



**HAL**  
open science

## Rhéologie

Jean-christophe Quantin, A. S. Caro-Bretelle

► **To cite this version:**

Jean-christophe Quantin, A. S. Caro-Bretelle. Rhéologie. Engineering school. France. 2022. hal-03693834

**HAL Id: hal-03693834**

**<https://hal.science/hal-03693834>**

Submitted on 13 Jun 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Rhéologie

Département ECOMAP – Année 2-M1  
Version 2021/2022

## COURSE ORGANIZATION

Modules	Enseignements	Volume horaire	Détail des coefficients	Crédits
	<b>Mécanique et modélisation</b>	<b>85</b>		
	- CAO (Conception Assistée par Ordinateur)	18	1	
<b>ECOMAP 8.3</b>	<b>- Rhéologie</b>	<b>23</b>	<b>1</b>	<b>6</b>
	- Mécanique de la rupture	20	1	
	- TP caractérisation et modélisation	24	1	

- 21 h of classes and practical applications (about  $\frac{2}{3}$  classes et  $\frac{1}{3}$  practical applications)
- Examination: written control

### ❖ Prerequisites:

- Continuum mechanics / Rigid solid mechanics / Materials engineering / Linear mechanics of materials

### ❖ Course material:

- Handout « Rhéologie » (1) : Contents - Bibliography - Exercises
- Handout « Rhéologie » (2) : Dictionnaire du Groupe Français de Rhéologie
- Handout « Rhéologie » (3) : copy of the slides shown during the classes

Online materials (Internet) : Campus - <https://campus2.mines-ales.fr/course/view.php?id=920>

## **COURSE OBJECTIVES**

- Take your first steps in rheology - At least partially understand the content and scope of the field as well as the many industrial, economic and societal implications,
- Become aware of interactions with other disciplines such as mechanics, chemistry, physics or biology ...
- To acquire the bases of the jargon in order to be able to dialogue with specialists or to deepen this or that sector,
- Acquire a first idea of possible experiments to identify the behavior of a particular medium.

# Contents

## 1 Aim of rheology

Définition - brief history

## 2 Constitutive laws – rheological models and criteria

Constitutive laws reminders - rheological models - rheological criteria

## 3 Plastic media

Material nonlinearity – Practical manifestations of plasticity – 1D plasticity – Management of plasticity – Plasticity criteria – Plastic flow rule – Viscoplasticity – Practical applications – Experimental aspects

## 4 Viscous media – Case of molten polymers

Newtonian media – Pseudoplastic or shear-thinning media – Yield stress, shear-thickening, thixotropic media – Viscoelastic media – Experimental aspects

## 5 Bibliography

What is rheology?

The dictionary of the French Group of Rheology (GFR) proposes the following definition:

“**Rheology** is the science of the **deformations** and **flows** of matter, the resulting **stresses** and the **efforts** needed to obtain them”

The universal scope of this science is then conceived.

It is found in all areas of human activity and its economic implications are considerable. Indeed, in the industrial world, one is often led to characterize, on a rheological level, substances or materials.

This characterization can be relatively empirical or more scientific.

Some examples to fix the ideas:

- In the **food-process industry** manufacturers are concerned about the consistency of their products (nature, regularity, control, ...) and the satisfaction of the consumer (yogurt, ice cream, chocolate, cheese, ...)

The sub-branch of rheology concerned with the study of consumables (food, cosmetics, etc.) in relation to consumer reactions is called **psychorheology**

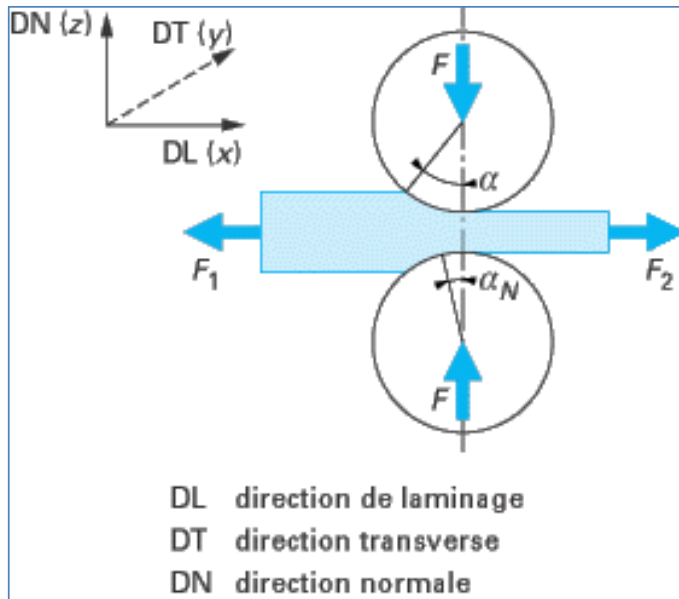
- In the **medical** field we are interested in biological materials and in particular in blood (fluidity, circulation problems in the vessels and arteries, ...). These studies gave rise to **biorheology** and **hemorheology** (relating to blood)
- Of course, all **structural** and **construction** materials are concerned (metals and metal alloys, plastics, composite materials, ceramics, concretes, ...)
  - About a **metal girder** (beam) we can talk about **stiffness** (ratio between stress and strain), **toughness** (resistance to crack propagation)
  - About a **fresh concrete** we could evoke, either empirical qualitative notions (**workability, consistency, pumpability, flowability, stability, ...**), or more fundamental or intrinsic quantitative notions (**cohesion, dynamic viscosity, yield stress, plastic viscosity, ...**)

We could multiply the examples to infinity.

It emerges from this list that rheology is, in essence, multidisciplinary: it uses mechanics, physics, chemistry, biology, which provide it with its basic tools and is useful for each of these disciplines.

As can be seen (see definition), the rheology concerns, as well, **fluid** media (gases, liquids, pastes, ...) as **solid** media: in this respect it can be said of a rolled steel sheet that it flows between the metal cylinders.





[Montmitonnet P., 2003]



[d'après <http://www.cauffiel.com/rollingMills/2high.asp>]

Indeed, from a strictly mechanical point of view (kinematic, dynamic) a fluid and a solid constitute two indistinguishable continuous media (they are differentiated yet by the resistance to the deformation which is lower in the case of the fluid).

Rheology has been the subject of recent development. Until then we had mainly studied materials for which the constitutive laws (relations between the stresses and the strains) were very simple:

- Hookean elastic solid
- Perfect fluid
- Newtonian viscous fluid

There remained a huge gap occupied by less well defined materials: pasta, suspensions (solid particles in a liquid medium), glasses, plastic materials and composites, ...

The rheological study of a continuous medium concerns, as well, its static or dynamic behavior (time-dependent or not) and this up to its limit of rupture (mechanisms of cracking, damage and fracture).

In 1928 **Bingham** (1878-1945) proposed to use the word “Rheology” to designate a new science, defined above.

The same year was created in the United States, under the leadership of **Bingham** and **Reiner**, the “Society of Rheology”.

**Bingham** studied oil paintings. The oils used in these preparations are Newtonian viscous liquids (viscosity independent of the shear rate). But it is not the same for these paints that are suspensions (pigments and additives incorporated in the base oil): these products spread easily (low viscosity under shear) and on the other hand do not flow (high viscosity at rest). Their apparent viscosity therefore decreases when the intensity of the shear increases; this is characteristic of a **Bingham** body.

Other examples of **Bingham**'s bodies include sludge (wastewater treatment plant, oil drilling, ...), toothpastes and bread dough, ...

In England the word "rheology" spread quickly: in 1938 **Scott Blair** (1902-1987) published "An introduction to industrial rheology". In the 1930s, he studied the rheology of bread dough and then became interested in the physical properties and texture of dairy products. It also contributes greatly to the promotion of hemorrheology and psychorrheology, which are now highly studied.

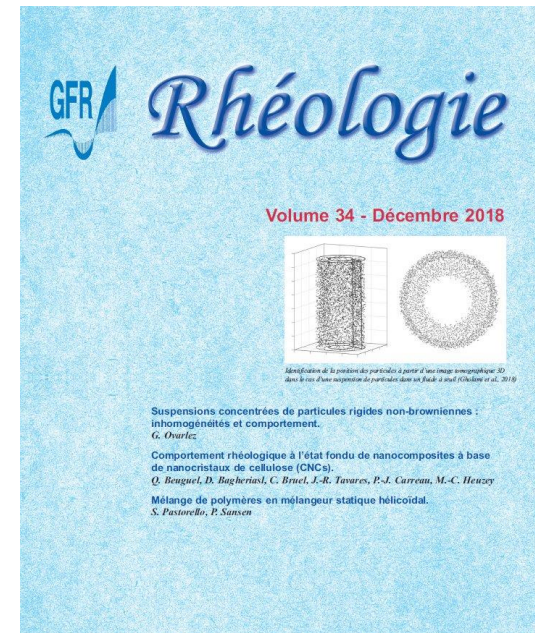
In France the constitution of rheology in autonomous domain is later (beginning of the 50's).

**1964**: birth of the **Groupe Français de Rhéologie** (GFR) whose objective is to promote the rheology by the organization of symposia, the edition of publications (Cahiers de Rhéologie, review « Rhéologie », Dictionnaire de rhéologie).

#### GFR 2021 – Sessions thématiques

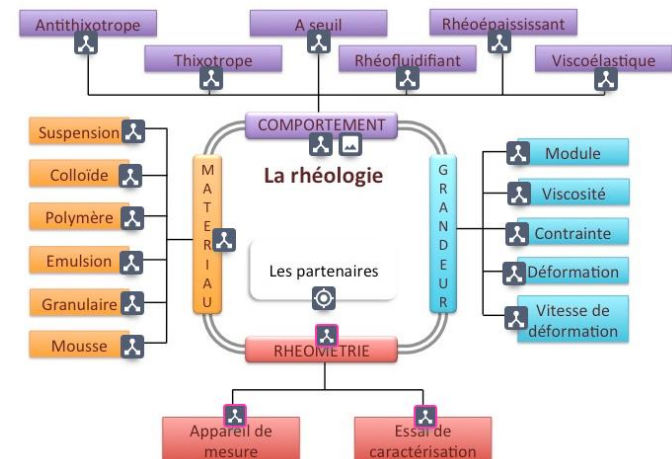
- Biopolymères, matériaux alimentaires et du vivant
- Poudres, suspensions et milieux granulaires
- Polymères et composites
- Gels et fluides complexes
- Microrhéologie et approches locales
- Rhéologie des procédés industriels





## Livre de connaissance sur la rhéologie (GFR) :

- Lien : <http://thot.i2m.u-bordeaux.fr/Rheologie>
- Identifiant : rheologie
- Mot de passe : rheo2013



## Youtube



Weissemberg effect:

- Crosslinked guar gum
- Pancake dough
- Crosslinked white glue

<http://www.youtube.com/watch?v=npZzlgKjs0I>

## Plastics processing



Moldflow - Mold filling – molten PP

## Youtube



Shear-thickening fluid: starch solution

<http://www.youtube.com/watch?v=eHYwo8gCdfI>

## Fresh concrete



Abrams cone test ("Slump test")

# Contents

## 1 Aim of rheology

Définition - brief history

## 2 Constitutive laws – rheological models and criteria

Reminders about constitutive laws - rheological models - rheological criteria

## 3 Plastic media

Material nonlinearity – Practical manifestations of plasticity – 1D plasticity – Management of plasticity – Plasticity criteria – Plastic flow rule – Viscoplasticity – Practical applications – Experimental aspects

## 4 Viscous media – Case of molten polymers

Newtonian media – Pseudoplastic or shear-thinning media – Yield stress, shear-thickening, thixotropic media – Viscoelastic media – Experimental aspects

## 5 Bibliography

On a introduit dans le cours de MMC en 1<sup>ère</sup> année la notion de loi de comportement avec le cas particulier de la loi de Hooke (*milieu élastique linéaire et isotrope*).

**Rappel :** la loi de comportement (LC) d'un milieu a pour objectif et nécessité d'exprimer les efforts intérieurs – c'est-à-dire le tenseur des contraintes de Cauchy – en fonction d'une grandeur mathématique convenablement choisie pour décrire les déformations du milieu (*transformations géométriques dues aux sollicitations subies*).

Jointe aux équations générales du problème (*conservation de la masse, équation d'équilibre, ...*) et aux conditions limites (CL) la LC doit permettre la détermination complète du mouvement du système, compte tenu des conditions initiales.



D'une façon générale une LC peut s'écrire sous la forme :  $\sigma(a, t) = \underset{\substack{\tau \leq t \\ b \in S}}{F} \{a, t, \varphi(b, \tau)\}$

Dans cette expression :

- $F$  est une fonctionnelle,
- $\sigma(a, t)$  représente l'état de contrainte à l'instant  $t$  d'une particule  $a$  appartenant au milieu  $S$ ,
- $\varphi(b, \tau)$  représente la position de la particule  $b$  à l'instant  $\tau$ .

Cette écriture est la plus générale : en fait  $F$  et donc  $\sigma(a, t)$  ne dépendent que de la position des particules  $b$  infiniment proches de  $a \rightarrow$  c'est le principe de **localisation spatiale**.

La notion de « **milieux matériellement simples** » plus restrictive mais plus simple à formuler mathématiquement est, en fait, plus couramment répandue pour décrire les milieux usuels : elle consiste à dire que  $F$  ne dépend que de  $\varphi(a, \tau)$  et des dérivées partielles premières de  $\varphi(b, \tau)$  par rapport aux coordonnées spatiales, ces dérivées étant calculées au point  $b = a$ .

**Remarque** : une loi de comportement peut dépendre également de paramètres (variables internes ou externes) tels que :

- La **température** (la viscosité d'un fluide diminue généralement lorsque la température augmente),
- La **pression** (effet sur la viscosité des polymères thermoplastiques fondus en moulage par injection),
- L'**endommagement** (affecte la rigidité, la résistance à la rupture), ...

- ❖ Milieu **homogène** : la LC (fonctionnelle  $F$ ) est indépendante de la particule. Le comportement est le même en tout point du milieu.

## Exemples

**Béton** : ce matériau est constitué de différentes phases (liant hydraulique, granulats de tailles diverses) possédant des caractéristiques mécaniques (par exemple élastiques) différentes.

→ Matériau **hétérogène**



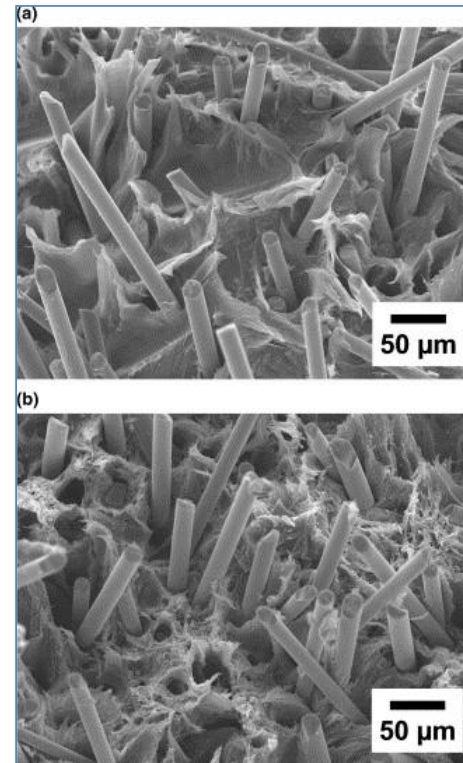
*Béton rugueux  
[Thomann M, thèse, 2005]*

**Matériau composite** : prenons l'exemple d'un composite mixte à matrice organique de type polypropylène renforcée par des fibres de verre et des particules de  $\text{CaCO}_3$ .

(a) : FV : 12,9 % et  $\text{CaCO}_3$  : 0 %  
en volume

(b) : FV : 14,6 % et  $\text{CaCO}_3$  : 6,6 %  
en volume

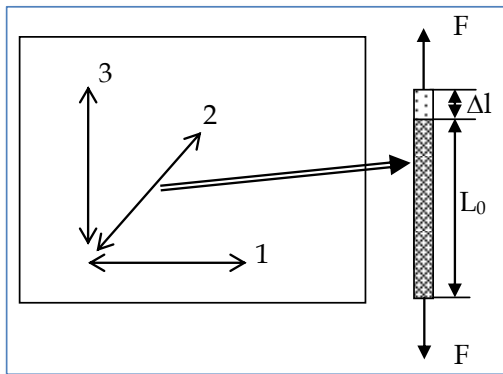
→ Matériau **hétérogène**



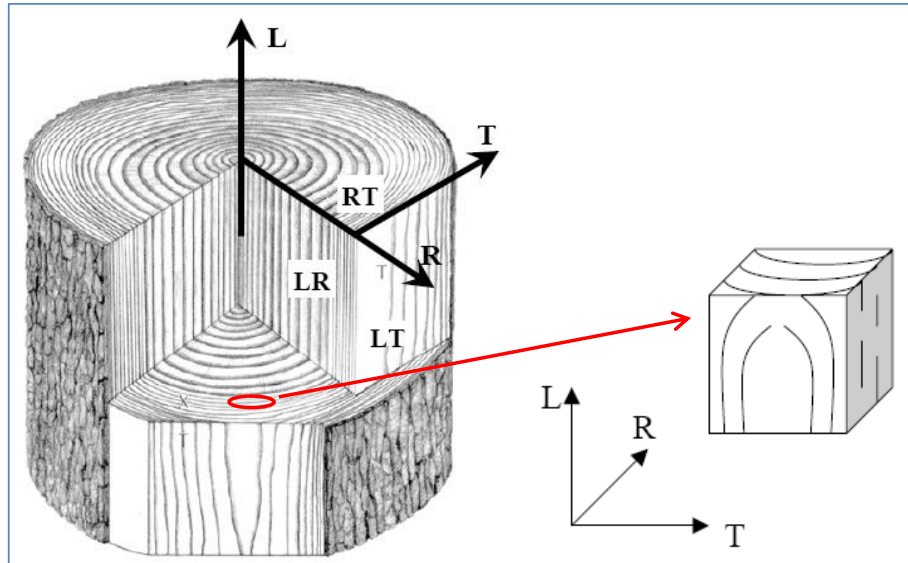
[Hartikainen J, 2005]

**Remarque** : la notion d'homogénéité dépend de la structure du matériau à différentes échelles mais également de l'échelle d'observation → par exemple, dans le cas d'un béton celui-ci paraîtra hétérogène à l'échelle des granulats mais, en revanche, pourra être considéré comme homogène à l'échelle d'un pont.

- ❖ Milieu **isotrope** : la LC (fonctionnelle  $F$ ) est isotrope c'est-à-dire que son écriture est indépendante de tout changement de repère  $\rightarrow$  les caractéristiques mécaniques sont identiques dans toutes les directions.



Si on réalise un essai de traction uniaxiale sur une éprouvette prélevée dans une tôle d'acier **isotrope** selon plusieurs directions tous les essais donneront les mêmes résultats  $\rightarrow$  la même courbe force-déplacement et la même raideur.



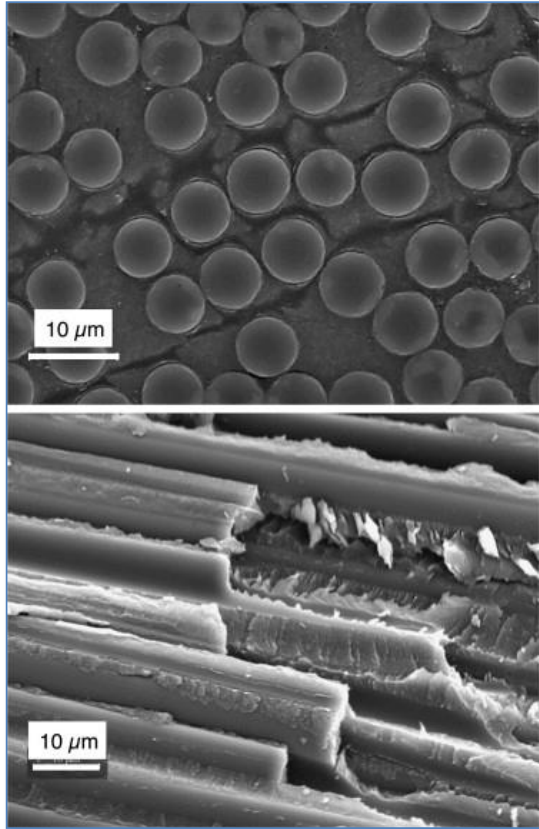
Prisme de bois pour essai mécanique [d'après

[http://www.giref.ulaval.ca/~deteix/stage\\_2009/Modelisation\\_du\\_comportement\\_mecanique\\_du\\_bois\\_en\\_sechage.pdf](http://www.giref.ulaval.ca/~deteix/stage_2009/Modelisation_du_comportement_mecanique_du_bois_en_sechage.pdf)  
et Moutee M, thèse, 2006]

### Matériau bois :

Expérimentalement on montre que le bois présente localement 3 directions matérielles selon lesquelles les rigidités ne sont pas les mêmes : la rigidité la plus élevée se situe selon la direction longitudinale L

→ Matériau **anisotrope**

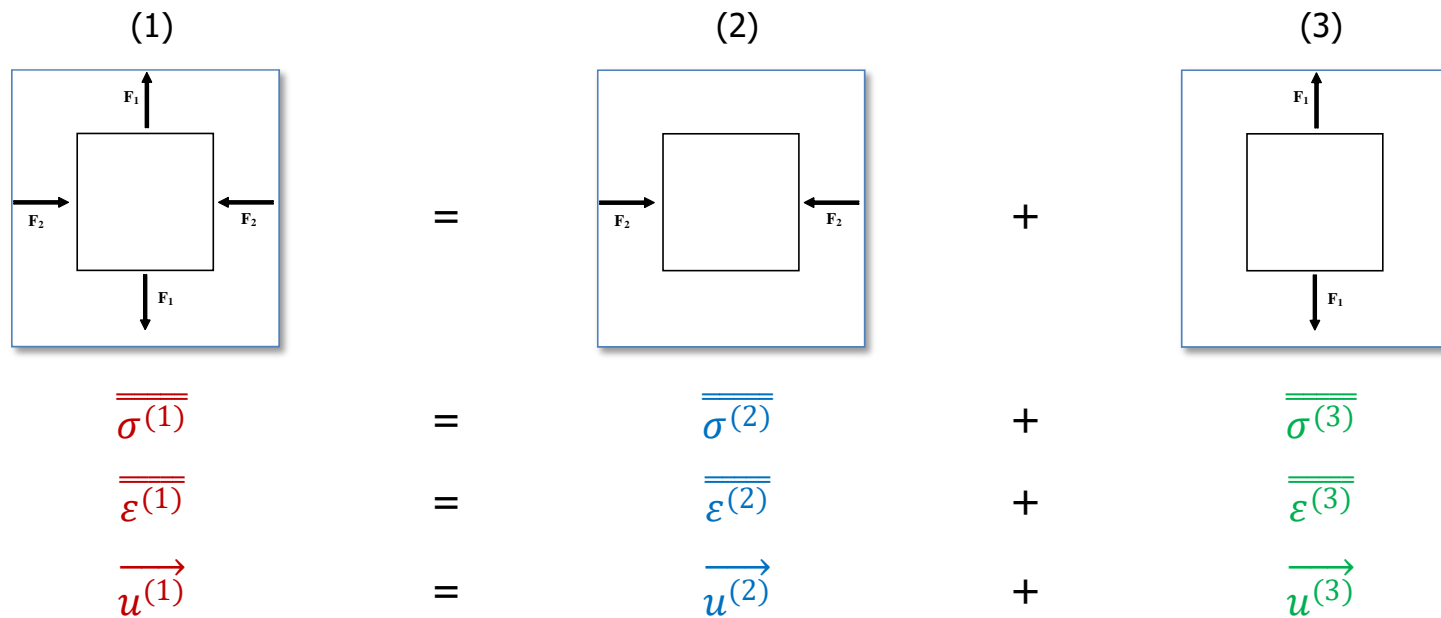


*[González C, 2007]*

**Matériau composite unidirectionnel** : on considère ici un composite à matrice époxyde renforcé par des fibres de carbone (54 % en volume) alignées → la rigidité dans le sens des fibres est bien supérieure à celle dans le sens transverse. Ceci s'explique par la grande différence de rigidité entre la matrice ( $E=4$  GPa) et la fibre de carbone ( $E=230$  GPa).

→ Matériau **anisotrope**

❖ Milieu **linéaire** : la LC (fonctionnelle  $F$ ) est linéaire  $\rightarrow$  l'état de contrainte dépend linéairement de l'état de déformation (exemple : loi de Hooke)  $\rightarrow$  on peut utiliser un **principe de superposition**.





❖ **Fluide visqueux newtonien** :  $\bar{\sigma} = -p\bar{1} + 2\eta\bar{\dot{\epsilon}}$

Dans cette expression on a :

- $p$  : pression hydrostatique (correspond à la pression hydrostatique dans un fluide au repos),
- $\bar{\dot{\epsilon}}$  : tenseur des vitesses de déformation (s'obtient à partir du vecteur vitesse par des relations analogues à celles exprimant le tenseur des déformations  $\bar{\epsilon}$  linéarisé en HPP à partir du vecteur déplacement – voir cours MMC FCD sur Campus),
- $\eta$  : viscosité dynamique (ou newtonienne) – paramètre caractéristique du milieu.

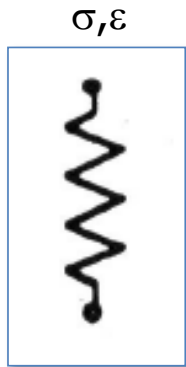
Cette loi de comportement est linéaire et isotrope. De plus elle est incompressible (aucun changement de volume au cours de la déformation ou au cours de l'écoulement).

❖ **Solide élastique de Hooke** :  $\bar{\sigma} = \lambda \cdot \text{tr}(\bar{\epsilon}) \cdot \bar{1} + 2\mu \cdot \bar{\epsilon}$  qu'on peut inverser selon

$\bar{\epsilon} = \frac{-\nu}{E} \cdot \text{tr}(\bar{\sigma}) \cdot \bar{1} + \frac{1+\nu}{E} \cdot \bar{\sigma} \rightarrow$  c'est une loi linéaire et isotrope à 2 paramètres indépendants caractéristiques du milieu :  $\lambda, \mu$  ou  $E, \nu$ .

**Définition :** un modèle rhéologique est un système idéalisé représentatif d'un comportement rhéologique **unidimensionnel**. Ce système ne simule que la relation entre la déformation et la contrainte qui lui est associée. Dans ce cas le modèle n'est relié à l'extérieur que par ses deux extrémités, dont le déplacement relatif représente la déformation  $\bar{\varepsilon}$  et qui sont le siège d'applications de forces colinéaires, égales et de sens contraires, analogues aux contraintes  $\bar{\sigma}$ .

Les modèles purement mécaniques peuvent être remplacés par des analogies électriques répondant à des équations identiques.

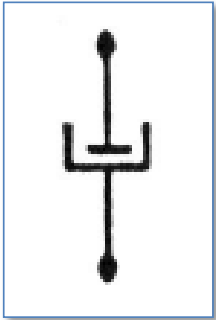


Ressort de caractéristique  $E$ .

La contrainte  $\sigma$  est proportionnelle à la déformation  $\varepsilon$  et de même signe qu'elle → Il simule l'élasticité idéale linéaire.

Modèle de solide élastique de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon, \text{ avec } E \geq 0$$

$\sigma, \varepsilon$ 

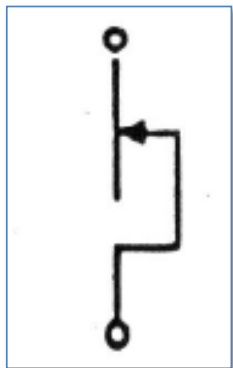
Amortisseur de caractéristique  $\eta$ .

La contrainte  $\sigma$  est proportionnelle à la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}$  et de même signe qu'elle  $\rightarrow$  Il ne peut qu'absorber de l'énergie et simule la viscosité normale dite de Newton.

Modèle de fluide newtonien

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}, \text{ avec } \eta \geq 0$$

**Patin** (ou élément frottant or élément de Saint-Venant) caractérisé par sa contrainte seuil  $\sigma_s$ .

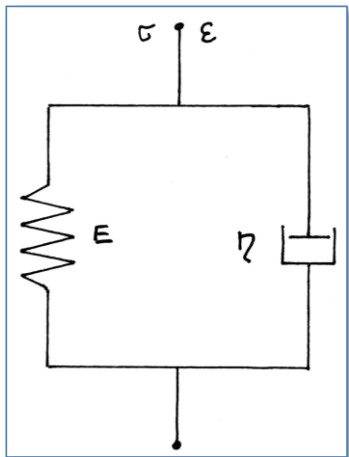


La déformation  $\varepsilon$  est invariable tant que la contrainte  $\sigma$  reste inférieure, en valeur absolue, à un certain seuil  $\sigma_s$ . Lorsque la contrainte atteint ce seuil (*qu'elle ne peut pas dépasser*), la déformation peut varier indéfiniment ; dans ce dernier cas le patin absorbe (*ou dissipe*) de l'énergie. Ce modèle simule la **plasticité idéale**.

$$\begin{cases} \sigma < \sigma_s \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \\ \sigma = \sigma_s \Rightarrow \varepsilon = \text{indéfinie} \end{cases}$$

En associant plusieurs modèles élémentaires en parallèle ou en série on peut simuler des comportements plus complexes présentant, à la fois, de l'élasticité, de la viscosité et de la plasticité (*notion de seuil*).

❖ **Modèle de Kelvin-Voigt** (*solide viscoélastique*)



Règle d'assemblage en parallèle :

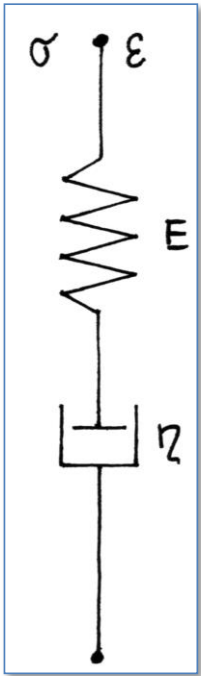
$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \end{cases}$$

On a :  $\begin{cases} \sigma_1 = E\varepsilon_1 \\ \sigma_2 = \eta\dot{\varepsilon}_2 \end{cases}$  d'où, en combinant l'ensemble des relations :

$$\eta \frac{d\varepsilon}{dt} + E\varepsilon = \eta\dot{\varepsilon} + E\varepsilon = \sigma$$

**solide de Kelvin Voigt** → elle permet de calculer la réponse à tout type de sollicitation (*fluage, relaxation, oscillation, ...*)

❖ **Modèle de Maxwell** (*fluide viscoélastique*)



Règle d'assemblage en série :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

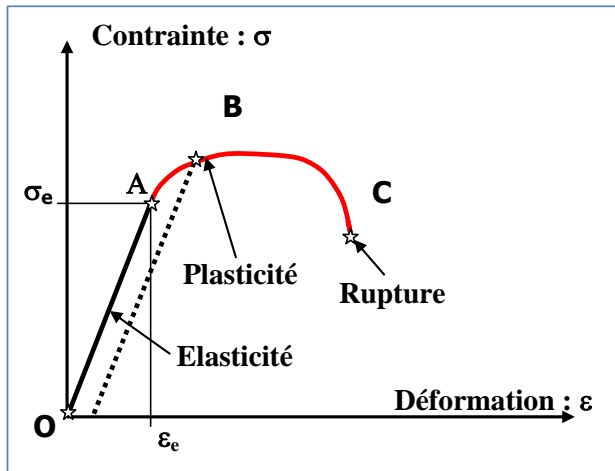
On a :  $\begin{cases} \sigma_1 = E\varepsilon_1 \\ \sigma_2 = \eta\dot{\varepsilon}_2 \end{cases}$  d'où, en combinant l'ensemble des relations :  $\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\varepsilon}$

qui constitue l'équation rhéologique d'un **fluide de Maxwell** → elle permet de calculer la réponse à tout type de sollicitation (*fluage, relaxation, oscillation, ...*)

**Définition :** un critère rhéologique correspond à un état de contrainte (*ou de déformation*) à partir duquel on observe un changement dans la loi de comportement du milieu.

Considérons par exemple un essai de traction uniaxiale sur une éprouvette d'acier inoxydable ;

L'essai démarre au point O : le matériau est au repos (*état naturel*)



Tant que le point de chargement ne dépasse pas le point A le déchargement se fait par le même chemin (*réversibilité*)

Si le point de chargement dépasse le point A (*par exemple B*) alors le déchargement se fait parallèlement à OA

Si on atteint le point C il y a rupture de l'éprouvette

O → A : domaine élastique,

A → C : domaine plastique,

C : rupture.

2 transitions :

- élasticité – plasticité,
- plasticité – rupture.



À chaque transition peut être associé un critère rhéologique.

Pour la première transition le critère peut s'écrire :  $\sigma = \sigma_e$  ou encore  $\varepsilon = \varepsilon_e$ .

$\sigma_e$  est la limite élastique en traction du matériau.

**Remarque :** ce critère est insuffisant dans le cas général car il ne permet pas, par exemple, de déterminer la limite élastique du même matériau en cisaillement simple ou dans une sollicitation plus complexe.

La grande majorité des critères rhéologiques peut s'écrire sous la forme :

$$F(\sigma) = F(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}) = 0$$

**Terminologie** : à propos de critères rhéologiques on utilise également des expressions telles que « **fonction seuil** » ou « **fonction de charge** ».

Cette relation peut donc faire l'objet d'une représentation dans l'espace de dimension 9 des contraintes (*dans le cas le plus général*).

Un critère peut parfois également être représenté par une **courbe intrinsèque** (*voir plus loin*) dans le plan de Mohr : ceci est très utilisé pour les sols, les milieux granulaires, ...

**Isotropie** : dire qu'un critère  $F(\sigma) = 0$  est isotrope est équivalent à vérifier l'une des conditions suivantes :

- F est une fonction isotrope des composantes  $\sigma_{ij}$ ,
- F est une fonction symétrique des seules contraintes principales
- F est fonction des seuls invariants du tenseur  $\bar{\sigma}$ .

**Rappel** : le tenseur des contraintes ou sa matrice associée dans un repère donné possède 3 invariants indépendants ; par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = tr(\sigma) = \sum \sigma_{ii} \\ I_2 = \frac{1}{2} tr(\sigma^2) = \frac{1}{2} \sum \sigma_{ij} \sigma_{ji} \\ I_3 = \frac{1}{3} tr(\sigma^3) = \frac{1}{3} \sum \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \end{array} \right.$$

## ❖ Le critère de Tresca



Henri-Edouard Tresca  
(1814-1885)

C'est un **critère de plasticité** (*relatif à la transition élasticité – plasticité*) isotrope.

Ce critère fut introduit par Henri **Tresca** (années 1864-1868) à la suite d'expériences sur le plomb.

Ce critère s'écrit  $F(\sigma) = \sup_{I,J=I,II,III} \{\sigma_I - \sigma_J - \sigma_0\}$ , où  $\sigma_I$  et  $\sigma_J$  représentent les contraintes principales. On constate qu'on peut également écrire ce critère sous la forme :

$F(\sigma) = \sigma_{Max} - \sigma_{Min} - \sigma_0$ , où  $\sigma_{Max}$  et  $\sigma_{Min}$  représentent respectivement la plus grande et la plus petite contrainte principale et

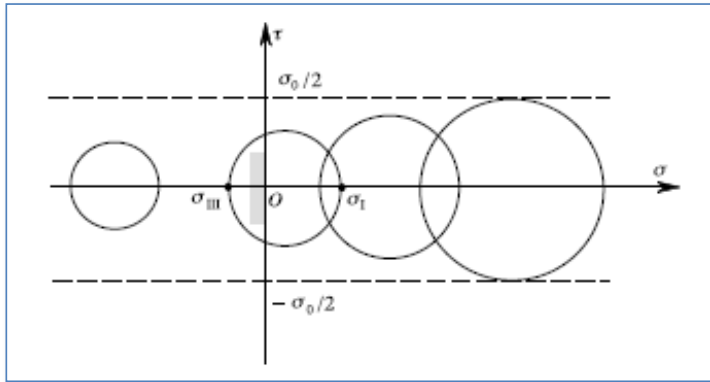
$\sigma_0$  une caractéristique du milieu.

On peut montrer que  $\sigma_0$  correspond à la **limite élastique en traction uniaxiale**.

Par ailleurs :

- $-\sigma_0$  : limite élastique en compression uniaxiale,
- $\sigma_0/2$  : limite élastique en cisaillement pur.

Ce critère est également dénommé critère de la cisssion (*contrainte de cisaillement*) maximale (*évident en représentation dans le plan de Mohr*)



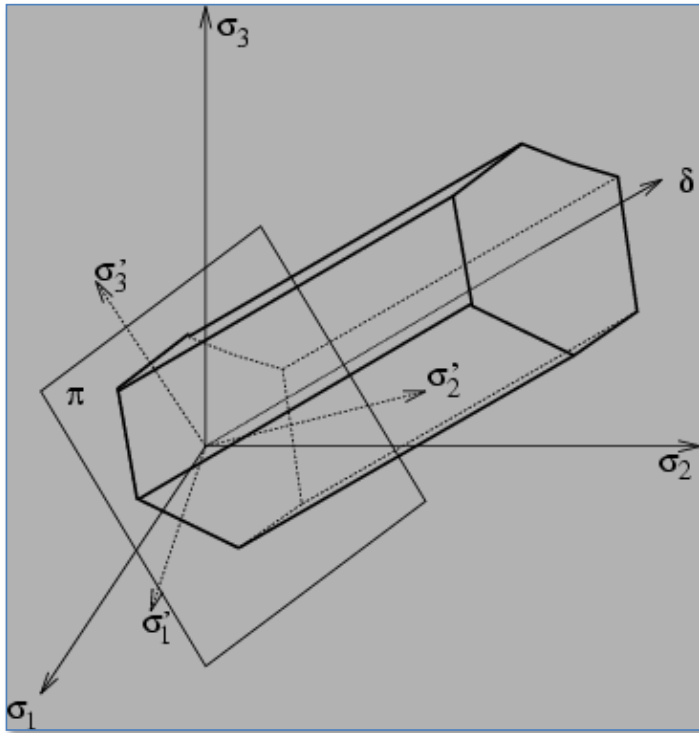
[Salençon J, 2005]

Le milieu reste élastique tant que le diamètre du plus grand cercle de Mohr reste inférieur à  $\sigma_0$ . Ce cercle doit donc être compris dans la bande délimitée par les deux droites d'équations  $\tau = \frac{\sigma_0}{2}$  et  $\tau = -\frac{\sigma_0}{2}$ . Le critère est indépendant de la contrainte principale intermédiaire.

