que nombre des réponses aux questions que se posent actuellement les géographes humains se trouveront dans des domaines partagés par un certain nombre de « sciences humaines » (Gould, 1965a). Un sujet d'une importance et d'un intérêt considérables, bien que peu étudié de

manière systématique, est celui des images préférentielles de l'espace géographique. Des recherches dans le vaste domaine du comportement spatial ont été entreprises dans les domaines de l'architecture, de la sociologie, de la psychologie, de l'urbanisme, de l'anthropologie, de l'économie et de la géographie, mais peu d'entre elles ont tenté de décrire les visions de l'espace géographique que les hommes possèdent et peu d'efforts ont été faits pour mesurer les différentes intensités de ces représentations - pour étudier littéralement les cartes mentales dans l'esprit des hommes (C.C. Trowbridge, 1939 ; Gould, 1966a et 1966b ; R. White, 1967 ; K. Bassett, 1967). Pourtant, ce sont précisément les images différenciées de l'espace détenues par les hommes qui peuvent constituer des éléments cruciaux de nos explications ultimes des modèles, structures et processus étudiés par le géographe humain. Par exemple, il se peut que les grands modèles de migration dans ce pays ne puissent être véritablement compris qu'en fonction des représentations que les gens ont de l'espace appelé États-Unis (Gould, 1967). Il est certain que dans le monde sous-développé, où une minuscule élite éduquée détient un énorme pouvoir de décision en matière d'affectations géographiques, la compréhension de la vision spatiale globale de la majorité de la population peut être essentielle à des fins de planification et de compréhension des développements futurs. Si l'on considère le développement routier dans un pays africain, les décisions d'étendre ou de réduire les investissements sur les axes principaux et secondaires peuvent également être façonnées par les cartes mentales des décideurs (Gould, 1965b et 1966c). En outre, à mesure que les industries se délocalisent et que les facteurs « non économiques » pèsent de plus en plus lourd dans les décisions d'implantation des succursales, les théories non optimisatrices de l'implantation seront forcées de tenir compte des cartes mentales consensuelles (A. Wilson, 1966).

L'Europe regarde l'Europe

Dans le cadre d'une étude pilote, il a été demandé à des étudiants de Suède, d'Angleterre, de France, d'Allemagne et d'Italie de classer par ordre de préférence les pays d'Europe considérés du point de vue de la désirabilité résidentielle. Alors qu'une partie de l'image mentale de l'Europe détenue par chaque étudiant d'un échantillon donné était tout à fait unique et individuelle, fondée sur ses expériences, son éducation, ses préjugés, etc., une autre partie pouvait être considérée comme étant partagée et faisant partie d'une « carte mentale » globale. Ainsi, deux personnes de l'un des échantillons nationaux ayant des points de vue très similaires auraient des classements très fortement corrélés ; deux autres ayant des points de vue diamétralement opposés auraient des listes présentant une forte relation inverse entre elles, tandis que les points de vue des autres pourraient n'avoir qu'une faible relation. Ainsi, chaque échantillon national peut être présenté sous la forme d'une matrice dans laquelle les pays d'Europe sont classés par les étudiants et cela peut être traduit en une matrice de coefficients de corrélation de

rangs. Si les principaux vecteurs propres sont extraits de chacune des matrices résumant les préférences d'un groupe national, les cosinus des angles entre chacun d'entre eux constituent, à leur tour, une matrice d'ordre supérieur dont le principal vecteur propre est une échelle de préférence globale (figure 17).

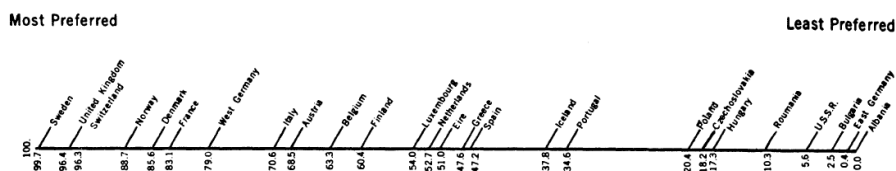


Figure 17 : L'échelle de préférence simplifiée de la désirabilité résidentielle en Europe. Échantillons d'étudiants suédois, britanniques, français, ouest-allemands et italiens

