



HAL
open science

Synthèse temps-échelle de signaux non stationnaires

Adrien Meynard, Bruno Torrèsani

► **To cite this version:**

Adrien Meynard, Bruno Torrèsani. Synthèse temps-échelle de signaux non stationnaires. GRETSI 2022 - XXVIIIème Colloque francophone de traitement du signal et des images, Sep 2022, Nancy, France. hal-03696088

HAL Id: hal-03696088

<https://hal.science/hal-03696088v1>

Submitted on 15 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Synthèse temps-échelle de signaux non stationnaires

Adrien MEYNARD¹, Bruno TORRÉSANI²

¹ENSL, CNRS, Laboratoire de physique, Lyon, France

²Aix Marseille Univ, CNRS, I2M, Marseille, France

adrien.meynard@ens-lyon.fr, bruno.torresani@univ-amu.fr

Résumé – Nous développons une approche probabiliste « à la synthèse » temps-échelle pour modéliser des signaux localement stationnaires. Inspiré de nos précédents travaux, le modèle se caractérise par des translations le long l’axe des échelles des coefficients d’ondelettes au cours du temps. Nous proposons un estimateur du maximum *a posteriori* de la translation d’échelle et du spectre de puissance sous-jacent. Nous montrons que le modèle peut gérer des signaux à fréquence rapide, et fournir des représentations temps-échelle plus concentrées que le *synchrosqueezing*.

Abstract – We develop a time-scale synthesis-based probabilistic approach for the modeling of locally stationary signals. Inspired by our previous work, the model involves time-dependent translations of the wavelet coefficients along the scale axis. We propose a maximum *a posteriori* estimator for the time-varying scale translation and the underlying power spectrum. We show that the model can handle signals with fast-varying frequency, and provide sharp time-scale representations more concentrated than synchrosqueezed wavelet transform.

1 Introduction

L’analyse temps-fréquence classique est généralement utilisée pour construire des représentations de signaux non stationnaires desquelles des informations pertinentes peuvent être extraites (voir par exemple [1, 2]). Sous des hypothèses appropriées, les transformées linéaires telles que la transformée de Fourier à court terme ou la transformée en ondelettes sont inversibles. Ceci conduit à des approches dites *à la synthèse* [3], où les signaux s’expriment sous forme de combinaisons linéaires d’*atomes temps-fréquence*. Ces coefficients fournissent un autre type de représentation temps-fréquence, moins contraint par les exigences de cohérence et les principes d’incertitude.

Les approches statistiques en analyse temps-fréquence reposent souvent sur des modèles statistiques *ad hoc* pour les transformées temps-fréquence. L’extraction de l’information est alors formulée comme un problème d’estimation statistique. Les méthodes de factorisation matricielle non négative [4] ou de détection des composantes temps-fréquence [5, 6] en sont des exemples. Dans la plupart des situations, la modélisation apparaît comme une étape de post-traitement après le calcul d’une transformée. Cependant, les modèles statistiques ne sont généralement pas compatibles avec les conditions de cohérence satisfaites par les transformées temps-fréquence.

Turner et Sahani [7] ont récemment introduit un paradigme bayésien, sous le nom de représentation temps-fréquence probabiliste. Cela consiste à exprimer les signaux comme résultats d’une synthèse à partir de coefficients temps-fréquence aléatoires, pour lesquels une distribution a priori est choisie. Ceci est appliqué à divers contextes, tels que la synthèse de signaux stationnaires, ou le débruitage en présence de bruit non stationnaire. Un point de vue similaire a déjà été adopté par divers

auteurs dans le passé (voir par exemple [8]). Nous nous appuyons ici sur le modèle Turner-Sahani, que nous revisitons, en supposant un modèle génératif de la forme [9]

$$y(t) = \operatorname{Re} \left(\sum_s (\psi_s * W_s)(t) \right) + \epsilon(t), \quad (1)$$

où $*$ désigne le produit de convolution, $\{\psi_s, s\}$ est un banc de filtres indexé par une échelle s , les $W_s(t)$ des coefficients aléatoires de sous-bande, et $\epsilon(t)$ un bruit.

