



**HAL**  
open science

# Apport de l'analyse en ondelettes à la caractérisation des systèmes faiblement non-linéaires sous excitation ambiante

Raphaël Carpine, Pierre Argoul, Claude Rospars

## ► To cite this version:

Raphaël Carpine, Pierre Argoul, Claude Rospars. Apport de l'analyse en ondelettes à la caractérisation des systèmes faiblement non-linéaires sous excitation ambiante. CSMA 2022, 15ème Colloque National en Calcul des Structures, May 2022, Presqu'île de Giens, France. 8 p., bibliogr. hal-03690484

**HAL Id: hal-03690484**

**<https://hal.science/hal-03690484>**

Submitted on 8 Jun 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Apport de l'analyse en ondelettes à la caractérisation des systèmes faiblement non-linéaires sous excitation ambiante

R. Carpine<sup>1</sup>, P. Argoul<sup>1</sup>, C. Rospars<sup>1</sup>

<sup>1</sup> MAST-EMGCU, Univ Gustave Eiffel, F-77454 Marne-la-Vallée, France, raphael.carpine@univ-eiffel.fr

**Résumé** — Cette étude porte sur l'utilisation de la Transformée en Ondelettes Continue (TOC) pour caractériser les systèmes mécaniques faiblement non-linéaires et faiblement amortis, soumis à une excitation ambiante modélisée sous forme de bruit blanc gaussien. Après une analyse théorique de ces systèmes, dont la réponse est étudiée dans le plan temps-fréquence, une méthode de caractérisation de leurs non-linéarités basée sur la TOC est proposée. Enfin, des simulations numériques basées sur un cas d'étude simple permettent d'étayer les résultats théoriques avancés.

**Mots clés** — Transformée en ondelettes continue, Système faiblement non-linéaire, Excitation ambiante.

## 1 Introduction

Mise au point par des chercheurs français au début des années 80, la transformée en ondelettes a permis depuis lors, d'importantes avancées, en particulier dans les domaines du traitement du signal et des images [1]. Son champ d'application s'étend également au traitement des réponses vibratoires de structures mécaniques ou d'ouvrages d'art notamment par l'utilisation de la Transformée en Ondelettes Continue (TOC), dont l'ouvrage de Torrèsani [2] présente un "excellent cours avancé sur les ondelettes et leurs applications" d'après les mots d'Yves Meyer. La TOC est un outil d'analyse temps-fréquence, particulièrement adapté aux signaux résultant de l'analyse modale. En effet, sa capacité à séparer les amplitudes  $A_k(t)$  et les phases  $\Phi_k(t)$  des différentes composantes  $A_k(t)\cos\Phi_k(t)$  d'un signal permet, dans le cas de réponses vibratoires transitoires de systèmes mécaniques, d'identifier aisément leurs paramètres modaux. On peut par exemple citer le cas des réponses libres de systèmes linéaires, souvent analysés à partir des arêtes de leur TOC, et dont on trouve une présentation en [3], avec entre autres une discussion sur le réglage de la résolution de l'outil numérique analyse en ondelettes à l'aide du facteur de qualité, ou encore en [4], qui traite des réponses libres de systèmes linéaires avec amortissement non-proportionnel. Pour les réponses libres de systèmes non-linéaires, l'utilisation de la méthode de Krylov-Bogoliubov [5] est souvent couplée avec celle de l'analyse en ondelettes pour une estimation des paramètres modaux [6, 7]. Enfin, dans le cas de systèmes linéaires sous excitation ambiante, l'utilisation de la TOC nécessite généralement une étape de filtrage supplémentaire. Ce filtrage peut être fait a posteriori, avec par exemple l'utilisation de la décomposition en valeurs singulières [8], ou a priori, en transformant cette réponse ambiante en une réponse impulsionnelle, à partir de l'autocorrélation et de l'intercorrélation des signaux [9, 10], ou de la technique du décrétement aléatoire [11].

Cependant, ces techniques de filtrage ne sont pas adaptées aux systèmes non-linéaires sous excitation ambiante, car elles sont fondées sur l'utilisation du produit de convolution entre la réponse impulsionnelle du système et son excitation, ce qui n'est vrai que dans le cas linéaire. Cette étude propose donc une nouvelle technique, fondée sur la TOC, permettant de caractériser les systèmes non-linéaires sous excitation ambiante, avec une amplitude suffisamment importante pour faire rentrer le système dans le domaine non linéaire. On se limitera aux systèmes mécaniques de rigidité faiblement non-linéaire, d'amortissement linéaire faible (hypothèse classique en dynamique des structures), et par simplification, à un seul degré de liberté. L'excitation ambiante sera modélisée par un bruit blanc gaussien.