Une telle échelle semble refléter une préoccupation à la fois pour le niveau de vie et pour le degré d'autoritarisme de la vie politique. Parmi les pays les plus appréciés figurent la Suède et la Suisse, avec des gouvernements libéraux et démocratiques, un niveau de vie élevé et une tradition de neutralisme. Viennent ensuite les pays socialistes démocratiques à prédominance protestante, le reste de l'Europe occidentale se dispersant vers le bas de l'échelle jusqu'aux régimes dictatoriaux de l'Espagne et du Portugal. Un écart considérable sépare les pays d'Europe de l'Est menés par la Pologne. L'Albanie ferme la marche.

Le point de vue d'une élite africaine

Le même pouvoir de synthèse du principal vecteur propre d'une matrice de corrélation peut être utilisé pour construire les cartes mentales des personnes pour leur propre pays. Au Ghana, comme dans d'autres pays africains, les étudiants sont susceptibles d'entrer dans la fonction publique où l'avancement peut être très rapide. Les cartes mentales globales que ces personnes ont de leur pays peuvent être d'un intérêt durable car les investissements, qu'ils soient destinés à des fins économiques, éducatives, médicales ou sociales, doivent être affectés dans l'espace ainsi que par secteur. La représentation dominante, issue d'un échantillon d'étudiants de l'Université de Legon au Ghana (figure 18), positionne chaque district du Ghana sur la composante principale qui représente 67% de l'intercorrélacion dans l'échantillon. On observe un fort gradient spatial avec une diminution constante à mesure que l'on s'éloigne de la côte vers le nord. Sur le deuxième vecteur propre normalisé, qui devient la deuxième composante lorsqu'il est pondéré par la racine carrée de la valeur propre, des groupes régionaux apparaissent, les zones centrales d'Ashanti étant opposées au bloc Ewe oriental (figure 19). Cependant, ceci est beaucoup moins important que la carte mentale prin-

cipale qui illustre la manière dont les centres urbains de la côte projettent des images attrayantes dans l'esprit de ces étudiants. Pourtant, l'un des besoins cruciaux de presque tous les pays sous-développés est d'encourager les hommes et les femmes instruits à quitter les villes et à se rendre dans les zones rurales, en tant qu'enseignants ou administrateurs, et de catalyser et mobiliser la population. Ainsi, il y a peut-être ici des implications pour un système d'allocations incitatives qui répartiront ces personnes qualifiées de manière plus efficace.

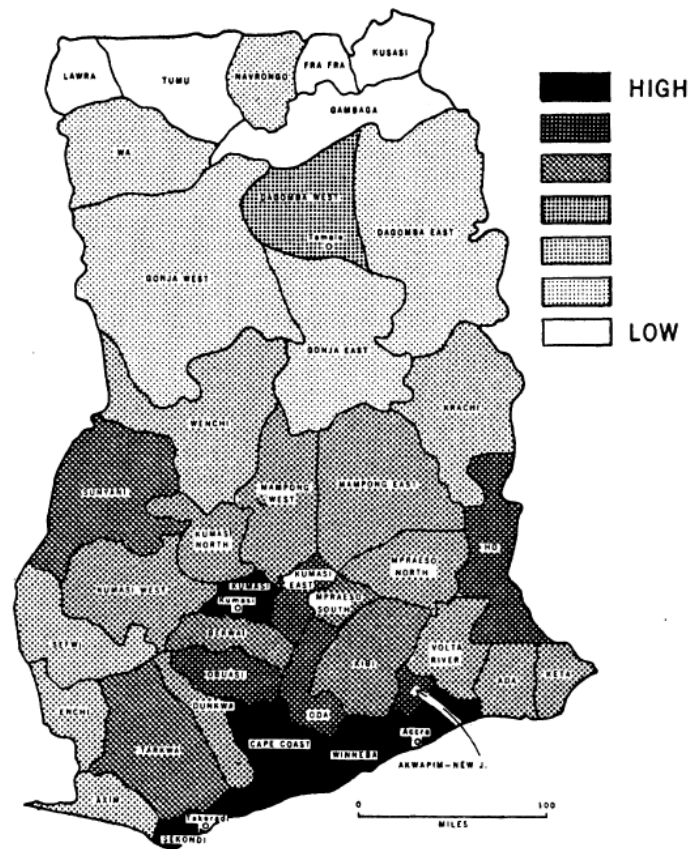


Figure 18 : Ghana : Préférences spatiales majeures pour l'affectation gouvernementale