Nous nous concentrons sur les signaux *localement stationnaires* pour lesquels des caractéristiques spectrales dépendant du temps peuvent être définies. En suivant notre approche JEFAS [10], nous étudions une classe de non-stationnarité générée par des décalages dépendant du temps dans le domaine temps-échelle. JEFAS est une approche à l’analyse, c’est-à-dire un post-traitement de la représentation temps-échelle. Nous introduisons JEFAS-S, une *approche à la synthèse* bayésienne qui fournit une représentation temps-échelle adaptative du signal, ainsi qu’une estimation des paramètres correspondants. Alors que l’estimation de JEFAS était basée sur des approximations de la transformée en ondelettes, une estimation exacte est possible ici, et nous fournissons un algorithme EM correspondant. De plus, dans certaines situations, le modèle est suffisamment flexible pour fournir des représentations temps-échelle extrêmement concentrées qui peuvent être plus nettes que les transformées issues du *synchrosqueezing* [11].

2 Modèle à la synthèse

Dans cet article, nous nous limitons à la synthèse par ondelettes. On note ψ l’ondelette choisie, et ψ_s l’ondelette mise à

l'échelle définie par $\psi_s(t) = q^{-s/2}\psi(q^{-s}t)$, pour une constante $q > 1$. $s \in \{s_1, \dots, s_M\}$ est un ensemble fini d'échelles.

2.1 Modèle discret

Nous considérons le cas périodique fini : supposons que nous ayons N instants de mesure $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1 \cdots \tau_N)^T$ où le signal correspondant $\mathbf{y} = y(\boldsymbol{\tau})$ est échantillonné à la fréquence F_s . Pour $n \in \{1, \dots, N\}$, $m \in \{1, \dots, M\}$, notons $\psi_{nm} \in \mathbb{C}^N$ le vecteur $(\psi_{s_m}(\tau_{1-n}) \cdots \psi_{s_m}(\tau_{N-n}))^T$, et par $\boldsymbol{\Psi}_n \in \mathbb{C}^{N \times M}$ la matrice obtenue par concaténation des vecteurs ψ_{nm} , $m \in \{1, \dots, M\}$. L'équation d'observation (1) discrétisée s'écrit alors

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\epsilon} = \text{Re} \left(\sum_{n=1}^N \boldsymbol{\Psi}_n \mathbf{w}_n \right) + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2)$$

où les $\mathbf{w}_n \in \mathbb{C}^M$ sont des vecteurs de coefficients de synthèse. Ce modèle peut également être écrit sous forme matricielle comme $\mathbf{y} = \text{Re}(\mathbf{D}\mathbf{W} + \boldsymbol{\epsilon})$, où la matrice de dictionnaire \mathbf{D} est la concaténation des matrices $\boldsymbol{\Psi}_n$, et $\mathbf{W} = \text{vec}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N)$.

Dans cet article, $\boldsymbol{\epsilon}$ sera modélisé comme un bruit blanc gaussien de variance σ^2 [7]. La non-stationnarité sera introduite via un a priori approprié sur \mathbf{W} , qui vise à décrire des déformations locales au cours du temps, comme introduit dans [12].

2.2 Une classe de non-stationnarité

Lorsque toutes les sous-bandes W_s dans (1) sont stationnaires, le signal résultant y est stationnaire. Nous nous intéressons à une situation particulière où la non-stationnarité induit un déplacement au cours du temps selon l'axe des échelles, tel qu'étudié dans [12, 10]. Il y a été montré que ce modèle rend compte des signaux obtenus par déformation temporelle de signaux stationnaires, à savoir les signaux de la forme

$$y(t) = \sqrt{\gamma'(t)} x(\gamma(t)), \quad (3)$$

où x est un signal aléatoire stationnaire au sens large, et γ est une fonction lisse strictement croissante. Ce modèle décrit les phénomènes de compression-dilatation de signaux stationnaires. Par exemple, les sons produits par un moteur dont la vitesse varie ou tout son stationnaire déformé par effet Doppler peuvent être décrits comme tels [10].

