HAL open science

Mesure composite aléatoire

Saleh Sami

▶ To cite this version:

Saleh Sami. Mesure composite aléatoire. Annales de l'ISUP, 1984, XXIX (3-4), pp.59-67. hal-03691651

HAL Id: hal-03691651
https://hal.science/hal-03691651v1

Submitted on 9 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Pub. Inst. Stat. Univ.
XXIX, fasc. 3-4, 59-67

MESURE COMPOSITE ALÉATOIRE

SALEH Sami

Université P. et M. Curie

Résumé : Nous avons introduit, dans cet article, des nouvelles notions dites "Mesure composite et mesure composite aléatoire ($\mu^{\cdot}$)" et "Répartition locale des composantes d'une mesure composite (ou spectre d'une mesure composite)". Ceci nous a conduit à l'étude de la répartition locale (q^x) de la mesure moyenne m de $\mu^{\cdot}$ et plus précisément à l'étude de l'estimation de la fonction

$$q^x(B) = f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{m(]x-h,x+h[\times B)}{m(]x-h,x+h[\times R^+)}, \quad x \in \mathcal{X} = R, \quad B \in \mathcal{B}_b^+$$

(i.e B borné) pour un ensemble $\mathcal{P}$ des lois de probabilités sur $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ telle que toute loi $P_{\mu^{\cdot}}$ de $\mathcal{P}$ vérifie $\forall C \in \mathcal{B}_b$ (i.e C borné) $E[\mu^{\cdot}(C)] < +\infty$.

Summary : We have introduced the notions "Composite measure and random composite measure ($\mu^{\cdot}$)" and "local repartition of components of a composite measure (or specter of a composite measure)". This led us to study the local repartition (q^x) of the mean measure m of $\mu^{\cdot}$, and more precisely, to study the estimation of the function

$$q^x(B) = f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{m(]x-h,x+h[\times B)}{m(]x-h,x+h[\times R^+)}, \quad x \in \mathcal{X} = R, \quad B \in \mathcal{B}_b^+$$

(i.e B bounded), for the set $\mathcal{P}$ of probability laws on $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ such that all law $P_{\mu^{\cdot}}$ of $\mathcal{P}$ verify $\forall C \in \mathcal{B}_b$ (i.e C bounded), $E[\mu^{\cdot}(C)] < +\infty$.

Introduction : Comme beaucoup de branches de la théorie de probabilités, la théorie des mesures aléatoires a ses applications originales. Récemment KALLENBERG [4] a fait un énorme travail concernant les mesures aléatoires. De même GEFFROY et QUIDEL ont fait des études extensives dans le domaine des processus ponctuels et des mesures aléatoires [2] et un grand nombre d'idées de base dans ce domaine sont dues à GEFFROY [3]. Dans cet article, on va publier l'étude de l'une de ces idées, là où on introduit les notions "mesure composite et mesure composite aléatoire ($\mu^{\cdot}$)" et "le spectre d'une mesure composite (q^x)". De même, on va introduire et étudier un estimateur non paramétrique de q^x.

I- Mesure composite aléatoire

1.1. Notation : Soit $(\mathcal{Y},\mathcal{B}) = (\mathcal{X},\mathcal{B}_1) \times (R^+,\mathcal{B}^+)$ où $(\mathcal{X},\mathcal{B}_1)$ est un espace métrique séparable complet et $\mathcal{B}^+$ est la tribu borélienne de R^+. Soit $\mathcal{M}_1$ l'ensemble des mesures sur $(\mathcal{Y},\mathcal{B})$ de la forme : $\mu(C) = \alpha N(f,C)$, $(C \in \mathcal{B})$ où $\alpha \in Q_+^*$ et f une répartition ponctuelle (r.p.) sur $\mathcal{Y}$ d'effectif fini sur tout borélien borné, $(\mathcal{M},\mathcal{T})$ l'ensemble des mesures positives sur $(\mathcal{Y},\mathcal{B})$ finies sur tout borélien borné et (Ω,G,P) un espace probabilisé quelconque.