Physiquement cela signifie que la limite élastique du milieu est atteinte lorsque la contrainte de cisaillement sur une facette d'orientation quelconque atteint la valeur  $\frac{\sigma_0}{2}$

Ce critère étant isotrope, il peut être représenté graphiquement dans l'espace de dimension 3 des contraintes principales  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$  par la surface de charge d'équation

$$F(\sigma) = F(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = 0$$



Celle-ci a la forme d'un prisme à base hexagone régulier d'axe  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Sur le schéma ci-contre,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  représentent les 3 contraintes principales.

[d'après <http://jgarrigues.perso.egim-mrs.fr/elashtml/courselasnode17.html>]

## ❖ Le critère de Von Mises



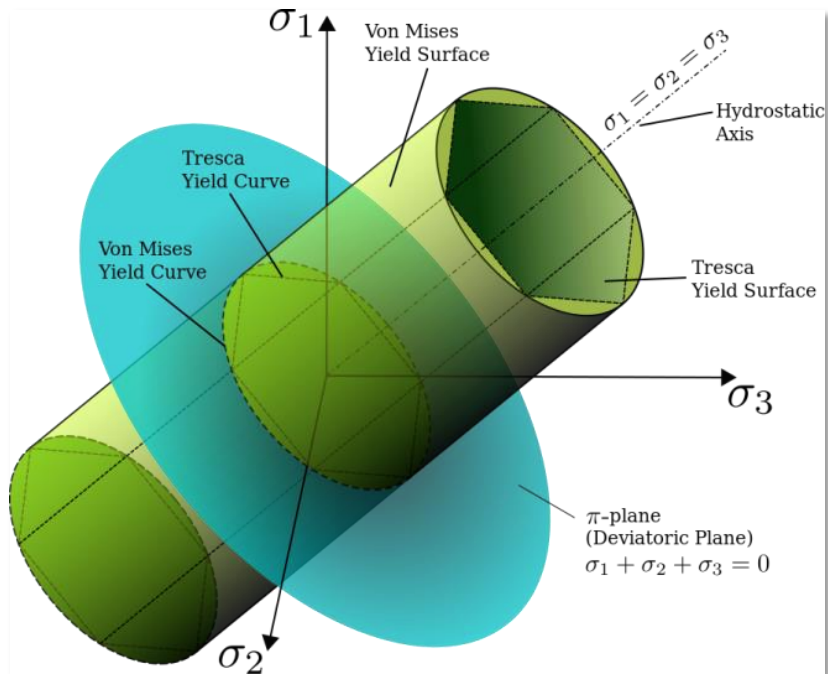
Richard Von Mises  
(1883-1953)

Ce **critère de plasticité** isotrope a été imaginé indépendamment par Beltrami (1903), Huber (1904), Von Mises (1913) et Hencky (1924).

Il s'écrit :  $F(\sigma) = J_2 - k^2$ , avec :

- $J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(s^2) = \frac{1}{2} \sum s_{ij} s_{ji}$  où  $s$  représente le tenseur déviateur des contraintes (*voir cours de MMC*)
- $k$  représente la limite élastique (*caractéristique du milieu*) en cisaillement simple (*à montrer*). On a, par ailleurs :  $k\sqrt{3}$  : limite élastique en traction uniaxiale ( $-k\sqrt{3}$  en compression)

Ce critère est parfois dénommé **critère de la cission octaédrale** ; la cission octaédrale étant la contrainte de cisaillement obtenue sur la facette d'orientation  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  dans le repère principal pour les contraintes.



Ce critère isotrope peut être représenté graphiquement dans l'espace de dimension 3 des contraintes principales  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$  par la surface de charge d'équation

$F(\sigma) = F(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = 0$ . Cela donne un cylindre d'axe  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  et de rayon  $k\sqrt{2}$ . Ce cylindre est circonscrit au prisme de Tresca.

Tant que le point représentatif de l'état de contrainte se situe strictement à l'intérieur du cylindre le milieu présente un comportement élastique (la limite élastique n'est pas atteinte).

[d'après [https://help.scia.net/webhelplatest/fr/sr/plasticity/plasticity\\_01.htm](https://help.scia.net/webhelplatest/fr/sr/plasticity/plasticity_01.htm)]



Autres écritures utiles du critère de Von Mises :

- Dans un repère quelconque :

$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) = 6k^2 = 2\sigma_0^2$  (lorsque le critère est vérifié), avec  $\sigma_0$  : contrainte d'écoulement du milieu égale à la limite élastique en traction uniaxiale.

- Dans un repère principal pour les contraintes :

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6k^2 = 2\sigma_0^2$$

On utilise également souvent la quantité suivante :

$\sigma_{\text{éq.VM}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$  qui est la contrainte équivalente de Von

Mises : il suffit de la comparer à  $\sigma_0$  pour savoir si la limite élastique du milieu est atteinte au point considéré (*cette quantité est calculée par la plupart des logiciels de calcul par éléments finis, tels qu'ANSYS®*).

**Remarque :** le critère de Von Mises est pertinent avec la plupart des alliages métalliques. Il présente quantitativement assez peu de différence avec le critère de Tresca (*voir TD*) mais sa formulation mathématique est plus pratique (*ce qui justifie souvent son utilisation préférentielle*).

## ❖ Les critères de type courbe intrinsèque

**Présentation** : nous allons introduire la notion de **courbe intrinsèque** (CI) à partir du critère de Tresca.

Le critère de Tresca présente les particularités suivantes :

- Il ne fait intervenir que les contraintes principales extrêmes,
- Seule la différence entre ces deux contraintes intervient.



Albert Caquot (1881-1976)



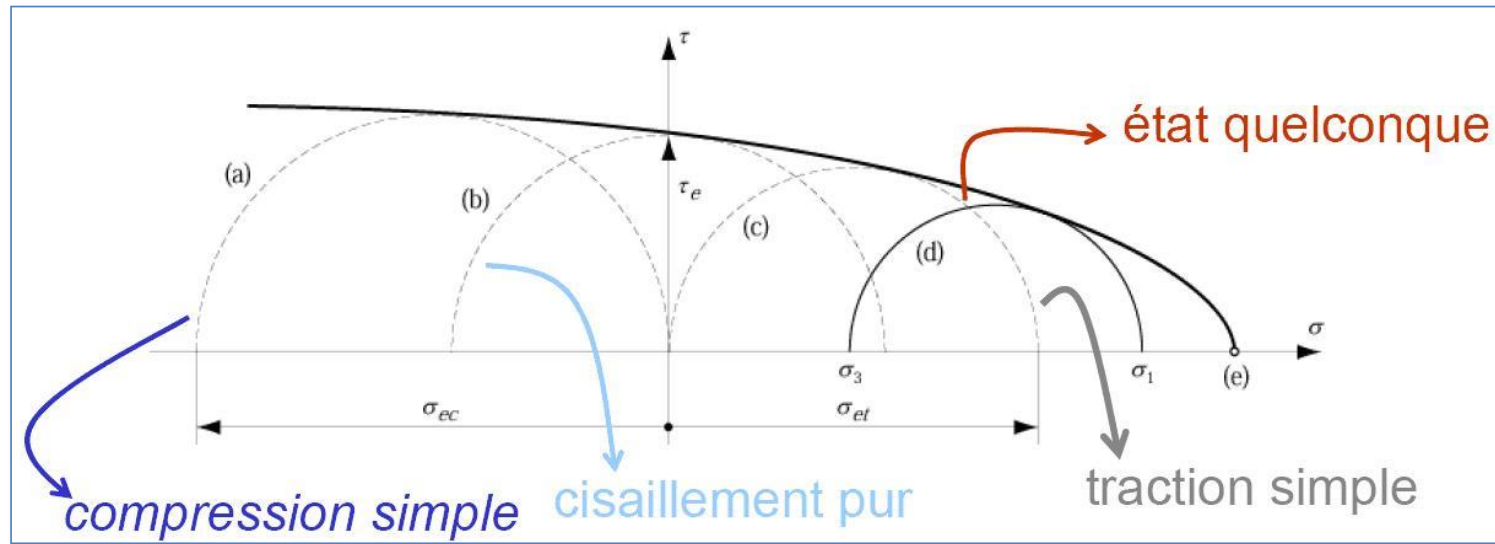
Otto Mohr (1835-1918)

En ordonnant les contraintes principales selon :  $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ , la fonction de charge s'écrit :  $F(\sigma) = \sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0$ .

Une généralisation de ce critère a été proposée par Mohr et Caquot, dans laquelle la différence ( $\sigma_I - \sigma_{III}$ ) est comparée, non plus à une constante mais à une fonction de la « contrainte moyenne » ( $\sigma_I + \sigma_{III}$ ).

Il y a donc dépendance de la fonction de charge de la partie sphérique de  $\sigma$ . On peut alors écrire :  $F(\sigma) = \sigma_I - \sigma_{III} - g(\sigma_I + \sigma_{III})$

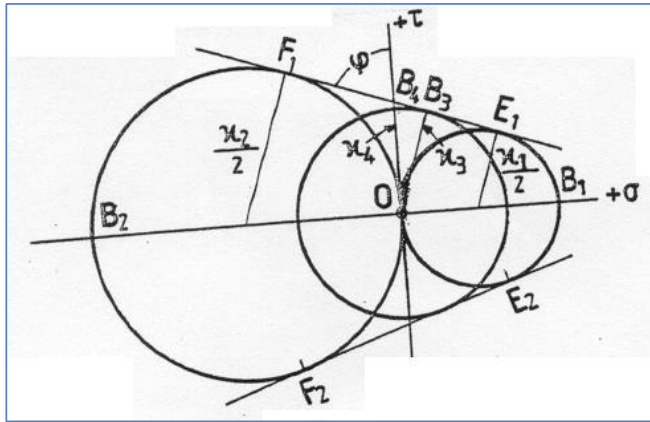
Ce type de critère trouve alors une interprétation graphique évidente dans le plan de Mohr : c'est la CI, qui est l'**enveloppe des cercles limites de Mohr** lorsque la nature du chargement évolue.



[d'après [http://lmafsrv1.epfl.ch/botsis/MDS/attributs/documents/TRANS-MdS-CH\\_15.pdf](http://lmafsrv1.epfl.ch/botsis/MDS/attributs/documents/TRANS-MdS-CH_15.pdf)]

Pour un milieu régi par le critère de Tresca la CI est constituée de deux droites parallèles à l'axe des abscisses.

## ❖ Critère de Coulomb



[Schéma original de Mohr (1900) pour la détermination graphique d'une enveloppe linéaire de rupture (dite de Mohr-Coulomb) incluant la compression uniaxiale, le cisaillement pur et la traction uniaxiale]

C'est un critère de type CI souvent utilisé pour les sols et les milieux granulaires, dans la gamme des sollicitations courantes.

La CI est constituée de deux demi-droites symétriques inclinées d'un angle  $\pm\phi$  par rapport à l'axe des abscisses et d'ordonnée à l'origine C

C : cohésion,

$\phi$  : angle de frottement interne du milieu

**Attention :** la définition usuelle de  $\phi$  est

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \phi_{Mo/r}$$

Ce critère peut aussi s'écrire :  $F(\sigma) = \sigma_I - \sigma_{III} + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin(\phi) - 2C \cdot \cos(\phi)$

Deux cas particuliers :

- $\phi \neq 0, C = 0$  : milieu dit pulvérulent (*sables, graviers, ...*)
- $\phi = 0, C \neq 0$  : milieu dit purement cohérent (*métaux*) → on retrouve le critère de Tresca

## ❖ Courbe intrinsèque du béton

Dans certaines réglementations le béton armé précontraint est régi par la représentation de Chalos et Beteille qui est une CI. L'équation est donnée par  $F(\sigma) = \tau^2 + \alpha\sigma^2 + \beta\sigma + \gamma$ , où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont trois paramètres déterminés à partir de trois essais de traction simple, compression simple et cisaillement simple (*dans chaque cas le plus grand cercle de Mohr doit, dans l'état limite, être tangent à la CI*).

On peut établir les relations suivantes :

$\alpha = 1 - \frac{f_c f_t}{4\tau_r^2}$  ;  $\beta = -\frac{f_c - f_t}{2}$  ;  $\gamma = -\frac{\tau_r^2 (f_c + f_t)^2}{f_c f_t 4}$  où  $f_t$ ,  $f_c$  et  $\tau_r$  représentent respectivement les résistances à la traction simple, à la compression simple et au cisaillement simple.

**Remarque :** en béton armé, par convention  $\sigma \geq 0$  en compression.

On peut établir également la relation suivante :

$\tau_{12}^2 \leq \frac{\tau_r^2}{f_c f_t} (f_c - \sigma_{11} - \sigma_{22})(f_t + \sigma_{11} + \sigma_{22}) + \sigma_{11}\sigma_{22}$  qui traduit le fait que le critère n'est pas violé (*cette relation est exprimée dans un repère quelconque pour les contraintes*).

On citera, principalement, deux critères de plasticité.

### ❖ Le critère de Hill

C'est un critère de plasticité anisotrope convenant bien, par exemple, aux pièces métalliques anisotropes (*tôles d'acier laminées ou embouties*).

Dans un repère quelconque pour les contraintes son expression est la suivante :

$$F(\sigma) = F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{13}^2 - 1$$

F, G, H, L, M et N sont 6 paramètres scalaires caractéristiques du milieu qui peuvent être déterminés par un nombre d'essais suffisants.

#### Remarques :

- Ce critère est anisotrope (*en fait orthotrope*) et généralise le critère de Von Mises aux milieux orthotropes,
- Les limites élastiques sont identiques (*en valeur absolue*) en traction et compression.

## ❖ Le critère de Tsai (ou Tsai-Wu)

C'est un critère de plasticité anisotrope convenant bien pour des matériaux tels que le bois ou les composites à matrice organique renforcés par des fibres de verre (*utilisé, dans ce cas, comme critère de rupture*). Son expression est la suivante, dans un repère quelconque :

$$F(\sigma) = F'(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G'(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H'(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L'\sigma_{12}^2 + 2M'\sigma_{23}^2 + 2N'\sigma_{13}^2 + P\sigma_{11} + Q\sigma_{22} + (P + Q)\sigma_{33} - 1$$

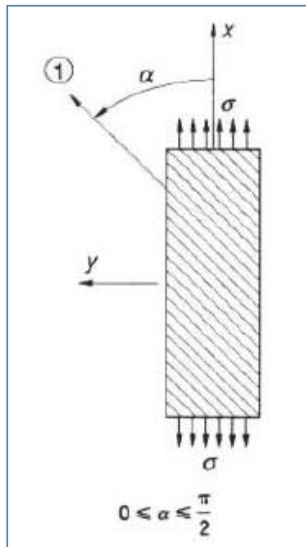
F', G', H', L', M', N', P et Q sont 8 paramètres scalaires caractéristiques du milieu qui peuvent être déterminés par un nombre d'essais suffisants.

### Remarques :

- Ce critère est encore plus général que le critère de Hill ; il contient des termes de degré 1 en contraintes et correspond à des milieux orthotropes,
- Les limites élastiques en traction et compression sont différentes.

### ❖ Le critère de la contrainte maximale

C'est un critère assez rustique qui s'applique essentiellement aux composites à fibres unidirectionnelles.



[Chevalier Y, 1991]

Si on sollicite un composite unidirectionnel en traction simple dans la direction  $x$ , l'état de contrainte plane qui en résulte dans le repère matériel 1,2 s'écrit (voir MMC 1A) :

$$\sigma_{11} = \sigma \cos^2(\alpha), \sigma_{22} = \sigma \sin^2(\alpha) \text{ et } \sigma_{12} = -\sigma \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

La résistance à la traction  $\sigma_c$  d'un composite unidirectionnel dans le sens des fibres (1) peut être approchée par une loi des mélanges :  $\sigma_c = \sigma_f v_f + \sigma_{m_1} (1 - v_f)$  avec :

- $v_f$  : fraction volumique de fibre ( $0 \rightarrow 1$ )
- $\sigma_f$  : résistance en traction de la fibre
- $\sigma_{m_1}$  : contrainte dans la matrice à la rupture des fibres

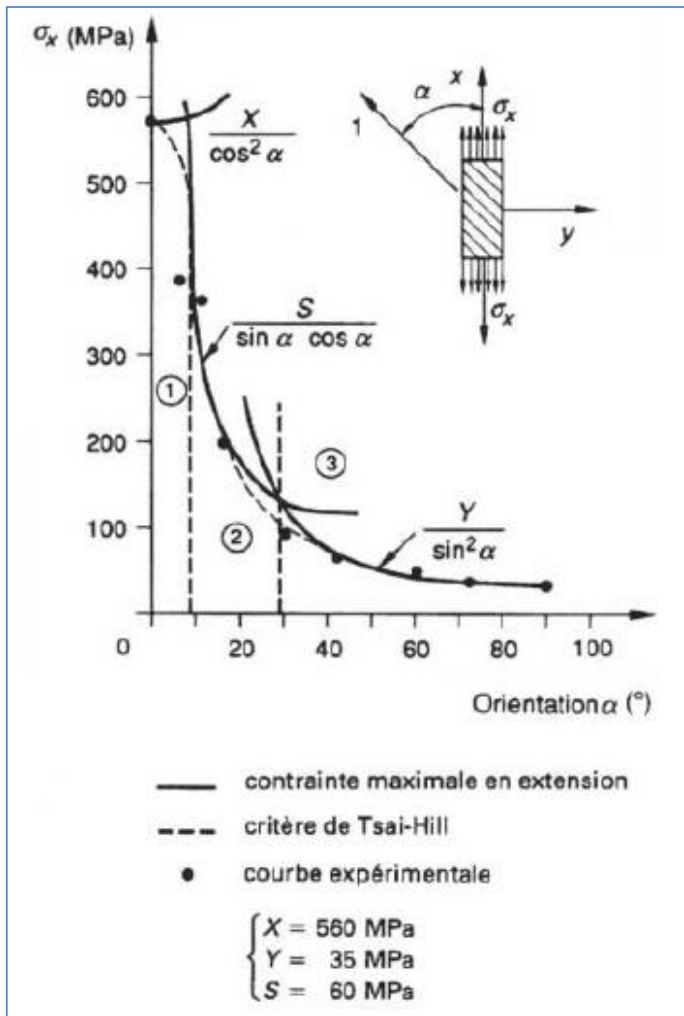


On suppose en outre :

- La résistance en traction du composite dans la direction 1 (*sens des fibres*) vaut  $\sigma_c$
- La résistance en traction du composite dans la direction 2 (sens transverse) vaut  $\sigma_m$  (*résistance en traction de la matrice*)
- La résistance en cisaillement dans le plan 1,2 vaut  $\tau_m$  (*résistance en cisaillement de la matrice*)

Le critère de rupture en contrainte maximale peut alors s'écrire :

$$|\sigma_{xx}| = \min \left\{ \frac{\sigma_c}{\cos^2(\alpha)}, \frac{\sigma_m}{\sin^2(\alpha)}, \frac{\tau_m}{\cos(\alpha) \sin(\alpha)} \right\}$$



Composite epoxyde/fibres de carbone  
[Chevalier Y, 1991]

Ce critère prévoit donc :

- Une rupture en traction des fibres pour  $\alpha$  faible (*zone 1 du graphe ci-contre*),
- Une rupture par cisaillement de la matrice pour les valeurs intermédiaires (*zone 2*),
- Une rupture en traction de la matrice pour des valeurs de  $\alpha$  proches de  $90^\circ$  (*zone 3*).

Le graphe donne par ailleurs un comparatif entre 2 critères (*Hill et contrainte max.*) et des résultats expérimentaux → le critère de Hill rend mieux compte de la réalité.

Une autre limitation du critère de contrainte max. est qu'il ne fonctionne qu'en contrainte plane et ne permet donc aucune prévision dans une sollicitation triaxiale.

## ❖ Critères fondés sur une approche de type mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture permet de modéliser le comportement mécanique de structures présentant des défauts (*fissures, porosités, angles vifs, ...*) pour des comportements fragiles ou non.

La présence de ces défauts occasionne des perturbations locales des champs de contrainte et de déformation.

Dans ce domaine on trouve des critères reposant, entre autres, sur la notion de facteur d'intensité de contrainte ou des critères énergétiques (*voir cours de Mécanique de la rupture pour plus de détails*).

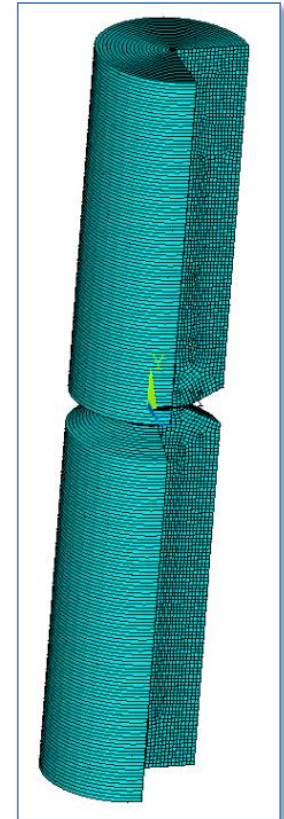
**Exemple :** concentration de contrainte sur barreau en acier cylindrique entaille. Calcul par éléments finis (*logiciel ANSYS*)

- Barreau en acier de rayon 2 cm portant une entaille en V de profondeur 1 cm.
- Sollicitation :  $10^8$  Pa (*100 MPa*) en traction uniaxiale selon l'axe du barreau.
- Nœuds inférieurs bloqués en y
- Nœuds supérieurs soumis à une pression  $-10^8$  Pa.

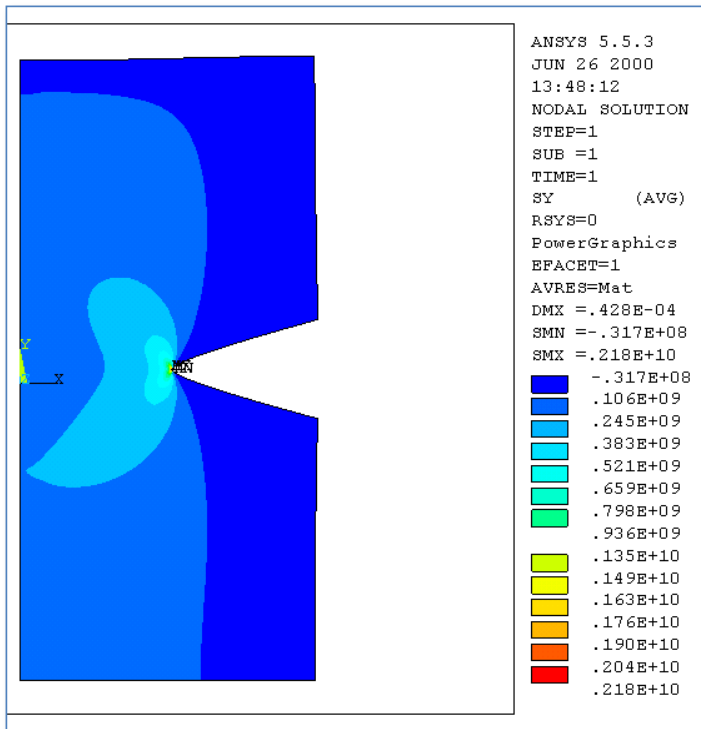
Le problème est traité en 2D axisymétrique.

Le maillage initial est régulier puis raffiné au voisinage de la pointe du défaut.

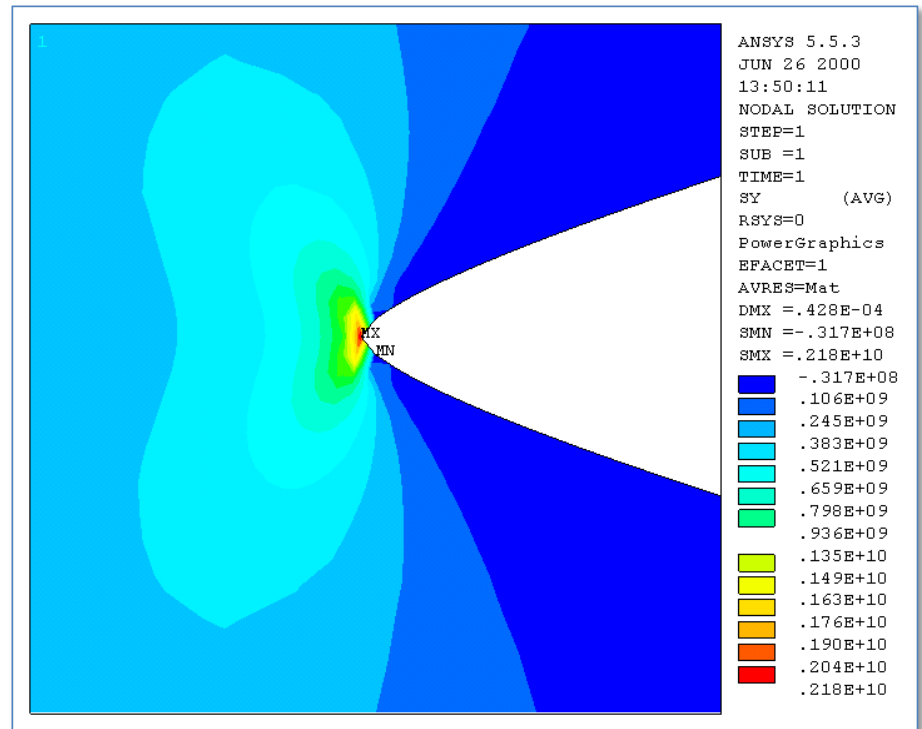
La **valeur maximale de la contrainte**  $\sigma_y$  à la pointe du défaut augmente lorsque la finesse du maillage augmente.



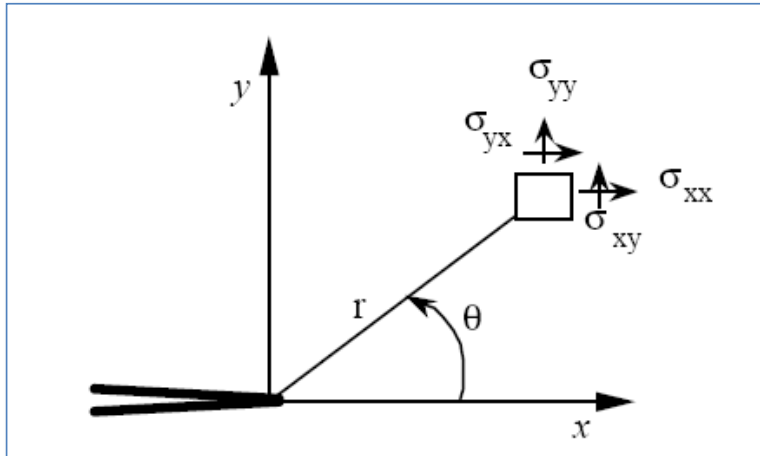
Celle-ci vaut  $11,1 \cdot 10^8$  Pa pour une finesse de maillage égale à celle du maillage global.  
Celle-ci vaut  $21,8 \cdot 10^8$  Pa pour la finesse de maillage local présentée ici.



*Iso Von Mises (global)*



*Iso Von Mises au voisinage du défaut*



[d'après [http://www.lfm.univ-metz.fr/meca\\_rupture\\_entaille/chapitre\\_4.pdf](http://www.lfm.univ-metz.fr/meca_rupture_entaille/chapitre_4.pdf)]

Irwin (1948) a proposé de décrire la distribution des contraintes au voisinage d'un front de fissure par la relation :

$\sigma_{ij} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$   $K_1$  est le facteur d'intensité de contrainte qui fixe l'amplitude des contraintes pour une configuration de défaut donnée.

Le critère de rupture (*propagation du défaut*) s'écrit alors :  $K_1 = K_{1c}$  où  $K_{1c}$  est une caractéristique du matériau nommé facteur d'intensité de contrainte critique.

- ❖ **Critères énergétiques** : Griffith (1921) a proposé un critère selon lequel la fissure se propage à condition que l'énergie élastique emmagasinée par la structure atteigne un seuil critique dépendant de la configuration du défaut.

# Contents

## 1 Aim of rheology

Definition - brief history

## 2 Constitutive laws – rheological models and criteria

Constitutive laws reminders - rheological models - rheological criteria

## 3 Plastic media

Material nonlinearity – Practical manifestations of plasticity – 1D plasticity – Management of plasticity – Plasticity criteria – Plastic flow rule – Viscoplasticity – Practical applications – Experimental aspects

## 4 Viscous media – Case of molten polymers

Newtonian media – Pseudoplastic or shear-thinning media – Yield stress, shear-thickening, thixotropic media – Viscoelastic media – Experimental aspects

## 5 Bibliography

**INRIA**

## **Deformable Meshes**



Adaptative remeshing for materials forming (0 à 5 min 38 s)

[http://interstices.info/jcms/c\\_7132/maillages-deformables](http://interstices.info/jcms/c_7132/maillages-deformables)



## **Metal forming**

Extrusion of aluminium

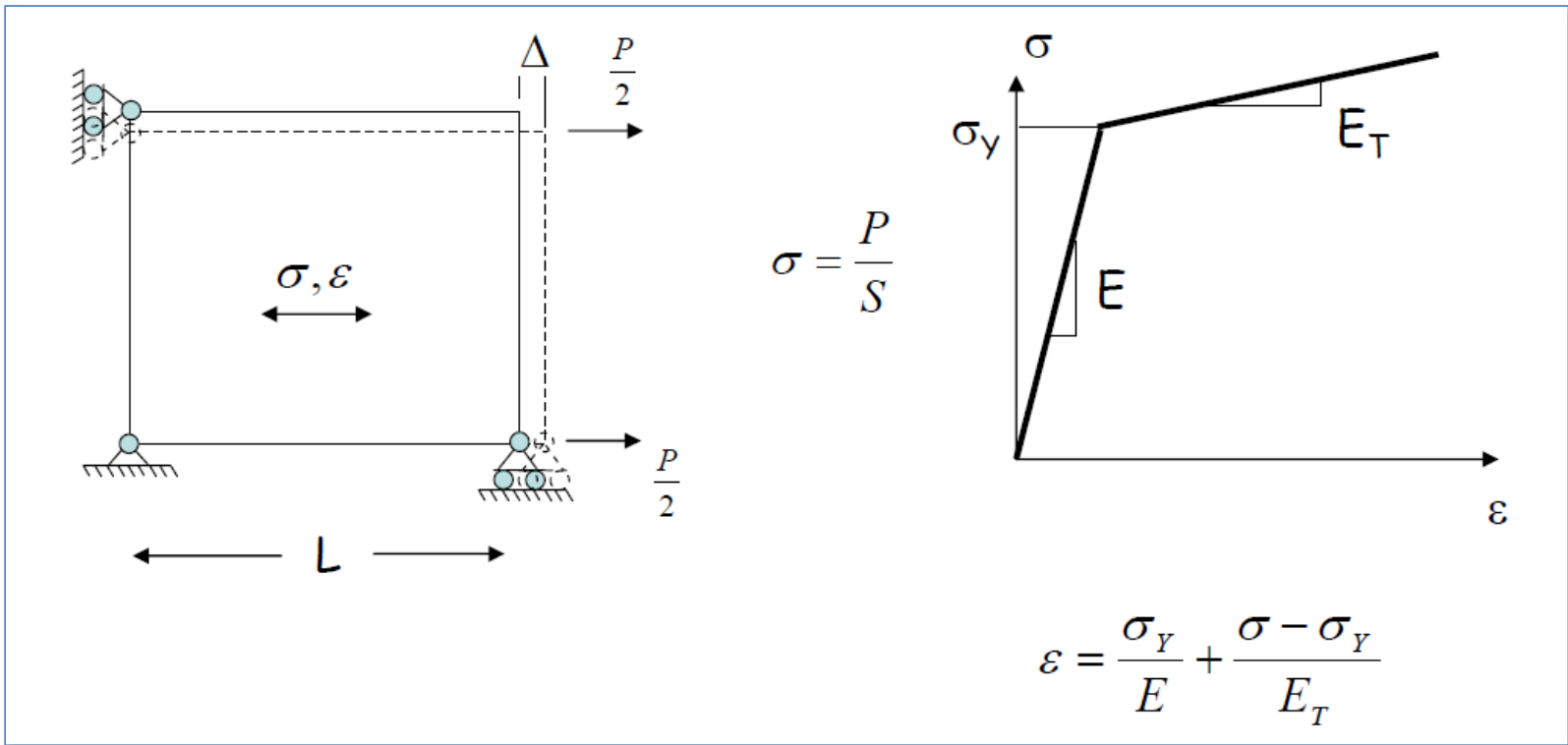
[https://www.youtube.com/watch?v=Bc7o\\_sEdX8U](https://www.youtube.com/watch?v=Bc7o_sEdX8U)



- Les non-linéarités matérielles sont dues au caractère particulier (non-linéaire) de la loi de comportement du milieu
- Quelques exemples en mécanique :
  - **Plasticité** : limite élastique – critères de plasticité – écrouissage - décharge élastique - certains alliages métalliques
  - **Elastoplasticité**
  - Elasticité non-linéaire : réversibilité – dissipation nulle – existence d'un potentiel - matériau bois
  - Hyperélasticité : certains élastomères – tissus biologiques (peau, muscles, poumons, ...)
  - Viscoélasticité non-linéaire : polymères
  - **Viscoplasticité** : métaux à chaud
  - Milieu dépendant de : température, irradiation, changement de phase, vieillissement, hygrométrie – béton en cours de prise, polymères thermoplastiques ( $T > T_f$ ), ...
  - Endommagement
  - Fatigue
  - ...

## Exemple : traction dans le domaine élastoplastique en HPP

Cas d'une loi élastoplastique bilinéaire avec écrouissage



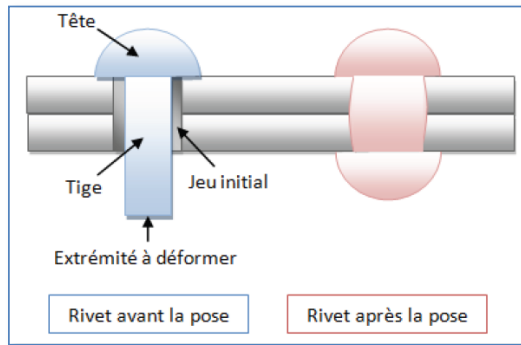
[Thibaud S., 2006]

- Dans le cadre de l'HPP on n'observe en revanche aucune non-linéarité géométrique

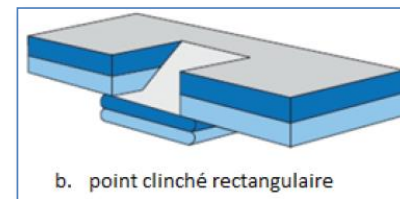
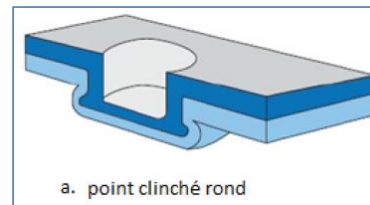
**Plasticité** : dérive du grec  $\pi\lambda\alpha\sigma\sigma\epsilon\upsilon\nu$  qui signifie « mettre en forme ». La **plasticité** va de pair avec la **ductilité** c'est-à-dire l'aptitude à se déformer significativement avant rupture (par opposition aux matériaux fragiles)

➤ **Plasticité recherchée**

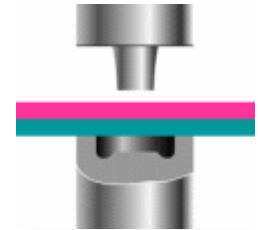
- Mise en forme des matériaux métalliques (forgeage, laminage, emboutissage, extrusion, usinage, ...)
- Certains procédés d'assemblage : rivetage, boulonnage, clinchage, sertissage, ...



[Berot M., 2009]



[M. Berot, 2009]



<http://www.tox-fr.com>

➤ **Plasticité à éviter**

- Structures : bâtiment, génie civil, ...
- Biomécanique : os, ...