Pour construire la distribution a priori sur des coefficients de sous-bandes discrètes, nous faisons les hypothèses suivantes.

1. Les vecteurs \mathbf{w}_n sont des vecteurs gaussiens complexes circulaires décorrélés : $\mathbf{w}_n \sim \mathcal{CN}_c(\mathbf{0}, \mathbf{C}_n)$.
2. Les matrices de covariance \mathbf{C}_n sont des translations d'une fonction fixe f , comme indiqué dans [10], à savoir

$$[\mathbf{C}_n]_{mm'} \triangleq f(s_m + \theta_n, s_{m'} + \theta_n), \quad (4)$$

où $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est hermitienne, semi-définie positive, et $\theta_n \in \mathbb{R}$ est le paramètre de décalage.

Dans [10], il a été montré que les coefficients d'ondelettes d'un signal aléatoire stationnaire localement déformé peuvent être

approximés par des vecteurs aléatoires satisfaisant les hypothèses ci-dessus. Le paramètre θ_n représente un facteur de dilatation local à l'instant τ_n (dépendant de la dérivée de la fonction de déformation temporelle γ), et f fait intervenir le spectre de puissance \mathcal{S} du signal sous-jacent et la transformée de Fourier de l'ondelette :

$$f(s, s') = q^{\frac{s+s'}{2}} \int_0^\infty \mathcal{S}(\xi) \widehat{\psi}(q^s \xi) \widehat{\psi}(q^{s'} \xi) d\xi. \quad (5)$$

3 Procédure d'estimation

3.1 Inférence bayésienne

L'estimation de la matrice des coefficients de sous-bande \mathbf{W} repose sur l'évaluation de la distribution a posteriori correspondante. Cette dernière dépend des paramètres suivants, supposés connus à ce stade : les facteurs de dilatation θ_n , et la fonction de covariance f . Soit $\boldsymbol{\Gamma}_0 \in \mathbb{C}^{MN \times MN}$ la matrice diagonale par blocs avec les blocs $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_N$. La distribution a posteriori des coefficients de sous-bande est une loi gaussienne complexe $p(\mathbf{W}|\mathbf{y}) \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{R})$, avec moyenne et covariance

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Gamma}_0 \mathbf{D}^H \mathbf{C}_y^{-1} \mathbf{y}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}_0 - \frac{1}{4} \boldsymbol{\Gamma}_0 \mathbf{D}^H \mathbf{C}_y^{-1} \mathbf{D} \boldsymbol{\Gamma}_0,$$

(la matrice de relation \mathbf{R} , inutile ici, n'est pas fournie) où

$$\mathbf{C}_y = \sigma^2 \mathbf{I} + \frac{1}{2} \text{Re} \left(\sum_{n=1}^N \boldsymbol{\Psi}_n \mathbf{C}_n \boldsymbol{\Psi}_n^H \right). \quad (6)$$

Par conséquent, l'espérance a posteriori $\tilde{\mathbf{w}}_n$ de \mathbf{w}_n s'écrit

$$\tilde{\mathbf{w}}_n = \frac{1}{2} \mathbf{C}_n \boldsymbol{\Psi}_n^H \mathbf{C}_y^{-1} \mathbf{y}. \quad (7)$$

Notons que, contrairement à la distribution a priori, la distribution a posteriori des \mathbf{w}_n implique des corrélations temporelles.