1.2. Définition : Par définition, l'ensemble $\mathcal{M}_c$ des mesures composites sur $(\mathcal{X},\mathcal{B}_1)$ est : $\mathcal{M}_c = \overline{\mathcal{M}}_1^{\rho}$, où l'adhérence est prise au sens de la topologie de la convergence faible à distance finie.
Or, on a, [6] et [7], $\overline{\mathcal{M}}_1^{\rho} = \mathcal{M}$, alors $\mathcal{M}_c = \mathcal{M}$ et donc comme conséquence, on aura : une "mesure composite" sur $(\mathcal{X},\mathcal{B}_1)$ est essentiellement une mesure (ordinaire !) sur $(\mathcal{Y},\mathcal{B})$.

1.3 Définition : On appelle mesure composite aléatoire sur $(\mathcal{X},\mathcal{B}_1)$, toute mesure aléatoire sur $(\mathcal{Y},\mathcal{B})$, soit $\mu^{\cdot}$, [6].

II- Répartition locale (ou spectre) d'une mesure composite

En nous basant sur le théorème de désintégration d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}$ relative à une application μ-propre [1], nous avons montré, [6], les deux propriétés suivantes :

2.1 Propriété : Soient η la projection de μ sur R^+ et μ_0 sa projection sur $\mathfrak{X}$. Il existe une famille $\{\mu_0^z\}_{z \in R^+}$ des mesures sur $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}_1)$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{B}_1 , \forall B \in \mathcal{B}^+ , \mu(A \times B) = \int_B \mu_0^z(A)\eta(dz)$$

cette famille est unique modulo η. Et on a en particulier

$$\forall A \in \mathcal{B}_1 , \mu_0(A) = \int_{R^+} \mu_0^z(A)\eta(dz).$$

Cette formule fait apparaître μ_0 comme un "mélange" des mesures μ_0^z et cela incite à appeler par abus de langage -μ_0 une mesure composite sur $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}_1)$.

2.2. Propriété : Il existe une famille $\{\eta^x\}_{x \in \mathfrak{X}}$ de mesures sur $(R^+, \mathcal{B}^+)$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{B}_1 , \forall B \in \mathcal{B}^+ , \mu(A \times B) = \int_A \eta^x(B)\, \mu_0(dx) .$$

Elle est unique modulo μ_0.

2.3. Définition : La mesure η^x est appelée la répartition locale des composantes de μ_0 au point x (ou spectre de μ_0) (Les mesures μ_0^z sont les composantes de μ_0).

Soit $m^{(1)}$ la mesure moyenne d'une mesure composite aléatoire $\mu^{\cdot}$. Soit m_0 sa projection sur $\mathfrak{X}$ et q^x la répartition locale des composantes de m_0 en un point x donné. Soit $B \in \mathcal{B}_b^+$,

appelons f la fonction de R dans R^+ qui, à $x \in R$, fait correspondre $f(x) = q^x(B)$. Posons $\forall A \in \mathcal{B}_1$, $Q_B(A) = m(A \times B)$, alors d'après 2.2., on a

$$f(x) = \frac{d\,Q_B}{d\,m_0}(x)\ ,\ m_0 \text{ p.s.}$$

2.3. Théorème : Supposons que $\mathfrak{X} = R$ et que $\mu^{\cdot}$ est une répartition ponctuelle "composite". Soit $f^{\cdot}$ la répartition ponctuelle "composite" associe canoniquement à $\mu^{\cdot}$. Et supposons $B = [0,v[$, $v \in R^+$, alors on a

$$q^x([0,v[) = \varphi_x(v) = \lim_{h \to 0} \frac{E[N(f^{\cdot},]x-h,x+h[\times [0,v[)]}{E[N(f^{\cdot},]x-h,x+h[\times R^+)]}\ ,\ m_0 \text{ p.s.}$$

Démonstration : On a $f(x) = q^x(B) = \frac{dQ_B}{dm_0}(x)$, m_0 p.s. donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{Q_B(A_n^x)}{m_0(A_n^x)} = f(x) = q^x(B)\ ,\ m_0 \text{ p.s.}$$

où $A_n^x =]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$, $n \in N^*$, et par suite

$$\lim_{h \to 0} \frac{Q_B(]x-h,x+h[)}{m_0(]x-h,x+h[)} = q^x(B),\ m_0 \text{ p.s.}$$

c.à.d.