L'article est divisé en trois parties. La première partie est consacrée à une étude analytique des systèmes linéaires et non-linéaires sous excitation ambiante, permettant de caractériser leur comportement dynamique sous un point de vue temps-fréquence, adapté à l'utilisation ultérieure de l'analyse en ondelettes. Ensuite, la méthode d'identification fondée sur la TOC est présentée, avec quelques rappels

préalables, et le détail du réglage des paramètres de l'ondelette. Enfin, une étude de cas simple basée sur des simulations numériques permet de tester la mise en oeuvre de la méthode proposée, et de vérifier la cohérence des résultats théoriques énoncés.

## 2 Oscillateurs linéaire et non-linéaire sous excitation ambiante

L'objet de cette étude concerne les oscillations d'un système mécanique à un degré de liberté (1DDL), faiblement non-linéaire et faiblement amorti, soumis à une excitation ambiante sous forme d'un bruit blanc gaussien. Le but de cette partie n'est pas de proposer une nouvelle technique d'intégration, mais de caractériser le comportement dynamique du système d'un point de vue temps-fréquence.

### 2.1 Oscillateur linéaire

On considère dans toute cette étude un oscillateur de masse  $m$ , de rigidité  $k$  et de coefficient d'amortissement  $c$ , pour l'instant linéaire, faiblement amorti et soumis à une excitation  $w$ , dont l'équation d'évolution de la position  $x$  de la masse s'écrit sous forme normalisée :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_p\dot{x} + \omega_p^2x = \frac{w}{m}, \quad (1)$$

avec  $\omega_p = \sqrt{k/m}$  sa pulsation propre,  $\zeta = c/(2\sqrt{km})$  son taux d'amortissement,  $\omega_a = \omega_p\sqrt{1-\zeta^2}$  sa pseudo-pulsation ou pulsation amortie,  $\mu = \zeta\omega_p$  sa constante d'amortissement et  $\lambda = i\omega_a - \mu$  son pôle. On rappelle que sa réponse libre  $x_{\text{libre}}$ , c'est à dire quand  $w = 0$ , s'écrit :

$$x_{\text{libre}}(t) = A_0e^{-\mu t} \cos(\omega_a t + \varphi_0), \quad (2)$$

où  $A_0$  et  $\varphi_0$  s'expriment en fonction des conditions initiales. On a donc un temps d'amortissement caractéristique égal à  $1/\mu$ .

#### 2.1.1 Discrétisation des signaux d'excitation et de réponse

Par simplification, on remplace l'excitation  $w$  par une forme discrétisée  $\tilde{w}$ , définie de la manière suivante :

$$\tilde{w}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n \delta(t - t_n), \quad (3)$$

où  $t_n = n\Delta t$ ,  $w_n$  est défini comme l'intégrale de  $w$  de  $t_n - \Delta t/2$  à  $t_n + \Delta t/2$  et  $\delta$  désigne la distribution de Dirac. On suppose ensuite que l'excitation est un bruit blanc gaussien, ce qui fait de  $(w_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, telles que :

$$\forall n, w_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (4)$$

On discrétise ensuite la position  $x$ . Pour cela, on note  $x_n$  la restriction de  $x$  à  $]t_n, t_{n+1}[$ , c'est à dire  $x_n(\tau) = x(t_n + \tau)$  pour  $\tau \in ]0, \Delta t[$ . Par les Eqs. (2) et (3), on a alors  $x_n(\tau) = A_n \cos(\omega_a \tau + \varphi_n) e^{-\mu \tau}$ , et on note donc  $\underline{X}_n = A_n e^{i\varphi_n}$ . On obtient alors, à partir des Eqs. (1) et (3), la relation de récurrence suivante :

$$\underline{X}_{n+1} = \underline{X}_n e^{\lambda \Delta t} - i \frac{w_{n+1}}{m\omega_a}. \quad (5)$$