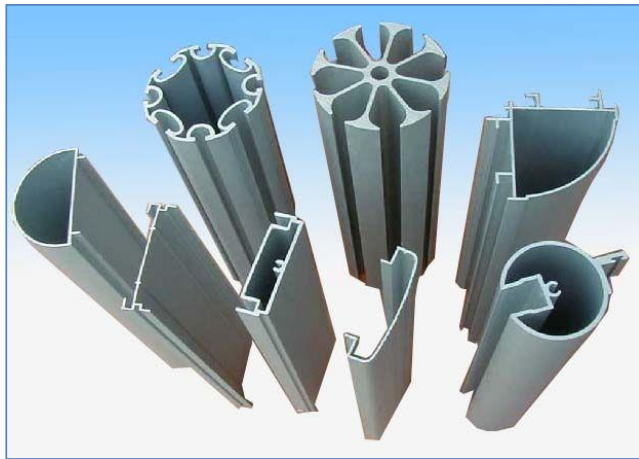
*Forgeage*

[\[https://www.metal-interface.com/forgeage-definiton-et-differents-types-de-forgeages\]](https://www.metal-interface.com/forgeage-definiton-et-differents-types-de-forgeages)



*Forgeage d'aubes de turbine*

[\[http://www.cblade.it/steam-turbine-blades.html\]](http://www.cblade.it/steam-turbine-blades.html)



*Filage de profilés*

[\[http://souspression.canalblog.com/archives/2011/02/14/19995093.html\]](http://souspression.canalblog.com/archives/2011/02/14/19995093.html)



*Emboutissage (automobile)*

[\[http://mediamef.utt.fr/modules/P1/M1-1/EXPORTS\\_S111.publi/web/co/module\\_S111\\_3.html\]](http://mediamef.utt.fr/modules/P1/M1-1/EXPORTS_S111.publi/web/co/module_S111_3.html)

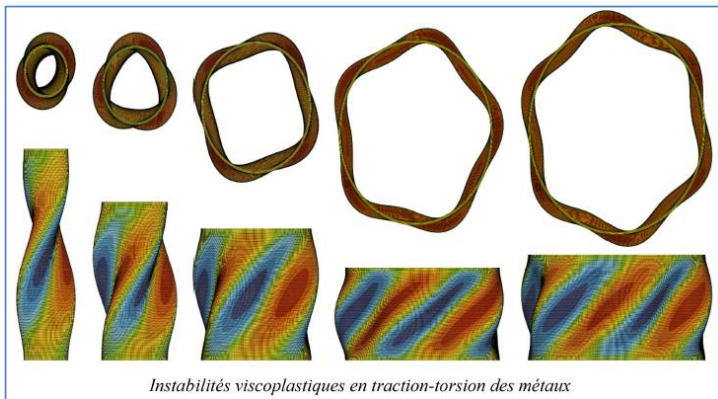


*Emboutissage*

[<https://www.bourgeat-industrie.com/emboutissage/>]

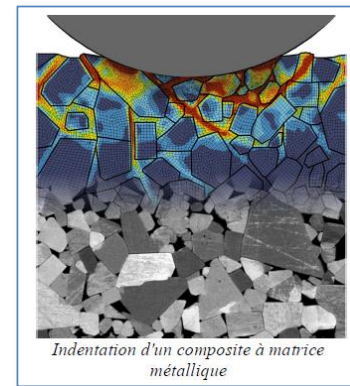


*Usinage (tournage)*



*Instabilités viscoplastiques en traction-torsion des métaux*

*Simulation d'instabilités viscoplastiques en traction-torsion des métaux*  
 [<http://www.mat.mines-paristech.fr/Recherche/poles-scientifiques/SIMS/>]



*Indentation d'un composite à matrice métallique*

*Simulation de l'indentation d'un composite à matrice métallique*  
 [<http://www.mat.mines-paristech.fr/Recherche/poles-scientifiques/SIMS/>]



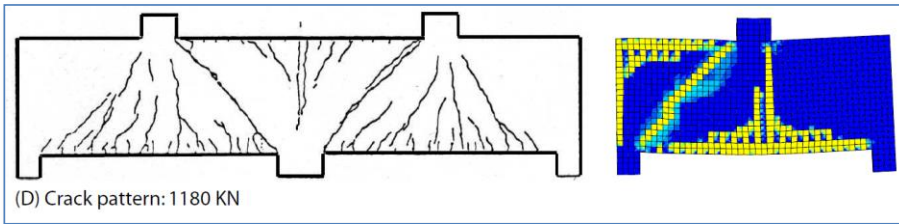
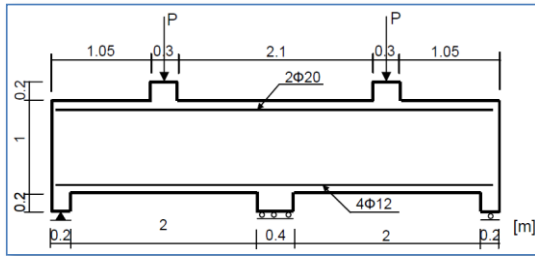
Rupture fragile et rupture ductile en traction

[<https://www.tec-science.com/material-science/material-testing/tensile-test/>]



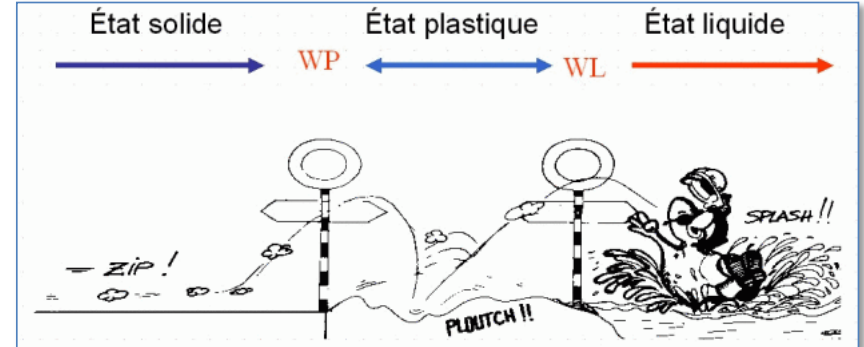
Crash test automobile

[[https://www.lepoint.fr/images/2014/01/23/2369864-small-overlap-spark-jpg\\_2038262.jpg](https://www.lepoint.fr/images/2014/01/23/2369864-small-overlap-spark-jpg_2038262.jpg)]



(D) Crack pattern: 1180 KN

Poutre béton armé en flexion 4 points – Confrontation expérience – simulation avec modèle élastoplastique endommageable [Krayani A., 2007]

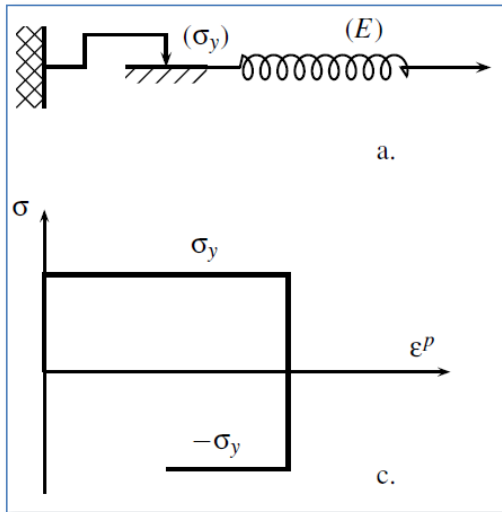


Indice de plasticité d'un sol – limites d'Atterberg (WL : limite de liquidité ; WP : limite de plasticité)

[[https://www.ente-aix.fr/documents/135-geotechnique/3\\_ClassificationSols/co/Contenu\\_2\\_Atterberg.html](https://www.ente-aix.fr/documents/135-geotechnique/3_ClassificationSols/co/Contenu_2_Atterberg.html)]

## Exemples de critères rhéologiques

- Modèle **élastique–parfaitement plastique** (ou élastoplastique parfait ou modèle de Saint-Venant)



[Cailletaud G., 2012]

L'association d'un **ressort** et d'un **patin** en série (figure a ci-contre) produit un **comportement élastique parfaitement plastique**, modélisé en figure c (ci-contre). Le système ne peut pas supporter une contrainte dont la valeur absolue est plus grande que  $\sigma_y$ .

Pour caractériser ce modèle, il faut considérer une fonction de charge  $f$  dépendant de la seule variable  $\sigma$ , et définie par :

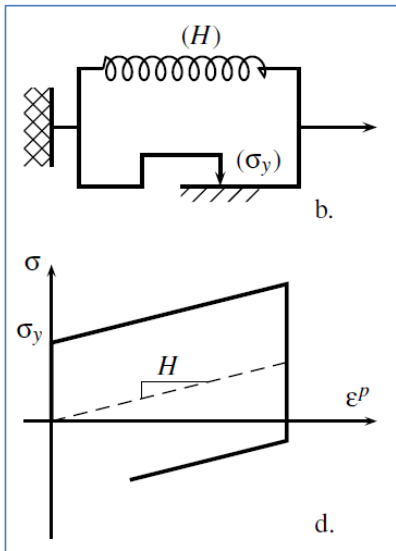
$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y$$

Le domaine d'élasticité correspond aux valeurs négatives de  $f$ , et le comportement du système se résume alors aux équations suivantes :

- si  $f < 0$ , ( $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E}$ ) : on reste dans le domaine élastique
- si  $f = 0$  et  $\dot{f} < 0$ , ( $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E}$ ) : on est en décharge élastique
- si  $f = 0$  et  $\dot{f} = 0$ , ( $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^p$ ) : écoulement plastique

Remarque : ce modèle est **sans écrouissage** (la contrainte reste constante au-delà du domaine élastique)

- Modèle **rigide-plastique écrouissable** de Prager



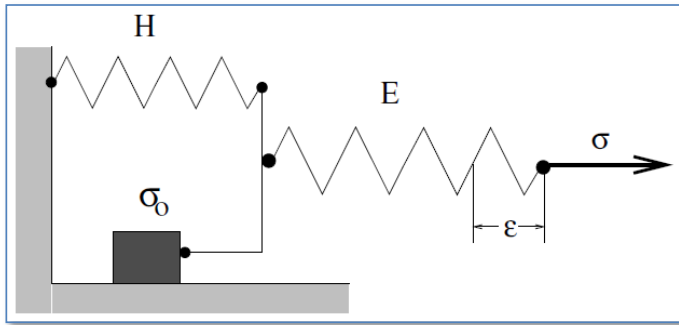
[Cailletaud G., 2012]

L'association d'un **ressort** et d'un **patin** en parallèle (figure b ci-contre) produit un **comportement rigide-plastique écrouissable** avec **écrouissage dit cinématique linéaire**, modélisé en figure d (ci-contre). Ce modèle devient **élastoplastique** si on ajoute un ressort en série.

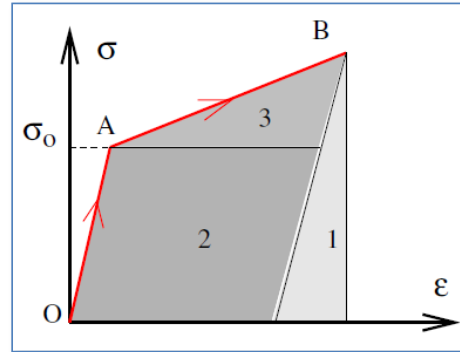
- Lors de l'écoulement plastique, la contrainte qui s'établit dans le ressort vaut  $X = H \epsilon^p$
- Cet écoulement plastique ne se produit que si la valeur absolue de la contrainte (traction ou compression) dans le patin  $|\sigma - H \epsilon^p|$  est égale à  $\sigma_y$
- Pour une déformation donnée  $X$  représente une **contrainte interne**
- La fonction de charge  $f$  dépend alors à la fois de la contrainte appliquée  $\sigma$  et de la contrainte interne  $X$  ; elle s'écrit :  $f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y$ 
  - si  $f(\sigma, X) = 0$  et  $\dot{f} = 0$  : écoulement plastique, avec  $\dot{\sigma} = \dot{X}$  et  $\dot{\epsilon}^p = \dot{\sigma}/H$
  - si  $f(\sigma, X) < 0$  : on reste dans le domaine élastique
- Lors de la déformation plastique une partie de l'**énergie** est provisoirement **stockée** (dans le ressort) puis totalement restituée lors de la décharge
- Le cas  $H = 0$  (**module plastique**) correspond au modèle de matériau rigide parfaitement plastique



- Modèle **élasto-plastique écrouissable** (avec écrouissage cinématique – modèle de St-Venant généralisé)



[Suquet P., 2009]



[Suquet P., 2009]

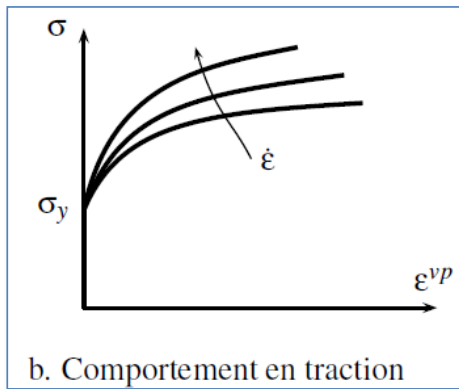
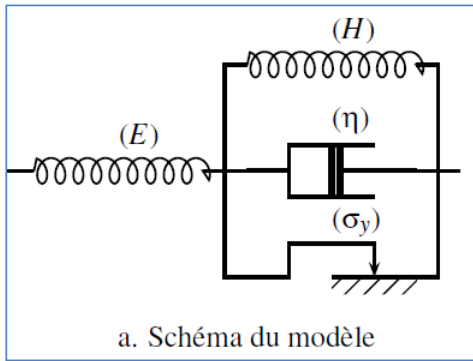
**Loi bilinéaire** (voir TP ANSYS) :

- 1 : énergie immédiatement récupérable par décharge
- 2 : énergie dissipée dans le mouvement du patin
- 3 : énergie stockée et non récupérable (le ressort H reste tendu après décharge) → origine des contraintes résiduelles ou internes

Les conditions de charge/décharge s'expriment comme suit :

- si  $f(\sigma, X) < 0$ , ( $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E}$ ) : on reste dans le domaine élastique
- si  $f(\sigma, X) = 0$  et  $\dot{f}(\sigma, X) < 0$ , ( $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E}$ ) : on est en décharge élastique
- si  $f(\sigma, X) = 0$  et  $\dot{f}(\sigma, X) = 0$ , ( $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}^p$ ) : écoulement plastique

- Modèle **élastoviscoplastique** (modèle de Bingham généralisé)



[Cailletaud G., 2012]

L'ajout d'un amortisseur au modèle précédent (figure a ci-contre) permet d'introduire une dépendance du temps. En l'absence du ressort en série (E) on aurait un modèle de comportement **rigide viscoplastique**.

La présence de l'amortisseur induit un comportement dépendant du temps ou de la vitesse (voir Fig. b – réponse en traction uniaxiale).

Dans l'assemblage en parallèle on a ( $\varepsilon^{vp}$  : déformation viscoplastique) :

- $X = H\varepsilon^{vp}$  : contrainte dans le ressort de raideur H
- $\sigma_v = \eta\dot{\varepsilon}^{vp}$  : contrainte dans l'amortisseur
- $\sigma_p \leq \sigma_y$  : contrainte dans le patin

Donc :  $\sigma = X + \sigma_v + \sigma_p$

Il existe un domaine d'élasticité, dont la frontière est atteinte lorsque

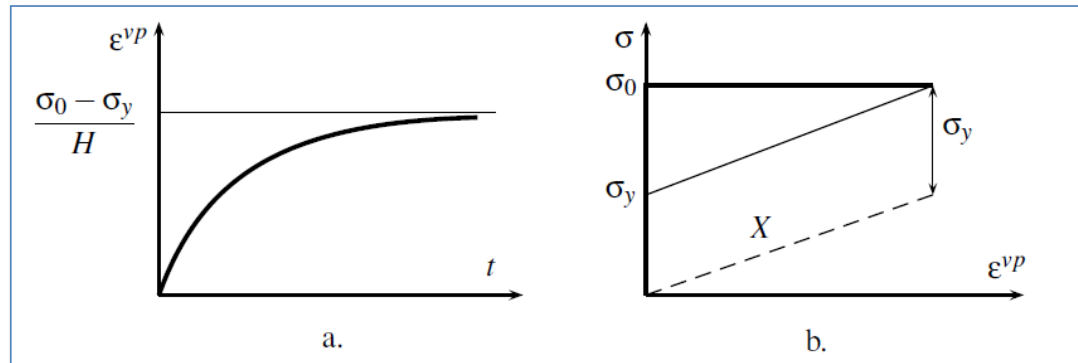
$$|\sigma_p| = \sigma_y$$

On distingue 3 régimes de fonctionnement selon que  $\dot{\varepsilon}^{vp}$  est nulle,  $>0$  ou  $<0$

- $\dot{\varepsilon}^{vp} = 0$   $|\sigma_p| = |\sigma - H\varepsilon^{vp}| \leq \sigma_y$  : charge ou décharge élastique
- $\dot{\varepsilon}^{vp} > 0$   $\sigma_p = \sigma - H\varepsilon^{vp} - \eta\dot{\varepsilon}^{vp} = \sigma_y$  : écoulement viscoplastique
- $\dot{\varepsilon}^{vp} < 0$   $\sigma_p = \sigma - H\varepsilon^{vp} - \eta\dot{\varepsilon}^{vp} = -\sigma_y$  : écoulement viscoplastique

Réponse en fluage (échelon de contrainte d'amplitude  $\sigma_0 > \sigma_y$ )

$$\varepsilon^{vp} = \frac{\sigma_0 - \sigma_y}{H} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \right], \text{ avec } \tau_f = \frac{\eta}{H} \text{ (temps caractéristique) – voir Fig. a ci-dessous}$$



[Cailletaud G., 2012]

La figure b ci-dessus montre, dans le plan contrainte–déformation viscoplastique, les évolutions respectives de la contrainte interne  $X$  et du seuil  $X + \sigma_y$ . Lorsque ce dernier rejoint la contrainte appliquée  $\sigma_0$ , la vitesse de déformation viscoplastique s’annule

## ➤ Questions :

- **Quand** apparait la plasticité (déformations permanentes) ? → **Critère de plasticité**
  - limite d'élasticité
  - seuil de plasticité
  - dans l'espace des contraintes :
    - domaine d'élasticité
    - surface seuil de plasticité : la surface seuil initiale est définie par le critère de plasticité et donc la fonction seuil  $F(\sigma)$  ( $F(\sigma) = \sigma_{\text{éq.VM}} - \sigma_0$  dans le cas du critère de Von Mises – voir 3.4.1)
    - domaine de plasticité = domaine d'élasticité + surface seuil de plasticité
- **Comment** se manifeste-t-elle ? → **Loi d'écoulement plastique**

## ➤ Cas de la plasticité 1D :

- **Quand** apparait la plasticité (déformations permanentes) ? → Quand le seuil de contrainte  $\sigma_y$  du patin est atteint
- **Comment** se manifeste-t-elle ? → elle est définie par l'équation rhéologique du modèle concerné

## ➤ Cas de la plasticité 3D : il faut imaginer un cadre théorique plus large et plus général

## Critères indépendants de la pression hydrostatique

- Critère de **Von Mises**

$$F(\sigma) = J_2 - k^2, \text{ ou}$$

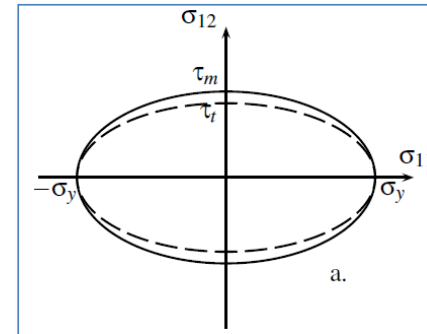
$$F(\sigma) = \sigma_{\text{éq.VM}} - \sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]^{\frac{1}{2}} - \sigma_0$$

- Critère de **Tresca**

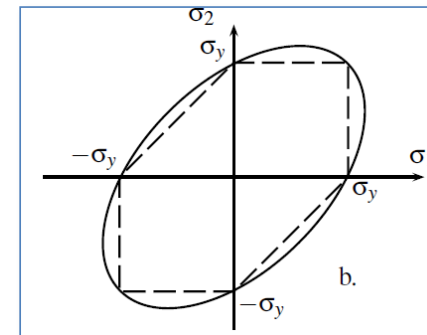
$$F(\sigma) = \sup_{I,J=I,II,III} \{\sigma_I - \sigma_J - \sigma_0\} = \sigma_{\text{Max}} - \sigma_{\text{Min}} - \sigma_0$$

### Comparaison des 2 critères

- Dans le plan traction-cisaillement :
  - Von Mises :  $F(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{1}{2}} - \sigma_0$
  - Tresca :  $F(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 4\tau^2)^{\frac{1}{2}} - \sigma_0$
  - Ellipse dans les 2 cas (voir figure ci-contre)
- Dans le plan des contraintes principales ( $\sigma_I, \sigma_{II}$ )
  - Von Mises : ellipse
  - Tresca : hexagone irrégulier inscrit dans l'ellipse de VM (voir figure ci-contre)
  - voir exercice 4.2.6



[Cailletaud G., 2012]



[Cailletaud G., 2012]

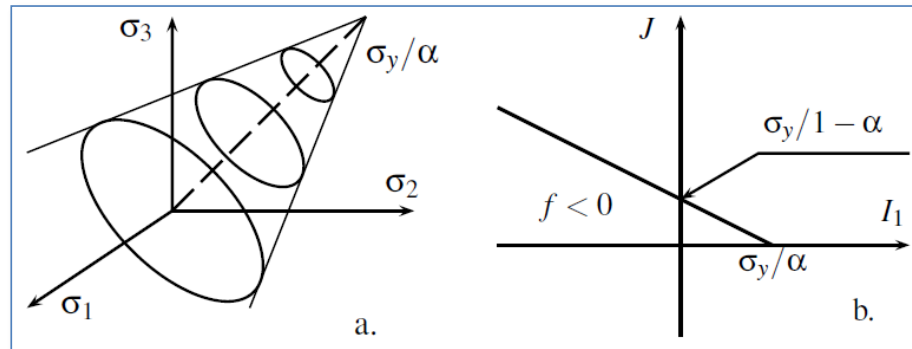
**Critères faisant intervenir la pression hydrostatique** : nécessaires pour les matériaux pulvérulents, les sols, ou les matériaux présentant de l'endommagement (ouverture progressive de cavités)

- Critère de **Drucker-Prager** (1952)

- $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$  dépend du matériau
- $\alpha = 0$  : cas du critère de Von Mises
- limite élastique en traction :  $\sigma_0$
- limite élastique en compression :  $\frac{-\sigma_0}{(1-2\alpha)}$

$$F(\sigma) = (1 - \alpha)J + \alpha I_1 - \sigma_0, \text{ avec :}$$

- $J = \left[ \frac{3}{2} \text{tr}(s^2) \right]^{\frac{1}{2}}$
- $I_1 = \text{tr}(\sigma)$



*Représentation du critère de Drucker-Prager, (a) dans l'espace des contraintes principales, (b) dans le plan  $I_1$ - $J$  [Cailletaud G., 2012]*

- Critère de **Coulomb**  
(ou Mohr-Coulomb)

$$F(\sigma) = \sigma_I - \sigma_{III} + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin(\phi) - 2C \cdot \cos(\phi), \text{ avec } \sigma_{III} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_I$$

- Critère de **Raghava**  
(1973 - polymères)

$$F(\sigma) = (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 + 2(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})(C - T) - 2CT$$

avec C et T respectivement valeurs absolues des limites élastiques en compression et traction

### Principaux critères anisotropes

- Critère de Hill
  - généralise le critère de Von Mises
  - comportement identique en traction et compression
  
- Critère de Tsai (ou Tsai-Wu)
  - généralise le critère de Hill
  - comportement différent en traction et compression

$$F(\sigma) = F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{13}^2 - 1$$

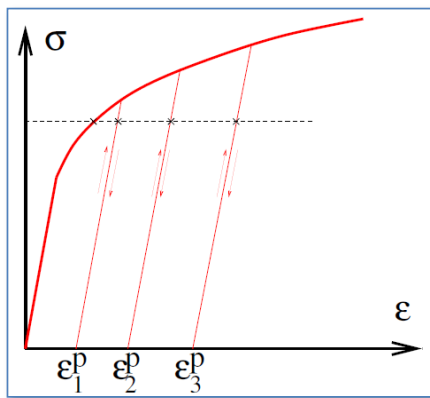
$$F(\sigma) = F'(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G'(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H'(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L'\sigma_{12}^2 + 2M'\sigma_{23}^2 + 2N'\sigma_{13}^2 + P\sigma_{11} + Q\sigma_{22} + (P + Q)\sigma_{33} - 1$$

**Hypothèses** (relatives au cadre restreint développé ci-après) :

- Les déformations sont petites (HPP)
- Les transformations sont lentes (quasi-statiques et sans effet de la température)

Partition des déformations :  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^{el} + \bar{\varepsilon}^p$  **déformation totale** (dérive d'un déplacement) avec

- $\bar{\varepsilon}^{el} = \bar{S} : \bar{\sigma}$  (loi de Hooke –  $\bar{S}$  tenseur de souplesse) **déformation élastique** récupérable par décharge (réversible) (ne dérive pas en général d'un déplacement)
- $\bar{\varepsilon}^p$  **déformation plastique** non récupérable par décharge (ne dérive pas en général d'un déplacement)



[Suquet P., 2009]

Contrairement au cas des déformations élastiques il est impossible de prévoir directement  $\bar{\varepsilon}^p$  à partir de l'état de contrainte (voir figure ci-contre)

- au même niveau de contrainte peuvent correspondre plusieurs déformations plastiques
- tant que le seuil de plasticité (critère) n'est pas atteint  $\bar{\varepsilon}^p$  est figé
- il faut distinguer la charge de la décharge d'où une influence du signe de  $\bar{\sigma}$  sur la loi de comportement
- la loi de comportement est donc **incrémentale** → nécessité d'un **calcul itératif** (avec influence du trajet de chargement)



## Cas des métaux

Dans le cas des métaux les déformations plastiques (irréversibles) résultent de la propagation de dislocations et se traduisent par des glissements selon des plans atomiques denses obéissant à la loi de Schmid (*voir cours « Alliages métalliques » - S8*). On peut alors montrer la cohérence avec le **principe du travail plastique maximal** (Hill, 1950). A noter que ce principe n'est pas vérifié pour les sols.

- **Principe du travail plastique maximal** : à chaque instant où la vitesse de déformation plastique est définie, la puissance réellement dissipée est supérieure ou égale à la puissance qui serait dissipée par toute contrainte admissible avec la même vitesse de déformation plastique

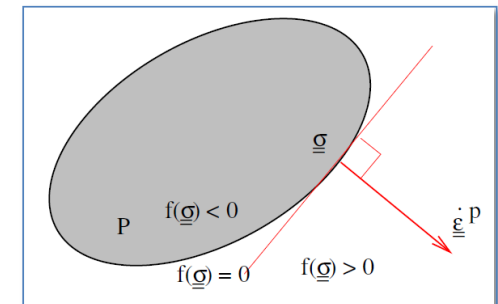
$$(\bar{\sigma}(t) - \bar{\sigma}^*) : \dot{\bar{\varepsilon}}^p(t) \geq 0, \forall \bar{\sigma}^* \in S(t)$$

Ce principe admet 2 conséquences géométriques sur le domaine de plasticité :

- **règle de normalité**

Dans le cas d'un critère régulier (c'est-à-dire sans points anguleux ce qui est le cas du critère de Von Mises) la loi d'écoulement plastique associée obéit à la **règle de normalité**. Elle peut s'écrire sous la forme :

- $F(\sigma) = 0, \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}}(\bar{\sigma})$  ; loi d'écoulement **incompressible** si critère est indépendant de la pression hydrostatique (cas du critère de Von Mises)
- $F(\sigma) < 0, \lambda = 0 \Rightarrow \dot{\bar{\varepsilon}}^p = 0$  (déformation plastique invariante)



[Suquet P., 2009]

- **convexité** de la surface de charge

**Matériau standard** : on dit qu'un matériau élastoplastique est **standard** (Radenkovic, 1962) si, sa fonction de charge étant convexe, sa règle d'écoulement plastique s'en déduit par la règle de normalité. Pour un tel matériau on dira également que la **règle d'écoulement** est **associée au critère**.

- toute information sur la loi d'écoulement se traduit par une propriété sur le critère et réciproquement
- la connaissance du critère suffit

Exemple : incompressibilité plastique et invariance par translation du critère dans la direction des tenseurs sphériques

- le critère porte alors sur le déviateur des contraintes (cas des critères de Von Mises et de Tresca)
- $tr(\overline{\dot{\epsilon}^P}) = 0 \Leftrightarrow \bar{\sigma} \in S \Rightarrow \bar{\sigma} - p\bar{1} \in S, \forall p \in \mathcal{R}, S$  représentant la surface de charge (ou surface seuil)

**Matériau standard de Von Mises** : matériau standard régi par le critère de plasticité de Von Mises et la fonction seuil associée

$$\text{On sait que : } \begin{cases} F(\sigma) = \sigma_{\acute{e}q.VM} - \sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]^{\frac{1}{2}} - \sigma_0 \\ \overline{\dot{\varepsilon}}^P = \lambda \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}}(\bar{\sigma}) \end{cases}$$

On en déduit alors aisément :  $\overline{\dot{\varepsilon}}^P = \frac{3\lambda}{2\sigma_0} \bar{s}$ , avec  $\lambda \geq 0$  d'où :  $tr(\overline{\dot{\varepsilon}}^P) = 0$

Si on introduit la vitesse de déformation généralisée  $\dot{\varepsilon}$  définie par :  $\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \sum_{i,j} \dot{\varepsilon}_{ij}^2} = \lambda$ , on obtient alors la relation suivante :  $\overline{\dot{\varepsilon}}^P = \frac{3\dot{\varepsilon}}{2\sigma_0} \bar{s}$  qui constitue la loi d'écoulement

### ➤ En résumé

Relation contrainte-déformation	Critère	Loi d'écoulement	Puissance dissipée par plasticité
$\bar{\sigma} = \lambda tr(\bar{\varepsilon}) \bar{1} + 2\mu(\bar{\varepsilon} - \overline{\varepsilon}^P)$	$\sigma_{\acute{e}q.VM} = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{s} : \bar{s}} \leq \sigma_0$	$\overline{\dot{\varepsilon}}^P = \frac{3\dot{\varepsilon}}{2\sigma_0} \bar{s}, \begin{cases} \dot{\varepsilon} = 0 & \text{si } \sigma_{\acute{e}q} < \sigma_0 \\ \dot{\varepsilon} \geq 0 & \text{si } \sigma_{\acute{e}q} = \sigma_0 \end{cases}$	$P = \bar{\sigma} : \overline{\dot{\varepsilon}}^P = \sigma_0 \dot{\varepsilon}$

**Viscoplasticité :**

- présence à la fois de viscosité et de plasticité
- existence d'un seuil en deçà duquel on n'observe aucune déformation permanente
- effet du temps ou de la vitesse
- présence de réponse différée

**Milieus concernés (exemples) :**

- métaux (mise en forme à chaud)
- suspensions (pâtes cimentaires, polymères chargés, ...)
- sols (argiles, ...)
- glace (mouvements des glaciers)
- certains solides cristallins à haute température

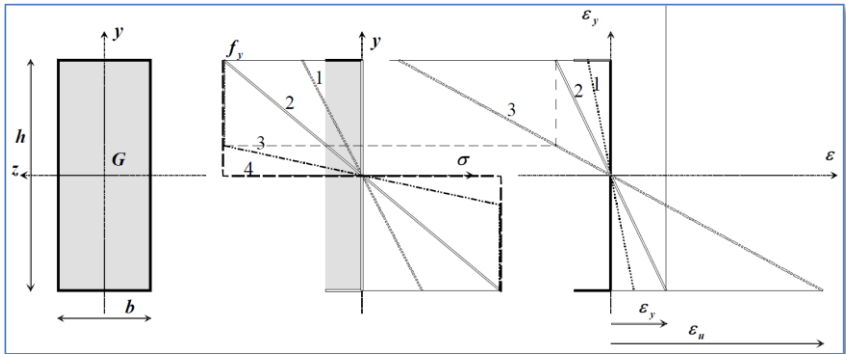
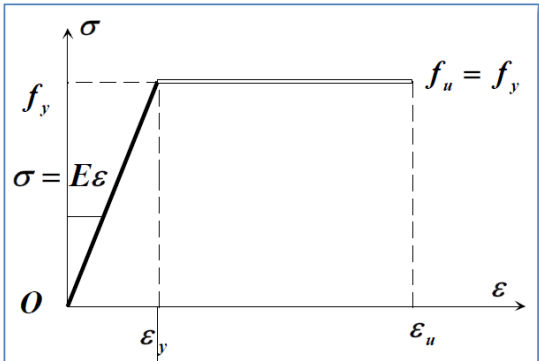
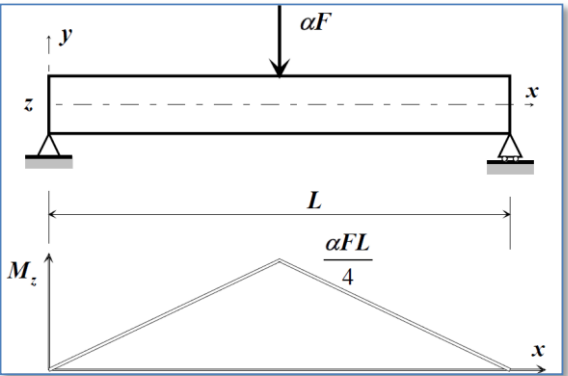
**Loi d'écoulement** : le modèle le plus courant est celui de Norton-Hoff et s'écrit  $\bar{s} = 2K(\sqrt{3}\dot{\bar{\epsilon}})^{m-1}\bar{\epsilon}$ , avec

- K : consistance du matériau
- m : indice de sensibilité à la vitesse

**Remarques :**

- cette loi est incompressible :  $tr(\bar{\epsilon}) = 0$
- le matériau de Norton-Hoff est fluidifiant (voir chapitre 4)
- le comportement viscoplastique est intermédiaire entre :
  - m=0 : comportement de solide plastique
  - m=1 : comportement de fluide newtonien

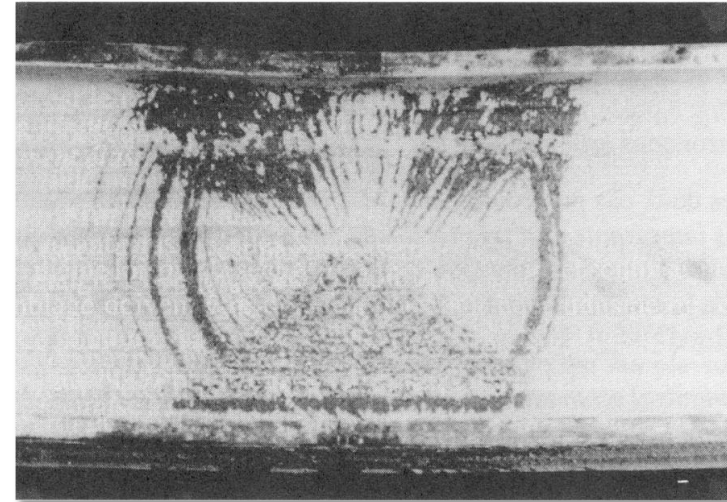
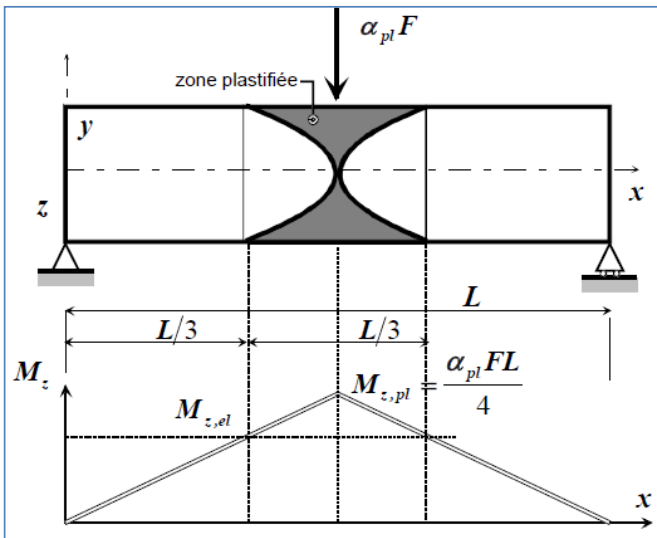
Poutre en flexion – rotule plastique [Albouy C., 2008]  
 Matériau de Von Mises



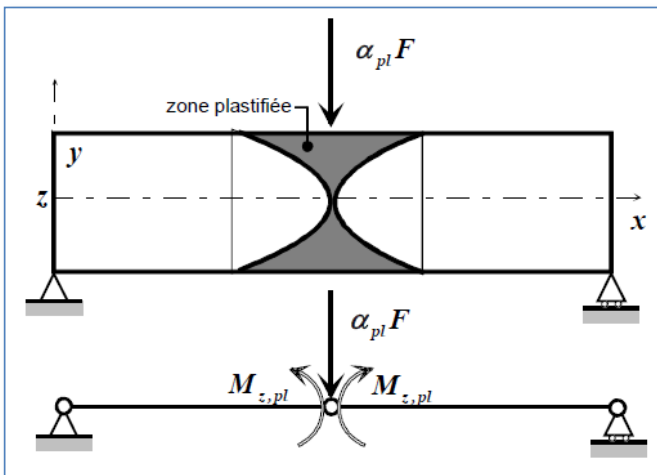
$\alpha$  : facteur de charge

- Phase 2 :  $M_{z,el} = f_y \frac{b h^2}{6}$
- Phase 3 :  $M_z = M_{z,pl} \left[ 1 - \frac{4y^2}{3h^2} \right]$
- Phase 4 :  $M_{z,pl} = f_y \frac{b h^2}{4}$

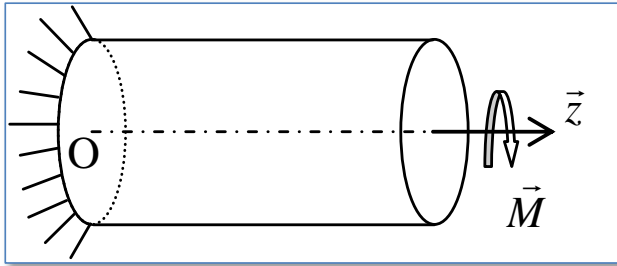
- Phase 1 :  $\alpha < \alpha_{el}$  ;  $\sigma_{max} < f_y$  – la section est entièrement dans le domaine élastique
- Phase 2 :  $\alpha = \alpha_{el}$  ;  $|\sigma_{max}| = f_y$  sur les fibres extrêmes
- Phase 3 :  $\alpha = \alpha_u$  ;  $\epsilon_{max} = \epsilon_u$  ; la zone plastifiée correspond aux fibres pour lesquelles  $|\sigma| = f_y$
- Phase 4 :  $\alpha = \alpha_{pl}$  ;  $|\sigma| = f_y$  ; sur toutes les fibres → la section droite est entièrement plastifiée



[Frey F., 2000]



- Lorsqu'une section de la poutre est totalement plastifiée il y a formation d'une **rotule plastique**. Celle-ci n'équivaut pas à une articulation idéale car le moment n'est pas nul
- Le calcul de la zone concernée par la plastification dans ces conditions prévoit un **profil parabolique** selon :  $x = \frac{L}{2} \left[ 1 - \frac{4y^2}{3h^2} \right]$



Torsion d'un barreau cylindrique

On considère un arbre cylindrique en torsion (voir figure ci-contre). Cet arbre est constitué d'un matériau métallique **élastoplastique parfait** (sans écrouissage) régi par le **critère de Von Mises**, la loi standard associée et de contrainte d'écoulement  $\sigma_0$ . L'arbre est un cylindre de rayon  $R$  et de longueur  $L$  encasté à une extrémité et soumis à un moment de torsion  $M$  d'axe  $\vec{z}$  produisant une rotation unitaire  $\alpha$ .