Pensées et spéculations pour l'avenir

En tant que géographes, nous ne sommes pas les seuls à devoir traiter des problèmes multivariés d'une grande complexité. Mais, pour une raison indéterminée, nous semblons essayer d'aggraver les difficultés habituelles en ajoutant la deuxième, voire la n^e dimension à des problèmes qui, à tous points de vue, sont suffisamment éprouvants dans une seule dimension. Dans ce contexte, la théorie, qui est toujours la partie la plus difficile à développer d'une discipline, est vouée à être hésitante, laborieuse et peut-être impossible à tester pendant de nombreuses décennies après sa formulation initiale. Malgré le plus merveilleux des outils, la carte, il reste difficile d'approfondir notre compréhension, même après avoir abstrait, comprimé et simplifié le monde réel et l'avoir modélisé de telle sorte que les juxtapositions spatiales restent vraies. Pourtant, si nous pouvons aller un peu plus loin et utiliser pleinement les informations qu'une carte représente, il est possible que les résultats que nous pouvons vraiment appeler des explications *géographiques* soient plus fréquents.

L'une des façons d'y parvenir est de transformer les informations contenues dans une carte en des formes plus faciles à manipuler d'un point de vue mathématique. Ainsi, nous pouvons utiliser une variété de calculs qui peuvent être en mesure de résoudre des problèmes ou de fournir des mesures d'objets et de relations auparavant difficiles à saisir. L'un des nombreux outils dont nous disposons est celui de l'algèbre linéaire et de la théorie des groupes. Dans ce vaste domaine, la valeur propre et le vecteur propre qui lui est associé peuvent être des outils utiles pour nous aider sur le long chemin de l'ordre et de la compréhension de l'espace. En effet, peut-être plus que toute autre branche des mathématiques, l'algèbre linéaire en est l'outil essentiel¹⁶.

Nous avons vu que si nous disposons les données sous forme de tableaux carrés, nous pouvons obtenir des valeurs de synthèse utiles, ayant une signification géométrique et algébrique directe. De nombreux autres exemples pourraient être cités. Les botanistes, ont abordé le problème de la classification multivariée grâce à l'analyse factorielle et, en manipulant les matrices d'association des plantes, ils ont construit des modèles formels de la structure écologique de ces associations (D.W. Goodall, 1955). Ce type d'analyse pourrait sans doute fournir une piste pour les géographes de la santé où des modèles spatiaux spécifiques apparaissent lorsque les données sanitaires, normalement présentées sous forme de tableaux, sont cartographiées. Il est certain que les cartes récentes des maladies en Grande-Bretagne ont donné lieu à de nombreuses spéculations sur les « dimensions » sous-jacentes des distributions. Les matrices de flux, lorsqu'elles sont analysées de cette manière, peuvent également fournir des indications sur la structure fonctionnelle

16. Le texte original est plus métaphorique, Gould évoquant « a key that comes the closest to being a skeleton ».

d'une région et celles-ci peuvent être extraites des cartes de flux de marchandises par la géographie économique (Berry, 1963, 1966, 1967) ou des cartes de trafic de télégrammes représentant les liens administratifs par la géographie politique (B. Witthuhn, 1967). Enfin, nous pouvons poursuivre notre classement de l'information cartographique en traitant plusieurs cartes à la fois, par exemple si nous étudions la nature séquentielle d'un modèle spatial temporel (L. Tucker, 1963, 1964 ; J. Levin, 1963, 1965). Dans de tels cas, les réseaux carrés d'information extraits de chaque carte sont « empilés » pour former une matrice cubique de façon à extraire les composantes ou dimensions du changement. Bien que les problèmes de calcul soient importants et l'interprétation difficile, l'augmentation des capacités des ordinateurs rend maintenant disponibles des programmes adaptés.