Ensuite, en notant  $P = 2\pi/(\omega_a \Delta t)$  le nombre d'incrément de temps nécessaires pour former une période complète du système amorti, et en supposant par simplification que  $P \in \mathbb{N}$ , on obtient à partir de l'Eq. (5) la nouvelle relation de récurrence :

$$\underline{X}_{n+P} = r_0 \underline{X}_n - \frac{i}{m\omega_a} \sum_{j=1}^P w_{n+j} e^{\lambda(P-j)\Delta t}, \quad (6)$$

avec  $r_0 = e^{-2\pi\mu/\omega_a} < 1$ . Puis, comme le système est supposé être faiblement amorti, soit  $\zeta \ll 1$ , on a  $\lambda \approx i\omega_a$ , et on introduit donc la variable aléatoire  $\underline{W}_{P,n}$  définie comme :

$$\underline{W}_{P,n} := \sum_{j=1}^P w_{n+j} e^{i\omega_a(P-j)\Delta t} \approx \sum_{j=1}^P w_{n+j} e^{\lambda(P-j)\Delta t}. \quad (7)$$

On peut alors montrer, à partir de la définition des  $w_k$  donnée en Eq. (4), que les deux variables aléatoires  $\text{Re}\{\underline{W}_{P,n}\}$  et  $\text{Im}\{\underline{W}_{P,n}\}$  sont non corrélées et suivent une distribution normale centrée de variance  $\pi\sigma^2/(\omega_a\Delta t)$ .

On s'intéresse ensuite à la loi d'évolution du système sur une période, à partir d'un état connu, soit  $\underline{X}_{n+P}|\underline{X}_n$ . On introduit pour cela la variable aléatoire  $\underline{Y}_{P,n}$  définie telle que :

$$\underline{Y}_{P,n} := r_0\underline{X}_n - \frac{i}{m\omega_a}\underline{W}_{P,n} \approx \underline{X}_{n+P}, \quad (8)$$

où l'approximation est assurée par celle introduite dans l'Eq. (7). Les variables aléatoires  $\text{Re}\{\underline{Y}_{P,n}|\underline{X}_n$  et  $\text{Im}\{\underline{Y}_{P,n}|\underline{X}_n$  suivent alors des lois normales non corrélées, d'espérances respectives  $r_0\text{Re}\{\underline{X}_n\}$  et  $r_0\text{Im}\{\underline{X}_n\}$ , et de variance  $\pi\sigma^2/(m^2\omega_a^3\Delta t)$ . Une représentation graphique de la densité de probabilité de  $\underline{Y}_{P,n}|\underline{X}_n$  dans le plan complexe est donnée en Fig. 1.

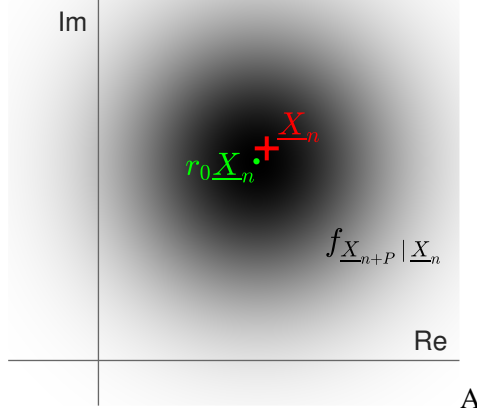


FIGURE 1 – Représentation dans le plan de Nyquist de la densité de probabilité de  $\underline{X}_{n+P}|\underline{X}_n$ , en faisant l'approximation de l'Eq. (8) (le point vert est au centre de la densité de probabilité).

### 2.1.2 Étude de l'amplitude

La variation d'amplitude sur une période est donnée par l'étude de  $|\underline{Y}_{P,n}|\underline{X}_n$ , dont on peut montrer que l'espérance vaut :

$$\mathbb{E} [|\underline{Y}_{P,n}|\underline{X}_n] \approx r_0|\underline{X}_n| + \frac{\pi\sigma^2}{2r_0m^2\omega_a^3\Delta t|\underline{X}_n|}. \quad (9)$$

Ainsi, pour  $|\underline{X}_n|$  suffisamment grand, l'amplitude en espérance des oscillations du système à la période suivante devrait baisser, et à l'inverse, pour  $|\underline{X}_n|$  suffisamment petit, elle devrait augmenter. Le cas limite où cette amplitude devrait se maintenir exactement, que l'on notera  $A_{\text{ref}}$ , vaut par l'Eq. (9) :

$$A_{\text{ref}} \approx \frac{\sigma}{2m\omega_a\sqrt{r_0\mu\Delta t}}. \quad (10)$$