$$\lim_{h \to 0} \frac{E[N(f^{\cdot},]x-h,x+h[\times [0,v[)]}{E[N(f^{\cdot},]x-h,x+h[\times R^+)]} = \lim_{h \to 0} \frac{E[\mu^{\cdot}(]x-h,x+h[\times [0,v[)]}{E[\mu^{\cdot}(]x-h,x+h[\times R^+)]} =$$

$$q^x([0,v[),\ m_0 \text{ p.s.}$$

Remarque : Supposons de plus que $f^{\cdot}$ est presque sûrement fini à distance finie(2) et que les points $(x,v) \in R \times R^+$ tels que $f^{\omega}(x,v) > 0$, $\omega \in \Omega$, sont répartis suivant un processus dont la projection sur l'espace $\mathfrak{X} = R$ est un processus de Poisson homogène d'intensité λ. De même, supposons que la charge de chaque point (x,v) là où $f^{\omega}(x,v) > 0$ est égale à 1, et que les

couleurs $v \in R^+$ sont représentées par une v.a. V indépendante des points $x \in \mathfrak{X}$ et tel que $Pr\{V < v\} = F(v)$. Alors on a

$$\varphi_x(v)=F(v)=\lim_{h\to 0} E\left[\frac{N(f^{\cdot},]x-h,x+h[\times[0,v[)}{N(f^{\cdot},]x-h,x+h[\times R^+)}/N(f^{\cdot},]x-h,x+h[\times R^+)\neq 0\right]$$

(pour la 2ème égalité, nous l'avons montrée dans [6]).

III- Estimation de la répartition locale de la mesure moyenne d'une mesure composite aléatoire

1) Soit $B \in \mathcal{B}_b^+$ et $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ un échantillon de la mesure composite aléatoire $\mu^{\cdot}$. Considérons une suite d'entiers $\{k(n), n \in N^*\}$, (on écrit $k(n) = k$) et supposons que $k(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Pour tout $k \in N^*$, soit $\Delta_k = \{\Delta_{k,r}\}_{r \in N^*}$ une partition de $\mathfrak{X}$ en boréliens bornés (et dans le cas $\mathfrak{X} = R$, $\Delta_{k,r} = [\frac{r-1}{k}, \frac{r}{k}[$, $r \in Z$) tels que

a) $\forall x \in \mathfrak{X}$, en désignant par $r(k,x)$ la valeur de r pour laquelle $x \in \Delta_{k,r}$, alors $\lim_{k\to+\infty} \operatorname{diam} \Delta_{k,r(k,x)} = 0$.

b) $\forall B_1 \in \mathcal{B}_{1b}$ (i.e B_1 borné), $\lim_{k\to+\infty} \delta_k(B_1) = +\infty$, où

$\delta_k(B_1) = \sup_r\{\operatorname{diam} \Delta_{k,r} ; \Delta_{k,r} \cap B_1 \neq \phi\}$.

L'estimateur f_n (de la fonction $f(x) = q^x(B)$), construit à partir de $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, associé à Δ_k, est défini par :

$$\forall r \in N^*, \forall x \in \Delta_{k,r}, f_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i(\Delta_{k,r} \times B)}{\sum_{i=1}^n \mu_i(\Delta_{k,r} \times R^+)}, \text{ si } \sum_{i=1}^n \mu_i(\Delta_{k,r} \times R^+) \neq 0$$

$$= 0 \quad , \text{ si } \sum_{i=1}^n \mu_i(\Delta_{k,r} \times R^+) = 0$$

2) A toute partition Δ_k, nous associons une fonction $\overline{f}_k$, en posant

$$\forall r \in N^*, \overline{f}_{k,r} = \frac{m(\Delta_{k,r} \times B)}{m(\Delta_{k,r} \times R^+)} = \frac{Q_B(\Delta_{k,r})}{m_0(\Delta_{k,r})} = \frac{1}{m_0(\Delta_{k,r})} \int_{\Delta_{k,r}} f(x) m_0(dx)$$

et nous poserons $\forall r \in N^*$, $\forall x \in \Delta_{k,r}$, $\overline{f}_k(x) = \overline{f}_{k,r}$.

Alors $\lim_{k \to +\infty} \overline{f}_k(x) = f(x)$, en tout point x où f est continue. Et plus précisément, sous l'hypothèse b) et si f est uniformément continue sur $B_1 \in \mathcal{B}_{1b}$, alors la convergence de $\overline{f}_k$ vers f est uniforme sur B_1 [6].