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie M.T. Leinbach pour avoir entrepris une grande partie du travail informatique ; M.B. Riddell pour avoir écrit le programme des valeurs propres des quadrats ; M.A. Kardos pour avoir permis l'utilisation de ses données de terrain sur les caractéristiques architecturales ; et le professeur J. Kiusalaas pour avoir expliqué les aspects élémentaires de l'analyse tensorielle. Il est également reconnaissant à l'Université d'État de Pennsylvanie pour une subvention destinée à couvrir le coût des illustrations.

RÉFÉRENCES

- ANDERSON, T.W. (1958) *Introduction to Multivariate Statistics* (New York).
 ANDREE, R.V. (1959) *Selection from Abstract Algebra* (New York).
 BARNARD, M.M. (1935) 'The secular variations of skull characteristics in four series of Egyptian skulls', *Ann. Eugen.*, 352-71.
 BASSETT, K. (1967) *Socio-Economic and Space Preference Regions of the South ; A Comparative Study*, Unpub. M.S. Thesis, University Park, Pennsylvania.
 BERLINER, J. (1962) 'The feet of natives are large : an essay on anthropology by an economist', *Curr. Anthropol.*, 3, 47-77.
 BERRY, B.J.L. (1960) 'An inductive approach to the regionalization of economic development', in, N. GINSBURG (1960).
 BERRY, B.J.L. (1961) 'A method for deriving multi-factor uniform regions', *Przegl. Geogr.*, 33, 263-82.
 BERRY, B.J.L. (1963) *Structural Components of Changing Transportation Flow Network* (Fort Eustis, Virginia).

- BERRY, B.J.L. (1964) 'Approaches to regional analysis : a synthesis', *Ann. Ass. Am. Geogr.*, 54, 2-11.
- BERRY, B.J.L. (1966) *Essays on Commodity Flows and the Spatial Structure of the Indian Economy* (Chicago).
- BERRY, B.J.L. (1967) 'A synthesis of formal and functional regionalization using general field theory of spatial behavior' in B.J.L. BERRY et D. MARBLE (1967).
- BERRY, B.J.L. et RAY, M. (1964) *Multivariate Socio-Economic Regionalization ; A Pilot Study in Central Canada* (Charlottetown, Prince Edward Island).
- BERRY, B.J.L. et MARBLE, D. (1967) *Spatial Analysis* (Englewood Cliffs, New Jersey).
- BICKLEY, W.G. et THOMPSON, R.S.H.G. (1964) *Matrices ; Their Meaning and Manipulation* (London).
- BOWDEN, L. (1965) *Diffusion of the Decision to Irrigate ; Simulation of the Spread of a New Resource Management Practice in the Colorado High Plains* (Chicago).
- BUSH, R. et MOSTELLER, F. (1955) *Stochastic Models for Learning* (New York).
- CARNEIRO, R.L. et TOBIAS, S. (1963) 'The application of scale analysis to the study of cultural evolution', *Trans N.Y. Acad. Sci.*, 196-207.
- CATTELL, R.B. (1965a) 'Factor analysis : an introduction to essentials. Part I : the purpose and underlying models', *Biometrics*, 21, 190-215.
- CATTELL, R.B. (1965b) 'Part II : the role of factor analysis in research', *Biometrics*, 21, 405-35.
- CATTELL, R.B. et SULLIVAN, W. (1960) 'The scientific nature of factors : a demonstration by cups of coffee', *Behav. Sci.*, 7, 184-93.
- CHURCHMAN, C. et RATOOSH, P. (1959) *Measurement ; Definition and Theories* (New York).
- COLENTT, R. (1966) *Linear Diffusion in an Urban Setting*, unpub. M.S. Thesis, University Park, Pennsylvania.
- COOLEY, W.W. et LOHNES, P.R. (1962) *Multivariate Procedures for the Behavioral Sciences* (New York).
- COOMBS, C.H. (1964) *A Theory of Data* (New York).
- COOMBS, C.H. et KAO, R.C. (1955) *Nonmetric Factor Analysis* (Ann Arbor).
- COOMBS, C.H. et KAO, R.C. (1960) 'On a connection between factor analysis and multidimensional unfolding', *Psychometrika*, 25, 219-31.
- CURRY, L. (1966) 'A note on spatial association', *Prof. Geogr.*, 18, 97-9.
- DAVIS, P.J. (1965) *The Mathematics of Matrices ; A First Book on Matrix Theory and Linear Algebra* (New York).
- FISHER, R.A. (1936) 'The use of multiple measurements in taxonomic problems', *Ann. Eugen.*, 7, 179-88.