Pour estimer la dérivée de l'amplitude des oscillations du système quand celle-ci est égale à sa valeur de référence  $A_{\text{ref}}$ , on s'intéresse maintenant à la variance de  $|\underline{Y}_{P,n}|\underline{X}_n$ , qui s'exprime par :

$$\text{Var} [|\underline{Y}_{P,n}|\underline{X}_n] \approx \frac{\pi\sigma^2}{m^2\omega_a^3\Delta t}. \quad (11)$$

On obtient ensuite une estimation de cette dérivée que l'on note  $\dot{A}_{\text{ref}}$  :

$$\dot{A}_{\text{ref}} := \frac{1}{P\Delta t} \sqrt{\text{Var} (|\underline{Y}_{P,n}|\underline{X}_n = A_{\text{ref}})} \approx \frac{\sigma}{2m\sqrt{\pi\omega_a\Delta t}}. \quad (12)$$

On a alors en combinant les Eqs. (10) et (12), et toujours sous l'hypothèse d'un amortissement faible, que :

$$\frac{\dot{A}_{\text{ref}}}{A_{\text{ref}}} \ll \omega_a. \quad (13)$$

Ainsi, on peut considérer que sur une période d'oscillation du système, son amplitude reste à peu près constante.

### 2.1.3 Étude de la phase

On définit maintenant  $\Omega_{P,n}$ , la pulsation instantanée du système sur une période, comme :

$$\Omega_{P,n} := \frac{1}{P\Delta t} \left( 2\pi + \arg \left( \frac{X_{n+P}}{X_n} \right) \right) \approx \omega_a \left( 1 + \frac{1}{2\pi} \arg \left( \frac{Y_{P,n}}{X_n} \right) \right). \quad (14)$$

On montre alors, à partir de l'Eq. (8), que cette pulsation instantanée a comme espérance :

$$\mathbb{E} [\Omega_{P,n} | \underline{X}_n] \approx \omega_a, \quad (15)$$

et comme variance :

$$\text{Var} (\Omega_{P,n} | \underline{X}_n) \approx \left( \frac{\sigma}{2m|\underline{X}_n|\sqrt{\pi\omega_a\Delta t}} \right)^2. \quad (16)$$

Ainsi, comme en atteste l'Eq. (15), la pulsation instantanée du système sous excitation ambiante est en moyenne égale à celle du système en réponse libre  $\omega_a$ . Cette pulsation instantanée présente cependant une certaine dispersion autour de sa moyenne, dont l'écart type est inversement proportionnel à l'amplitude d'oscillation du système (voir Eq. (16)). Cette dispersion peut s'expliquer par le fait que pour de petites amplitudes, la force d'excitation  $w$  à laquelle le système est soumis n'est plus négligeable devant les forces d'inertie  $m\ddot{x}$  et de rigidité  $kx$ , qui régissent son comportement en réponse libre.

## 2.2 Cas non-linéaire

On considère maintenant que le système présente une faible non-linéarité en rigidité, modélisée par une force de rappel supplémentaire  $g(x)$ . L'Eq. (1) devient alors :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_p\dot{x} + \omega_p^2x + \frac{g(x)}{m} = \frac{w}{m}, \quad (17)$$

avec  $|g(x)| \ll |m\omega_p^2x|$ .

### 2.2.1 Réponse libre

Dans le cas d'une réponse libre  $x_{\text{libre}}$  de ce système, c'est à dire pour une excitation nulle  $w = 0$ , on peut utiliser l'approximation de Krylov-Bogoliubov de premier ordre [5], qui permet d'écrire :

$$x_{\text{libre}}(t) \approx A_{\text{libre}}(t) \cos(\omega_p t + \phi_{\text{libre}}(t)), \quad (18)$$

où  $A_{\text{libre}}$  et  $\phi_{\text{libre}}$  varient lentement devant la période du système, et vérifient le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{A}_{\text{libre}} \\ \dot{\phi}_{\text{libre}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_A(A_{\text{libre}}) \\ H_\phi(A_{\text{libre}}) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

avec  $H_A$  et  $H_\phi$  des fonctions dépendant uniquement de  $A_{\text{libre}}$  et que l'on n'explicitera pas ici. Ainsi, pour une amplitude donnée  $A_0$ , le système non-linéaire présente un comportement analogue à celui d'un système linéaire dont le pôle  $\tilde{\lambda}(A_0)$  peut s'écrire :

$$\tilde{\lambda}(A_0) = i(\omega_p + H_\phi(A_0)) + \frac{H_A(A_0)}{A_0}. \quad (20)$$