3.1. Lemme : En appelant $E_{n,r}$ l'événement :

$$E_{n,r} = \{ \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\Delta_{k,r} \times B)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\Delta_{k,r} \times R^+)} - \overline{f}_k(x) \right| > \varepsilon \}, \text{ où } \varepsilon > 0,\ x \in \Delta_{k,r}; \text{on a}$$

$$Pr\{E_{n,r}\} \leqslant Pr\{|a_n - 1| > \frac{\varepsilon}{2}\eta\} + Pr\{|b_n - 1| > \frac{\varepsilon}{2}\eta\} + 2Pr\{|b_n - 1| > 1 - \eta\}$$

où $0 < \eta < 1$, $a_n = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\Delta_{k,r} \times B)}{m(\Delta_{k,r} \times B)}$, $b_n = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\Delta_{k,r} \times R^+)}{m(\Delta_{k,r} \times R^+)}$.

Démonstration : on a

$$Pr\{E_{n,r}\} \leqslant Pr\{\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| > \varepsilon\} \text{ (car } 0 \leqslant \frac{m(\Delta_{k,r} \times B)}{m(\Delta_{k,r} \times R^+)} \leqslant 1)$$

$$\leqslant Pr\{|a_n - 1| + |b_n - 1| > \varepsilon b_n\}$$

$$\leqslant Pr\{|a_n - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} b_n\} + Pr\{|b_n - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} b_n\} \qquad (1)$$

or

$$\{|b_n - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} b_n\} \subset \{(|b_n - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} b_n) \cap (b_n \leqslant \eta \text{ ou } b_n > \eta)\}$$

$$\subset \{[(|b_n - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} b_n) \cap (b_n \leqslant \eta)] \cup [(|b_n - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} b_n) \cap (b_n > \eta)]\}$$

$$\subset \{(b_n \leqslant \eta) \cup (|b_n - 1| > \frac{\varepsilon}{2} \eta)\}$$

$$\subset \{(|b_n - 1| > 1 - \eta) \cup (|b_n - 1| > \frac{\varepsilon}{2} \eta)\} .$$

De la même façon, on montre

$$\{|a_n - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} b_n\} \subset \{(|b_n - 1| > 1 - \eta) \cup (|a_n - 1| > \frac{\varepsilon}{2} \eta)\}.$$

D'où, de (1), on tire le résultat.

Si f est continue en $x \in \mathfrak{X}$, alors on a $\overline{f}_k(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} f(x)$ et par suite

$$\exists n_0 \in N \; ; \forall n \geqslant n_0, |\overline{f}_k(x) - f(x)| < \varepsilon \; , \; (\varepsilon > 0) .$$

D'où

$$\forall n \geqslant n_0, Pr\{|f_n(x) - f(x)| > 2\varepsilon\} \leqslant Pr\{|f_n(x) - \overline{f}_k(x)| + |\overline{f}_k(x) - f(x)| > 2\varepsilon\}$$

$$\leqslant Pr\{|f_n(x) - \overline{f}_k(x)| > \varepsilon\}$$

$$\leqslant Pr\{|a_n - 1| > \frac{\varepsilon}{2} \eta\} + Pr\{|b_n - 1| > \frac{\varepsilon}{2} \eta\} + 2\, Pr\{|b_n - 1| > 1 - \eta\} .$$

Mais $E[a_n] = E[b_n] = 1$, donc, on a $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} 1$ et $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} 1$ (regarder [5], Proposition II-5-4) et par suite $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{P} f(x)$.

3.2. Théorème : Supposons $\mathfrak{X} = R$. Si $\mu^{\cdot}$ vérifie la condition

$$\exists k_0 > 0 \; ; \; E[(\mu^{\cdot}(C))^2] \leqslant k_0 \, m^2(C) = k_0 (E[\mu^{\cdot}(C)])^2$$

(où $C = B_1 \times [0, v[$ ou $B_1 \times R^+$, $B_1 \in \mathcal{B}_{1b}$, $v \in R^+$), et si f est uniformément continue sur $D_1 = (a,b)$ et $k(n) = O(n)$ alors f_n converge

uniformément en probabilité sur D_1.