- FRAZER, R.A., DUNCAN, W.J. et COLLAR, A.R. (1963) *Elementary Matrices and Some Applications to Dynamic and Differential Equations* (Cambridge).
- FREDRICKSON, N. et GULLIKSEN, H. (1965) *Contributions to Mathematical Psychology* (New York).
- GARRISON, W. et MARBLE, D. (1965) *A Prolegomenon to the Forecasting of Transportation Development* (Evanston, Illinois).
- GINSBURG, N. (1960) *Essays on Geography and Economic Development* (Chicago).
- GOODALL, D.W. (1955) 'Objective methods for the classification of vegetation : Part 3, an essay in the use of factor analysis', , *Aust. J. Bot.*, 2, 305-24.
- GOULD, P.R. (1965a) 'Joshua's trumpet : the crumbling walls of the social and behavioral sciences', *Geogr. Rev.*, 55, 599-602.
- GOULD, P.R. (1965b) *A Bibliography of Space Searching Procedures for Geographers* (University Park, Pennsylvania).
- GOULD, P.R. (1966a) *On Mental Maps* (Ann Arbor, Michigan).
- GOULD, P.R. (1966b) 'Questions arising from the description of mental maps of British school leavers', *NSF Conference New Trends in Cultural Geography* (Columbus, Ohio).
- GOULD, P.R. (1966c) *Space Searching Procedures in Geography and the Social Sciences* (Honolulu, Hawaii).
- GOULD, P.R. (1967) 'Structuring information on spacio-temporal preferences', *J. reg. Sci.* (forthcoming).
- GOULD, P.R. et al. (1961) 'Towards a geography of economic health : the case of New York State', *Ann. Ass. Am. Geogr.*, 52, 1-20.
- GUTTMAN, L. (1966) 'The non-metric breakthrough in the behavioral sciences', *Automatic Data Processing Conference* (Jerusalem, Israel).
- HÄGERSTRAND, T. (1953) *Innovationsforloppet ur korologik synpunkt* (Lund, Sweden).
- HÄGERSTRAND, T. (1957) 'Migration and area', *Migration in Sweden* (Lund, Sweden).
- HÄGERSTRAND, T. (1965) 'A Monte Carlo Approach to Diffusion', *Archives Européennes de Sociologie*, 6, 43-7.
- HAGOOD, M.J. (1943) 'Statistical methods for the delineation of regions applied to data on agriculture and population', *Social Forces*, 21, 287-97.
- HALL, E. (1959) *The Silent Language* (New York).
- HARMAN, H.H. (1960) *Modern Factor Analysis* (Chicago).
- HARRIS, C.W. (1963) *Problems of Measuring Change* (Madison, Wisconsin).
- HAWKINS, D. (1964) *The Language of Nature ; An Essay in the Philosophy of Science* (San Francisco and London).
- HEISENBERG, W. (1930) *The Physical Principles of the Quantum Theory* (New York).
- HIGHMAN, B. (1964) *Applied Group-Theoretic and Matrix Methods* (New York).