Les conditions aux limites sont les suivantes :

- encastrement en  $z = 0$
- chargement : moment  $\vec{M}$  en  $z = L$

Le problème est axisymétrique. On utilisera donc un repère et des coordonnées cylindriques.

**Hypothèse cinématique** : toute section droite du barreau orthogonale à  $\vec{z}$  est animée d'un mouvement rigide de rotation autour de  $\vec{z}$ . Dans le cas élastique la solution est donc la suivante :

$$\vec{u} \begin{cases} 0 \\ \alpha r z \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha r}{2} \\ 0 & \frac{\alpha r}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\alpha r \\ 0 & G\alpha r & 0 \end{pmatrix}$$

$G$  : module de Coulomb

$$\tau(r) = \sigma_{\theta z}$$

$$M = 2\pi \int_0^R \sigma_{\theta z} r^2 dr = \frac{G\alpha\pi R^4}{2}$$

- **Plastification initiale**

Le critère de Von Mises donne :  $\sigma_{\acute{e}q} = \sqrt{3}\tau(r) = \sqrt{3}Gar$  ; la **première plastification** intervient donc pour le maximum de  $\tau(r)$  c'est-à-dire pour  $r=R$ . Les valeurs seuil  $\alpha_e$  et  $M_e$  de  $\alpha$  et  $M$  sont alors :  $\alpha_e = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}GR}$  et

$$M_e = \frac{\pi\sigma_0 R^3}{2\sqrt{3}}$$

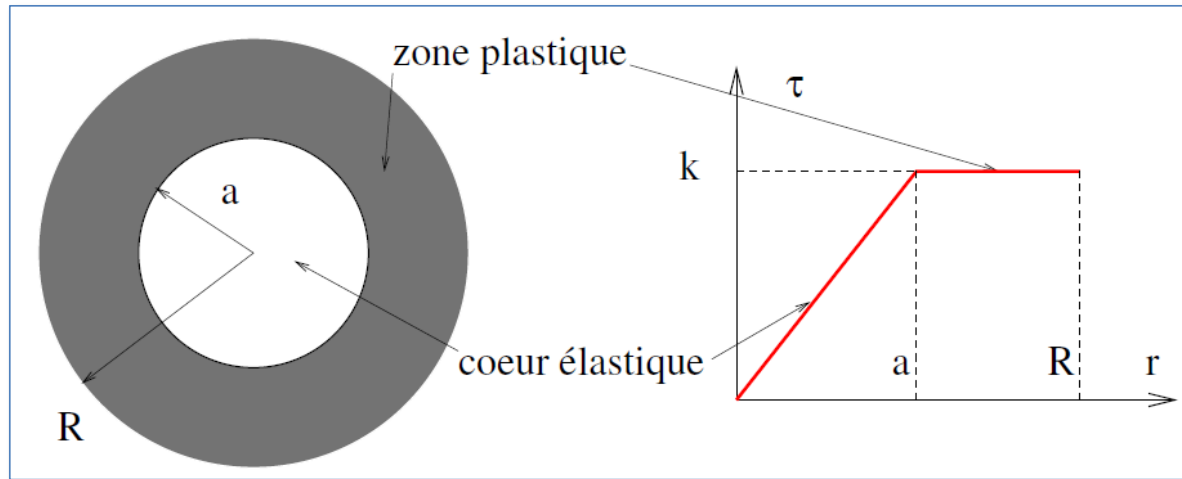
- **Régime élastoplastique**

On poursuit le chargement au-delà du point  $(\alpha_e, M_e)$  de la courbe de charge. On imagine que la plastification va gagner progressivement l'intérieur du barreau en respectant la symétrie de révolution. La zone plastique doit donc occuper un tube de rayon intérieur  $a$  (à déterminer) et de rayon extérieur  $R$ . La zone élastique correspond exactement au cas d'un barreau de rayon  $a$  en torsion (voir ci-dessus)

- **Solution**

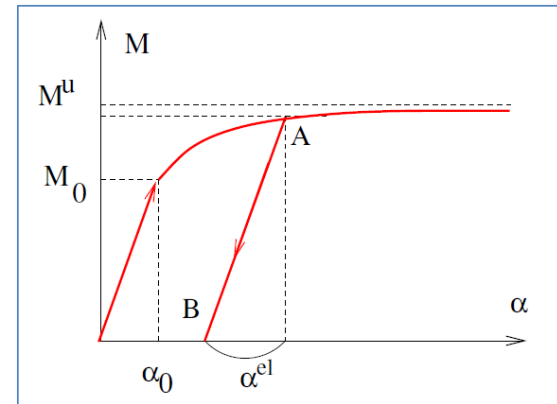
- zone plastique :  $\tau(r) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$  pour  $a \leq r \leq R$
- zone élastique :  $\tau(r) = Gar$  pour  $0 \leq r \leq a$
- détermination de  $a$  : en  $r = a$  la contrainte de cisaillement  $\tau(r = a)$  est continue car la limite élastique est atteinte ; de plus  $\tau(r = a)$  est proportionnelle à  $r$ , donc :  $\tau(r) = \frac{\sigma_0}{a\sqrt{3}}r$
- calcul du moment :  $M = 2\pi \int_0^R \tau(r)r^2 dr = 2\pi \left( \int_0^a Gar^3 dr + \int_a^R \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} r^2 dr \right) = M_e \left[ \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha_e}{\alpha} \right)^3 \right]$





*Torsion d'un arbre élastoplastique parfait – profil, dans l'épaisseur, de la contrainte de cisaillement [Suquet P., 2009]*

- la courbe de charge à l'allure d'une courbe d'écroissage alors que le matériau ne présente pas d'écroissage : il s'agit d'**écroissage structurel** (non d'écroissage matériel)
- la valeur limite du couple (moment)  $M$  lorsque  $\alpha$  tend vers l'infini est :  $M_u = \frac{2\pi\sigma_0 R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3}M_e$
- il reste en permanence un noyau élastique au voisinage de l'axe



*Torsion d'un arbre élastoplastique parfait – courbe de charge/décharge [Suquet P., 2009]*

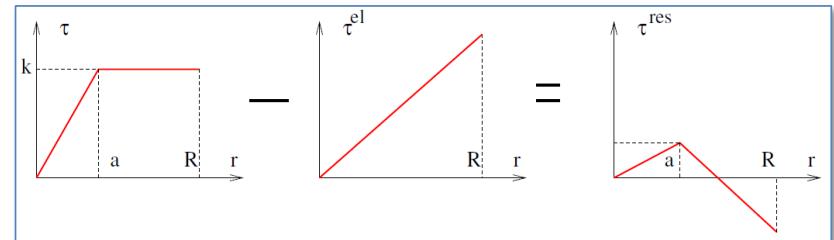
- **Décharge**

A partir d'un point de chargement  $(\alpha_A, M_A)$  situé au-delà de la limite élastique initiale de l'arbre, on décharge l'arbre en annulant le couple  $M$ . On peut montrer qu'on observe une **décharge élastique** en tout point de l'arbre. Cette décharge élastique est associée à un état de contrainte purement élastique  $\overline{\sigma}^{el}$  correspondant au moment  $M$ . La contrainte de cisaillement générée vaut  $\tau(r) = G\alpha r$ .

Le champ de contrainte résultant  $\overline{\sigma}^{res} = \overline{\sigma}^A - \overline{\sigma}^{el}$  est donc défini par :

$$\begin{cases} \tau^{res}(r) = G\alpha r - \frac{2Mr}{\pi R^4}, & \text{pour } 0 \leq r \leq a \\ \tau^{res}(r) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} - \frac{2Mr}{\pi R^4}, & \text{pour } a \leq r \leq R \end{cases}$$

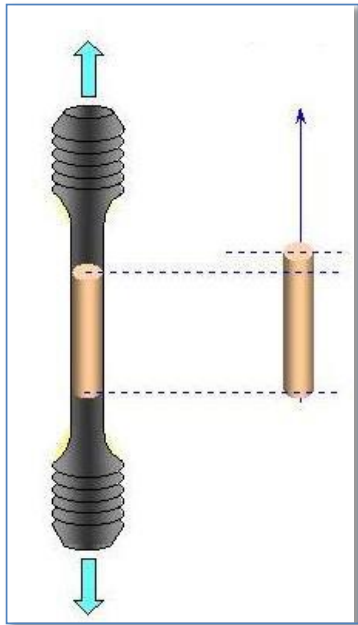
- le champ de contrainte résiduel est **bilinéaire** et il est dans le domaine élastique en tout point  $r$
- les champs de déplacement, contrainte et déformation résiduels valent :
  - $\vec{u}^{res} = \vec{u}^A - \vec{u}^{el}$
  - $\overline{\sigma}^{res} = \overline{\sigma}^A - \overline{\sigma}^{el}$
  - $\overline{(\varepsilon^P)^{res}} = \overline{\varepsilon}^P$
- présence de déf. plastiques résiduelles : prévisibles
- présence de contraintes élastiques résiduelles : doivent être prises en compte comme nouvel état initial dans les futurs chargements



*Torsion d'un arbre élastoplastique parfait – état de contrainte après décharge [Suquet P., 2009]*

Les **essais uniaxiaux** ne permettent d'atteindre qu'un point unique de la **surface seuil** (ou **surface de charge** ou frontière du domaine élastique)

➤ Essai de traction simple (ou uniaxiale)



[d'après

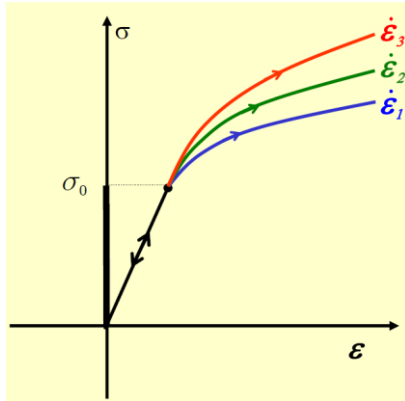
[http://www.enseignement.polytechnique.fr/mecanique/pages/mec551/amphi1\\_web.pdf](http://www.enseignement.polytechnique.fr/mecanique/pages/mec551/amphi1_web.pdf)]

Cet essai fait l'objet de nombreuses normes internationales pour la plupart des matériaux (alliages métalliques, polymères, composites, bois, béton, ...) ; ces normes définissent un cadre conventionnel rigoureux permettant de comparer les performances de différents matériaux.

Il permet, pour un matériau élastoplastique de déterminer les grandeurs suivantes :

- $E$  : module d'Young
- $\nu$  : coefficient de Poisson (si on mesure également la déformation latérale)
- $\sigma_e$  : limite élastique en traction (ou contrainte d'écoulement)
- $H$  : module plastique (si écrouissage linéaire)
- $n$  : coefficient d'écrouissage (selon le modèle adéquat – par exemple loi puissance Hollomon :  $\sigma = K\varepsilon^n$ )

Les mesures de déformation se font à l'aide d'extensomètres ou de jauges de déformation.

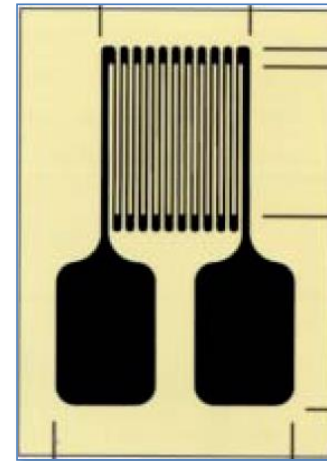


*Essais de traction simple sur un matériau viscoplastique à différentes vitesses de déformation  
[Maitournam H., 2012]*

En faisant varier la vitesse d'essai on peut accéder à des informations concernant l'éventuelle viscoplasticité du matériau (voir figure ci-contre)  
Dans ce cas :  $\dot{\epsilon}_3 > \dot{\epsilon}_2 > \dot{\epsilon}_1$

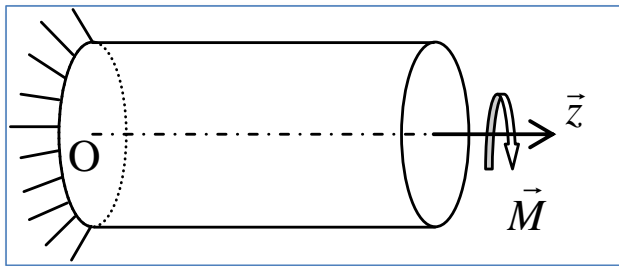


*Instrumentation : extensomètre à couteaux  
[d'après <http://www.epsilontech.com/>]*



*Instrumentation : jauge de déformation unidirectionnelle  
[d'après [http://www.intertechnology.com/Vishay/pdfs/Catalog\\_500.zip](http://www.intertechnology.com/Vishay/pdfs/Catalog_500.zip)]*

## ➤ Essai de torsion



*Torsion d'un barreau cylindrique*

Cet essai est pratiqué sur divers matériaux afin de déterminer le comportement en cisaillement.

On considère un barreau cylindrique de rayon  $R$  et de longueur  $L$  (longueur de la partie calibrée de l'éprouvette), encastré à une extrémité et soumis à l'autre extrémité à un moment de torsion  $\vec{M}$ .  $\vec{M}$  est supposé tel que l'hypothèse des petites perturbations (HPP) est vérifiée.

Le problème est axisymétrique ; Le modèle élastique prévoit que les sections droites de l'éprouvette sont animées d'un mouvement rigide de rotation autour de  $\vec{z}$ .

Dans ces conditions on démontre que le champ de déplacement s'écrit  $\vec{u} = \alpha r z \vec{\theta}$ , avec  $\alpha$  rotation unitaire. Les champs de déformation et de contrainte dans un repère cylindrique  $(\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{z})$  sont de la forme :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha r}{2} \\ 0 & \frac{\alpha r}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\alpha r \\ 0 & G\alpha r & 0 \end{pmatrix}$$

*Matrices de déformation et contrainte écrites en repère cylindrique*

G est le module de Coulomb du matériau élastique isotrope. On peut alors calculer la contrainte de cisaillement et le moment résultant (dans le domaine élastique) :

$$\tau(r) = \frac{2M}{\pi R^4} r \text{ et } M = \frac{G\alpha\pi R^4}{2}$$

Si, dans le domaine élastique de l'éprouvette, on enregistre M en fonction de  $\alpha$  on peut en déduire la valeur de G (ou  $G_{\theta z}$ , par exemple si le matériau est orthotrope) ainsi que la **courbe rationnelle**  $\tau(R) = \frac{2M}{\pi R^3}$  en fonction de  $\gamma(R) = 2\varepsilon_{\theta z}(R) = \alpha R$ . Lorsque cette courbe perd sa linéarité la limite élastique est atteinte à la paroi externe du barreau.

**Remarque** : on peut également pratiquer des essais de torsion sur des tubes ; si le tube est suffisamment mince la contrainte de cisaillement est quasiment homogène dans l'épaisseur. Dans ce cas la contrainte de cisaillement moyenne vaut :  $\tau(r) = \frac{M}{2\pi R^2 e}$

Essai de torsion sur aluminium (vidéo)



[http://instruct1.cit.cornell.edu/Courses/virtual\\_lab/virtual\\_tests/aluminum.shtml](http://instruct1.cit.cornell.edu/Courses/virtual_lab/virtual_tests/aluminum.shtml)

Cet essai se pratique également avec de nombreux matériaux (bois, matériaux composites, métaux, bétons, ...).

Son apparente simplicité cache certaines difficultés.

- L'éprouvette ne doit pas être trop élancée dans la direction de compression pour éviter les risques de flambage,
- Les deux faces de l'éprouvette en contact avec les plateaux de compression doivent être lubrifiées (huile, film de PTFE, ...) afin d'assurer autant que possible des états de contrainte et de déformation uniaxiaux et homogènes dans la zone sollicitée (si frottement → déformation en tonneau).

Il donne accès au même type d'informations que l'essai de traction simple mais ne remplace pas pour autant ce dernier (certains matériaux comme la fonte se comportent différemment en traction et en compression par exemple vis-à-vis de la limite élastique).

L'essai de **compression uniaxiale** est effectué sur une éprouvette d'élanement 2, avec un asservissement de la vitesse de déformation à une valeur de 0,1 mm/min jusqu'à la rupture.

Pendant l'essai la déformation axiale peut être mesurée soit à l'aide de capteurs LVDT placés entre les plateaux de la presse, soit à l'aide de jauges collées sur la surface de l'éprouvette. La déformation diamétrale peut être déterminée au moyen d'une chaîne extensométrique.

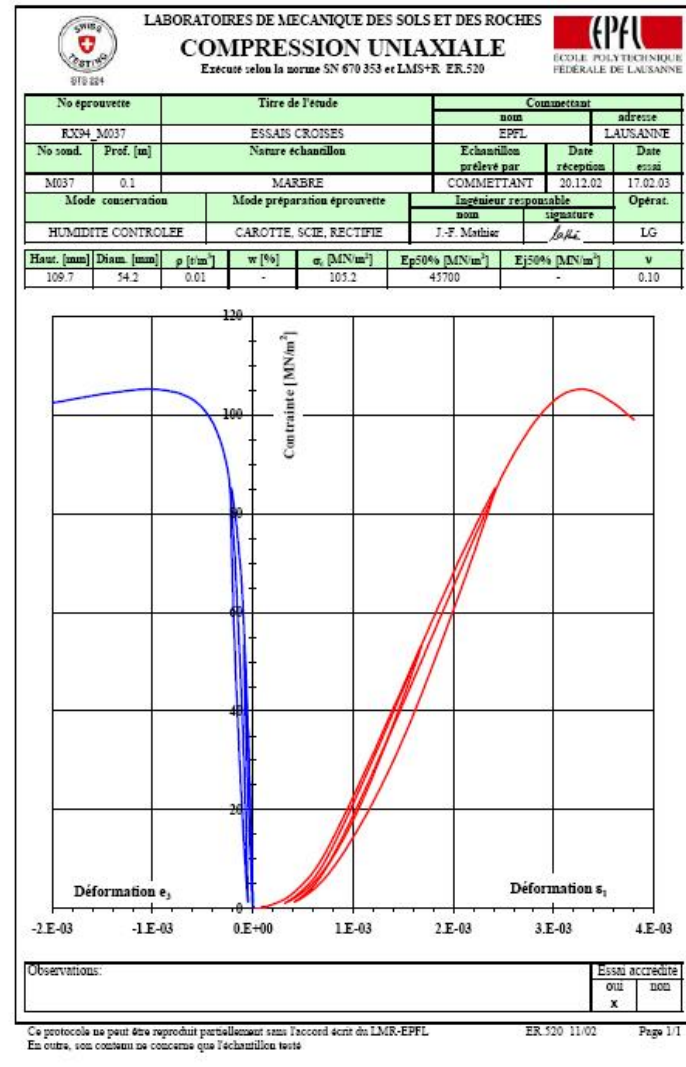
Les valeurs du module de déformation E et du coefficient de Poisson  $\nu$  sont calculées pour une contrainte correspondant à 50 % de la contrainte de rupture.



Grès molassique



Mesure de la déformation radiale



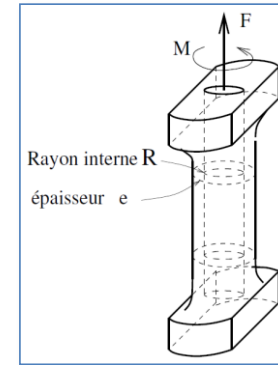
*Essai de compression sur roche*  
[d'après [http://lmrwww.epfl.ch/fr/exp/Comp\\_uniax\\_fr.pdf](http://lmrwww.epfl.ch/fr/exp/Comp_uniax_fr.pdf)]



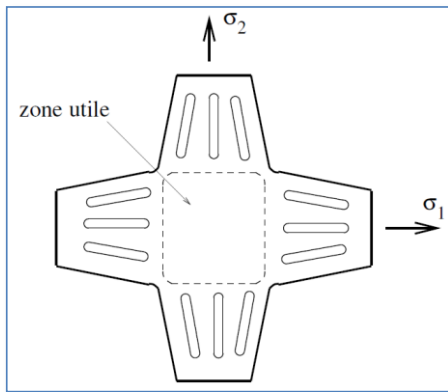
Ces essais permettent d'identifier de manière plus complète la surface seuil.

Quelques exemples d'essais de ce type :

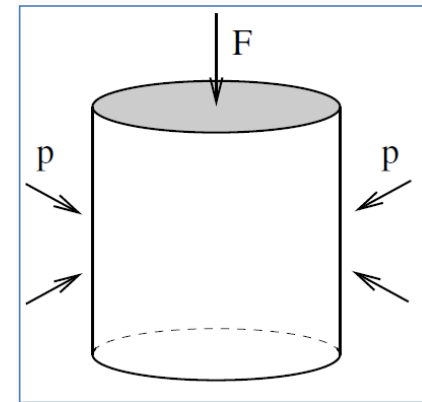
- traction-torsion
- traction-pression interne sur un tube
- traction biaxiale (éprouvette plane et mince)
- triaxial (sols, roches, ...)



*Essai de traction-torsion  
[Maitournam H., 2012]*



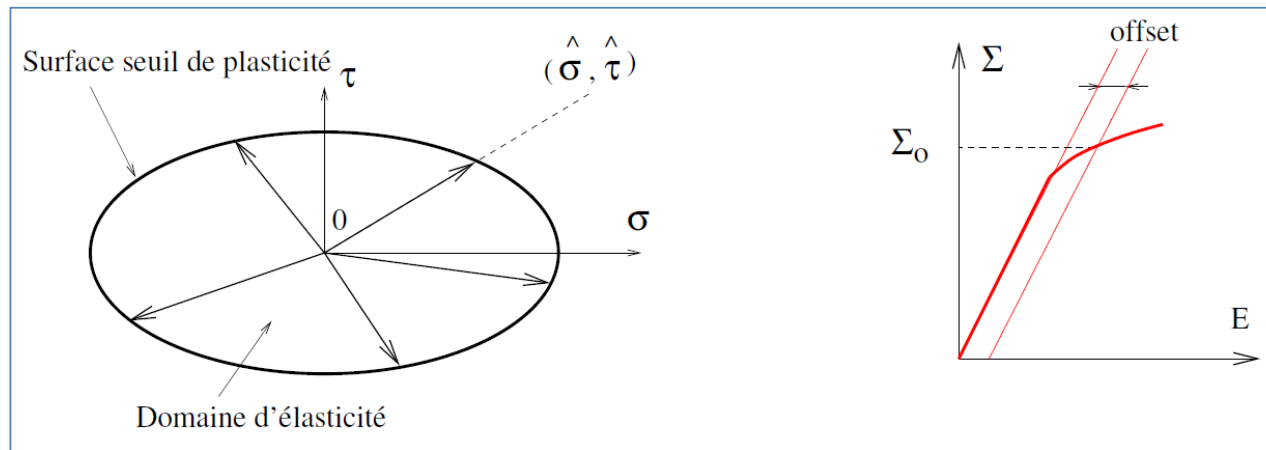
*Essai de traction biaxiale  
[Maitournam H., 2012]*



*Essai triaxial  
[Maitournam H., 2012]*

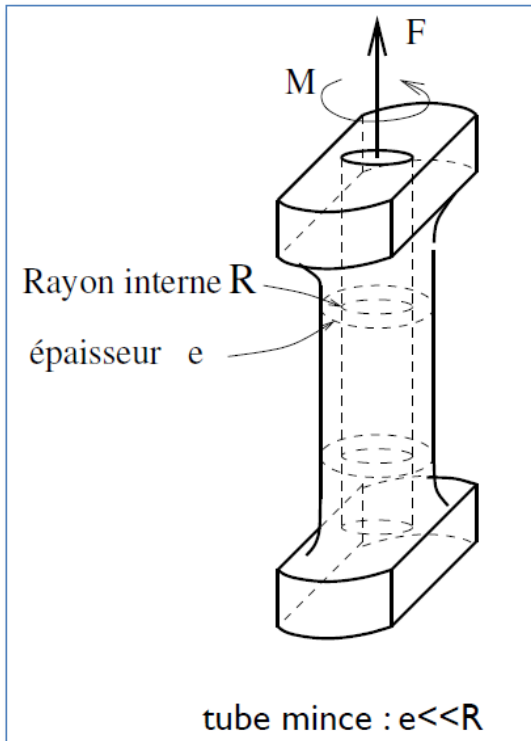
## Principe général

Quel que soit le type d'essai envisagé le principe consiste (voir figure ci-dessous) à effectuer des **trajets de chargement radiaux** dans l'espace des contraintes, c'est-à-dire en suivant une direction fixe mais avec un module variable. On calcule, le long de ce trajet, la contrainte  $\Sigma(t)$  et la déformation  $E(t)$  et on trace la courbe  $(\Sigma(t), E(t))$ . Pour la plupart des métaux la courbe débute par une zone linéaire suivie d'une deuxième zone non-linéaire. Afin de repérer le **seuil de non-linéarité** il est nécessaire de définir un « **offset** » (0,2 % de déformation pour certains métaux).



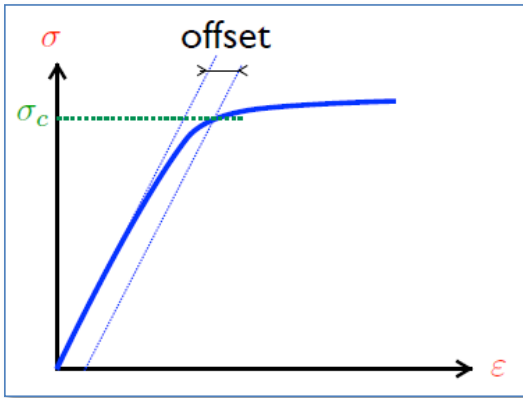
*Principe de détermination de la surface seuil  
[Suquet P., 2009]*

## Cas de l'essai de traction-torsion



*Eprouvette de traction-torsion  
[Marigo J.-J., 2016]*

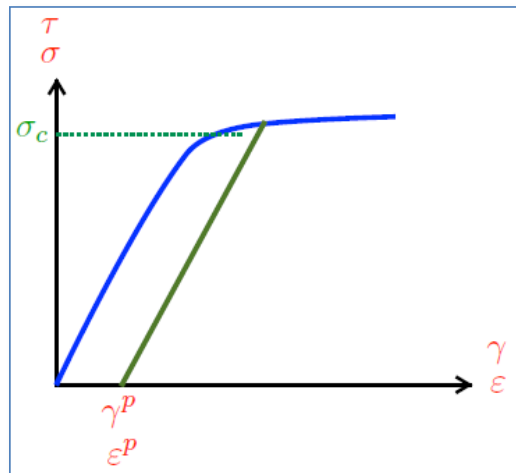
- efforts
  - $F$  : force de traction axiale
  - $M$  : moment (couple) de torsion
- déplacements généralisés
  - $q$  : déplacement axial
  - $\alpha$  : angle de torsion
- contraintes / déformations
  - $\sigma = \sigma_{zz} = \frac{F}{S} \approx \frac{F}{2\pi R e}$  ;  $\varepsilon_{zz} = \frac{q}{L}$
  - $\tau = \sigma_{z\theta} \approx \frac{M}{2\pi R^2 e}$  ;  $\gamma = \frac{\alpha R}{2L}$
- expression des tenseurs de contrainte et de déformation dans le repère principal pour les contraintes  $(\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{z})$ 
  - $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix}$  ;  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & \gamma \\ 0 & \gamma & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$



Mesure du seuil de plasticité  
[Marigo J.-J., 2016]

Mesure du seuil de plasticité (limite élastique)

- définition d'un offset (arbitraire)
- détection de la perte de linéarité

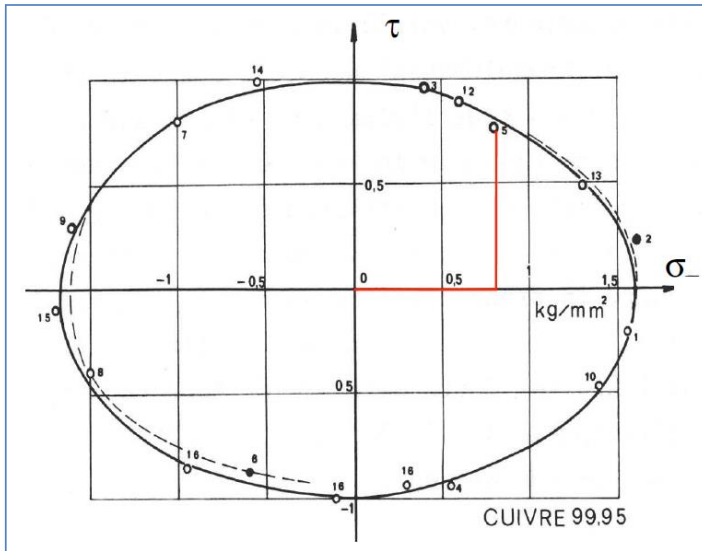


Mesure de la déformation plastique  
[Marigo J.-J., 2016]

Mesure de la déformation plastique

- légère surcharge au-delà de l'offset
- décharge des contraintes à 0
- mesure des différentes composantes des déformations résiduelles  $\gamma_p$  et  $\epsilon_p$

Méthodologie possible :



*Mesure de la déformation plastique (en rouge le trajet de charge) – expérimentations de Bui H.D. [Evolution de la frontière du domaine élastique des métaux avec l'écroutissage plastique et le comportement élastoplastique d'un agrégat de cristaux cubiques. Mémorial de l'Artillerie Française, 1, 141–165 (1970)] [Marigo J.-J., 2016]*

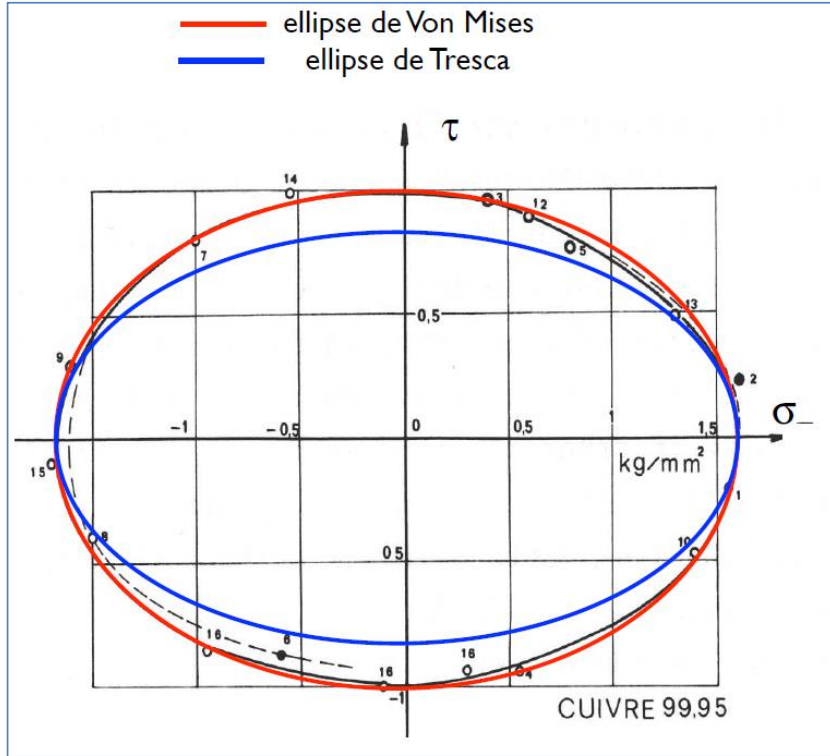
1. On effectue un premier essai de traction simple en augmentant  $\sigma$  tout en maintenant  $\tau$  à 0 et on arrête lorsqu'on note une perte de linéarité de la réponse. On obtient ainsi la limite élastique en traction simple  $\sigma_t$
2. On fait la même chose en compression et on obtient ainsi  $-\sigma_c$
3. On charge en traction (ou compression) simple jusqu'à un certain niveau  $\sigma_* \in (-\sigma_c, \sigma_t)$  à  $\tau = 0$ , puis on bloque  $\sigma$  à  $\sigma_*$  et on exerce une torsion croissante dans un sens ou dans l'autre. On mesure la valeur de  $\tau$  à partir de laquelle il y a une perte de linéarité

En procédant ainsi on obtient une famille de points expérimentaux situés sur la surface seuil.

La figure ci-dessus donne une illustration relative à des expérimentations menées par Bui sur du cuivre pur.

## Confrontation avec des critères de plasticité isotropes

- critère de Von Mises : la surface seuil est une ellipse d'équation  $\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_c^2$
- critère de Tresca : la surface seuil est également une ellipse d'équation  $\sigma^2 + 4\tau^2 = \sigma_c^2$



*Confrontation modèle-expérience dans e cas du cuivre pur  
[Marigo J.-J., 2016]*

A noter :

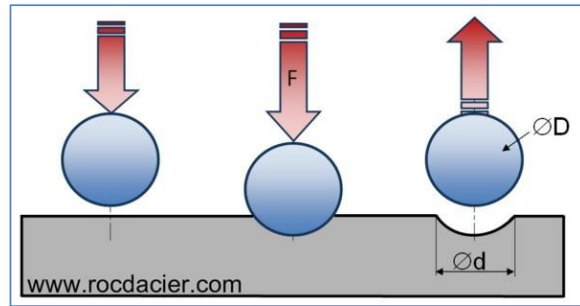
- l'état naturel sans contrainte  $\bar{\sigma} = 0$ , est inclus dans le domaine initial d'élasticité
- le domaine d'élasticité est convexe : si deux états de contrainte  $\bar{\sigma}^1$  et  $\bar{\sigma}^2$  sont situés dans le domaine d'élasticité alors e segment joignant les deux points représentatifs est également inclus dans le domaine d'élasticité
- la confrontation des résultats expérimentaux de Bui (offset de  $2 \cdot 10^{-5}$ ) sur le cuivre pur est bien meilleure avec le critère de Von Mises qu'avec celui de Tresca

Ces essais sont utilisés le plus souvent comme moyen de contrôle. Ils mesurent la résistance à la pénétration d'indenteurs de formes diverses et fournissent des évaluations de la dureté superficielle des matériaux (majoritairement des métaux). La charge est constante et on mesure la surface ou la profondeur de l'empreinte laissée dans le matériau. Ils font le plus souvent l'objet de normes. Les principaux essais sont les suivants :

- **Brinell**

- normes ISO 6506, ASTM E10
- bille d'acier ou de carbure de tungstène. Convient pour les produits plats d'épaisseur > 10 mm. La charge F est maintenue 15 s

- $$HB = \frac{2F}{[\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})]}$$



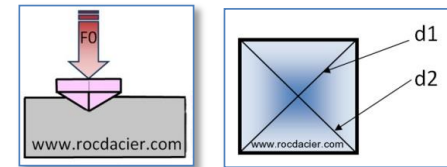
Brinell

**A noter** : des corrélations empiriques établissent une relation entre la **dureté Vickers** et la résistance à la traction  $R_m$  (en MPa) sous la forme  $R_m \approx 3HV$  (voir norme ISO 18265 :2013-12 pour différentes classes d'aciers).

Concernant la **dureté Brinell** HBW on constate également expérimentalement (aciers) :  $R_m \approx 3HBW$

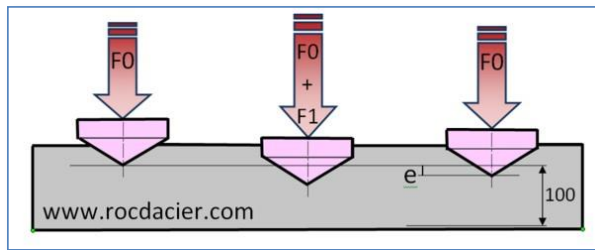
- **Vickers**

- microdureté à macrodureté
- normes ISO 6507, ASTM E92 et E384
- pyramide droite à base carrée en diamant d'angle au sommet 136°. On applique une charge F sur l'indenteur et on mesure la diagonale d de l'empreinte laissée après suppression de la charge. La dureté Vickers se calcule selon la relation :
- $$HV = 0,189 \cdot \frac{F}{d^2}$$
. La surface doit être rectifiée ou polie.