3.2 Estimation des paramètres

Discutons maintenant du choix des deux paramètres du modèle, i.e. les facteurs de dilatation θ_n et la fonction de covariance f . Remarquons d'abord que l'expression (5) fournit un choix naturel pour la fonction f . Ce dernier implique l'ondelette, qui est connue, et le spectre de puissance \mathcal{S} du processus stationnaire sous-jacent, qui est inconnu. Nous devons alors déterminer le vecteur $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ et le spectre de puissance.

L'algorithme JEFAS introduit dans [10] fournit une approche à l'analyse pour estimer $\boldsymbol{\theta}$ et \mathcal{S} . Nous décrivons maintenant un algorithme alternatif, basé sur le principe EM (Espérance-Maximisation) [13], spécialement adapté à l'approche à la synthèse développée dans cet article. Ici, \mathbf{y} est l'observation, $\boldsymbol{\theta}$ le paramètre et \mathbf{W} la variable latente.

Proposition 1 (Algorithme EM). *Soit $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}$ le vecteur des facteurs de dilatation à l'itération $k-1$ de l'algorithme, duquel sont estimés $\tilde{\mathbf{C}}_n^{(k-1)}$ et $\tilde{\mathbf{C}}_y^{(k-1)}$. La mise à jour à l'itération k repose sur les deux étapes suivantes :*

1. Pour $n \in \{1, \dots, N\}$, l'estimation (7) au temps τ_n s'écrit

$$\tilde{\mathbf{w}}_n^{(k)} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{C}}_n^{(k-1)} \Psi_n^H \left(\tilde{\mathbf{C}}_y^{(k-1)} \right)^{-1} \mathbf{y}. \quad (8)$$

2. Le facteur d'échelle $\tilde{\theta}$ est ré-estimé en résolvant

$$\tilde{\theta}_n^{(k)} = \arg \min_{\theta} Q_{kn}(\theta), \quad (9)$$

$$Q_{kn}(\theta) = \ln \det(\mathbf{C}(\theta)) + \text{Tr} \left(\left(\tilde{\mathbf{w}}_n^{(k)} \tilde{\mathbf{w}}_n^{(k)H} + \Gamma_n^{(k-1)} \right) \mathbf{C}(\theta)^{-1} \right),$$

$\Gamma_n^{(k-1)} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ étant le n -ème bloc diagonal de la matrice de covariance postérieure $\Gamma \left(\tilde{\theta}^{(k-1)} \right)$.

Après avoir exécuté l'algorithme (décrit plus en détail ci-dessous), une estimation des coefficients temps-échelle $\tilde{\mathbf{w}}$ est disponible, et une estimation $\tilde{\mathbf{y}}_0$ du signal \mathbf{y}_0 peut être obtenue comme

$$\tilde{\mathbf{y}}_0 = \text{Re} \left(\sum_{n=1}^N \Psi_n \tilde{\mathbf{w}}_n \right). \quad (10)$$

Notez que, combinée avec (7), l'expression de reconstruction (10) peut être interprétée comme un filtrage de Wiener. En outre, le biais et la variance de l'estimateur peuvent être évalués (expression non fournies ici par souci de brièveté).

3.3 Algorithme : JEFAS-Synthèse

Les étapes de l'algorithme d'estimation sont données dans l'algorithme 1. Ce dernier prend en entrée le signal \mathbf{y} , la variance du bruit σ^2 , un paramètre de précision ϱ pour le critère d'arrêt et un paramètre de bande passante N' (voir ci-dessous).

Initialisation. L'algorithme nécessite des estimations initiales pour le paramètre θ , et la fonction f dans (4). Dans JEFAS-S, on utilise l'expression (5), pour laquelle une estimation initiale de \mathcal{S} est requise. En cas de succès, JEFAS [10] fournit une telle estimation. Sinon, une estimation grossière peut être obtenue par le périodogramme de Welch du signal d'entrée \mathbf{y} .