- HOFFMAN, B. (1963) *The Strange Story of the Quantum* (Harmondsworth).
- HOLLOWAY, L.J. (1958) 'Smoothing and filtering of time and space fields', *Ad. Geophys.*, 4, 351-89.
- HOLLEY, M.A. (1966) *Topographic Eigenvector Analysis* (Downey, California).
- HORST, P. (1966) *Factor Analysis of Data Matrices* (New York).
- HOTELLING, H. (1936) 'Relations between two sets of variates', *Biometrika*, 28, 321-77.
- JAMES, W.R. (1966) *The Fourier Series Model in Map Analysis* (Evanston, Illinois).
- JONES, M.B. (1958) *Molar Correlation Analysis* (Pensacola, Florida).
- JONES, M.B. (1959) *Simplex Theory* (Pensacola, Florida).
- KANAAN, N. (1965) *Structure and Requirements of the Transport Network of Syria* (Washington).
- KENDALL, M.G. (1939) 'The geographical distribution of crop productivity in England', *J. Roy. statist. Soc.*, 102, 21-62.
- KENDALL, M.G. (1957) *A Course in Multivariate Statistics* (London and New York).
- KRON, G. (1959) *Tensors for Circuits* (New York).
- KRUMBEIN, W.C. (1966) 'Classification of map surfaces based on the structure of polynomial and Fourier coefficient matrices', in D.F. MERRIAM (1966).
- KRUSKAL, J.B. (1964a) 'Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis', *Psychometrika*, 29, 1-27.
- KRUSKAL, J.B. (1964b) 'Nonmetric multidimensional scaling : a numerical method', *Psychometrika*, 29, 115-29.
- LEVIN, J. (1963) *Three Mode Factor Analysis*, unpub. Ph.D. dissertation, Urbana, Illinois.
- LEVIN, J. (1965) 'Three mode factor analysis', *Psychol. Bull.*, 64, 442-52.
- LINGOES, J.C. (1964) 'New computer developments in pattern analysis and nonmetric techniques', *Symposium on Computers in Psychological Research* (Blaricum, Netherlands).
- LINGOES, J.C. (1966) 'Recent computational advances in nonmetric methodology for the behavioral sciences', *International Symposium on Mathematical and Computational Methods in Social Sciences* (Rome).
- McGINNIS, R. (1965) *Mathematical Foundations for Social Analysis* (New York).
- MERRIAM, D.F. (1966) *Computer Applications in the Earth Sciences ; Colloquium on Classification Procedures* (Lawrence, Kansas).
- POLYANI, M. (1963) *The Study of Man ; The Lindsay Memorial Lectures 1958* (Chicago and London).
- PRESTON, F.W. (1966) 'Two-dimensional power spectra for classification of landforms', in D.F. MERRIAM (1966).
- SCHEIDEGGER, A.E. (1965) 'On the statistics of the orientation of bedding