Démonstration : Soit $R_k = \{r \in Z \; ; \; \Delta_{k,r} \cap D_1 \neq \phi\}$. Or f est uniformément continue sur D_1 donc $\overline{f}_k$ converge uniformément sur D_1 vers f, par conséquent il suffit de montrer

$$\forall \varepsilon > 0, \; Pr\{\sup_{x \in B_1} |f_n(x) - \overline{f}_k(x)| > \varepsilon\} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .$$

Or

$$Pr\{\sup_{x \in B_1} |f_n(x) - \overline{f}_k(x)| > \varepsilon\} \leqslant \sum_{r \in R_k} Pr\{|f_n(x) - \overline{f}_k(x)| > \varepsilon\} = \sum_{r \in R_k} Pr\{E_{n,r}\}$$

$$\leqslant \sum_{r \in R_k} [Pr\{|a_n - 1| > \tfrac{\varepsilon}{2}\eta\} + Pr\{|b_n - 1| > \tfrac{\varepsilon}{2}\eta\} + 2Pr\{|b_n - 1| > 1 - \eta\}].$$

Posons pour tout $n \in N$ et pour $B_2 \in \mathcal{B}^+$

$$X_{1,n} = \frac{\mu_1(\Delta_{k,r} \times B_2)}{m(\Delta_{k,r} \times B_2)}, \ldots, X_{n,n} = \frac{\mu_n(\Delta_{k,r} \times B_2)}{m(\Delta_{k,r} \times B_2)} .$$

Les $X_{i,n}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont indépendantes et suivent la même loi et $E[X_{i,n}] = 1$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$, alors $\frac{S_n}{n} = a_n$ si $B_2 = B$ ou b_n si $B_2 = R^+$ et on a $E[S_n] = n$. D'où

$$Pr\{|\frac{S_n}{n} - 1| > \varepsilon\} = Pr\{|S_n - n| > \varepsilon n\} \leqslant \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \operatorname{Var} S_n \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2} \operatorname{Var} X_{1,n}$$

$$\leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2} \frac{\operatorname{Var}[\mu^{\cdot}(\Delta_{k,r} \times B_2)}{m^2(\Delta_{k,r} \times B_2)} \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2} \frac{E[(\mu^{\cdot}(\Delta_{k,r} \times B_2))^2]}{m^2(\Delta_{k,r} \times B_2)} \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2} K_0 .$$

D'où

$$Pr\{\sup_{x \in B_1} |f_n(x) - \overline{f}_k(x)| > \varepsilon\} \leqslant \sum_{r \in R_k} [\frac{4k_0}{n\varepsilon^2\eta^2} + \frac{4k_0}{n\varepsilon^2\eta^2} + \frac{2}{n(1-\eta)^2} k_0]$$

$$\leqslant \operatorname{Card} R_k [\frac{8k_0}{n\varepsilon^2\eta^2} + \frac{2k_0}{n(1-\eta)^2}] \leqslant (b-a)k[\frac{8k_0}{n\varepsilon^2\eta^2} + \frac{2k_0}{n(1-\eta)^2}]$$

$$\leqslant \frac{8(b-a)k_0\,\varepsilon_n}{\varepsilon^2\eta^2} + \frac{2(b-a)k_0\varepsilon_n}{(1-\eta)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(où $k = n\varepsilon_n$, $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$).

(1) : $\forall\, A \subset \mathfrak{X}$, (A borné), $m(A \times R^+) < +\infty$

(2) : $\forall\, A \subset \mathfrak{X}$, (A borné), $N(f^{\cdot}, A \times R^+) < +\infty$ p.s.

REFERENCES

[1] BOURBAKI, N. (1959) XXV. Eléments de mathématiques. Intégration. Chap. 6. Intégration vectorielle (1281). Hermann.

[2] GEFFROY, J., QUIDEL, P. (1974). Convergences stochastiques des r.p.a. Revista da Faculdade de Ciencias da Universida de Coimbra (Portugal) Vol. XLIX.

[3] GEFFROY, J., ZEBOULON, H. (1975). C.R. Acad. Sc. t. 280, Série A p. 291.

[4] KALLENBERG (1976). Random measures. Academic Press.

[5] NEVEU, J. Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson.

[6] SALEH, S. (1983). Contribution à l'analyse statistique des p.p.c. et des mesures composites aléatoires. Thèse de Doctorat 3ème Cycle, Paris 6.

[7] ZEBOULON, H. (1975). Contribution à l'étude des convergences stochastiques des mesures aléatoires. Thèse de Doctorat 3ème Cycle, Paris 6.

Reçu en Octobre 1984