Critère d'arrêt. EM garantit la monotonie de la fonction de vraisemblance $\mathcal{L}(\theta)$. L'incrément de cette dernière est utilisé comme critère d'arrêt : EM s'arrêtera dès que la condition

$$\mathcal{L}(\theta^{(k)}) - \mathcal{L}(\theta^{(k-1)}) < \varrho \quad (11)$$

est satisfaite. Ici $\varrho > 0$ est un paramètre fixé par l'utilisateur.

Réduction de dimension. La matrice \mathbf{C}_y de dimension $NM \times NM$ peut être extrêmement grande. Cependant, elle a généralement une décroissance rapide hors diagonale. Ceci peut être exploité pour accélérer l'évaluation de $\tilde{\mathbf{w}}_n$ dans (8) en se restreignant à un voisinage I_n de n de bande passante N' .

Optimisation. Le problème d'optimisation (9) est résolu en utilisant un schéma quasi-Newton standard.

Estimation du spectre. La mise à jour du spectre à partir de l'estimée courante de \mathbf{W} s'effectue en deux étapes : d'abord corriger la translation de θ_n , pour obtenir une représentation approximativement stationnaire, puis moyenner en temps pour obtenir une estimation bâtie sur les ondelettes comme dans [10].

Algorithme 1 ($\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\theta}, \tilde{\mathcal{S}}_X$) = JEFAS-S($\mathbf{y}, \sigma^2, \varrho, N'$)

- **Initialisation** : estimer $\tilde{\theta}^{(0)}$ et $\tilde{\mathcal{S}}^{(0)}$ en utilisant JEFAS.
- $k \leftarrow 1$.

tant que Critère d'arrêt (11) = FAUX **faire**

pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$ **faire**

- Restreindre Ψ_n , $\tilde{\mathbf{C}}_y^{(k-1)}$ et \mathbf{y} à l'intervalle I_n .
- Calculer $\tilde{\mathbf{w}}_n^{(k)}$ en utilisant (8).

fin pour

- Estimer $\tilde{\theta}^{(k)}$ en résolvant (9).
- Estimer $\tilde{\mathcal{S}}^{(k)}$ par l'estimée basée sur les ondelettes.
- $k \leftarrow k + 1$.

fin tant que

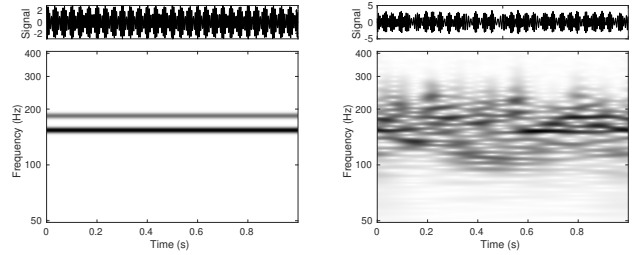


FIGURE 1 – Signal stationnaire (à gauche) et signal localement déformé associé (à droite). Leurs scalogrammes sont dessous.

4 Résultats numériques

Partons d'un signal stationnaire constitué de deux sinusoides :

$$\mathbf{x}[n] = 2 \cos \left(2\pi \xi_1 \frac{n}{N} + \varphi_1 \right) + \cos \left(2\pi \xi_2 \frac{n}{N} + \varphi_2 \right), \quad (12)$$

où $N = 1024$, $\xi_1 = 154$ and $\xi_2 = 184$. Les phases φ_1 et φ_2 sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi[$. Nous appliquons ensuite l'opérateur de déformation temporelle. La dérivée de la fonction de déformation est tirée de l'électrocardiogramme d'un patient dont le rythme cardiaque est irrégulier. Elle est obtenue en déterminant les intervalles R-R, suivi d'une interpolation par splines cubiques. La fonction γ' ainsi construite varie rapidement. Elle est tracée en figure 2. Enfin, un bruit blanc gaussien de variance $\sigma^2 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ est ajouté aux observations. Les signaux stationnaire et localement déformé, ainsi que leurs transformées en ondelettes respectives sont affichés sur la figure 1.