- planes, grain axes, and similar sedimentological data', *Geol. Surv. Res.* C164-C167.
- SEWELL, W.R. (1966) *Human Dimensions of Weather Modification* (Chicago).
- SHEPARD, R.N. (1962) 'The analysis of proximities : multidimensional scaling with an unknown distance function', *Psychometrika*, 27, 125-39 and 219-46.
- SHEPARD, R.N. (1963) 'Analysis of proximities as a technique for the study of information processing in man', *Hum. Factors*, 5, 19-34.
- SOJA, E. (1966) 'The spatial dimensions of modernization in Kenya', *African Stud. Ass.* (Bloomington, Indiana).
- SOKAL, R. (1966) 'Numerical taxonomy', *Scient. Am.*, 215, 106-16.
- SOKAL, R. et SNEATH, P. (1962) 'Numerical taxonomy', *Sci.*, 4818, 855-60.
- SOKAL, R. et SNEATH, P. (1963) *Principals of Numerical Taxonomy* (San Francisco and London).
- SOKAL, R. et CAMIN, J. (1965a) 'A method for deducing branching sequences in phylogeny', *Evolution*, 19, 311-26.
- SOKAL, R. et CAMIN, J. (1965b) 'The two taxonomies : areas of agreement and of conflict', *Syst. Zool.*, 14, 1176-95.
- THOMPSON, G.H. (1951) *The Factorial Analysis of Human Ability* (London).
- THOMPSON, G.H. (1956) *The Geometry of Mental Measurement* (London).
- THURSTONE, L.L. (1947) *Multiple Factor Analysis* (Chicago).
- TOBLER, W.R. (1966a) *Numerical Map Generalization and Notes on the Analysis of Geographical Distributions* (Ann Arbor).
- TOBLER, W.R. (1966b) 'Of maps and matrices' (mimeo).
- TOBLER, W.R. (1966c) 'Spectral analysis of spatial series', *Conference on Urban Planning, Information Systems and Programs* (Berkeley, California).
- TORGERSON, W.S. (1958) *Theory and Methods of Scaling* (New York).
- TOULMIN, S. (1960) *The Philosophy of Science* (New York and Evanston).
- TROWBRIDGE, C.C. (1939) 'On fundamental methods of orientation and imaginary maps', *Sci.*, 38, 888-97.
- TUCKER, L. (1965) *Some Mathematical Notes on Three Mode Factor Analysis* (Urbana, Illinois).
- TUCKER, L. (1963) 'Implications of factor analysis of three way matrices for measurement of change' in C.W. HARRIS (1963).
- TUCKER, L. (1964) 'The extension of factor analysis to three dimensional matrices' in N. FREDRICKSON et H. GULLIKSEN (1965).
- TUKEY, J.B. et ABELSON, R.P. (1959) 'Efficient conversion of nonmetric information into metric information', *Proc. Am. statist. Ass.*, 226-30.
- WALKER, F.E. (1963) *Some Elementary Concepts of Matrix Algebra and its Application* (The Ohio State University).
- WHITE, R. (1967) *The Mental Maps of British School Leavers*, unpub. M.S. Thesis, University Park, Pennsylvania.
- WILLIAMS, W.T. et LAMBERT, J.M. (1961) 'Multivariate methods in taxonomy', *Taxonomy*, 10, 205-11.

- WILSON, A. (1966) 'The impact of climate on industrial growth : Tucson, Arizona : a case study' in W.R. SEWELL (1966).
- WITTHUHN, B. (1967) *The Spatial Integration of Uganda as a Process of Modernization*, unpub. Ph.D. dissertation, University Park, Pennsylvania.
- YUILL, R. (1964) *A Simulation Study of Barrier Effects in Spatial Diffusion Problems* (Evanston, Illinois).

groupe f.m.r.



La collection « [textes](#) » du groupe fmr (flux, matrices, réseaux) propose des rééditions bilingues d'articles consacrés à l'analyse de réseaux.

Disponibles en ligne

- L. Beauguitte, P. Beauguitte et P. Gourdon, 2021, « [William L. Garrison, 1960, Connectivity of the Interstate Highway System](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Joseph B. Kruskal, 1956, On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [E.W. Dijkstra, 1959, A Note on Two Problems in Connexion with Graphs](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1951, Application of Matrix Algebra to Communications Nets](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1953, Structural Parameters of Communication Networks](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Z. Prihar, 1956, Topological Properties of Telecommunication Networks](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Alex Bavelas, 1948, A Mathematical Model for Group Structures](#) ».
- L. Beauguitte et J. Fen-Chong, 2021, « [Alex Bavelas, 1950, Communication Patterns in Task-Oriented Groups](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Forrest R. Pitts, 1965, A Graph Theoric Approach to Historical Geography](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [M. L. Northway, 1940, A method for depicting social relationships obtained by sociometric testing](#) ».
- F. Bahoken et L. Beauguitte, 2021, « [John D. Nystuen and Michael F. Dacey, 1961, A Graph Theory Interpretation of Nodal Regions](#) ».
- F. Bahoken et L. Beauguitte, 2022, « [Edward L. Ullman, 1949, Mapping the world's ocean trade: A research proposal](#) ».
- L. et P. Beauguitte, 2022, « [F. L. Hitchcock, 1941, The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities](#) ».
- F. Bahoken, 2022, « [W. R. Tobler, 1969, Review of Sémiologie graphique: Les Diagrammes – Les réseaux – Les Cartes](#) ».
- F. Bahoken et L. Beauguitte, 2022, « [P. R. Gould, 1967, On the Geographical Interpretation of Eigenvalues](#) ».