Pour la partie réelle de ce pôle, la méthode de Krylov-Bogoliubov donne, comme pour le cas linéaire,  $H_A(A_0)/A_0 = -\mu$ . Pour sa partie imaginaire, on utilisera  $\tilde{\omega}(A_0)$ , la pulsation du système non-linéaire non amorti à l'amplitude  $A_0$  (i.e. réponse à l'Eq. (17) en remplaçant  $\zeta$  et  $w$  par 0) plutôt que  $\omega_p + H_\phi(A_0)$ , car des simulations numériques montrent qu'elle est une meilleure approximation pour les systèmes peu amortis en réponse libre. Le pôle s'écrit donc :

$$\tilde{\lambda}(A_0) = i\tilde{\omega}(A_0) - \mu. \quad (21)$$

### 2.2.2 Réponse à une excitation ambiante

Enfin, pour traiter le cas où le système est soumis à une excitation ambiante, caractérisée par les Eqs. (3) et (4), on commence par remarquer que l'amplitude des oscillations varie lentement devant leur période (Eq. (13)), et qu'on peut donc la considérer constante sur une période. Comme expliqué précédemment, on a alors un comportement analogue à celui d'un système linéaire, dont le pôle est caractérisé par les Eqs. (20) et (21). Tous les résultats énoncés pour le système linéaire s'appliquent alors, avec en particulier l'Eq. (15) qui devient :

$$\mathbb{E} [\Omega_{p,n} | \underline{X}_n] \approx \tilde{\omega}(|\underline{X}_n|). \quad (22)$$

L'espérance de la pulsation instantanée du système non-linéaire sous excitation ambiante est donc environ égale à celle de sa réponse libre.

## 3 Utilisation de la transformée en ondelettes

### 3.1 Définition et rappels

La Transformée en Ondelettes Continue (TOC) est un outil d'analyse temps-fréquence, particulièrement adapté à l'étude des signaux modulés en amplitude et en phase [2, 3]. On peut l'écrire, pour un signal  $u$  :

$$T_\psi[u](t, f) = 2\pi f \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \psi(2\pi f(t - \tau)) d\tau, \quad (23)$$

où  $\psi$  désigne une fonction complexe appelée ondelette mère. Cette définition écrite directement dans le plan temps-fréquence, au lieu de celle classique du plan temps-échelle, permet une utilisation plus facile de l'outil. Elle nécessite cependant une normalisation et un centrage de l'ondelette mère dans le domaine de Fourier, que l'on considérera acquis par la suite. On prendra pour la suite de cette étude l'ondelette mère complexe de Morlet  $\psi_Q$ , pour ses bonnes propriétés mathématiques (notamment son incertitude minimale dans le plan temps-fréquence  $\mu_\psi = 1/2$ ), la rendant particulièrement adaptée à l'analyse des signaux modulés en amplitude et en phase. Celle-ci s'exprime alors :

$$\psi_Q(\theta) = \frac{1}{Q\sqrt{\pi}} \exp(i\theta) \exp\left(-\frac{\theta^2}{4Q^2}\right), \quad (24)$$

avec  $Q$  un paramètre de l'ondelette mère appelé facteur de qualité, caractérisant sa dispersion dans le domaine de Fourier [3, 4]. Comme évoqué précédemment,  $\psi_Q$  est ici préalablement normalisée et centrée dans le domaine de Fourier.

Dans le cas d'un signal  $u$  modulé en amplitude et en phase :

$$u(t) = A(t) \cos \phi(t), \quad (25)$$

avec des variations de  $A$  lentes devant  $\phi$ . On obtient les relations suivantes [2] sur l'arête  $f_r$  de la transformée, définie telle que :

$$f_r(t) := \underset{f}{\operatorname{argmax}} |T_\psi[u](t, f)| \approx \dot{\phi}(t), \quad (26)$$

et son amplitude  $A_r$  :

$$A_r(t) := \max_f |T_\psi[u](t, f)| \approx A(t). \quad (27)$$

D'autres définitions de l'arête, ou des arêtes de la TOC existent, notamment fondées sur l'étude de sa phase, mais on utilisera celle-ci pour sa simplicité et la stabilité de son implémentation numérique [2].