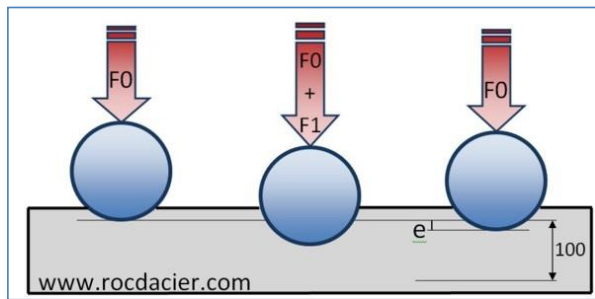
- **Rockwell**

- macrodureté ( $F > 49,03 \text{ N}$ )
- normes ISO 6508, DIN 50103 et ASTM E18
- cône de diamant (Rockwell HRC) d'angle  $120^\circ$  ou bille en carbure (Rockwell HRB)
- mesure de profondeur



HRC

[<https://www.rocdacier.com/de-durete-brinell-vickers-rockwell/>]

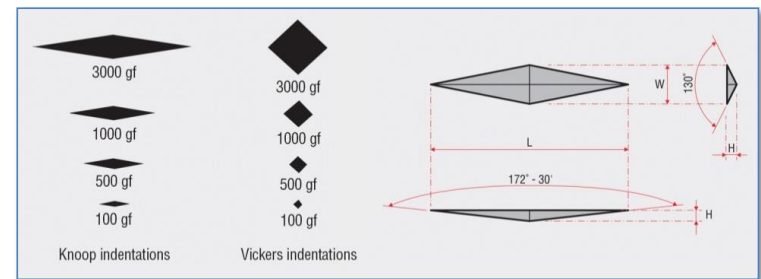


HRB

[<https://www.rocdacier.com/de-durete-brinell-vickers-rockwell/>]

- **Knoop**

- normes ISO 4545, ASTM E384 et JIS Z 2251
- alternative à l'essai Vickers
- pyramide diamant allongée
- utilisée pour les matériaux durs et fragiles (céramiques)



Géométries essai Knoop

[<https://www.struers.com/fr-FR/Knowledge/Hardness-testing/Knoop#knoop-how-to>]



# Contents

## 1 Aim of rheology

Definition - brief history

## 2 Constitutive laws – rheological models and criteria

Constitutive laws reminders - rheological models - rheological criteria

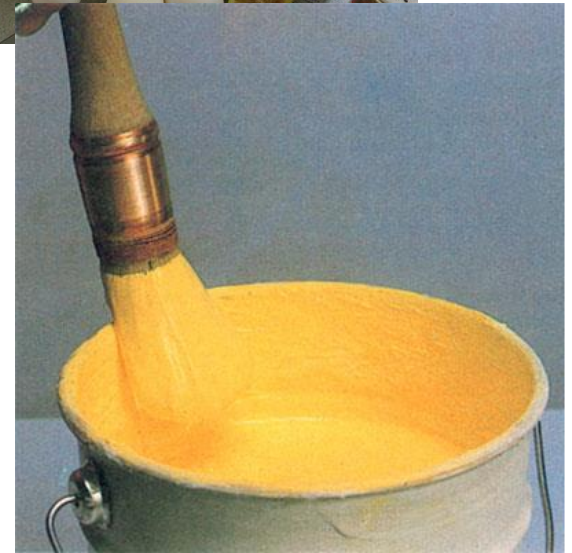
## 3 Plastic media

Material nonlinearity – Practical manifestations of plasticity – 1D plasticity – Management of plasticity – Plasticity criteria – Plastic flow rule – Viscoplasticity – Practical applications – Experimental aspects

## 4 Viscous media – Case of molten polymers

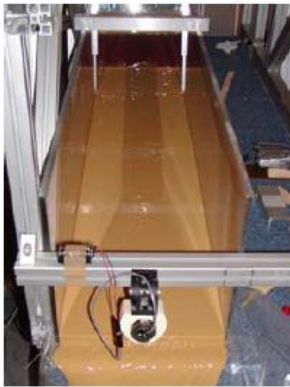
Newtonian media – Pseudoplastic or shear-thinning media – Yield stress, shear-thickening, thixotropic media – Viscoelastic media – Experimental aspects

## 5 Bibliography





*Etat initial*



Fluide à  
seuil



"Glissement  
de terrain"



Solide

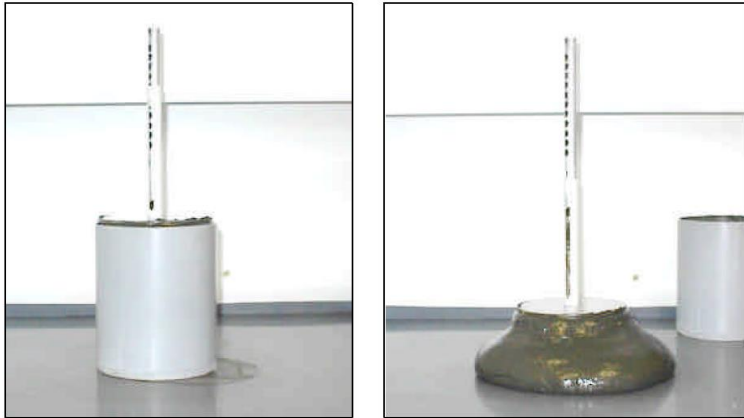
Repos

Liquide  
simple

Concentration



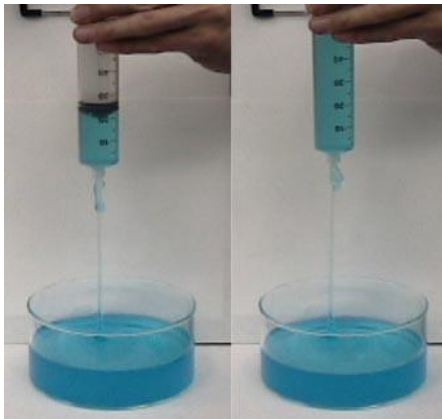
Coussot et al., to appear in *Phys. Fluids* (2005)



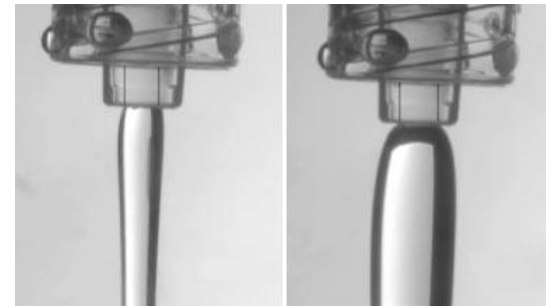
*Slump test adapted to sewage sludges  
[Baudéz J.-C., 2001]*



*Avalanche en aérosol du 19 janvier 2004 sur le site expérimental de la Sionne  
[Ancey C, 2005]*



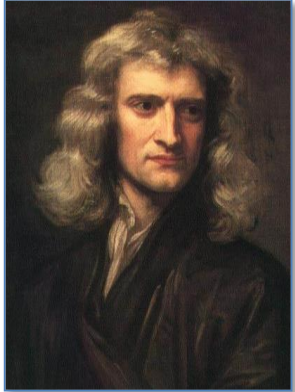
*Tubeless siphon  
<http://web.mit.edu/nnf/research/phenomena/demos.html>*



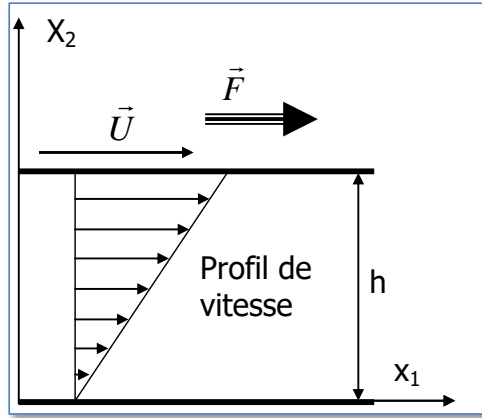
*Die Swell  
<http://web.mit.edu/nnf/research/phenomena/demos.html>*



- 4. *Viscous media*
- 4.1. *Newtonian media*
- 4.1.1. *Newton's phenomenological definition (1687)*



*Isaac Newton  
(1642-1727)*



*Cisaillement plan*

Consider a viscous fluid sheared between two parallel plates with area  $S$ , distance  $h$ ; one plate slides linearly along  $x_1$ -axis and with a velocity  $U$

The **shear rate** (or velocity gradient) is  $\dot{\gamma} = \frac{U}{h}$  (constant in thickness if velocity profile is linear).

The force  $F$  necessary to shift the upper plate at velocity  $U$  results in a **shear stress** (*due to viscous friction*)  $\tau = \frac{F}{S}$ .

Experimentally, for most of fluids, at given temperature and pressure, the ratio between  $\tau$  and  $\dot{\gamma}$  is independent of  $\dot{\gamma}$  (*at least in a range of values for  $\dot{\gamma}$* ).

Newton defined the **dynamic viscosity**  $\eta$  with:  $\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$

We have to consider that thermoplastic molten polymers behave specifically due to their specific molecular structure:

- viscosity is very influenced by temperature
- viscosity becomes **non-Newtonian** at high shear rate  $\dot{\gamma}$  : this property matches with a **pseudoplastic** or **shear-thinning** behaviour (*see later*)



*Charles-Louis Navier  
(1785-1836)*

1D Newton's law isn't sufficient to express dynamic equilibrium of the medium and then to solve a Newtonian flow in any configuration. For this purpose a tensorial law is needed.

This one was proposed by Navier (1823). For an incompressible fluid it writes:

$$\bar{\bar{s}} = 2\eta\bar{\bar{\epsilon}}, \text{ where } \bar{\bar{s}} \text{ is the deviatoric stress tensor.}$$

→ It's a 1 parameter law.

**Comment:** coefficient 2 is necessary to ensure consistency with 1D Newton's law. Indeed if we consider a shear flow in the plane 1,2 (Newton's experiment) with shear stresses along the 1-axis and if we assume moreover that the velocity profile is linear in the gap we have:

$$\begin{cases} u(x_2) = \frac{U}{h}x_2 = \dot{\gamma}x_2, \\ v = w = 0 \end{cases}, \text{ then: } \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ therefore: } s = \begin{pmatrix} 0 & \eta\dot{\gamma} & 0 \\ \eta\dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Comment:** in this case we have  $\sigma = \begin{pmatrix} -p & \eta\dot{\gamma} & 0 \\ \eta\dot{\gamma} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \rightarrow$  a shear stress appears but no

**Normal Stress Differences:** this expresses the lack of elasticity in the medium.



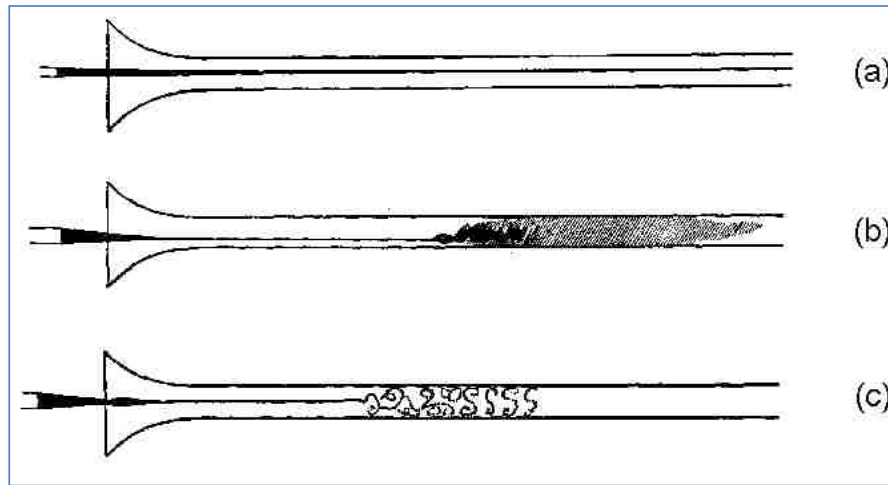
- ❖  $\eta$ : **dynamic** (or **normal**) **viscosity**: dimension  $ML^{-1}T^{-1}$ 
  - SI unit: Poiseuille (Pl) or Pascal.second (Pa.s)
  - cgs unit: Poise (P) : 1 Pl = 10 P
  
- ❖  $\nu$ : **kinematic viscosity**  $\rightarrow \nu = \frac{\eta}{\rho}$  - dimension  $L^2T^{-1}$ 
  - SI unit:  $m^2.s^{-1}$
  - cgs unit: Stokes (St) or  $cm^2.s^{-1}$  (*used for example for motor oils*).

Media	Dynamic viscosity $\eta$ (Pa.s)	Kinematic viscosity $\nu$ (m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )
H <sub>2</sub>	8,9.10 <sup>-6</sup>	105.10 <sup>-6</sup>
CO <sub>2</sub>	14,8.10 <sup>-6</sup>	8,04.10 <sup>-6</sup>
N <sub>2</sub>	17,5.10 <sup>-6</sup>	15,2.10 <sup>-6</sup>
Air	18,5.10 <sup>-6</sup>	15,6.10 <sup>-6</sup>
Hexane	0,3. 10 <sup>-3</sup>	0,46.10 <sup>-6</sup>
Aniline	0,47.10 <sup>-3</sup>	0,46.10 <sup>-6</sup>
Toluène	0,59.10 <sup>-3</sup>	0,681.10 <sup>-6</sup>
Benzène	0,652.10 <sup>-3</sup>	0,741.10 <sup>-6</sup>
Eau à 20 °C	1,005.10 <sup>-3</sup>	1,007.10 <sup>-6</sup>
Eau à 0 °C	1,8.10 <sup>-3</sup>	1,79.10 <sup>-6</sup>
Ethanol	1,20.10 <sup>-3</sup>	1,51.10 <sup>-6</sup>
Mercure	1,554.10 <sup>-3</sup>	0,1147.10 <sup>-6</sup>
Lait	2,0.10 <sup>-3</sup>	1,93.10 <sup>-6</sup>
Sang de l'homme à 37 °C	4,0.10 <sup>-3</sup>	
Huile d'olive	84.10 <sup>-3</sup>	91,5.10 <sup>-6</sup>
Glycérol	1,49	1182.10 <sup>-6</sup>
Miel (liquide après agitation)	6	4280.10 <sup>-6</sup>
Huiles	10 <sup>-2</sup> à 1	10 <sup>-5</sup> à 10 <sup>-3</sup>
Gels /crèmes	1 à 100	
Vernis / peintures	10 à 1000	
Polymères fondus	10 <sup>2</sup> à 10 <sup>4</sup>	10 <sup>-1</sup> à 10
Verres fondus	10 <sup>2</sup> à 10 <sup>4</sup>	10 <sup>-1</sup> à 10
Résines/goudron/bitume	100 à 100 000	
Glace à 0 °C	10 <sup>13</sup>	
Granit	10 <sup>20</sup>	

Values of viscosity for various fluids (at 20 °C and 1 bar except other mention) - [from <http://www.educnet.education.fr/rnchimie/phys/rheo/cours/rheo.htm> et Agassant J.-F., 1996]



Osborne Reynolds  
(1842-1912)



Expérience de Reynolds  
[Reynolds O., 1883]

Given a steady viscous fluid flow inside a transparent pipe. In order to analyze the type of flow a small jet of dyed water is injected in the main flow without any perturbation.

What can be noticed:

- When the velocity was slow the dyed layer remained distinct through the entire length of the large tube. It means that the flow is composed of jets or coaxial layers without any exchange between and sliding against each other → the flow is **laminar**
- When the velocity was increased, the layer broke up at a given point and diffused throughout the fluid's cross-section. The point at which this happened was the transition point from laminar to **turbulent** flow.

A more complete study points out this transition laminar / turbulent is correlated to dimensionless Reynolds number of the flow:

$$R_e = \frac{\rho D U}{\eta} \text{ with } \begin{array}{l} D : \text{pipe diameter} \\ U : \text{mean flow velocity } (U = \frac{\text{flow-rate}}{\text{section}}) \\ \rho : \text{density} \end{array}$$

Transition occurs generally for  $R_e \approx 2000$

Reynolds number can be physically explained as a balance between **inertial forces** and **viscosity forces**:  $R_e = \frac{\rho D U}{\eta} = \frac{\rho U^2}{\eta \frac{U}{D}} = \frac{\text{inertia}}{\text{viscosity}}$

- an increase in density promotes a turbulent flow
- an increase in viscosity promotes a laminar flow

**Comment:** molten polymers have quite low densities and quite high viscosities → during processing most of the time the flow is laminar (*considering the usual velocities*).

In Newtonian flow unknowns are pressure  $p$  and velocity  $\vec{u}$  fields. We try to combine all equations to set up an equation with no other variables than  $p$  and  $\vec{u}$ .

### Equations:

- equilibrium equation:  $\overrightarrow{\text{div}} \vec{\sigma} + \rho(\vec{f} - \vec{\gamma}) = \vec{0}$
- constitutive law:  $\vec{s} = 2\eta \vec{\varepsilon}$
- relation between velocity  $\vec{u}$  and strain rate tensor  $\vec{\varepsilon}$  :  $\vec{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} + {}^t \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} \right)$
- continuity equation:  $\text{div} \vec{u} = 0$
- canonical decomposition of stress tensor  $\vec{\sigma}$ :  $\vec{\sigma} = -p \vec{1} + \vec{s}$

Combining all these relations the result is:  $-\overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{u} + \rho(\vec{f} - \vec{\gamma}) = \vec{0}$

→ This is called **Navier-Stokes equation** (*see mathematical formula list*).

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} \right) = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \eta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} \right) = 0 \end{cases}$$



*George Gabriel Stokes  
(1819-1903)*

For molten polymers most of the time volume and inertial forces can be neglected → Navier-Stokes equation can therefore be simplified in **Stokes equation** (*see opposite*).

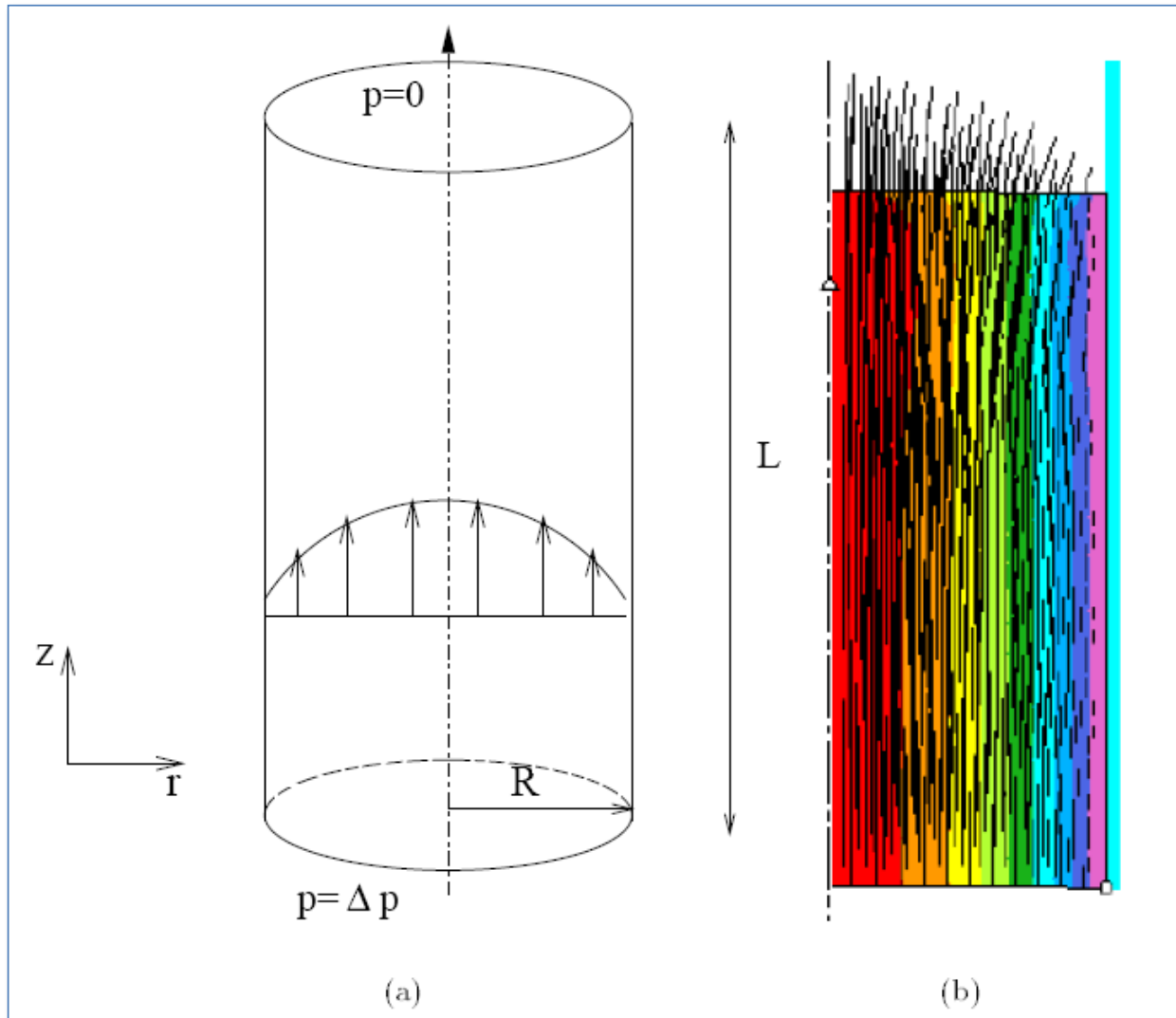
We get then the given system with **4 equations and 4 unknowns**  $p$ ,  $u$ ,  $v$  and  $w$ .

Stokes equation can be solved sometimes analytically (simple geometry, viscometric flows) more often with a laminar flow assumption.

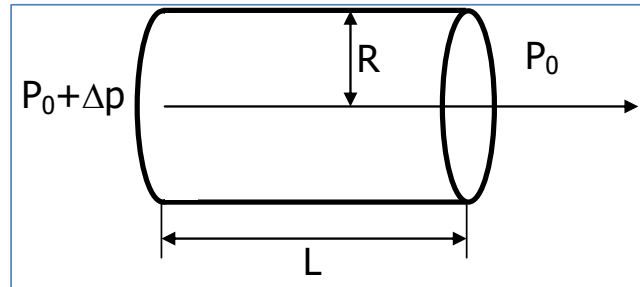
Sometimes approximations are used:

- hydrodynamic lubrication approximations (shear flows – for instance mold filling in injection molding)
- threads and membranes approximations (spinning, blow moulding and film blowing)

In more complex cases numerical methods are needed such as Finite Element Method.



Poiseuille flow in a pipe. Velocity field with fountain flow; (a) flow geometry, (b) Finite Element Method calculation  
*[Perchat E., thèse, 2000]*



Given a Newtonian flow in a circular pipe of radius  $R$ , length  $L$  created by a difference of pressure  $\Delta p$  between intake and exit

Pressure is supposed homogeneous at intake and exit.

Volume and inertial forces are neglected.

We intend to calculate:

- repartition of pressure
- velocity profile in any section
- average velocity
- relation between the flow rate  $Q$  and  $\Delta p$



*Jean-Louis Marie Poiseuille  
(1797-1869)*



## Assumptions

- Newtonian fluid
- laminar flow
- volume and inertial forces neglected

## Boundary conditions

- homogeneous pressure at intake and exit
- no-slip of the fluid on the pipe wall

→ Axisymmetric Problem

## Calculation

Kinematic assumption is  $\vec{u}(r, \theta, z) = \begin{cases} u(r, \theta, z) = 0 \\ v(r, \theta, z) = 0 \\ w(r, \theta, z) = w(r) \end{cases}$

Condition on  $w$  is induced by fluid incompressibility.

Stokes equation is used:

$$\begin{cases}
 (1) & -\frac{\partial p}{\partial r} = 0 & (1) \text{ et } (2) \text{ induisent } p(z) \\
 (2) & -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 & (3) \text{ induit } \frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right), \\
 (3) & -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0 & \text{D'où : } \forall r, \theta, z, f(z)=g(r)=A=\text{cst}
 \end{cases}$$

From boundary conditions on pressure is deduced:  $\frac{dp}{dz} = A = -\frac{\Delta p}{L}$ , and then:

$p(z) = p_0 + \Delta p \left( 1 - \frac{z}{L} \right)$ : linear pressure profile along flow direction. Pressure is constant in any section.

## Velocity calculation

Given  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta L}$  then  $r \frac{dw}{dr} = -\frac{\Delta p}{\eta L} \frac{r^2}{2} + B \rightarrow$  On the axis the velocity cannot be infinite therefore B must be zero (B=0)

$\rightarrow w = -\frac{\Delta p}{\eta L} \frac{r^2}{4} + C$ , combined with BC  $w(r = R) = 0$ , then the final solution:

$$w(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} R^2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \rightarrow \text{parabolic velocity profile.}$$

## Flow rate calculation

$Q = \int_0^R w(r) 2\pi r \cdot dr = \frac{\Delta p}{4\eta L} 2\pi R^2 \int_0^R \left( r - \frac{r^3}{R^2} \right) \cdot dr \rightarrow Q = \frac{\pi \cdot \Delta p \cdot R^4}{8\eta \cdot L} \rightarrow$  Flow rate is proportional to pressure drop in the flow direction.

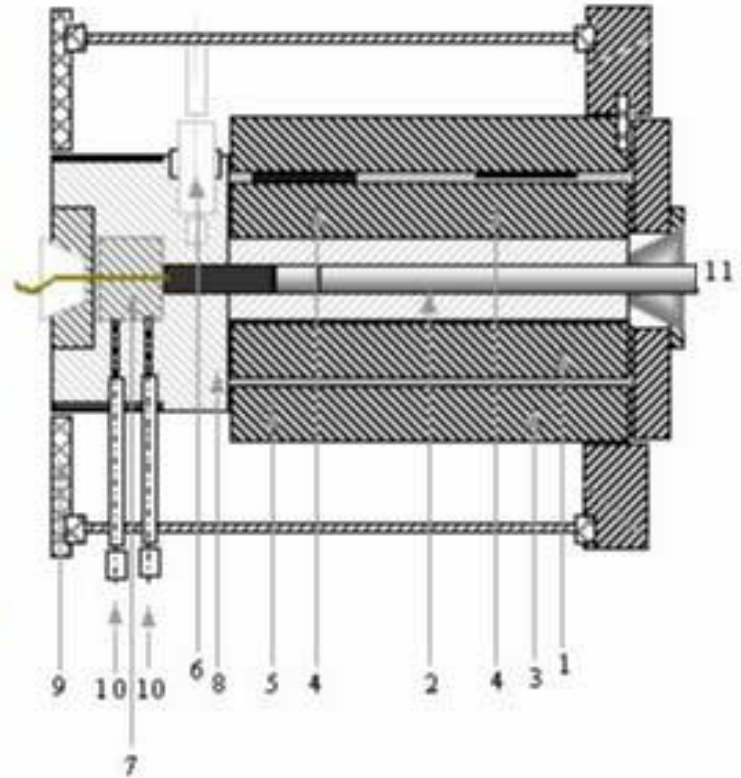
## Average velocity

$V = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta p \cdot R^2}{8\eta \cdot L}$  → velocity can be written in a new way:  $w(r) = 2V \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$  ; average velocity means the velocity of the flow front in the pipe.

## Shear rate

Given:  $|\dot{\gamma}| = \left| \frac{dw}{dr} \right| = \frac{r \cdot \Delta p}{2\eta \cdot L}$  → Shear rate is heterogeneous in the flow: zero along z-axis and maximum on the pipe wall.

**Comment:** relation  $Q(\Delta p)$  can be used experimentally → it is exactly the principle of a capillary rheometer



(1) Chambre, (2) Cylindre, (3) Chauffage (zone 1), (4) sonde de température, (5) Chauffage (zone 2), (6) Capteur de pression, (7) Capillaire, (8) Adaptateur du capillaire, (9) Chauffage (zone 3), (10) Thermocouple, (11) Piston.

*[Pujos C., thèse, 2006]*

This device gives a possibility to simulate the flow of a molten thermoplastic polymer in an extrusion die.

Experimentally it is well known that a lot of media cannot be considered as Newtonian if a large range of shear rate is considered. It is the case among others of molten thermoplastic polymers: their viscosity decreases as the shear rate increases → this is specific to a pseudoplastic or shear-thinning behavior.



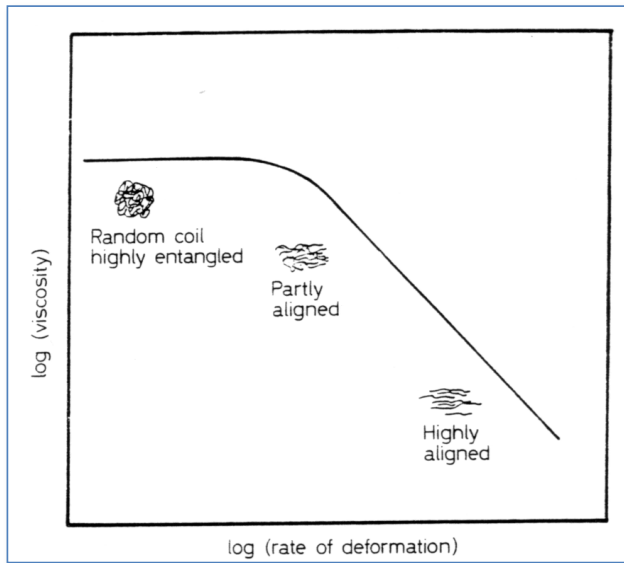
*Wilhelm Ostwald  
(1853-1932)*

The most common 1D shear model is named « power-law » or « Ostwald law » (1925):  $\tau = K|\dot{\gamma}|^{m-1}\dot{\gamma}$ , which induces following law of viscosity:  $\eta(\dot{\gamma}) = K|\dot{\gamma}|^{m-1}$  with:

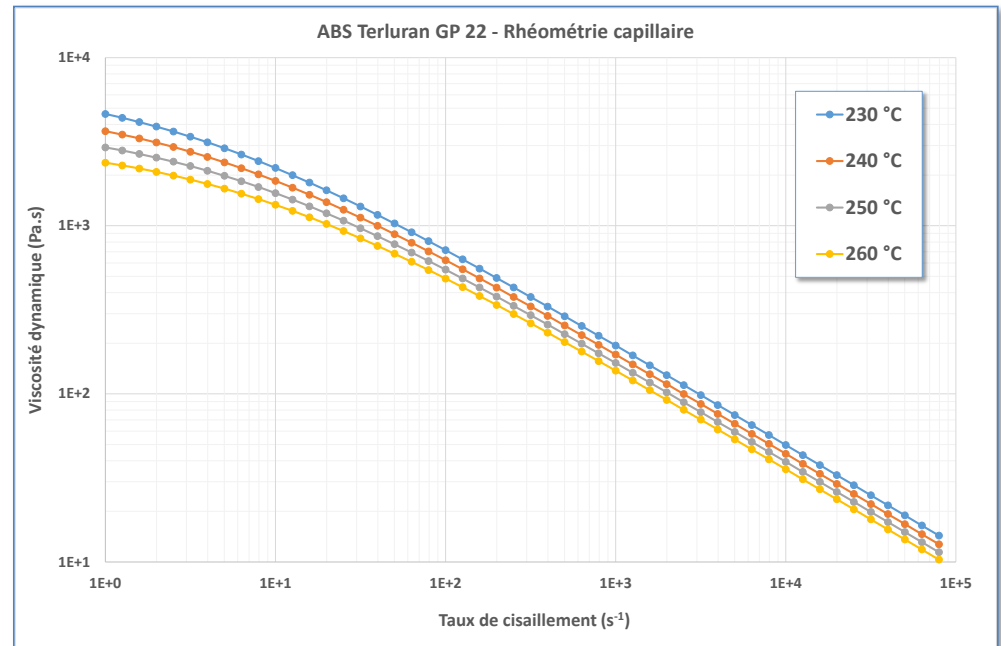
- K: consistancy,
- m: pseudoplasticity index (ranges from 0 to 1).

This behaviour is intermediate between two limits:

- m=1: Newtonian behaviour
- m=0: plastic behaviour



*Shear-thinning behaviour of a polymer – correlation with microstructure*  
 [Agassant J.-F., 1996]



*ABS – capillary rheometer characterization and Cross-WLF law fit*  
 [Moldflow® documentation]

**Comment:** this law has a drawback of infinite viscosity at zero shear → different other equations have been suggested

### Spriggs law (1973)

$$\begin{cases} \eta = \eta_0 & \text{if } \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0 \\ \eta = \eta_0 \left( \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} \right)^{m-1} & \text{if } \dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0 \end{cases}$$

### Carreau-Yasuda law

$$\frac{\eta(\dot{\gamma}) - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = [1 + (\lambda\dot{\gamma})^a]^{n-1/a} \text{ with:}$$

- $\eta_0$ : Newtonian viscosity at low shear rate
- $\eta_\infty$ : Newtonian viscosity at infinite shear rate (generally zero for molten polymers)
- $\lambda$ : characteristic time of transition between Newtonian and pseudoplastic regime
- $a$ : quantifies the curvature of the transition
- $n$ : ultimate flow index at high shear rate



## Cross law (1965)

$$\frac{\eta(\dot{\gamma}) - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = [1 + (\lambda\dot{\gamma})^m]^{-1}, \text{ with:}$$

- $\eta_0$ : Newtonian viscosity at low shear rate
- $\eta_{\infty}$ : Newtonian viscosity at infinite shear rate (generally zero for molten polymers)
- $\lambda$ : characteristic time of entanglements (for polymers)
- $m$ : pseudoplasticity or flow index

**Comment:** Carreau-Yasuda and Cross laws are more realistic but are not adapted for analytical calculations. They are principally used in numerical simulations (for instance in softwares such as Moldflow for injection molding or Ludovic for twin-screw extrusion).

## Case of the blood

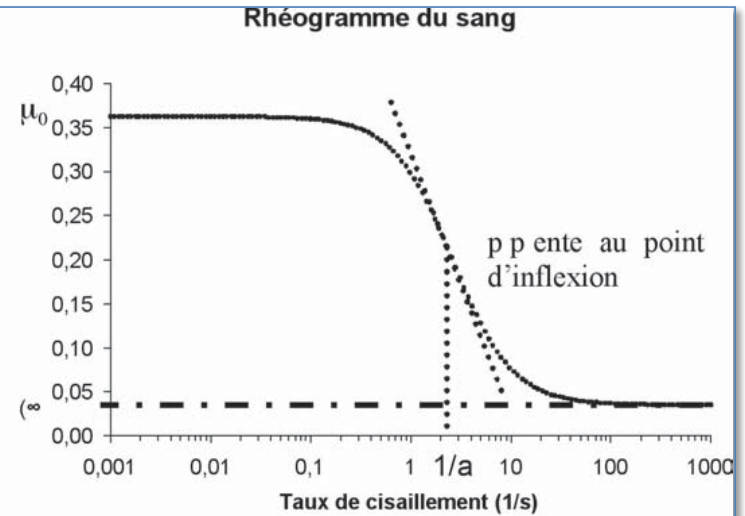
$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_{\infty} + \frac{\mu_0 - \mu_{\infty}}{1 + (a \dot{\gamma})^p}$$

avec  $\dot{\gamma}$  taux de cisaillement

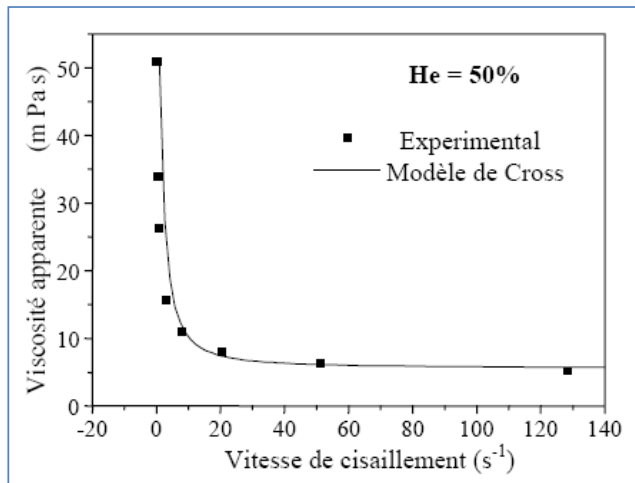
$\mu_0$  viscosité à cisaillement nul

$\mu_{\infty}$  viscosité à cisaillement infini

a et p constantes



4 parameters Cross law and rheogram of blood [Senouillet L., 2005]



Experimental fit – Cross law – hematocrit 50 % [Achab L., 2005]

Evolution of blood viscosity depends on several parameters:

- temperature
- the deformability of red blood cells
- hematocrit (percentage of red blood cells in blood).

The suggested law extends Ostwald law to 3D case. His expression is:  $\bar{s} = 2K\dot{\gamma}^{m-1}\bar{\dot{\varepsilon}}$ , with:

- K and m: same meaning than for 1D case
- $\dot{\gamma} = \sqrt{2 \sum_{i,j} \dot{\varepsilon}_{ij}^2}$ : generalized shear rate; it is an invariant of strain rate tensor  $\bar{\dot{\varepsilon}}$

For planar shear we get:

$$\begin{cases} u(x_2) = \dot{\gamma}x_2 \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma} = |\dot{\gamma}| \Rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} -p & K|\dot{\gamma}|^{m-1}\dot{\gamma} & 0 \\ K|\dot{\gamma}|^{m-1}\dot{\gamma} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

which is consistent with Ostwald 1D law.