Quel que soit le facteur de qualité de l'ondelette, la transformée en ondelettes du signal localement déformé est noyée dans les interférences entre les deux composantes. Une ondelette précise en fréquence permet de discriminer deux sinusoides proches, mais des interférences apparaissent en temps. À l'inverse, une ondelette précise en temps rend perceptibles les variations rapides de la fonction de déformation instantanée, mais des interférences apparaissent en fréquence. La présence inévitable d'interférences résulte du principe d'incertitude. Le comportement approché de la transformée en ondelettes sur laquelle s'appuie JEFAS n'est alors plus valide. Bien que JEFAS converge en 3 itérations, il ne converge pas vers la fonction γ'

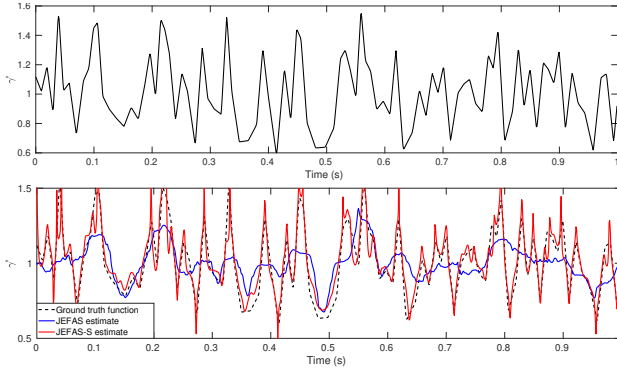


FIGURE 2 – Dérivée de la fonction de déformation temporelle, produite à partir de mesures cardiaques réelles (en haut). Les estimées par JEFAS et JEFAS-S lui sont superposées (en bas).

attendue. Ceci est illustré à la figure 2 (courbe bleue). L’estimation par JEFAS lisse les variations rapides.

En fixant $\rho = 0,5$, JEFAS-S converge en 111 itérations. La fonction γ' estimée est représentée figure 2 (courbe rouge). Ses variations rapides sont bien suivies. La précision de l’estimation est nettement améliorée : l’erreur quadratique moyenne passant de $2,61 \cdot 10^{-2}$ pour JEFAS à $6,90 \cdot 10^{-3}$ pour JEFAS-S.

En outre, une fois les paramètres du modèle estimés, nous pouvons tirer profit de l’expression (7) pour adapter la forme de la représentation temps-échelle à de nouvelles contraintes a priori. Pour cela, il suffit de modifier l’expression de la fonction de covariance f . Nous choisissons ici de tenir compte de la connaissance de la structure parcimonieuse du spectre de puissance pour modifier f en remplaçant \mathcal{S} dans (5) par

$$\tilde{\mathcal{S}}_{sp}(\xi) \triangleq \sum_{k=1}^K \tilde{a}_k^2 \delta(\xi - \tilde{\xi}_k),$$

où \tilde{a}_k et $\tilde{\xi}_k$ sont les estimées des amplitudes et fréquences du signal stationnaire. Nous les estimons ici grâce aux maxima locaux du spectre estimé par JEFAS-S. On trouve $\tilde{\xi}_1 = 155$ et $\tilde{\xi}_2 = 184$. La transformée temps-échelle résultante et représentée figure 3. Les deux composantes constituant le signal sont bien distinctes. De plus, la comparaison avec le synchrosqueezing de la transformée en ondelettes montre que notre représentation présente une meilleure concentration des coefficients temps-échelle le long des fréquences instantanées.

5 Conclusion

Nous avons décrit une alternative au modèle JEFAS pour les signaux localement déformés. Contrairement à JEFAS, JEFAS-S est une approche à la synthèse moins contrainte par les principes d’incertitude. Nos résultats numériques montrent également que JEFAS-S est capable de gérer des signaux localement stationnaires dont la fréquence instantanée varie rapidement, et fournir des représentations temporelles très précises.

Le code MATLAB mettant en œuvre JEFAS-S est disponible

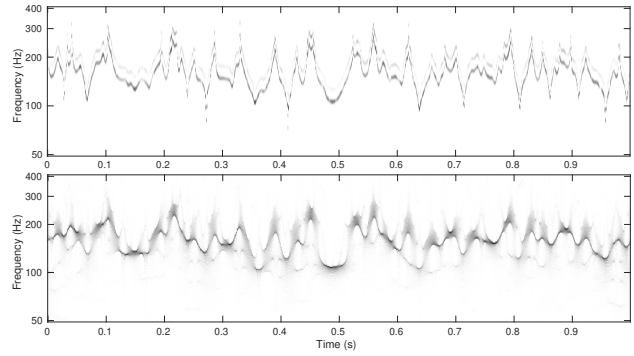


FIGURE 3 – Représentation temps-échelle concentrée (en haut) et transformée en ondelettes synchrosqueezée (en bas).

en ligne ¹. De nouvelles simulations accompagnées des preuves complètes seront présentées dans une publication à venir.

Références

- [1] P. FLANDRIN, *Explorations in Time-Frequency Analysis*. Cambridge University Press, 2018.
- [2] K. GRÖCHENIG, *Foundations of time-frequency analysis*. Applied and Numerical Harmonic Analysis, Boston, MA : Birkhäuser Inc., 2001.
- [3] P. BALAZS, M. DÖRFLER, M. KOWALSKI et B. TORRÉSANI, « Adapted and adaptive linear time-frequency representations : a synthesis point of view », *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 30, p. 20–31, nov. 2013.
- [4] C. FÉVOTTE et A. T. CEMGIL, « Nonnegative matrix factorisations as probabilistic inference in composite models », in *17th European Signal Processing Conference*, (Glasgow), p. 1913–1917, août 2009.
- [5] I. REINHOLD, M. SANDSTEN et J. STARKHAMMAR, « Objective detection and time-frequency localization of components within transient signals », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 143, no. 4, p. 2368–2378, 2018.
- [6] J. HUILLERY, F. MILLIOZ et N. MARTIN, « On the description of spectrogram probabilities with a chi-squared law », *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, p. 2249 – 2258, juin 2008.
- [7] R. E. TURNER et M. SAHANI, « Time-frequency analysis as probabilistic inference », *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 62, p. 6171–6183, déc. 2014.
- [8] M. DAVY, S. J. GODSILL et J. IDIER, « Bayesian Analysis of Polyphonic Western Tonal Music », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 119, no. 4, p. 2498–2517, 2006.
- [9] A. MEYNARD et B. TORRÉSANI, « Time-scale synthesis for locally stationary signals », in *ICASSP 2020*, p. 5820–5824, 2020.
- [10] A. MEYNARD et B. TORRÉSANI, « Spectral Analysis for Nonstationary Audio », *IEEE/ACM Trans. Audio, Speech, Language Process.*, vol. 26, p. 2371 – 2380, déc. 2018.
- [11] I. DAUBECHIES, J. LU et H.-T. WU, « Synchrosqueezed wavelet transforms : An empirical mode decomposition-like tool », *Appl. Comput. Harmon. A.*, vol. 30, no. 2, p. 243 – 261, 2011.
- [12] M. CLERC et S. MALLAT, « Estimating deformations of stationary processes », *Ann. Statist.*, vol. 31, p. 1772–1821, déc. 2003.
- [13] A. P. DEMPSTER, N. M. LAIRD et D. B. RUBIN, « Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm », *J. R. Stat. Soc. Ser. B Methodol.*, vol. 39, no. 1, p. 1–38, 1977.

1. <https://github.com/AdMeynard/JEFAS>