### 3.2 Utilisation pour les systèmes non-linéaires sous excitation ambiante

En appliquant la TOC sur la réponse d'un système décrit en Eq. (17) à une excitation ambiante, on obtient à partir de son arête une estimation de la fréquence instantanée du système (Eqs. (14) et (26)) :

$$\Omega_{p,n} \approx 2\pi f_r(t_n), \quad (28)$$

et à partir de son amplitude, une estimation de l'amplitude de ses oscillations (Eq. (27)) :

$$|\underline{X}_n| \approx A_r(t_n). \quad (29)$$

On peut ensuite, à partir de la valeur moyenne de  $f_r$  à  $A_r$  donné, estimer  $\tilde{\omega}(A_0)$ , la pulsation du système non amorti à l'amplitude  $A_0$  (voir Eq. (22)), caractérisant ainsi sa non-linéarité. En pratique, avec des signaux numériques, il est très peu probable d'obtenir plusieurs fois exactement la même valeur pour  $A_r$ , et donc impossible d'effectuer une moyenne des valeurs de  $f_r$  à  $A_r$  donné. Pour y remédier, il suffit de regrouper les valeurs obtenues pour  $A_r$  en plusieurs petits intervalles, de façon à obtenir un échantillon assez grand pour effectuer une moyenne des  $f_r$  correspondants (similairement à ce qui peut être fait pour calculer un histogramme par exemple).

Enfin, l'obtention d'une arête précise à partir de la TOC (approximations des Eqs. (26) et (27)) est conditionnée par le choix d'un facteur de qualité  $Q$  adapté. Plusieurs bornes existent dans la littérature, en particulier pour les systèmes en réponse libre [3, 4], garantissant entre autres la séparation des différentes fréquences propres dans le cas de systèmes à plusieurs modes. Il convient donc de déterminer sous quelle condition sur le facteur de qualité  $Q$ , l'extraction d'une arête à partir de la TOC donne des résultats précis pour un système sous excitation ambiante. Pour cela, la dispersion temporelle de la TOC, proportionnelle à  $Q$  dans le cas de l'ondelette mère de Morlet, doit être bien inférieure au temps caractéristique de variation de l'amplitude du signal,  $A_{\text{ref}}/\dot{A}_{\text{ref}} \approx \sqrt{\pi}/\sqrt{\mu\omega_a}$ . On obtient alors, à partir des Eqs. (10) et (12), la borne suivante :

$$Q \leq \frac{1}{c_A} \sqrt{\frac{\pi}{\zeta}}, \quad (30)$$

où  $c_A$  est un facteur de sécurité, traduisant le rapport minimal entre le temps caractéristique de variation du signal et celui de la TOC. Il sera fixé pour la suite de cette étude à  $c_A = 3$ .

## 4 Simulations numériques

### 4.1 Cas d'étude

Afin d'étayer la méthode proposée, des simulations numériques d'un système non-linéaire sous excitation ambiante sont mises en oeuvre. On prend comme cas d'étude un système mécanique dont la non-linéarité, caractérisée par une rigidité affine par morceaux, est présentée en Fig. 2.

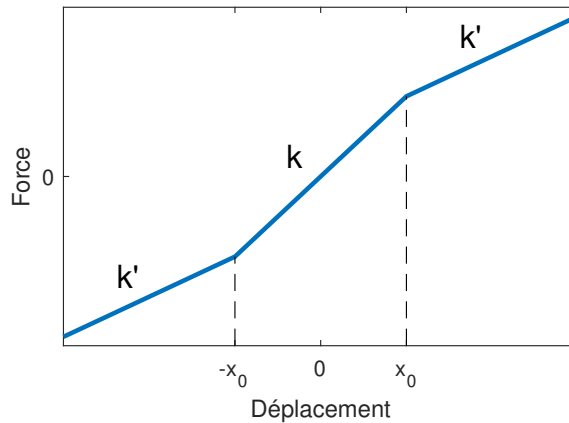


FIGURE 2 – Courbe de rigidité  $x \mapsto kx + g(x)$  du système étudié.

L'Eq. (17), régissant le mouvement du système soumis à une excitation ambiante, est intégrée numériquement. Les simulations sont faites avec la méthode d'intégration de Runge-Kutta explicite d'ordre 4 [12], avec un pas de temps  $\Delta t = 1$  ms. Le système est supposé être initialement au repos, et un temps d'adaptation, pendant lequel celui-ci gagne de l'énergie et atteint une amplitude nominale, est écarté des analyses par transformée en ondelettes. Ce temps est choisi cinq fois supérieur au temps caractéristique d'amortissement du système linéaire,  $(\zeta\omega_p)^{-1}$ . La durée totale des simulations,  $T$ , hors temps d'adaptation, est de  $T = 10000$  s. Les caractéristiques du système linéaire, sa fréquence propre  $f_p = \omega_p/(2\pi)$  et

son amortissement réduit  $\zeta$ , sont fixées à  $f_p = 10\text{Hz}$  et  $\zeta = 1\%$ , respectivement. Les données du système et de son intégration numérique sont résumées en Tab. 1.