No equivalent to Navier-Stokes equation can be given in this case  $\rightarrow$  a more general method has to be used

The following steps are:

a) Kinematic assumption  $\rightarrow \vec{u}$

b) Strain rates calculation  $\rightarrow \vec{u} \rightarrow \dot{\epsilon}$

c) Stress calculation (using constitutive law)  $\rightarrow \dot{\epsilon} \rightarrow s \rightarrow \sigma$

d) Equilibrium equation  $\rightarrow \overrightarrow{\text{div}}\sigma + \rho(\vec{f} - \vec{\gamma}) = \vec{0}$

e) Taking account of boundary conditions  $\rightarrow$  solution of the flow:  $p, \vec{u}$

## Calculation

Assumptions are the same as for Newtonian case  $\rightarrow$  1D flow

$$\vec{u}(r, \theta, z) = \begin{cases} u(r, \theta, z) = 0 \\ v(r, \theta, z) = 0 \\ w(r, \theta, z) = w(r) \end{cases} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma} = \left| \frac{dw}{dr} \right| = -\frac{dw}{dr}, \text{ if a monotonous}$$

velocity profile is supposed from z-axis to the wall of the pipe.

$$\text{Then: } \sigma = \begin{pmatrix} -p & 0 & -K \left( -\frac{dw}{dr} \right)^m \\ 0 & -p & 0 \\ -K \left( -\frac{dw}{dr} \right)^m & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Equilibrium equation (*moment conservation*):

$$\begin{cases} (1) & -\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ (2) & -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ (3) & -\frac{\partial p}{\partial z} - K \frac{d}{dr} \left[ \left( -\frac{dw}{dr} \right)^m \right] - \frac{K}{r} \left( -\frac{dw}{dr} \right)^m = 0 \end{cases}$$

(1) et (2) imply  $p(z)$

(3) implies

$$\frac{dp}{dz} = -K \frac{d}{dr} \left[ \left( -\frac{dw}{dr} \right)^m \right] - \frac{K}{r} \left( -\frac{dw}{dr} \right)^m = A = -\frac{\Delta p}{L},$$

Then  $p(z) = p_0 + \Delta p \left( 1 - \frac{z}{L} \right) \rightarrow$  same pressure profile as for Newtonan flow.

## Velocity calculation

If we give  $a(r) = \left(-\frac{dw}{dr}\right)^m$ , then:  $\frac{da}{dr} + \frac{a}{r} = \frac{\Delta p}{KL}$  ;

Thus the solution:  $a(r) = \frac{\Delta p}{2KL} r + \frac{B}{r}$ .

Final solution is then:  $w(r) = \left(\frac{\Delta p}{2KL}\right)^{1/m} \frac{m}{m+1} R^{\frac{1}{m}+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{m}+1}\right]$

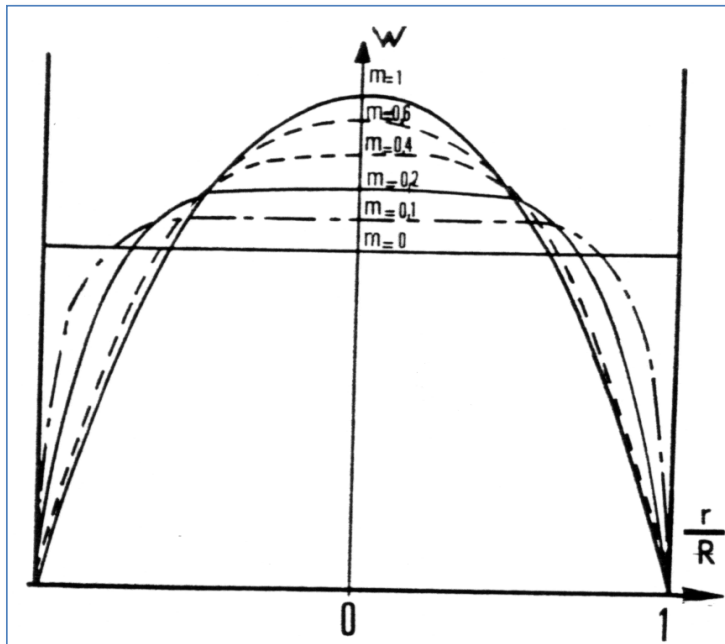
## Flow rate Q calculation

$$Q = \pi \frac{m}{3m+1} \left(\frac{\Delta p}{2KL}\right)^{1/m} R^{\frac{1}{m}+3}$$

## Average velocity V calculation

$$V = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{m}{3m+1} \left( \frac{\Delta p}{2KL} \right)^{1/m} R^{\frac{1}{m}+1} \rightarrow w(r) = \frac{3m+1}{m+1} V \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{m}+1} \right]$$

**Comment:** for  $m=1$  results are the same as for Newtonian flow.



(d'après Agassant J.-F. et al., 1996)

Velocity profile evolution depending on the value of pseudoplasticity index  $m$ ; when  $m$  decreases velocity profile flattens itself and the ultimate case  $m=0$  corresponds to a plug flow (*velocity discontinuity at the wall of the pipe*).



Some Newtonian or pseudoplastic flows with simple geometries can be modeled.

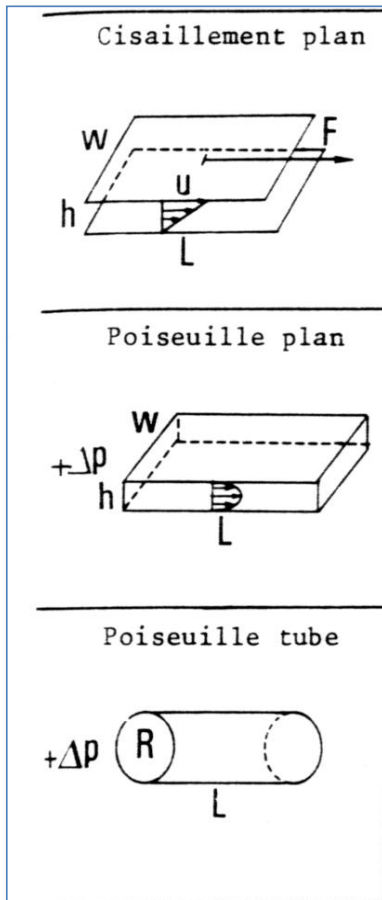
In these flows the power of flow is:

- a mobile wall: plane shear, parallel plates, cone-plate, coaxial cylinders
- a pressure drop: Poiseuille flow in a pipe, Poiseuille flow between parallel plates

Newtonian viscosity is deduced depending on the case by a relation  $\Delta p(Q)$  or  $C(\Omega)$  (C: torque,  $\Omega$ : angular velocity).

In the same way pseudoplasticity index  $m$  and consistency  $K$  are given as following:

- $\log\left(\frac{\Delta p}{L}\right) = m \cdot \log(Q) + C^{\text{st}}(K, m, \text{geometry})$
- $\log(C) = m \cdot \log(\Omega) + C^{\text{st}}(K, m, \text{geometry})$



$$u(y) = U \frac{y}{h}$$

$$F = WL\eta \frac{U}{h}$$

$$u(y) = U \frac{y}{h}$$

$$F = WLK \left(\frac{U}{h}\right)^m$$

$$u(y) = \frac{3}{2}V \left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]$$

$$Q = \frac{1}{12\eta} \frac{\Delta P}{L} h^3 W$$

$$u(y) = \frac{2m+1}{m+1} V \left[1 - (2|y|/h)^{\frac{1}{m}+1}\right]$$

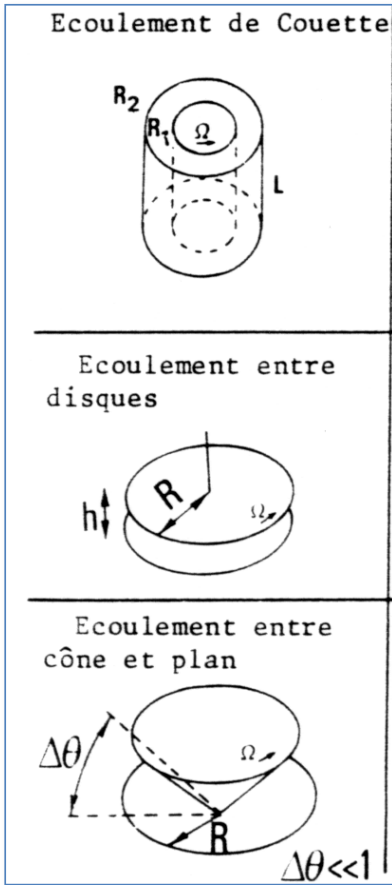
$$Q = \frac{m}{2(2m+1)} \left(\frac{1}{2K} \frac{\Delta P}{L}\right)^{\frac{1}{m}} h^{\frac{1}{m}+2} W$$

$$w(r) = 2V \left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]$$

$$Q = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta P}{L} R^4$$

$$w(r) = \frac{3m+1}{m+1} V \left[1 - (r/R)^{\frac{1}{m}+1}\right]$$

$$Q = \pi \frac{m}{3m+1} \left[\frac{1}{2K} \frac{\Delta P}{L}\right]^{\frac{1}{m}} R^{\frac{1}{m}+3}$$



$$v(r) = \frac{R_1^2 \Omega}{R_2^2 - R_1^2} \left( \frac{R_2^2 - r^2}{r} \right)$$

$$C = 4\pi\eta \frac{R_1^2 R_2^2 \Omega}{R_2^2 - R_1^2} L$$

$$v(r) = \frac{R_1^{\frac{2}{m}} \Omega}{R_2^{\frac{2}{m}} - R_1^{\frac{2}{m}}} \left( \frac{R_2^{\frac{2}{m}} - r^{\frac{2}{m}}}{r^{\frac{2}{m}-1}} \right)$$

$$C = 2^{m+1} \pi K R_1^2 R_2^2 \left[ \Omega / \left\{ m \left( R_2^{2/m} - R_1^{2/m} \right) \right\} \right]^m L$$

$$v(r, z) = r \Omega \frac{z}{h}$$

$$C = \frac{\pi}{2} \eta \frac{\Omega}{h} R^4$$

$$v(r, z) = r \Omega \frac{z}{h}$$

$$C = \frac{2\pi}{m+3} K \left( \frac{\Omega}{h} \right)^m R^{m+3}$$

$$W(r, \theta) = r \frac{\Omega}{\Delta\theta} \theta$$

$$C = \frac{2\pi}{3} \eta \frac{\Omega}{\Delta\theta} R^3$$

$$w(r, \theta) = r \frac{\Omega}{\Delta\theta} \theta$$

$$C = \frac{2\pi}{3} K \left( \frac{\Omega}{\Delta\theta} \right)^m R^3$$

Il existe des milieux qui se comportent comme des corps rigides tant que la contrainte n'atteint pas un certain niveau appelé seuil d'écoulement (yield stress) : en dessous du seuil aucun écoulement n'est observable dans l'échelle de temps choisie.

**Exemples** : peintures (ne coulent pas une fois déposées sur le support), pâtes dentifrice, pâte à pain, boues résiduaires, boues de forage (voir le cas des solutions de bentonite).

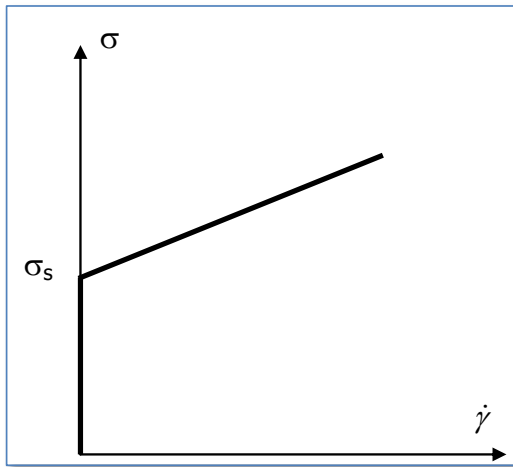
Origines du seuil d'écoulement : existence d'une structure tridimensionnelle au repos → cette structure 3D génère de l'élasticité et nécessite un certain niveau de sollicitation pour se déformer ou se détruire et permettre ainsi un écoulement.

Cas des dispersions (émulsions, suspensions, ...) : les causes physiques peuvent être :

- Forces de Van der Waals,
- Interactions dipôle-dipôle,
- Liaisons électrostatiques,
- Liaisons ioniques.

Plusieurs modèles phénoménologiques ont été proposés afin de décrire de tels comportements.

## Modèle de Bingham



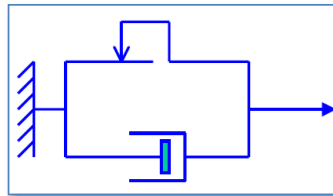
L'équation rhéologique d'un modèle de Bingham s'écrit :

$$\sigma = \sigma_s + \alpha \dot{\gamma}, \text{ avec :}$$

→  $\sigma_s$  : contrainte seuil,

→  $\alpha$  : viscosité plastique.

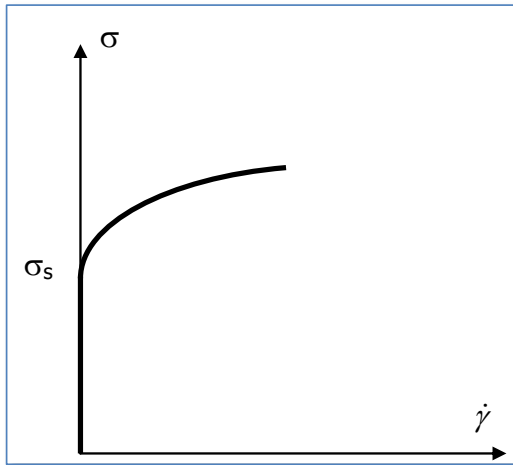
Ce comportement peut être modélisé par l'association en parallèle d'un amortisseur et d'un patin.



[Château X., 2007]

Au-delà du seuil le comportement apparaît newtonien

## Modèle de Casson



L'équation rhéologique d'un modèle de Casson s'écrit :

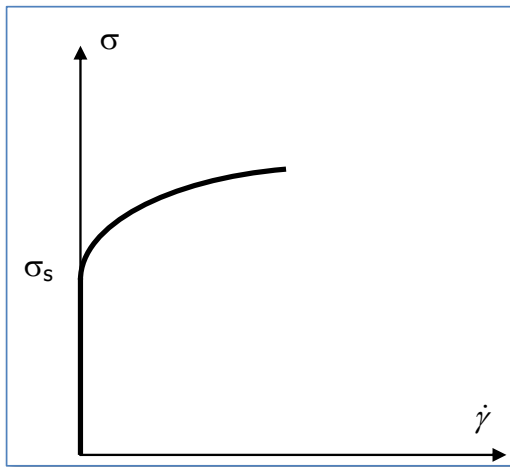
$$\sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma_s} + \sqrt{\beta \dot{\gamma}}, \text{ avec :}$$

- $\sigma_s$  : contrainte seuil,
- $\beta$  : viscosité plastique.

Le milieu présente un comportement fluidifiant au-delà du seuil.

**Exemples** : boues, pâtes dentifrice, pâte à pain, matières grasses, sang, suspensions de sulfate de zinc, ...

## Modèle de Herschel Bulkley



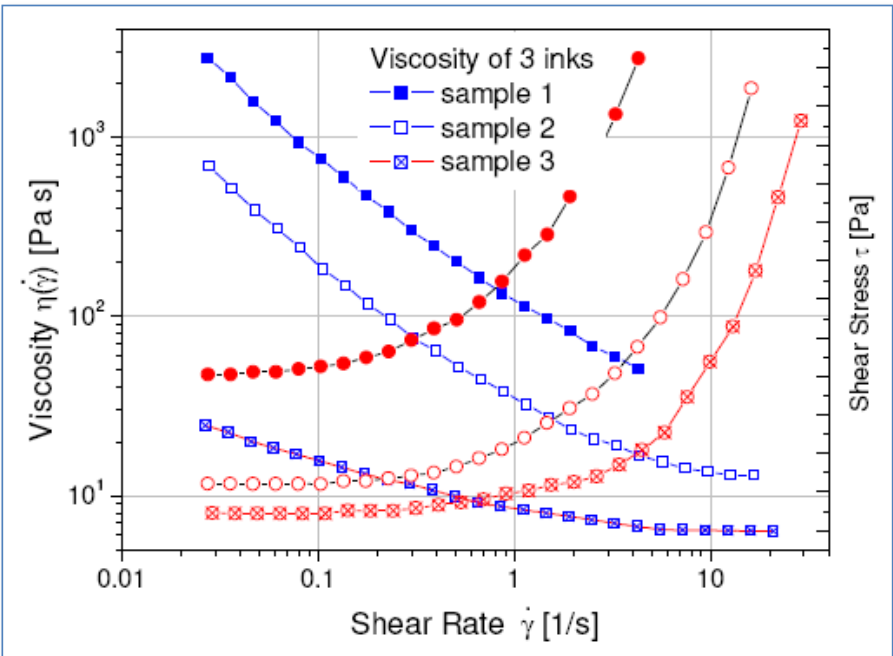
L'équation rhéologique d'un modèle de Herschel Bulkley s'écrit :

$$\sigma = \sigma_s + K\dot{\gamma}^n, \text{ avec :}$$

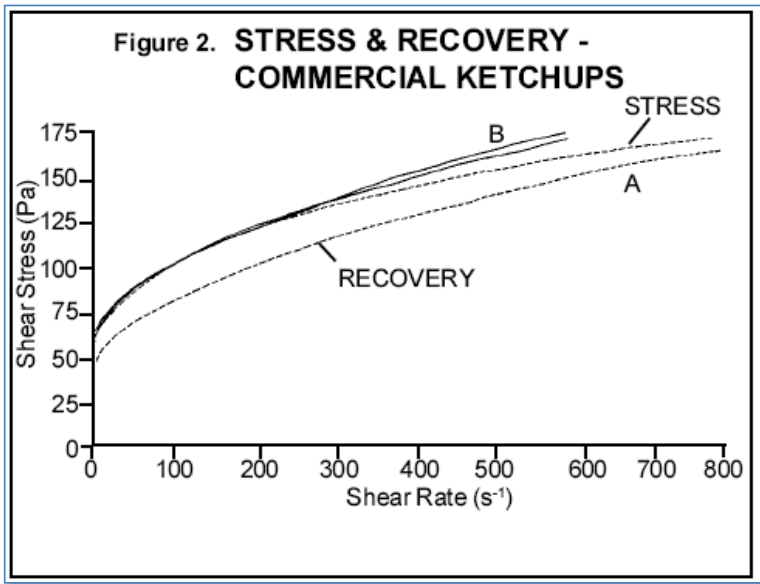
- $\sigma_s$  : contrainte seuil,
- $K$  : consistance,
- $n$  : indice de rhéofluidification.

Le milieu présente un comportement fluidifiant au delà du seuil.

**Exemples** : coulis de ciment en début de prise, certaines solutions de polymères, ...

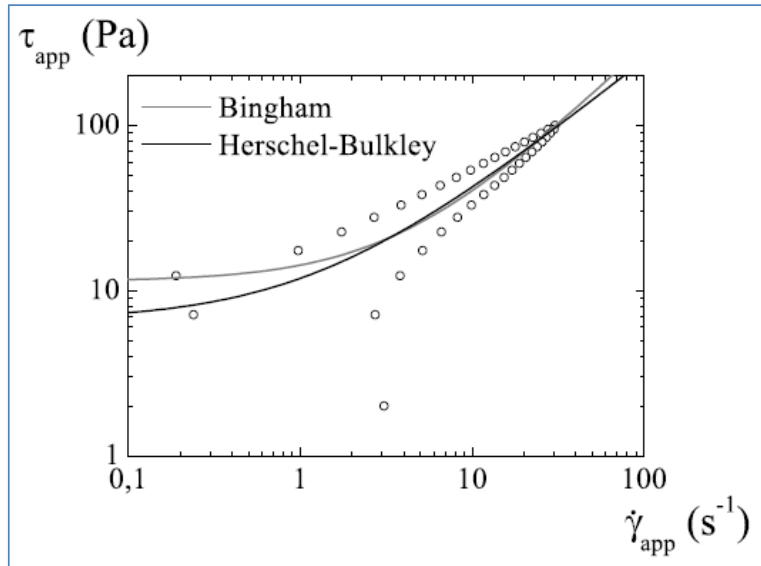


Comportement rhéologique à seuil d'encres d'imprimerie [documentation TA Instruments]



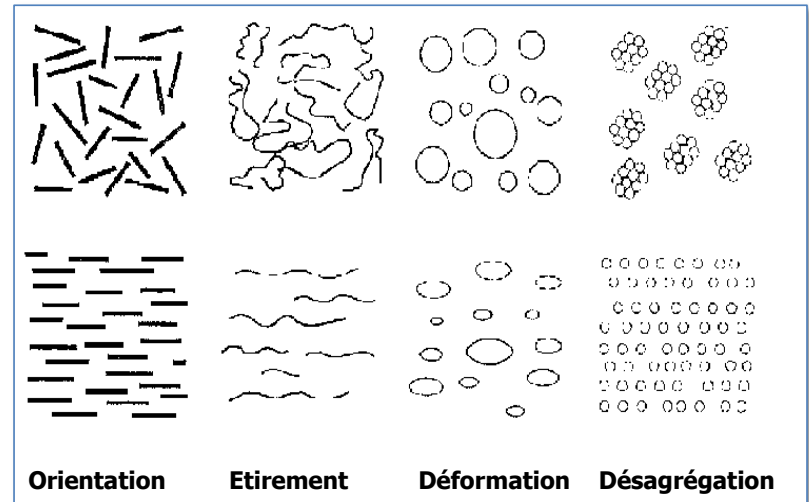
Comportement rhéologique à seuil de 2 sauces ketchup : (A) sauce pour emballage en verre, (B) sauce pour emballage en plastique [documentation TA Instruments]





Application à des pâtes cimentaires des modèles de Bingham ( $\tau_s = 11,4 \text{ Pa}$ ,  $\eta_{pl} = 2,9 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ) et de Herschel-Bulkley ( $\tau_s = 6,6 \text{ Pa}$ ,  $k = 5,3 \text{ SI}$ ,  $n = 0,83$ ) sur les rhéogrammes apparents après correction du glissement obtenus avec un entrefer mince.

[Jamy S., thèse, 2004]

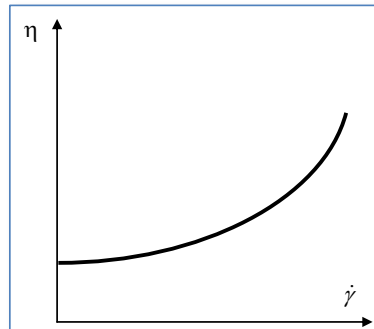
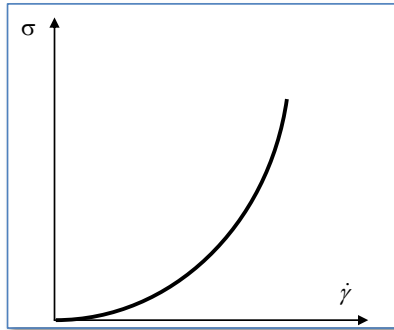


Différents mécanismes susceptibles de produire une rhéofluidification :

- Orientation : de particules, de fibres, de macromolécules,
- Etirement : de macromolécules,
- Déformation : de particules (ex : globules rouges),
- Désagrégation : rupture d'amas

[documentation Thermo Electron Corporation]

Un milieu est dit rhéoépaississant si sa viscosité apparente augmente lorsque le taux de cisaillement augmente.

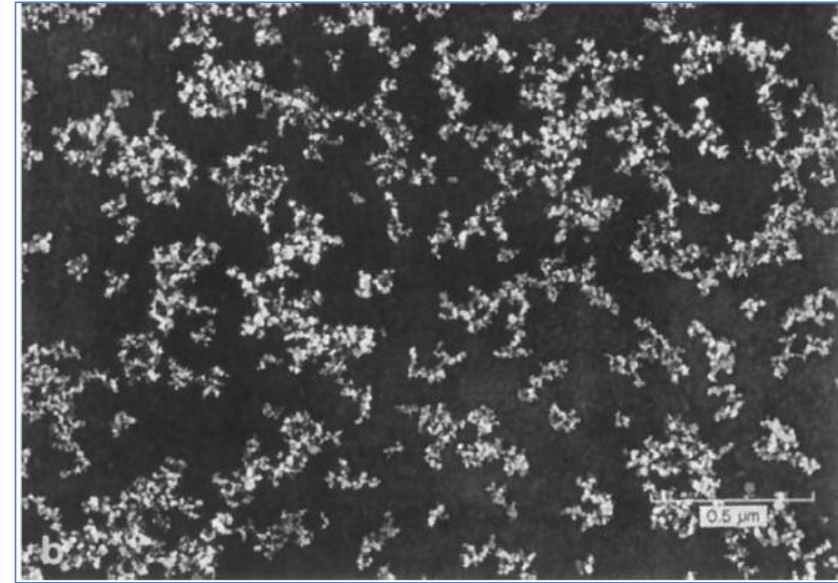
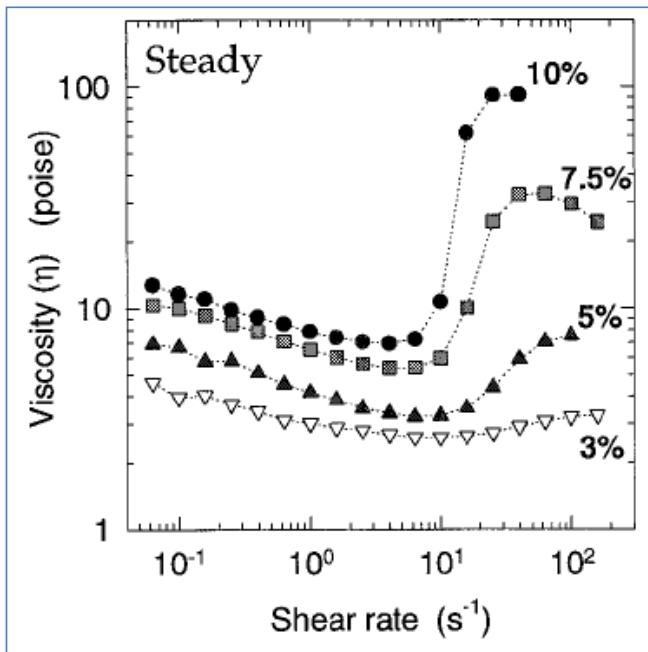


L'équation rhéologique d'un tel milieu peut s'écrire :

$$\sigma = K\dot{\gamma}^n, \text{ avec :}$$

- $K$  : consistance,
- $n$  : indice de rhéoépaississement ;  $n > 1$ .

**Exemples** : dispersions très concentrées, solutions d'amidon, maïzena, sables mouillés et compactés, certains polymères.



Fumées de silice : elles se présentent sous forme d'agrégats impossible à dissocier sous forme de particules élémentaires.

→ Le comportement rhéoépaississant serait du à une transition ordre désordre.

Comportement rhéoépaississant de suspensions de fumées de silice dans du polypropylène glycol – effet de la fraction massique [Raghavan R., 1996]

Pour certains milieux, l'histoire mécanique (cisaillement, élongation, ...) influe sur la nature actuelle de l'écoulement → la viscosité apparente ne dépend plus seulement de la contrainte ou du taux de cisaillement mais également du temps → la viscosité évolue sous cisaillement constant.

Le mode expérimental d'obtention des rhéogrammes revêt alors une importance capitale.

En général on procède de la manière suivante :

- On augmente  $\dot{\gamma}$ ,
- On impose un palier en  $\dot{\gamma}$ ,
- On diminue  $\dot{\gamma}$ .

Les rhéogrammes obtenus ne sont pas univoques → ils dépendent du temps mis à les parcourir.

Parmi les milieux qui présentent cette particularité se trouvent les milieux **thixotropes** ou doués de **thixotropie** ; on peut la définir de la manière suivante :

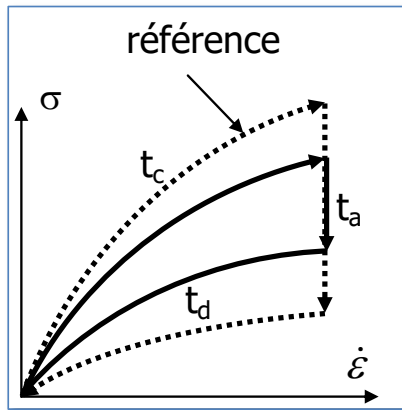
- La viscosité apparente est une fonction décroissante de la durée d'écoulement pour une sollicitation donnée, maintenue constante dans le temps.
- Le matériau retrouve son comportement initial après un temps de repos suffisamment long.

La thixotropie est liée à des modifications sous cisaillement à l'échelle de la microstructure du milieu, ces modifications n'étant pas instantanées mais **réversibles**.

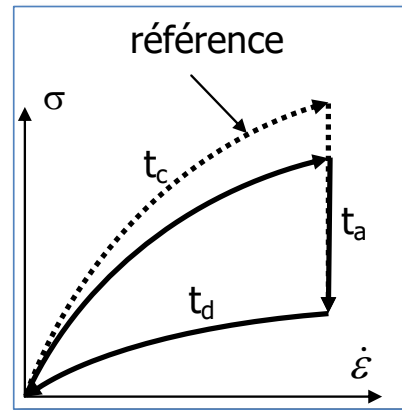
La **rhéopexie** correspond elle à une augmentation de la viscosité sous cisaillement constant.

**Exemples** : ciments, mucus bronchique, yaourt (partiellement thixotrope).

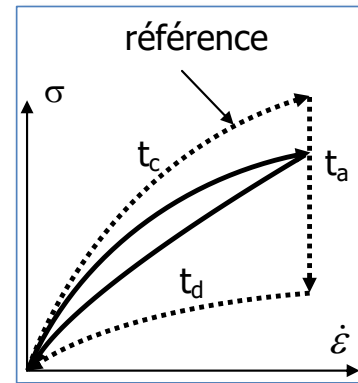
Pour établir le rhéogramme d'un milieu thixotrope il faut un temps  $t_c$  court (le milieu ne doit pas évoluer sous cisaillement), un temps d'attente  $t_a$  jusqu'à stabilisation de la contrainte et un temps  $t_d$  de décharge suffisamment court.



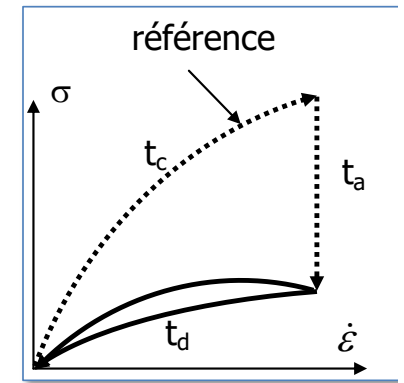
$t_c$  long,  $t_a$  court



$t_c$  long,  $t_a$  long



$t_c$  long,  $t_a=0$



$t_c$  très long,  $t_a$  quelconque

Certains milieux présentent à la fois de l'élasticité (→ capacité à stocker puis à restituer de l'énergie mécanique, comme un solide de Hooke) et de la viscosité (→ capacité à dissiper de façon permanente de l'énergie, comme un fluide newtonien → sensibilité à la vitesse de sollicitation) : ces milieux sont dits viscoélastiques (en l'absence de seuil).

De nombreux milieux présentent ce type de comportement :

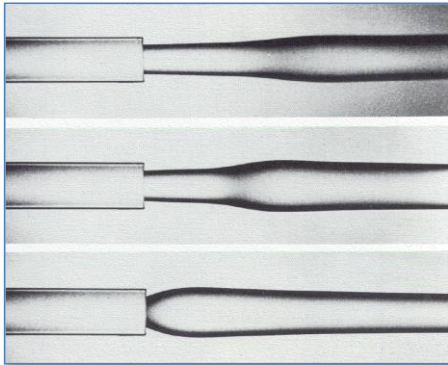
- Gels physiques ou chimiques : yaourt, ...
- Polymères à l'état solide ou à l'état fondu,
- Métaux, au-delà d'une certaine température,
- Béton et béton précontraint,
- Bois,
- Certains tissus biologiques comme les tissus cérébraux,
- ...

Parmi les manifestations du comportement viscoélastique on peut citer les phénomènes de fluage (ou retard) et relaxation qui se traduisent par des réponses différées à des sollicitations constantes (contrainte ou déformation).

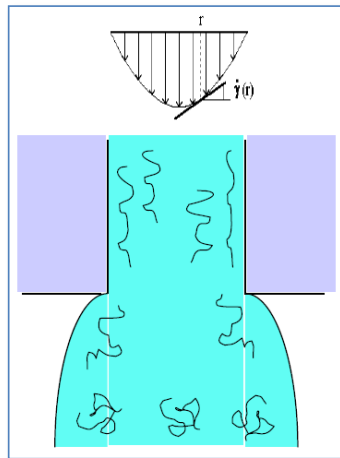
La modélisation de la viscoélasticité est importante, en particulier, pour prévoir ses effets dommageables sur des éléments de structure.

Dans le cas des polymères (fondus ou en solution) on peut répertorier un certain nombre de phénomènes mettant en jeu la viscoélasticité.

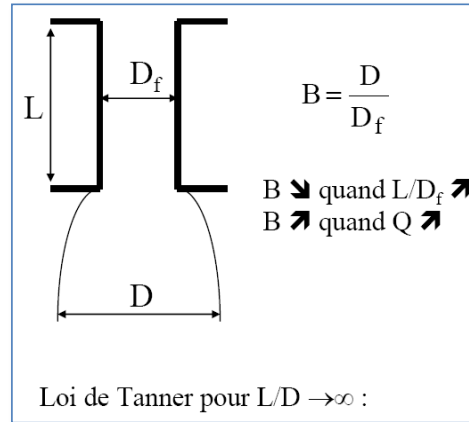
### Gonflement en sortie de filière (extrusion des polymères)



[Giesekus H., 1969]



[Muller R., 2006]



$$B = 0,1 + \left[ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{N_{1,p}}{\tau_p} \right)^2 \right]^{\frac{1}{6}}$$

avec :

- $N_1$  : première différence de contrainte normale ( $\sigma_{zz} - \sigma_{rr} > 0$ )
- $\tau$  : contrainte de cisaillement dans le plan  $\vec{r}\vec{z}$

Ces contraintes sont celles qui existent dans l'écoulement dans le tube.

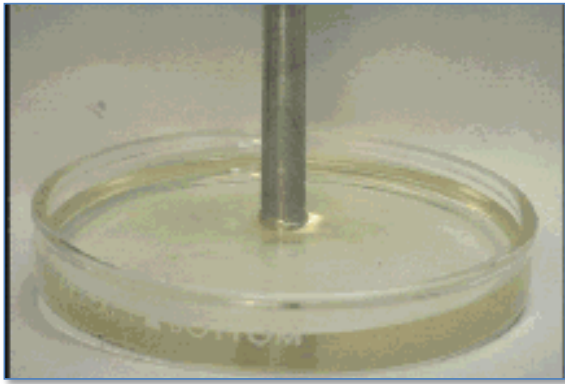
Le terme 0,1 assure la continuité avec le cas newtonien ( $N_1=0$ ).

Le gonflement provient de 2 phénomènes viscoélastiques:

- L'existence de différence de contraintes normales,
- La recouvrance de la déformation (contraction axiale et dilatation radiale).

Le gonflement peut atteindre, dans certains cas, 300 %.

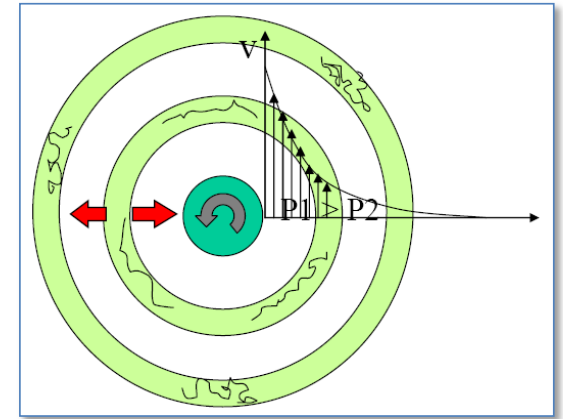
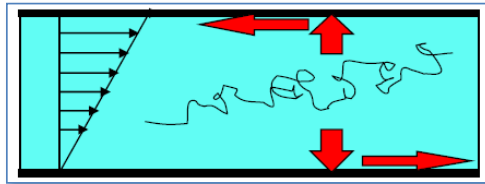
## Effet Weissenberg



Remontée de fluide au centre

[[http://web.mit.edu/nnf/research/phenomena/rod\\_climbing.avi](http://web.mit.edu/nnf/research/phenomena/rod_climbing.avi)]

Dans le cas d'un fluide newtonien la surface libre remonterait en périphérie (effets inertiels de centrifugation).

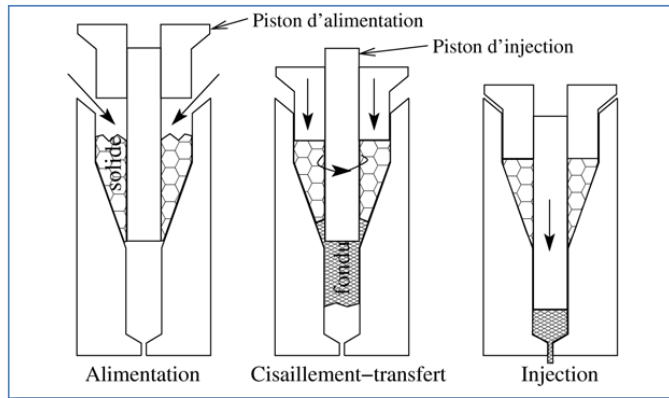


Cisaillement d'un fluide polymère viscoélastique entre deux disques coaxiaux et parallèles – génération d'un profil de pression en cloche du à l'étirement des chaînes (étirement du au cisaillement d'intensité variable selon la distance à l'axe).

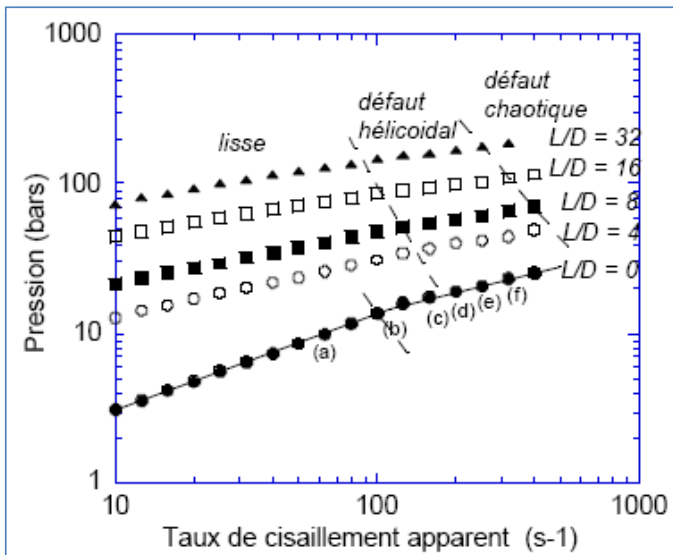
[Muller R., 2006]



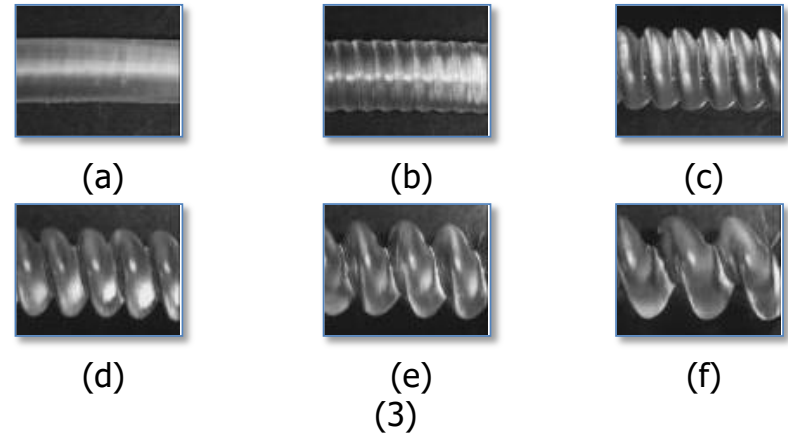
## Instabilités d'écoulement



(1)



(2)



Instabilités d'extrusion d'un polystyrène.

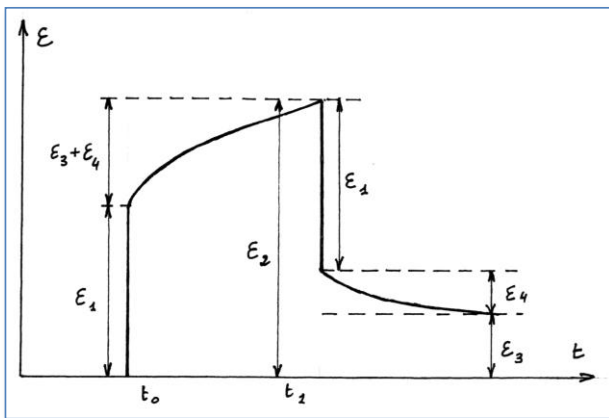
- (1) Schéma du rhéomètre Rhéoplax (cisaillement et injection combinés),
- (2) Courbe d'écoulement apparente à 200 °C pour le diamètre 1,39 mm
- (3) Aspects des extrudats associés ( $L/D=0$ )

[Combeaud C., 2003]

Si on effectue, sur un polymère, une expérience de cisaillement simple on constate qu'à sollicitation constante il y a évolution de la déformation du matériau au cours du temps et ceci quel que soit le niveau et l'histoire de sollicitation.

Pour identifier le comportement rhéologique de tels milieux on pratique des essais : les plus courants sont les essais de retard et de relaxation.

### Essai de retard – fonction de retard



*Essai de retard suivi d'un essai de recouvrance*

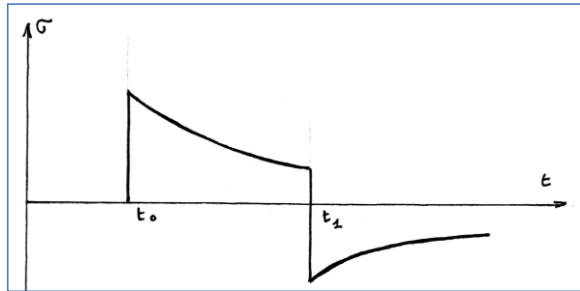
Essai uniaxial (traction, compression ou cisaillement).

La sollicitation est un **échelon de contrainte** appliqué à l'instant  $t_0$  et on observe la réponse en déformation du milieu à l'instant  $t$ .

Généralement on observe une réponse instantanée (élasticité du milieu) suivie d'une réponse différée (viscosité).

On écrit alors :  $\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t_0, t, \sigma_0)$ , où  $J$  est la **fonction de retard**.

## Essai de relaxation – fonction de relaxation



*Essai de relaxation suivi d'un essai d'effacement*

Essai uniaxial (traction, compression ou cisaillement).

La sollicitation est un **échelon de déformation** appliqué à l'instant  $t_0$  et on observe la réponse en contrainte du milieu à l'instant  $t$ .

Généralement on observe une réponse instantanée (élasticité du milieu) suivie d'une réponse différée (viscosité).

On écrit alors :  $\sigma(t) = \varepsilon_0 R(t_0, t, \varepsilon_0)$ , où R est la **fonction de relaxation**.

**Remarque** : ces essais donnent des informations sur le comportement du milieu viscoélastique mais ne permettent pas de le décrire complètement.

Un milieu est linéaire si la correspondance fonctionnelle entre les histoires de contrainte et de déformation est linéaire (voir chapitre 2).

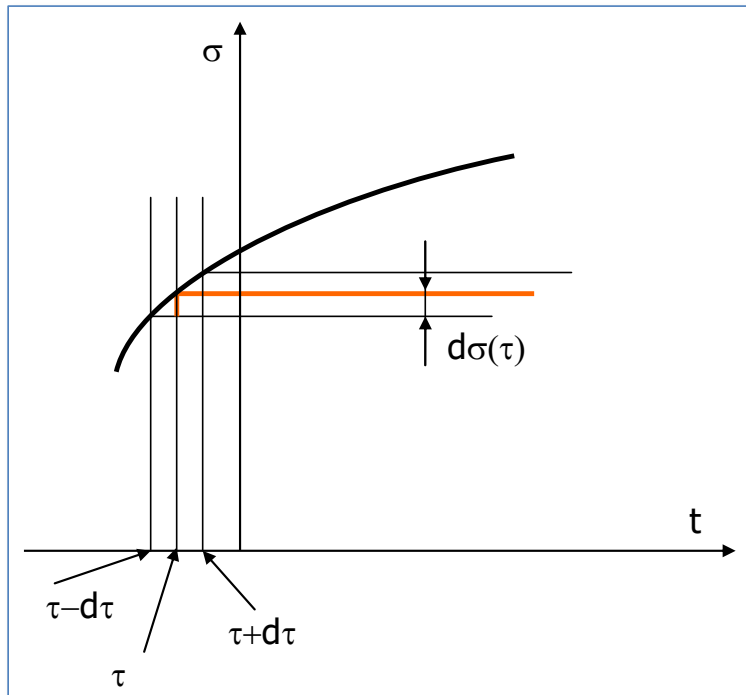
**Conséquence** : pour un milieu viscoélastique linéaire (VEL) on montre aisément que les fonctions de retard et de relaxation ne peuvent dépendre de l'amplitude de l'échelon de sollicitation.

- $\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t_0, t)$
- $\sigma(t) = \varepsilon_0 R(t_0, t)$

Ces propriétés constituent un premier test de linéarité du milieu.

## Principe de superposition de Boltzmann

En utilisant la propriété de linéarité et en connaissant la fonction de retard du milieu il est possible de déterminer la réponse en déformation à une histoire de contrainte (uniaxiale) quelconque.



L'histoire de contrainte peut être discrétisée comme une succession d'échelons d'amplitude  $d\sigma(\tau)$  appliqués à l'instant  $\tau$ .

La réponse à un tel échelon vaut :  $d\varepsilon(\tau, t) = d\sigma(\tau)J(\tau, t)$ ,

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \varepsilon(t) &= \int_{t_0}^t J(\tau, t) d\sigma(\tau) = \int_{t_0}^t J(\tau, t) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \sigma(t_0)J(t_0, t) + \int_{t_0}^t J(\tau, t) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \end{aligned}$$

En intégrant par parties on obtient :  $\varepsilon(t) = \sigma(t)J(t, t) - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{dJ(\tau, t)}{d\tau} d\tau$

Ceci constitue la formule de Boltzmann.

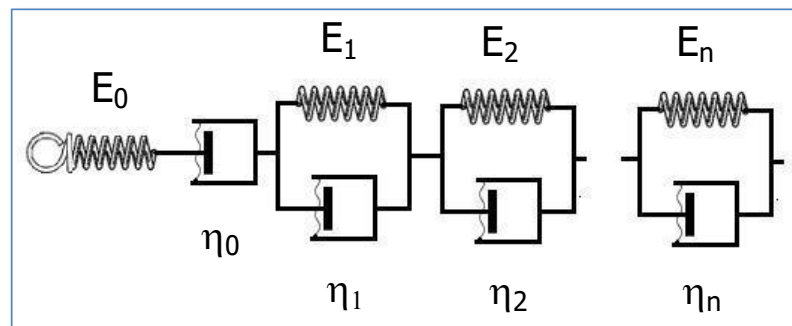
Si on permute  $\sigma$  et  $\varepsilon$  on obtient la réponse en contrainte à une histoire quelconque de déformation :  $\sigma(t) = \varepsilon(t)R(t, t) - \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) \frac{dR(\tau, t)}{d\tau} d\tau$ .

**Conséquence** → la solution de tout problème viscoélastique linéaire unidimensionnel s'obtient à partir de la seule connaissance de la fonction de retard ou de la fonction de relaxation du milieu.

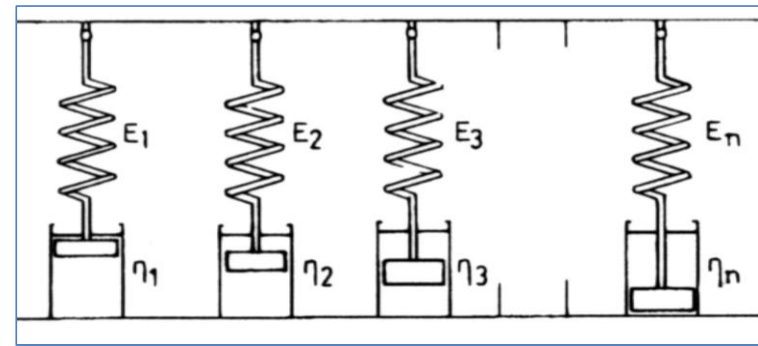
Dans le cas 1D le comportement de tout milieu VEL peut être représenté complètement et d'aussi près qu'on veut par un modèle rhéologique constitué exclusivement de ressorts et d'amortisseurs.

De plus ce modèle peut toujours se ramener à l'un des deux cas suivants :

- **Modèle de Kelvin Voigt généralisé,**
- **Modèle de Maxwell généralisé.**



*Modèle de Kelvin-Voigt généralisé*



*Modèle de Maxwell généralisé*

On choisit le type de modèle en fonction de la sollicitation.

La fonction de retard d'un modèle de KV généralisé s'écrit :

$J(t_0 = 0, t) = \frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} (1 - e^{-t/\theta_i})$  où  $\theta_i = \frac{\eta_i}{E_i}$  est le temps de retard de la  $i^{\text{ème}}$  branche.

- $\frac{1}{E_0}$  est la réponse instantanée du ressort 0,
- $\frac{t}{\eta_0}$  est la réponse de l'amortisseur 0 (proportionnelle au temps),
- $\frac{1}{E_i} (1 - e^{-t/\theta_i})$  est la réponse de la  $i^{\text{ème}}$  branche de KV (réponse exponentielle du solide viscoélastique).

Ce type de modèle donne lieu à une distribution discrète de temps de relaxation.

D'un point de vue expérimental on peut utiliser des méthodes d'ajustement (moindres carrés, ...) afin de déterminer l'ensemble des coefficients du modèle.



Outre les essais de retard et de relaxation il existe un autre type d'expérience qui présente un intérêt fondamental, notamment dans le cas des polymères, qui consiste en une sollicitation dynamique périodique (le plus souvent harmonique).

Supposons, par exemple, qu'on impose une déformation de cisaillement harmonique ; le milieu étant linéaire, sa réponse en contrainte au-delà d'un délai transitoire très court sera également harmonique et de même fréquence.

On peut donc écrire :

Avec :

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t) \\ \tau(t) = \tau_0 \cos(\omega t + \delta) \end{cases} \begin{array}{l} \bullet \tau_0, \varepsilon_0 : \text{amplitudes de contrainte et déformation} \\ \bullet \omega : \text{pulsation} \\ \bullet \delta : \text{déphasage} \end{array}$$

La réponse est de même fréquence que la sollicitation mais déphasée.

Pour la commodité des calculs on a recours aux nombres complexes  $\rightarrow$  on associe aux grandeurs réelles des grandeurs complexes :

$$\begin{cases} \varepsilon^*(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \\ \tau^*(t) = \tau_0 e^{i(\omega t + \delta)} \end{cases}$$

Par analogie avec un comportement élastique on introduit alors le module de cisaillement complexe :  $G^*(\omega) = \frac{\tau^*(t)}{\varepsilon^*(t)}$  et la complaisance complexe :  $\frac{1}{G^*(\omega)}$ .

L'expression de  $G^*$  dépend des propriétés du milieu, c'est-à-dire des paramètres du modèle rhéologique choisi (dans le cas 1D). Par ailleurs,  $G^*$  dépend généralement de la fréquence de sollicitation car l'amplitude de la réponse en dépend ainsi que le déphasage.

$$G^*(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega), \text{ avec :}$$

- $G'(\omega)$  : module de conservation,
- $G''(\omega)$  : module de perte.

On a, par ailleurs :  $\tan(\delta) = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)}$  qu'on nomme parfois tangente de perte.

## Cas particuliers

### ❖ Solide de Hooke

$G^*(\omega) = G$  : module de Coulomb  $\rightarrow$

$$\begin{cases} G' = G \\ G'' = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

### ❖ Fluide newtonien

$$G^*(\omega) = \frac{\tau^*(t)}{\varepsilon^*(t)} = \eta \frac{\dot{\varepsilon}^*(t)}{\varepsilon^*(t)} = i\omega\eta \rightarrow$$

$$\begin{cases} G' = 0 \\ G'' = \omega\eta \\ \delta = \pi/2 \end{cases}$$

## ❖ Fluide de Maxwell

$$G^*(\omega) = \frac{i\omega\eta}{1+i\omega\frac{\eta}{G}} \rightarrow \begin{cases} G'(\omega) = G \frac{\omega^2\theta^2}{1+\omega^2\theta^2} \\ G''(\omega) = G \frac{\omega\theta}{1+\omega^2\theta^2} \text{ avec } \theta = \frac{\eta}{G} : \text{ temps de relaxation} \\ \delta \in [0; \pi/2] \end{cases}$$

On définit également la viscosité complexe par analogie avec un fluide newtonien :

$$\eta^*(\omega) = \frac{\tau^*(t)}{\dot{\epsilon}^*(t)} = \eta' - i\eta''.$$

## Calcul énergétique dans un essai harmonique

La puissance des efforts intérieurs par unité de volume (*voir cours de MMC 1A*) vaut :

$$P = \tau \cdot \dot{\varepsilon} = -\tau_0 \varepsilon_0 \omega \cos(\omega t + \delta) \sin(\omega t),$$

$$\text{D'où : } P = -\tau_0 \varepsilon_0 \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) \cos(\delta) + \tau_0 \varepsilon_0 \omega \sin^2(\omega t) \sin(\delta)$$

$$\text{Finalement : } P = -\frac{\omega \varepsilon_0^2}{2} G'(\omega) \sin(2\omega t) + \omega \varepsilon_0^2 G''(\omega) \sin^2(\omega t)$$

Si on calcule la puissance moyenne dissipée sur le quart de période [t=0 ; t=T/4], on

obtient :  $\overline{P} = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} P(t) dt = \overline{P}_e + \overline{P}_d$ , avec 
$$\begin{cases} \overline{P}_e = -\frac{\omega \varepsilon_0^2}{\pi} G'(\omega) \\ \overline{P}_d = \frac{\omega \varepsilon_0^2}{2} G''(\omega) \end{cases} ;$$

Si on effectue le même calcul sur les 4 premiers quarts de période on obtient :

	1 <sup>er</sup> quart	2 <sup>ème</sup> quart	3 <sup>ème</sup> quart	4 <sup>ème</sup> quart
$\overline{P_e}$	-	+	-	+
$\overline{P_d}$	+	+	+	+

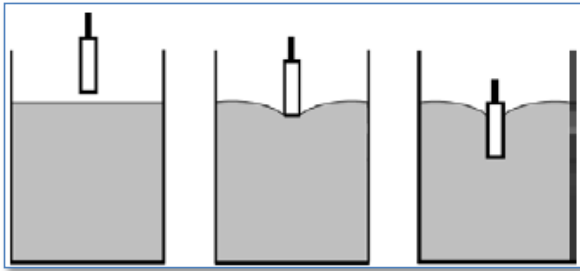
On voit que :

- Le terme  $\overline{P_e}$ , proportionnel à  $G'$ , change de signe à chaque de période : cela correspond à de l'énergie alternativement stockée puis restituée dans la part élastique du milieu → d'où la dénomination **module de conservation** pour  $G'$ ,
- Le terme  $\overline{P_d}$ , proportionnel à  $G''$ , est toujours positif : cela correspond à de l'énergie continuellement dissipée dans la part visqueuse du milieu → D'où la dénomination **module de perte** pour  $G''$ .

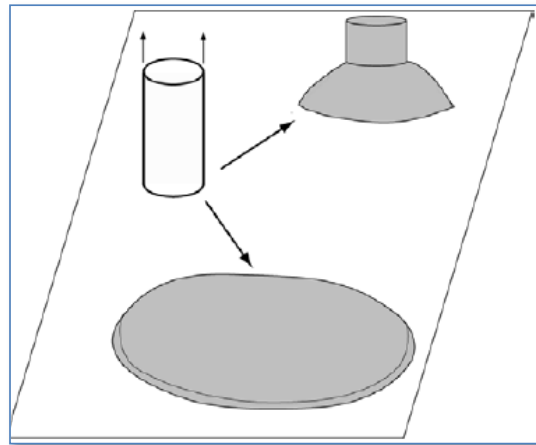
Les dispositifs permettant d'évaluer le comportement rhéologique des milieux présentant de la viscosité sont extrêmement nombreux et il est impossible de tous les citer ; certains sont destinés à des caractérisations plutôt empiriques (cône d'Abrams, viscosimètre Brookfield, ...) alors que d'autres sont plus sophistiqués et permettent de quantifier des grandeurs rhéologiques intrinsèques du milieu ( $\eta$ ,  $G'$ ,  $G''$ , seuil d'écoulement, ...).

Pour caractériser certains milieux tels qu'un béton frais on utilise souvent des systèmes relativement simples servant à effectuer des contrôles plutôt qualitatifs que quantitatifs.

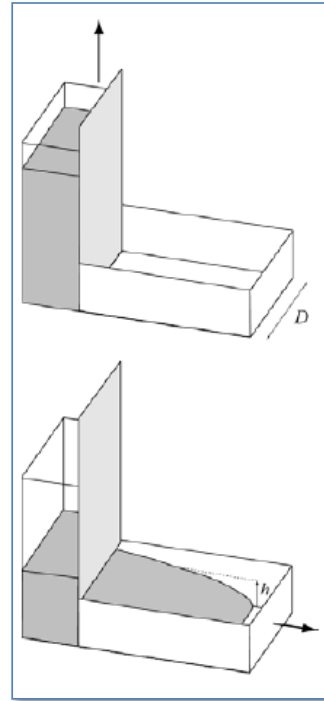
Les géométries d'écoulement sont souvent trop complexes pour donner lieu à une modélisation qui permettrait d'accéder à des caractéristiques intrinsèques.



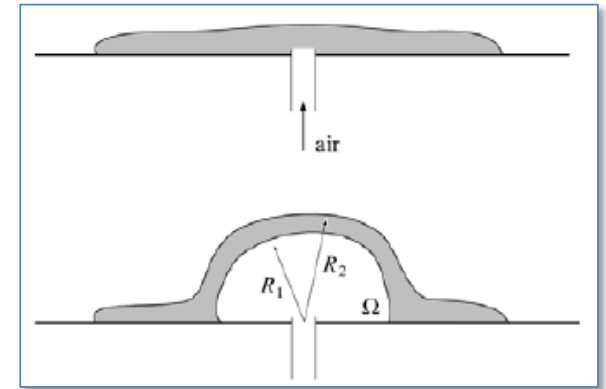
*Pénétration*



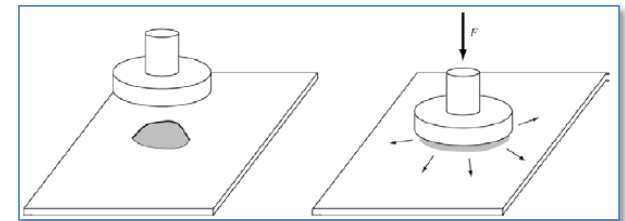
*Cône d'Abrams*



*Boîte en L (pour bétons autoplaçants)*



*Gonflage de bulle*



*Écrasement*

Divers essais (écoulements non viscosimétriques) pouvant être pratiqués sur des pâtes (béton frais, boues, ...)

[Château X., 2007]



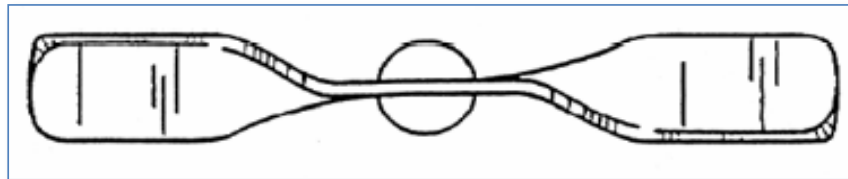
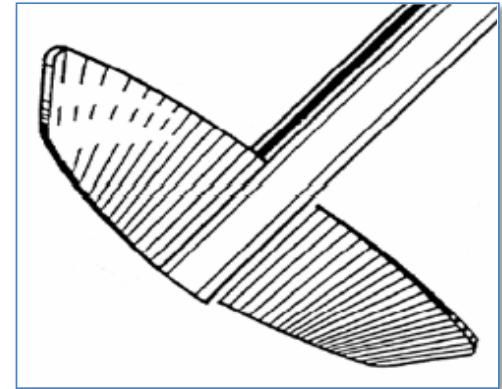
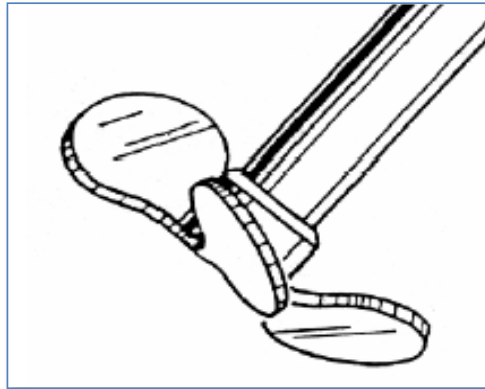
## Viscosimètre Brookfield

**Principe :** une géométrie normalisée tourne à l'intérieur d'un récipient cylindrique contenant le fluide à tester → gels médicaux, caoutchoucs, ...

→ Donne accès à une viscosité Brookfield (par calibration) : cet appareillage est réservé aux fluides newtoniens (l'écoulement est non viscosimétrique).



*[documentation Brookfield]*



## Viscosimètre à chute de bille (ou viscosimètre d'Höppler)

Convient exclusivement aux fluides newtoniens



[documentation Thermo Scientific]

### Principe

Une bille sphérique chutant dans un fluide newtonien est soumise aux 3 forces suivantes :

- Gravité :  $F_g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g$ ,
- Poussée d'Archimède :  $F_a = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$ ,
- Force hydrodynamique :  $F_h = -6\pi R \eta V$

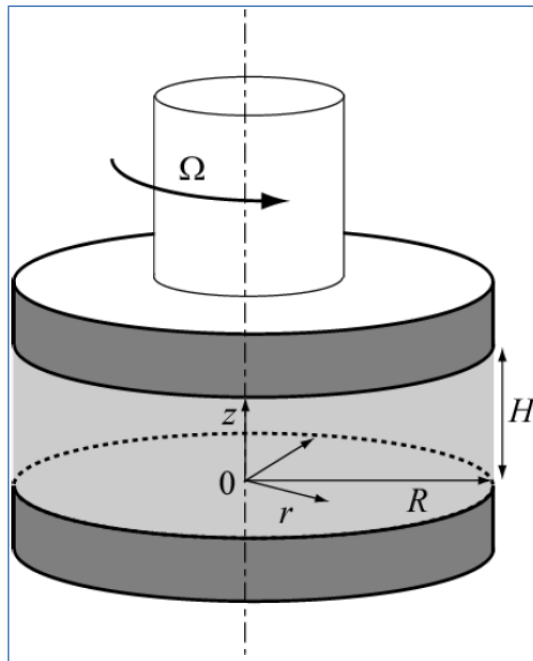
D'où :  $\eta = \frac{2}{9V} g R^2 (\rho_s - \rho)$ , avec  $V$  vitesse limite atteinte lors de la chute.

Avec un dispositif de suivi par camera on atteint des précisions de l'ordre de  $10^{-3}$ .

Ces viscosimètres mettent en jeu des écoulements viscosimétriques à paroi mobile, le plus souvent en rotation : on trouve des géométries de type plans parallèles, cône-plan, cylindres coaxiaux, ...

La dimension de la géométrie doit être adaptée au milieu étudié, en particulier dans le cas de milieux hétérogènes.

### Plateaux parallèles



[Château X., 2007]

- Concerne tous types de fluides,
- Entrefer constant et ajustable,
- Cisaillement non constant,
- Faible volume.

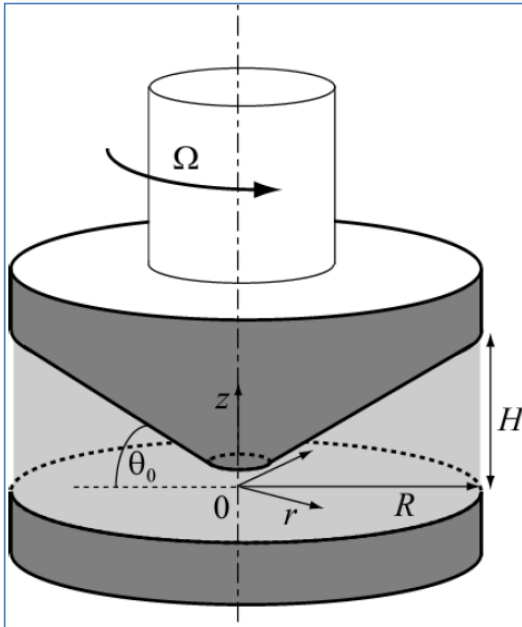
Pour un fluide newtonien :

$$\rightarrow C = \frac{\pi}{2} \eta \frac{\Omega}{H} R^4 \text{ et } \dot{\gamma} = r \frac{\Omega}{H}$$

Pour un fluide non newtonien :

$$\rightarrow \eta = \frac{3CH}{2\pi R^4 \Omega} \left( 1 + \frac{\Omega}{3C} \frac{dC}{d\Omega} \right)$$

## Cône plan



[Château X., 2007]

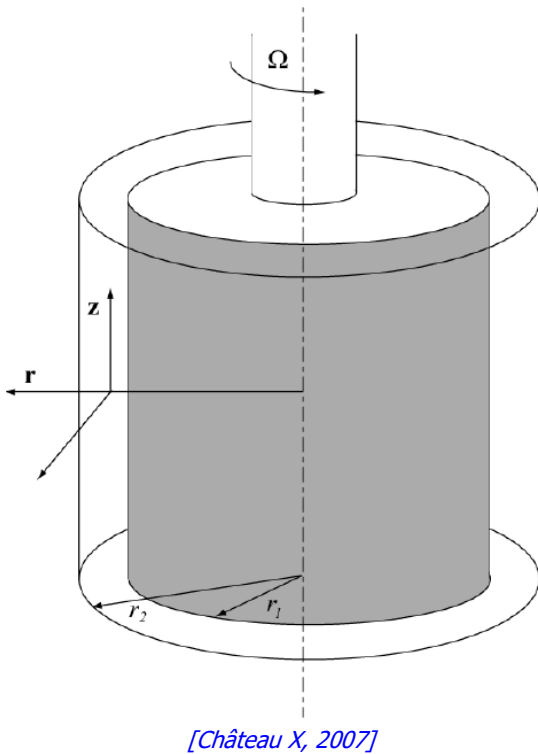
- Concerne tous types de fluides,
- Entrefer non constant,
- Cisaillement constant ( $\theta < 5^\circ$ ),
- Faible volume.

Pour un fluide newtonien :

$$\rightarrow C = \frac{2\pi}{3} \eta \frac{\Omega}{\theta_0} R^3 \text{ et } \dot{\gamma} = \frac{\Omega}{\theta_0}$$

La contribution en R du couple est importante ( $R^3$ )  $\rightarrow$  éviter les sur ou sous remplissages de la géométrie. Faire attention également aux phénomènes d'évaporation qui peuvent générer la formation d'une croûte en périphérie et fausser les mesures.

## Cylindres coaxiaux



- Concerne tous types de fluides,
- Entrefer constant,
- Cisaillement quasi constant (si entrefer étroit).

Pour un fluide newtonien :

$$\rightarrow \eta = \frac{C}{4\pi L \Omega} \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \text{ et } \tau(r) = \frac{C}{2\pi L r^2} \text{ et } \dot{\gamma} = \frac{R_1 \Omega}{R_2 - R_1}$$

## Critères de choix d'une géométrie

Définir qualitativement dans un premier temps la viscosité au repos comme basse, moyenne ou élevée :

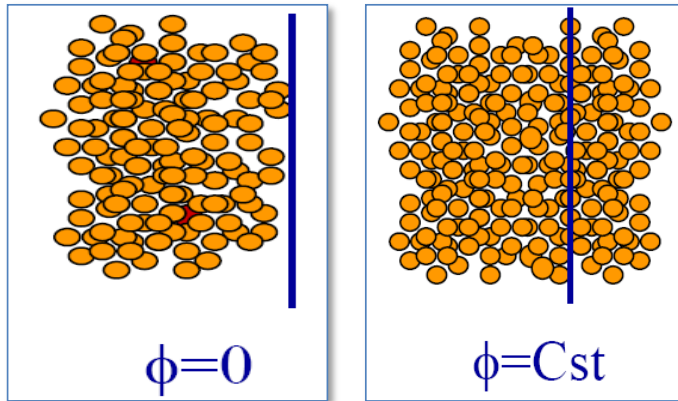
- Basse viscosité : l'échantillon est mobile dans son contenant (exemples : huile, peinture, sauce vinaigrette, ...),
- Viscosité moyenne : l'échantillon bouge peu lorsqu'on remue le contenant (exemples : ketchup, encre d'impression, ...),
- Viscosité élevée : échantillon quasiment immobile dans son contenant (exemples : graisses, adhésifs, mayonnaise, ...).

Basse viscosité →	Géométrie cône plan 6 cm ou cylindres coaxiaux à double entrefer
Viscosité moyenne →	Géométrie cône plan 4 cm ou cylindres coaxiaux de diamètres moyens
Viscosité élevée →	Géométrie cône plan 2 cm ou cylindres coaxiaux de petit diamètre

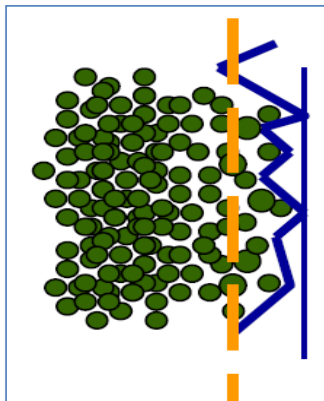
**Remarque :** l'entrefer doit toujours être au moins 10 fois supérieur à la taille des structures du milieu (par exemple pour une suspension on prend comme référence les plus grosses particules).

## Artefacts de mesure

### ❖ Effets de paroi



Effet de paroi [Flaud P., 2007]



Paroi rugueuse  
[Flaud P., 2007]



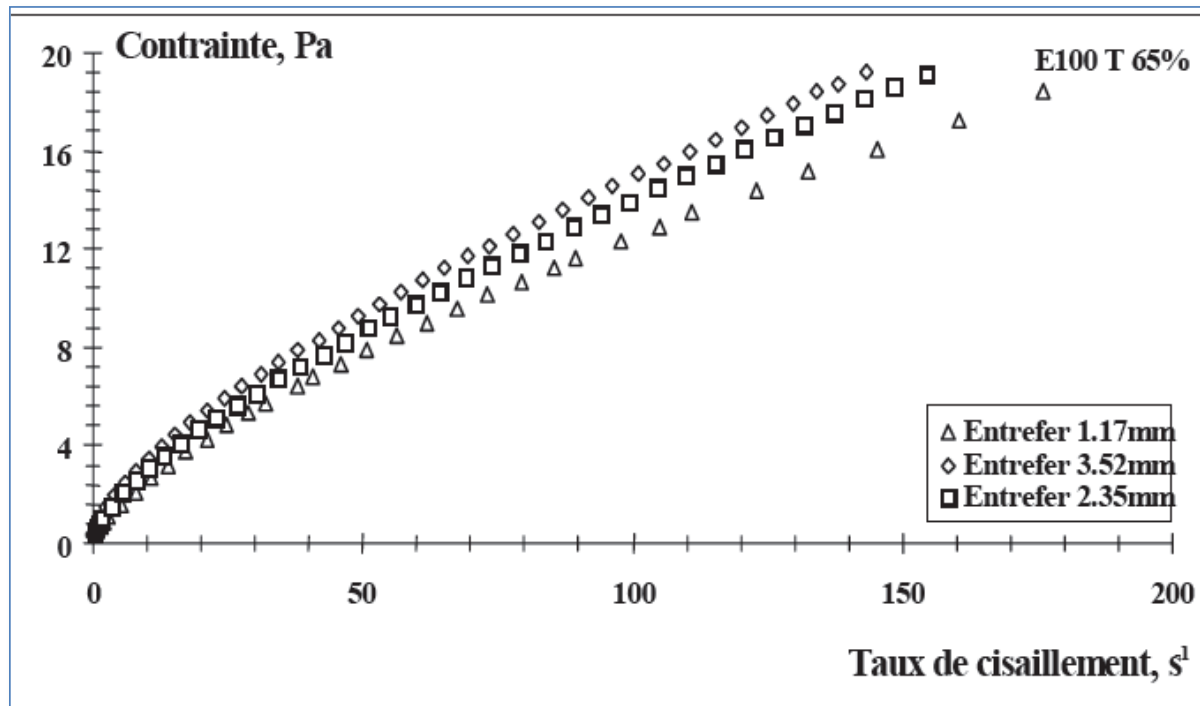
Géométrie vane  
[Jamy S., 2004]

A proximité des parois on peut avoir des phénomènes de glissement (pâtes cimentaires, suspensions, ...) ou des phénomènes de sous concentration : dans les 2 cas les interactions fluide-parois diminuent et la viscosité est perçue plus faible qu'elle n'est en réalité.

Le glissement peut expliquer des résultats dépendants de la géométrie utilisée.

Une solution est de rendre la paroi rugueuse (stries, papier de verre, ...).

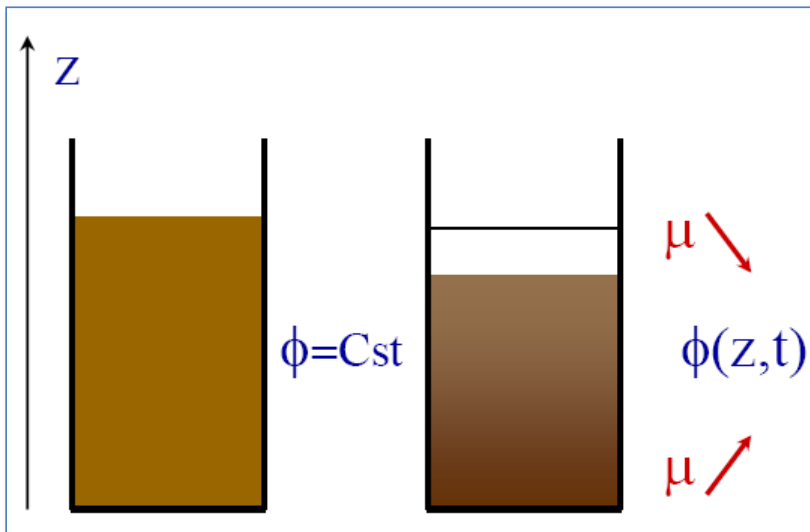
Une autre est d'utiliser une géométrie de type « vane ».