| Intégration numérique |            | Système linéaire |         | Non-linéarité |       |
|-----------------------|------------|------------------|---------|---------------|-------|
| $T$                   | $\Delta t$ | $f_p$            | $\zeta$ | $x_0$         | $k'$  |
| 10000s                | 1ms        | 10Hz             | 1%      | 6             | $k/2$ |

TABLE 1 – Paramètres des simulations numériques.

Pour le calcul de la TOC, comme mentionné précédemment, l'ondelette mère de Morlet est retenue, avec pour facteur de qualité  $Q = 5.91$ , correspondant à la borne introduite en Eq. (30). On enlève de plus la zone d'effets de bords présents en début et fin de signal [3, 4].

## 4.2 Résultats

Un extrait de la réponse du système obtenue numériquement est présenté en Fig. 3, avec sa TOC. En Fig. 4, on peut voir l'arête extraite de cette TOC en fonction de son amplitude, sa moyenne à amplitude fixée, ainsi que la fréquence du système non amorti.

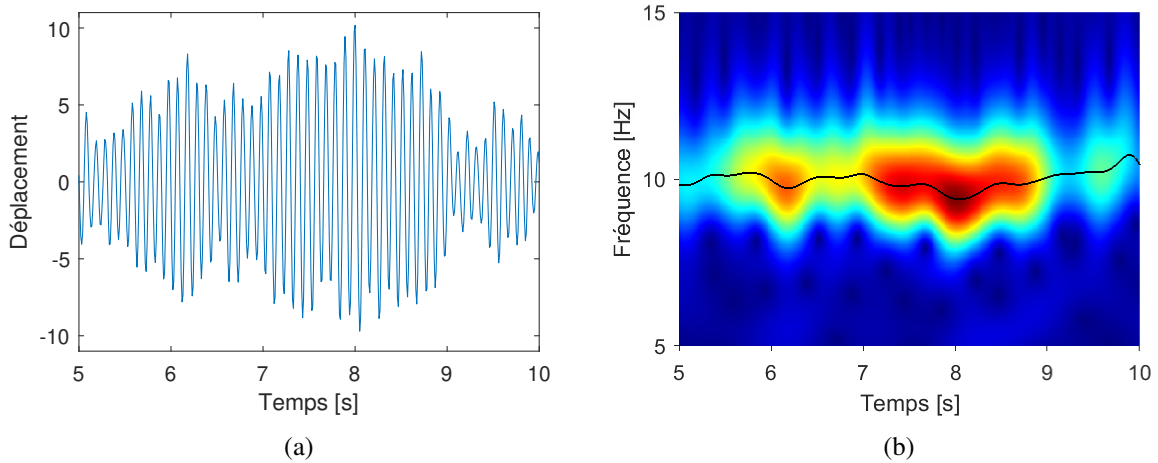


FIGURE 3 – Simulations numériques : (a) extrait de la réponse du système en fonction du temps, (b) module de sa TOC, avec tracé de l'arête associée (courbe noire).

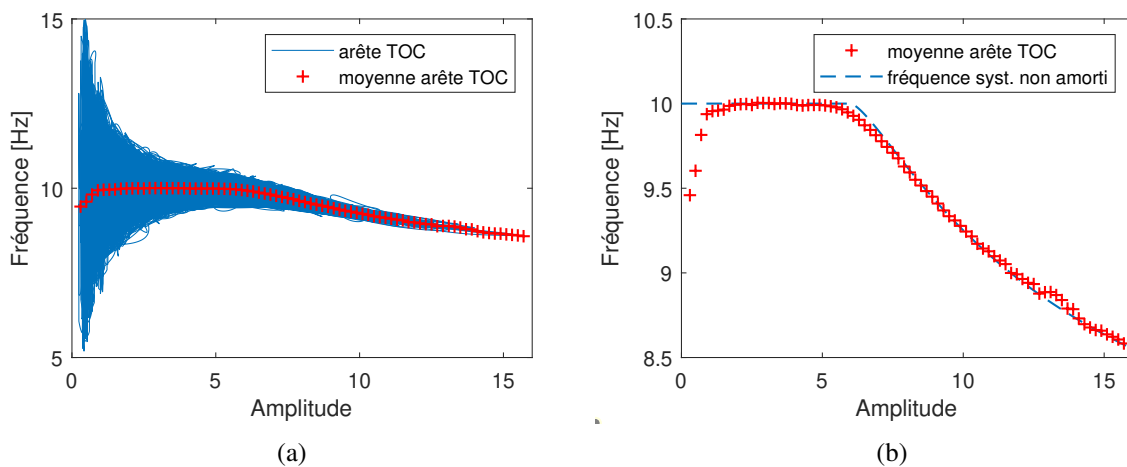


FIGURE 4 – Simulations numériques : (a) arête de la TOC en fonction de son amplitude (bleu), avec sa moyenne par groupes de 0.2 (rouge), (b) moyenne de l'arête de la TOC (rouge), et fréquence du système non amorti  $\tilde{\omega}(A)/(2\pi)$  (bleu).



On retrouve une bonne concordance avec les résultats attendus par l'étude analytique. En effet, la Fig. 4a montre une dispersion de la fréquence instantanée du système inversement proportionnelle à son amplitude, comme énoncé en Eq. (16). De plus, on peut voir en Fig. 4b une quasi-superposition entre la fréquence moyenne du système sous excitation ambiante, et sa fréquence non amortie, comme attendu en Eq. (22).

On remarque cependant un écart entre les deux courbes de la Fig. 4b pour les valeurs de faible amplitude. Cela s'explique par le fait que le terme d'erreur de l'approximation de l'Eq. (22) est inversement proportionnel à  $|\underline{X}_n|$ . D'autres simulations numériques montrent une tendance à la baisse de ce biais pour de plus faibles valeurs d'amortissement du système.

## 5 Conclusions

L'étude analytique proposée en première partie, portant sur un système mécanique faiblement non-linéaire et faiblement amorti soumis à une excitation ambiante, a permis d'établir des relations simples sur son amplitude et sa fréquence instantanées. On y montre notamment que cette fréquence, à une amplitude donnée, a pour espérance celle du système en réponse libre. L'utilisation de la TOC est ensuite présentée, pour extraire de la réponse du système ses amplitude et fréquence instantanées. Une nouvelle borne sur le facteur de qualité de la TOC est introduite, indispensable à l'obtention de résultats précis. Enfin, des simulations numériques, portant sur un cas d'étude simple, sont mises en oeuvre. Elles montrent une bonne concordance entre les résultats théoriques et numériques.

## Références

- [1] A. Graps, *An Introduction to Wavelets*, IEEE Computational Science and Engineering, 50–61, 1995.
- [2] B. Torrèsani. *Analyse continue par ondelettes*, EDP Sciences, 2012.
- [3] T.-P. Le, P. Argoul. *Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 73-100, 2004.
- [4] S. Erlicher, P. Argoul. *Modal identification of linear non-proportionally damped systems by wavelet transform*, Mechanical Systems and Signal Processing, Elsevier, 1386-1421, 2007.
- [5] N.M. Krylov, N.N. Bogoliubov. *Introduction to Non-linear Mechanics*, Princeton University Press, 1949.
- [6] W.J. Staszewski. *Identification of non-linear systems using multi-scale ridges and skeletons of the wavelet transform*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 639-658, 1998.
- [7] J. Lardies, M.-N. Ta. *A wavelet-based approach for the identification of damping in non-linear oscillators*, International Journal of Mechanical Sciences, Elsevier, 1262-1281, 2005.
- [8] M.J. Brenner. *Non-stationary dynamics data analysis with wavelet-SVD filtering*, Mechanical Systems and Signal Processing, Elsevier, 765-786, 2003.
- [9] T.-P. Le, P. Paultre. *Modal identification based on continuous wavelet transform and ambient excitation tests*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 2023-2037, 2012.
- [10] T.-P. Le, P. Paultre. *Modal identification based on the time–frequency domain decomposition of unknown-input dynamic tests*, International Journal of Mechanical Sciences, Elsevier, 41-50, 2013.
- [11] S. Nagarajaiah, B. Basu, Y. Yang. *Output only modal identification and structural damage detection using timefrequency and wavelet techniques for assessing and monitoring civil infrastructures*, Sensor Technologies for Civil Infrastructures, Elsevier, 93-144, 2014.
- [12] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et Équations différentielles*, EDP sciences, 2006.