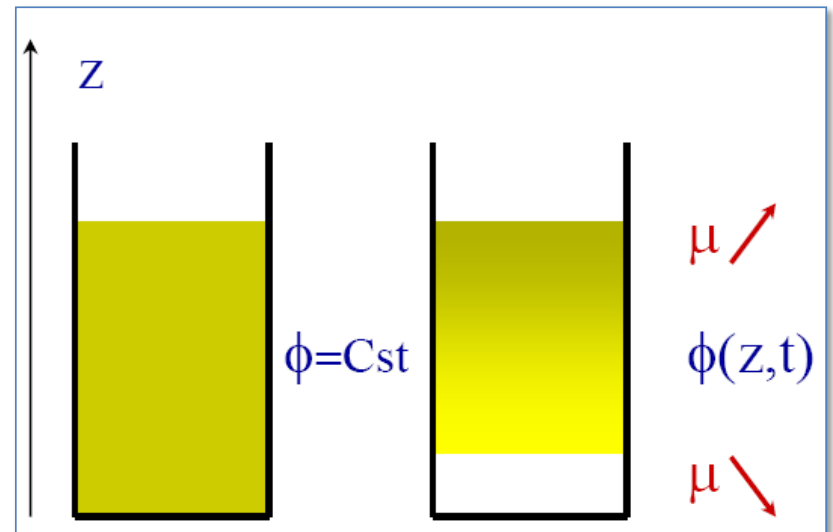
*Effet du glissement en cylindres coaxiaux*  
*[Flaud P., 2007]*



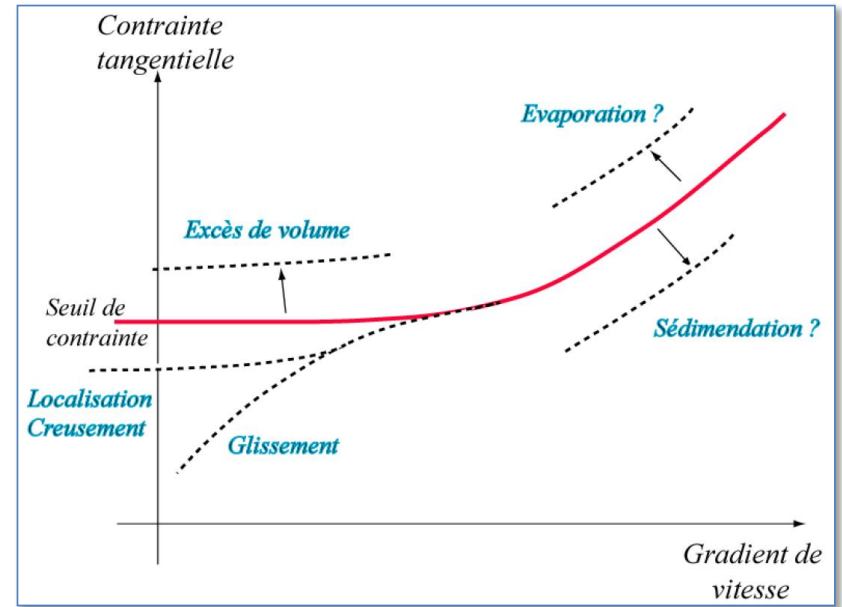
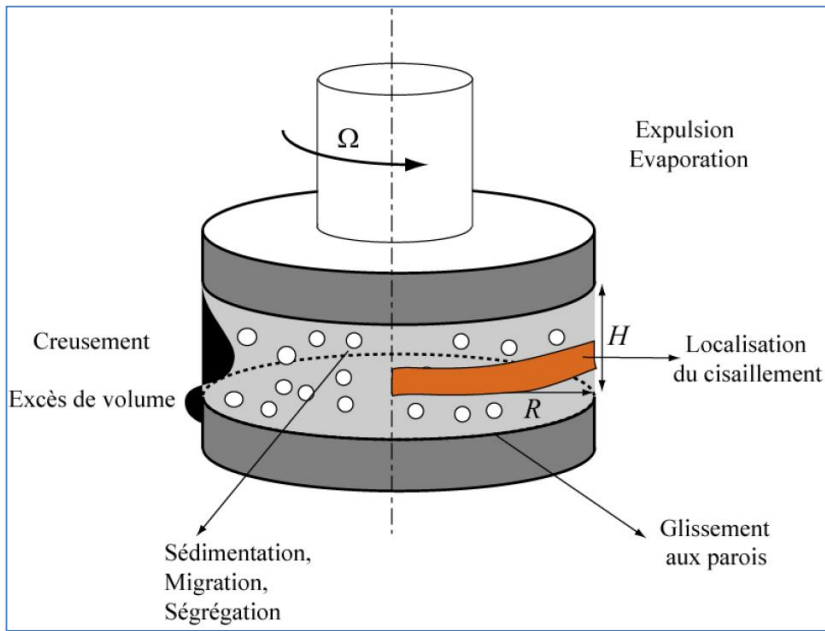
## ❖ Sédimentation, crémage



*Sédimentation*  
[Flaud P., 2007]



*Crémage*  
[Flaud P., 2007]



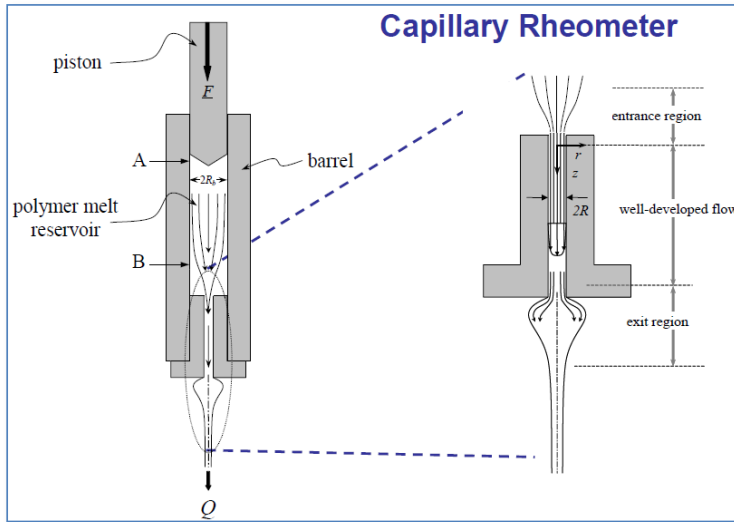
*Différents artefacts possibles en géométrie plan-plan et effets sur la courbe d'écoulement  
[Château X., 2007]*

Les viscosimètres de type Poiseuille mettent en jeu des écoulements viscosimétriques sous l'effet de différences de pression (pertes de charges).

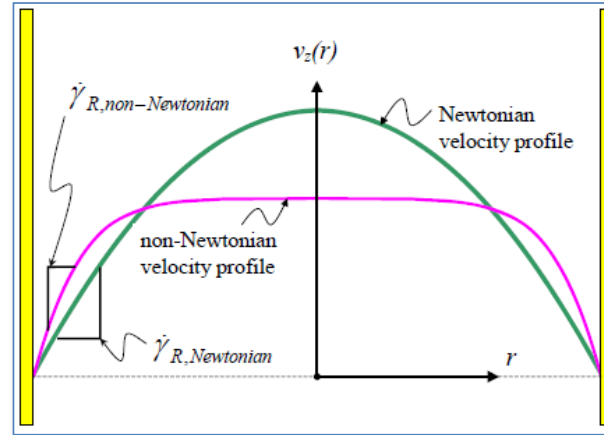
On trouve dans cette catégorie la rhéométrie capillaire et la viscosimétrie de type Ostwald, Ubbelohde ou Cannon

→ Dans le cas des polymères la première convient pour les polymères vierges ou chargés et la seconde pour les polymères en solution très diluée.

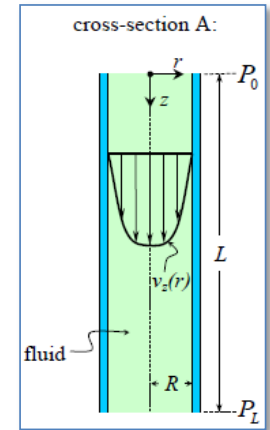
❖ Viscosimètre capillaire (voir également 4.1.6) - Sollicitation en cisaillement simple ( $\dot{\gamma} \rightarrow 10^6 \text{ s}^{-1}$ )



[Morrison F.A., 2007]



Comparaison newtonien/non-newtonien

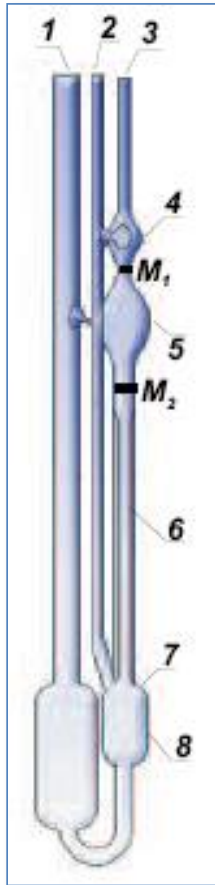


Cisaillement hétérogène

- Les grandeurs brutes sont calculées à la paroi du capillaire
- $\tau(r = R) = \frac{R\Delta P}{2L}$
- $\dot{\gamma}_a(r = R) = \frac{4Q}{\pi R^3}$  : cisaillement apparent (cas newtonien)

- Ces grandeurs font l'objet de corrections :
  - ❖ Weissenberg-Rabinowitsch (fluide non-newtonien)
 
$$\dot{\gamma}_{corrigé}(r = R) = \frac{4Q}{\pi R^3} \left[ \frac{1}{4} \left( 3 + \frac{d \ln(\dot{\gamma}_a)}{d \ln(\tau_R)} \right) \right]$$
  - ❖ Bagley (effet d'extrémités)
  - ❖ Glissement à la paroi (Mooney)
- Cisaillement hétérogène → déconseillé pour des fluides dépendants du temps (thixotropes, mélanges, ...)

## ❖ Viscosimètres type Ubbelohde



1. Tube de remplissage,
2. Tube de ventilation,
3. Tube avec capillaire,
4. Sphère des avants coulants,

5. Sphère de mesure,
6. Tube capillaire
7. Calotte sphérique,
8. Vase à niveau.

Différents dispositifs à capillaire (tubes de Ubbelohde, d'Ostwald, de Cannon) permettent de déterminer, pour des solutions, l'indice de viscosité à différentes concentrations ainsi que l'indice limite de viscosité par extrapolation à concentration nulle (voir norme ISO 3105:1994 et ISO 1628-1:2009).

**Principe :** on mesure la durée  $\Delta t$  d'écoulement d'un volume  $V$  de liquide à travers un capillaire ; la viscosité cinématique est alors proportionnelle à la durée  $\Delta t$  :  $\nu = K \cdot \Delta t$ ,  $K$  étant la constante du viscosimètre.

$$\text{Indice de viscosité : } I.V. = \frac{\eta - \eta_0}{\eta_0 c},$$

$$\text{Indice limite de viscosité : } [\eta] = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\eta - \eta_0}{\eta_0 c}$$

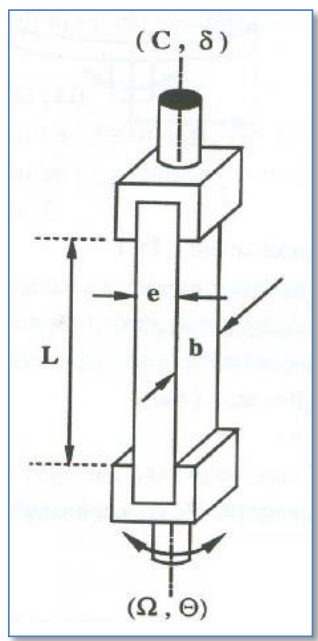
Dans le cas de solutions diluées de polymères on obtient la masse moléculaire moyenne viscosimétrique par la relation de Mark-Houwink :

$[\eta] = K \cdot M^a$ , avec  $K$  et  $a$  constantes de Mark-Houwink (dépendent du couple solvant-polymère).

[[www.ensem.inpl-nancy.fr/Anthony.Collin/MecaniqueDesFluides/tp4.pdf](http://www.ensem.inpl-nancy.fr/Anthony.Collin/MecaniqueDesFluides/tp4.pdf)]

Les géométries exposées précédemment sont destinées aux fluides ; il existe également des géométries destinées aux solides, principalement viscoélastiques.

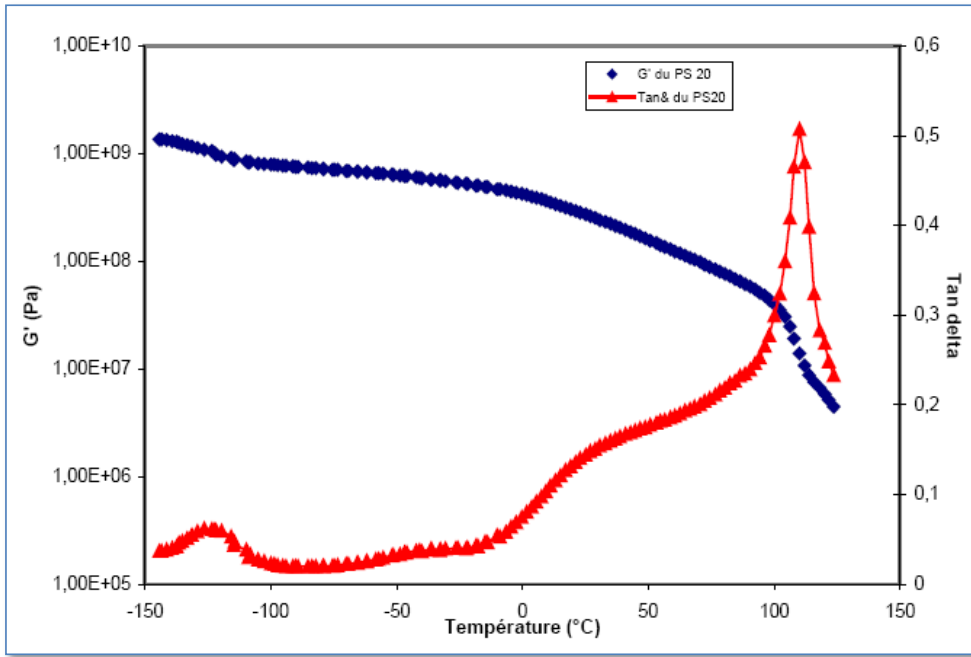
❖ Torsion rectangulaire



$\gamma$  : déformation,  
 e : épaisseur échantillon,  
 L : longueur échantillon,  
 b : largeur échantillon,  
 $\Theta$  : angle de rotation,  
 $\delta$  : déphasage entre C et  $\Omega$ .

[Kossentini K., thèse, 2003]

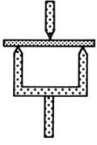
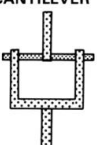


→ Caractérisation viscoélastiques de solides :  $G'$ ,  $G''$  en essais oscillatoires (fonction de la fréquence, de la déformation et de la température) ; essais de retard ou relaxation.



Évolution de  $G'$  et de  $tg(\delta)$  en fonction de la température pour un mélange PE/PS 80/20 % (essai oscillatoire à  $1 \text{ rad.s}^{-1}$ )

[Kossentini K., thèse, 2003]

## Flexion 3 points – traction - compression

LINEAR TEST GEOMETRIES		
GEOMETRY	ADVANTAGES	COMMENTS
<b>THREE-POINT BENDING</b> 	Ideal for composite coatings on substrates, high modulus materials	Some loss due to slippage at knife edges
<b>DUAL CANTILEVER</b> 	Extends temperature range for elastomers	
<b>TENSION</b> 	Ideal for film and fibers	
<b>COMPRESSION</b> 	Ideal for foams, elastomers	Limited to soft samples, otherwise overloads

[Rheometrics Scientific]

→ Caractérisation viscoélastiques de solides :  $G'$ ,  $G''$  en essais oscillatoires (fonction de la fréquence, de la déformation et de la température) ou essais de retard ou relaxation.

→ Montages sur rhéomètres en translation.

1. Flexion 3 points libre : inconvénient dû à la présence de frottements aux appuis
2. Flexion 3 points encastree : élimine l'artefact précédent
3. Traction alternée : échantillon pré-tendu et sollicité en traction
4. Compression : échantillon pré-comprimé et sollicité en compression

## ❖ Cisaillement stationnaire

### Objectif

- Mesurer la viscosité dynamique des fluides,
- Simuler un procédé à vitesse de cisaillement connue,
- Caractériser l'évolution structurelle en écoulement,
- Quantifier la réversibilité des déformations.

### Protocole

- Faire des tests préliminaires pour fixer la plage de contrainte (ou vitesse) à explorer,
- Rampes croissante-constante-décroissante de contrainte (ou vitesse) linéaires ou logarithmique,
- Écoulement par paliers à l'équilibre pour les mesures de viscosité stationnaire en cas de comportement rhéofluidifiant ou rhéoépaississant.



## ❖ Cisaillement oscillatoire

### Objectif

- Analyser la structure,
- Évaluer la dépendance au temps,
- Évaluer la stabilité en température,

### Protocole

- Après le chargement, observer les effets dépendant du temps (relaxation, thixotropie, séchage, ...),
- Balayage en temps en oscillation avec une faible déformation imposée (environ 1%),
- Éventuellement pré-cisaillement,
- Déterminer la zone de viscoélasticité linéaire en oscillation (balayage en déformation),
- Balayage en fréquence et(ou) en température dans la zone linéaire.

## ❖ Cisaillement transitoire (retard, relaxation)

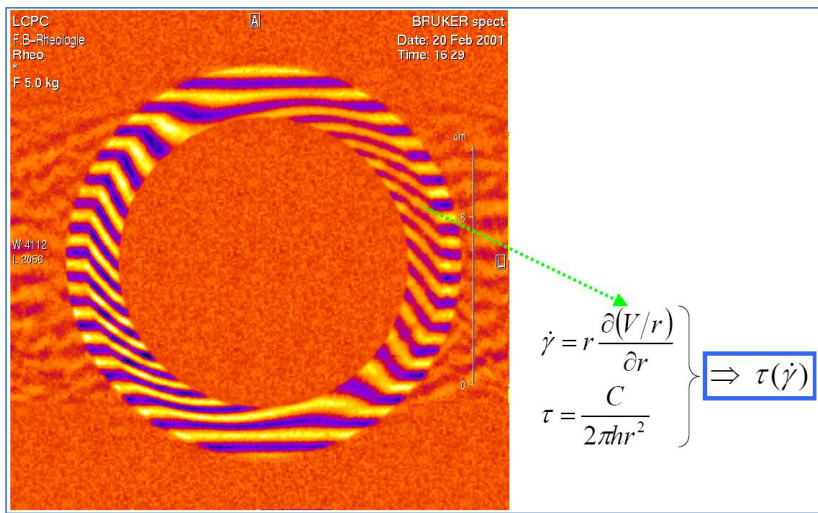
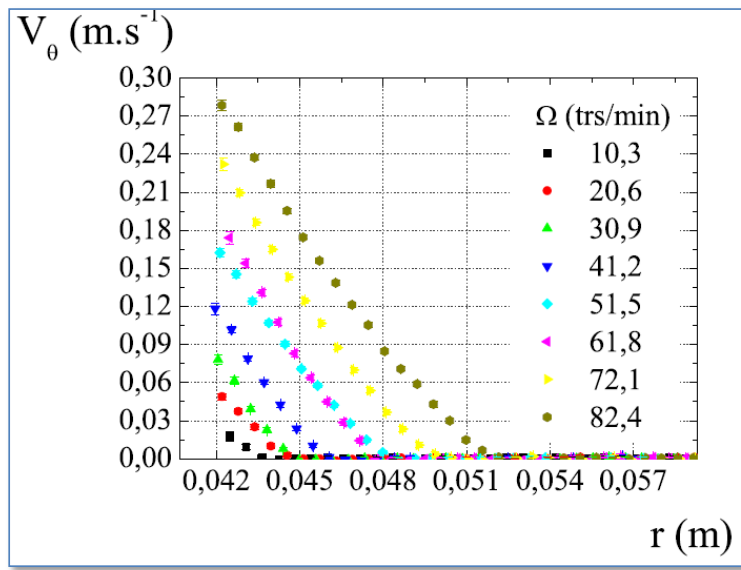
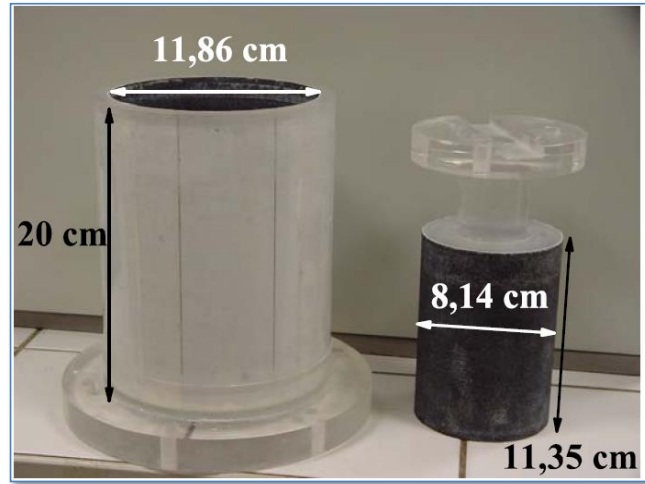
### Objectif

- Analyser la structure (par exemple le réarrangement des unités structurales soumises à une déformation constante) :
  - Les temps de relaxation courts sont liés au comportement rhéologique des petites unités et parties flexibles des plus grosses,
  - Les temps de relaxation longs sont liés au comportement rhéologique des unités de plus grande taille.
- Ces essais se justifient lorsque le milieu est susceptible d'évoluer au cours du temps sous sollicitation constante (séparation de phases, thixotropie, ...).

### Protocole (pour le retard ou fluage)

- Faire quelques tests de fluage à des contraintes situées dans la zone linéaire de l'échantillon,
- Mesurer la fonction de retard (complaisance) pour vérifier le comportement dans le domaine linéaire.

❖ Pâtes de ciment

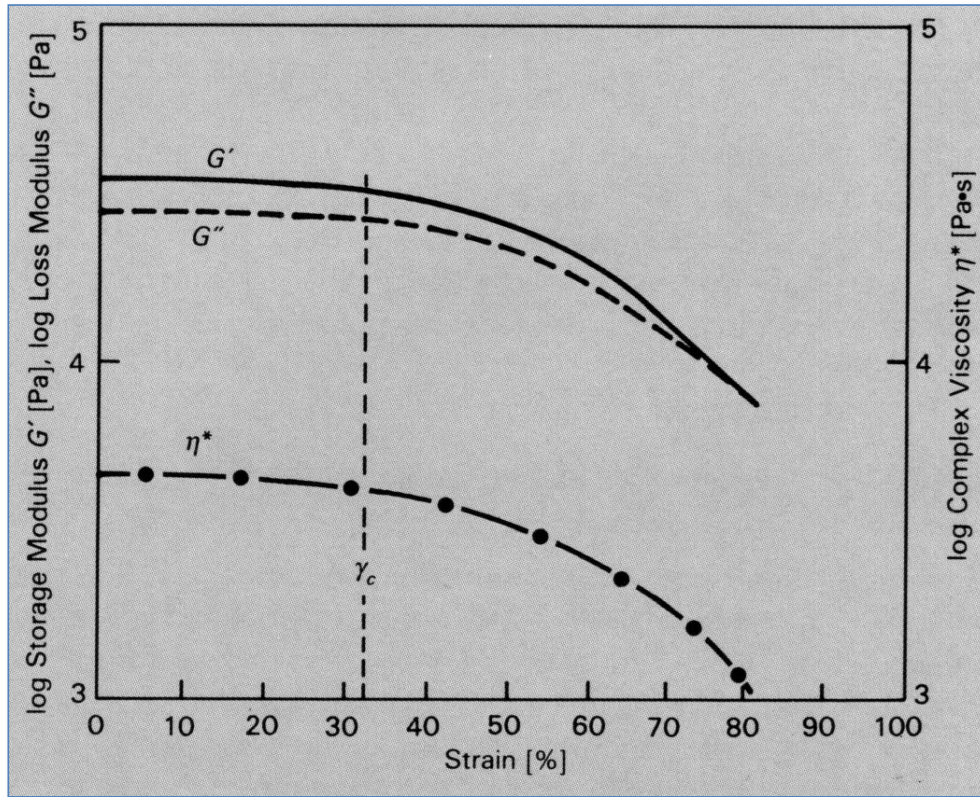


[Jarny S., thèse, 2004]

Le rhéomètre est placé dans une enceinte IRM → vélocimétrie.

Les profils de vitesse et l'image IRM (82,4 tr.min<sup>-1</sup>) montrent une zone sans écoulement près du cylindre extérieur et une zone en écoulement au contact du cylindre intérieur : ceci est caractéristique d'un comportement à seuil.

## ❖ Essais oscillatoires – balayage en déformation



[documentation Rheometrics Scientific]

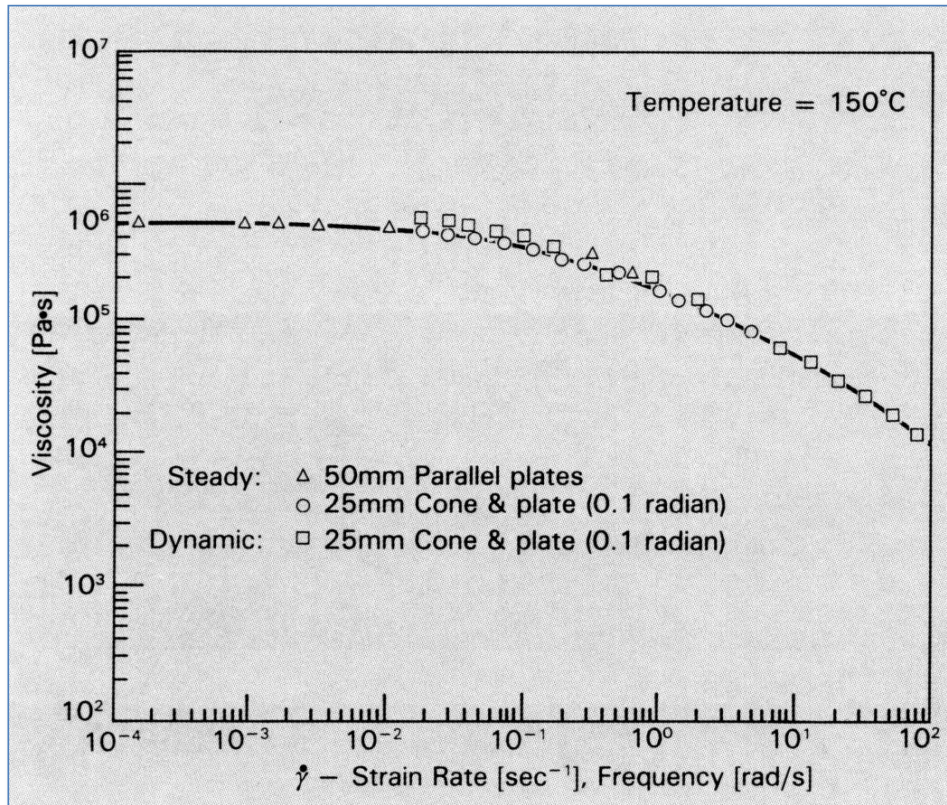
1. Un balayage en déformation est habituellement la première étape dans la caractérisation d'un milieu viscoélastique dans le domaine linéaire,

2. Un balayage en déformation permet de mettre en évidence l'étendue du domaine viscoélastique linéaire : les caractéristiques rhéologiques sont indépendantes de la déformation jusqu'à un certain niveau critique,

3. L'incorporation de charges abaisse souvent le niveau critique,

4. Le balayage en déformation doit être réalisé à différentes fréquences et  $T^\circ$  car le niveau critique de déformation dépend de la fréquence et de la  $T^\circ$ .

## ❖ Polymères – règle de Cox Merz



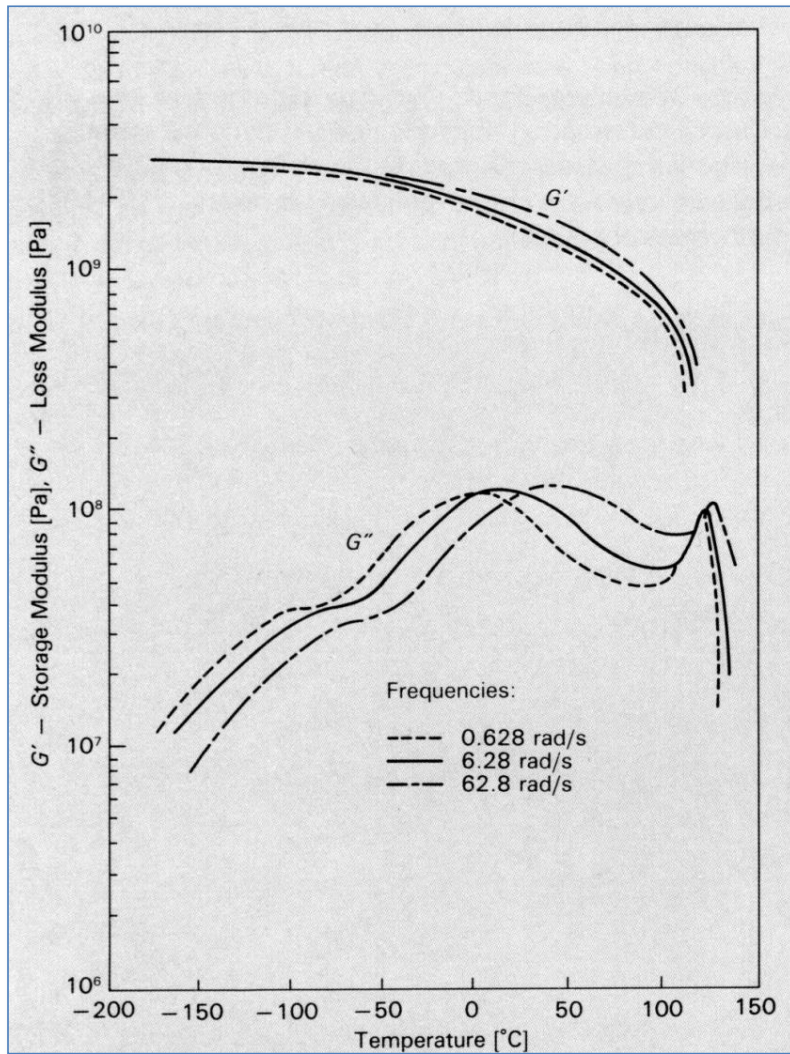
[documentation Rheometrics Scientific]

La règle de Cox Merz est purement empirique et ne repose sur aucun fondement théorique. Elle fonctionne bien pour certains polymères.

Elle consiste à dire que la viscosité dynamique pour une valeur de  $\dot{\gamma}$  donnée est égale au module de la viscosité complexe pour  $\omega = \dot{\gamma}$ .

$$\rightarrow \eta(\dot{\gamma}) = |\eta^*(\omega)|_{\omega=\dot{\gamma}}$$

## ❖ Polymères – essais oscillatoires avec balayage en température



[documentation Rheometrics Scientific]

1. Il permet de caractériser la thermodépendance des caractéristiques rhéologiques,

2. C'est la méthode la plus sensible pour détecter des transitions vitreuses et des températures de transition secondaire,

3. La ténacité et la résilience du matériau se corrélient parfois avec l'amplitude de  $\text{tg}(\delta)$  à la transition secondaire ( $\beta$ ),

4. Les températures de transition dépendent fréquemment de la fréquence de sollicitation. Il faut alors procéder à des balayages en fréquence. Dans un domaine proche de la  $T_g$  on peut utiliser le principe d'équivalence temps-température.

# Contents

## 1 Aim of rheology

Definition - brief history

## 2 Constitutive laws – rheological models and criteria

Constitutive laws reminders - rheological models - rheological criteria

## 3 Plastic media

Material nonlinearity – Practical manifestations of plasticity – 1D plasticity – Management of plasticity – Plasticity criteria – Plastic flow rule – Viscoplasticity – Practical applications – Experimental aspects

## 4 Viscous media – Case of molten polymers

Newtonian media – Pseudoplastic or shear-thinning media – Yield stress, shear-thickening, thixotropic media – Viscoelastic media – Experimental aspects

## 5 Bibliography

- [**Achab L., 2005**] Achab L., Application d'une loi constitutive dans l'étude numérique de l'écoulement sanguin à travers une artère sténosée, *Rhéologie*, Vol. 7, 28-34
- [**Agassant J.-F., 1996**] Agassant J.-F. et al., *La mise en forme des matières plastiques*, Lavoisier Tec & Doc
- [**Albouy C., 2008**] Albouy C., *Cours de résistance des matériaux – Plasticité : Analyse de la phase plastique, vérification des sections droites*
- [**Ancey C., 2005**] Ancey C., *Une introduction à la dynamique des avalanches*, Cours, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
- [**Baudez J.-C., 2001**] Baudez J.-C., *Rhéologie et physico-chimie des boues résiduaireuses pâteuses pour l'étude du stockage et de l'épandage*, Thèse de l'Ecole Nationale du Génie Rural, des Eaux et Forêts, Paris
- [**Berot M., 2009**] Berot M., *Modélisation simplifiée d'assemblages par éléments équivalents*, Thèse de l'Ecole nationale supérieure des mines de Paris
- [**Cailletaud G., 2012**] Cailletaud G., *Mécanique des matériaux solides*, Cours Mines ParisTech
- [**Château X., 2007**] Château X., *Ecole Doctorale MODES - Cours « Rhéologie-Consolidation-Blocage » - Rhéologie*
- [**Chevalier Y., 1991**] Chevalier Y., *Critères de rupture des composites - Approche macroscopique*, *Techniques de l'Ingénieur*, A7 755
- [**Combeaud C., 2003**] Combeaud C. et al., *Etude expérimentale du défaut hélicoïdal d'un polystyrène en écoulement*, 16ème Congrès Français de Mécanique Nice, 1-5 septembre 2003
- [**Flaud P., 2007**] Flaud P., *Validité et interprétation des mesures - Appareillages et applications*, Cours, Formation en rhéologie, 24-26 avril 2007, Paris
- [**Frey F., 2000**] Frey F., *Traité de Génie Civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Volume 2 – Analyse des structures et milieux continus – Mécanique des structures*, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne
- [**Giesekus H., 1969**] Giesekus H., *Verschiedene Phänomene in Strömungen viskoelastischer Flüssigkeiten durch Düsen*, *Rheol. Aca*, 8, 411
- [**González C., 2007**] González C. et al., *Mechanical behavior of unidirectional fiber-reinforced polymers under transverse compression: Microscopic mechanisms and modeling*, *Composites Science and Technology* 67 (2007) 2795–2806



- [**Hartikainen J., 2005**] Hartikainen J. et al., Polypropylene hybrid composites reinforced with long glass fibres and particulate fillers, *Composites Science and Technology* 65 (2005) 257–267
- [**Jarny S., 2004**] Jarny S., Thixotropie des pâtes cimentaires, Thèse ENPC
- [**Kossentini K., 2003**] Kossentini K., Etude de mélanges PE/PS - Contribution au recyclage, Thèse, INSA Lyon
- [**Maitournam H., 2012**] Maitournam H., Comportement élastoviscoplastique, Cours Ecole polytechnique, MEC 562, Palaiseau
- [**Marigo J.-J., 2016**] Marigo J.-J., Plasticité et rupture, Cours Ecole polytechnique, MEC 551, Palaiseau
- [**Montmitonnet P., 2003**] Montmitonnet P., Laminage - Analyse thermomécanique et applications, *Techniques de l'ingénieur*, M 3 066
- [**Morrison F.A., 2007a**] Morrison F.A., Shear Viscosity Measurement in a Capillary Rheometer, Course, CM 4655 Polymer Rheology Lab, Michigan Technological University
- [**Morrison F.A., 2007b**] Morrison F.A., Introduction to capillary flow, Course, CM 4655 Polymer Rheology Lab, Michigan Technological University
- [**Moutee M., 2006**] Moutee M., Modélisation du comportement mécanique du bois au cours du séchage, Thèse, Université Laval, Québec, Canada
- [**Muller R., 2006**] Muller R., Etat fondu et mise en œuvre des polymères, Cours
- [**Perchat E., 2000**] Perchat E., MINI-Elément et factorisations incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D. Application au forgeage, Thèse Ecole des Mines de Paris
- [**Pujos C., 2006**] Pujos C., Estimation de la rhéologie d'un polymère dans une filière d'extrusion - Simulation d'écoulement avec transferts thermiques et inversion de mesures, Thèse Université Bordeaux I
- [**Raghavan R., 1996**] Raghavan R., Shear-Thickening Response of Fumed Silica Suspensions under Steady and Oscillatory Shear, *Journal of Colloid and Interface Science* 185, 57-67
- [**Reynolds O., 1883**] Reynolds O., An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels, *Proc. R. Soc. Lond.* 1883 35, 84-99
- [**Salençon J., 2005**] Salençon J., Mécanique des milieux continus - Tome 1 Concepts généraux, Editions de l'Ecole polytechnique, Palaiseau

- [**Senouillet L., 2005**] Senouillet L. et al., Approche numérique des écoulements sanguins maternels dans le placenta humain, La Houille Blanche, N°4 (Juillet-Août 2005), no 4, 60-65
- [**Suquet P., 2009**] Suquet P., Rupture et plasticité, Cours Ecole polytechnique, MEC 551, Palaiseau
- [**Thibaud S., 2006**] Thibaud S., Introduction à la simulation de phénomènes non-linéaires avec LS-DYNA, Formation LS-DYNA / Introduction à l'utilisation d'un code EF non-linéaire
- [**Thomann M., 2005**] Thomann M., Connexons par adhérence pour les ponts mixtes acier-béton, Thèse Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne