



HAL
open science

Majoration et minoration presque sure des extremums de suites de variables aléatoires stationnaires m-dependantes de même loi

Maïa Berkane

► **To cite this version:**

Maïa Berkane. Majoration et minoration presque sure des extremums de suites de variables aléatoires stationnaires m-dependantes de même loi. Annales de l'ISUP, 1984, XXIX (2), pp.1-12. hal-03690292

HAL Id: hal-03690292

<https://hal.science/hal-03690292>

Submitted on 8 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MAJORATION ET MINORATION PRESQUE SURE DES
EXTREMUMS DE SUITES DE VARIABLES ALEATOIRES
STATIONNAIRES M-DEPENDANTES DE MEME LOI

par

Maia BERKANE

Universite PARIS VI.

Sommaire : Si X_1, X_2, X_3, \dots sont des v.a. stationnaires m-dépendantes de même loi et $Z_n = \inf (X_1, X_2, \dots, X_n)$, alors on peut encadrer presque sûrement Z_n de la même façon que dans le cas de l'indépendance des v.a. X_i .

1. INTRODUCTION

La théorie des extrêmes de suites stationnaires a suscité beaucoup d'intérêt. On s'est aperçu qu'en général, les phénomènes observés ne sont pas, dans la plupart des cas, indépendants. Les travaux développés par BERMAN (1), LEADBETTER (5),... concernant la loi limite des extrêmes ont abouti aux mêmes résultats que ceux des suites de v.a. indépendantes moyennant certaines conditions de régularité.

Notre étude poursuit cette option, dans la recherche d'encadrements presque sûrs des extremums de suites de v.a. m-dépendantes. On montre que les encadrements établis par M. DEHEUVELS (2) dans le cas indépendant sont valables pour le cas de la m-dépendance.

A. Rappels des résultats établis par M. DEHEUVELS.

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v. a. indépendantes de même fonction de répartition F . Si on pose :

$$G(t) = \inf \{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq t\}$$

alors si $\{U_n, n \geq 1\}$ est une suite de v.a. indépendantes uniformément distribuées sur $[0,1]$, $\{G(U_n), n \geq 1\}$ est identique en loi à $\{X_n, n \geq 1\}$; par suite, l'encadrement de $\inf(X_1, \dots, X_n)$ se ramène à l'encadrement de $\inf(U_1, \dots, U_n)$, de même pour $\sup(X_1, \dots, X_n)$ on peut donc se ramener au cas uniforme.

Proposition 1-A :

Minoration presque sûre du minimum soit $\{U_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a. uniformément distribuées sur $[0,1]$; $Z_n = \inf(U_1, \dots, U_n)$

$p \geq 1, A > 0$, avec $\text{Log}_p x = \text{Log}(\text{Log}_{p^{-1}} x)$ et $\text{Log}_1 = \text{Log} x$

presque sûrement on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{Z_n (n \text{Log}_2 \text{Log}_2 \dots (\text{Log}_p)^{1+A})\} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{Z_n (\text{Log}_2 \text{Log}_2 \dots \text{Log}_p)\} = 0$$

La démonstration est une application directe du lemme de Borel Cantelli aux évènements indépendants $\{U_n < u_n\}$.

Proposition 2-A :

Majoration presque sûre de Z_n . Considérons les temps de passage définis par : $\tau_\varepsilon = \inf \{n \geq 1, Z_n \leq \varepsilon\}$.

presque sûrement pour $n \rightarrow \infty, A > 0$, on a

$$Z_n < \frac{1}{n} (\text{Log}_2 + 2\text{Log}_3 + \text{Log}_4 + \dots + (1+A)\text{Log}_p)$$

ce qui est équivalent à :

$$\tau_{\varepsilon_n} < n (\text{Log}_2 + 2\text{Log}_3 + \text{Log}_4 + \dots + (1+A)\text{Log}_p)$$

où $\varepsilon_n = 1/n$

Preuve : pour $A > 0$, posons

$$C_n = \{\tau_{\varepsilon_n} > n (\text{Log}_2 + 2\text{Log}_3 + \dots + (1+A)\text{Log}_p, \tau_{\varepsilon_{n+1}} - \tau_{\varepsilon_n} > 0\}.$$

$$D_n = \{\tau_{\varepsilon_n} \leq n (\text{Log}_2 + 2\text{Log}_3 + \dots + (1+A)\text{Log}_p)\}$$

$$\tau_{\varepsilon_{n+1}} > (n+1) (\text{Log}_2(n+1) + 2\text{Log}_3(n+1) + \dots + (1+A)\text{Log}_p(n+1))$$

Il est immédiat que $\sum P(C_n)$ et $\sum P(D_n)$ sont finies d'où le résultat.

B - Dans le cas de la m -dépendance, les propriétés des suites $\{\epsilon_n, n \geq 1\}$ ont été étudiées par M. HAIMAN (4). Nous allons rappeler les résultats obtenus.

THEOREME 1. B. Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a stationnaires 2-dépendantes de même loi $F(x)$. Posons : $\alpha(F) = \inf \{x, F(x) > 0\}$.

Il existe $u > \alpha(F)$ et des fonctions K et μ telles que si $x \in [\alpha(F), u]$, lorsque $n \rightarrow \infty$ on a :

$$q_n(x) = P \left\{ \inf_{i=1, \dots, n} X_i > x \right\} \sim K(x) \mu^n(x).$$

au voisinage de $\alpha(F)$, K et μ vérifient :

$$K(x) = 1 + O(F(x)).$$

$$\mu(x) + 1 - F(x) + P \{X_1 < x, X_2 < x\} + O(F^2(x)).$$

La démonstration de ce théorème est basée sur des considérations analytiques, utilisant les propriétés des séries entières.

Proposition 1-B :

$$\text{Supposons que : } \lim_{x \rightarrow \alpha(F)} \frac{P \{X_1 < x, X_2 < x\}}{F^2(x)} = 0,$$

$$q_n(x) = P \left\{ \inf_{i=1, \dots, n} X_i > x \right\}.$$

au voisinage de $\alpha(F)$, on a :

$$\sum_{n \geq 1} q_n(x) = \frac{1}{F(x)} (1 + O(F(x)))$$

$$\sum_{n \geq 1} n q_n(x) = \frac{1}{F^2(x)} (1 + O(F(x)))$$

$$\sum_{n \geq 1} n^2 q_n(x) = \frac{2}{F^3(x)} (1 + O(F(x)))$$

Cette proposition se déduit directement du théorème 1 - B.

Proposition 2-B . Supposons que la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ définie dans le théorème 1-B vérifie :

$$\lim_{\sup(x,z) \rightarrow 0} \sup \frac{P [X_1 < x, X_2 < y, z]}{\sup(x,z)(y-z)} < \infty$$

alors si $\tau_{\epsilon_n} = \inf \{j \geq 1, \inf(X_1, \dots, X_n) \leq \epsilon_n\}$, ϵ_n étant une suite strictement décroissante vers 0, on a :

$$E(\tau_{\epsilon_1}) = E(\tau_1) = \frac{1}{\epsilon_1} (1 + o_1(\epsilon_1)).$$

$$E(\tau_1^2) = \frac{2}{\epsilon_1^2} (1 + o_2(\epsilon_1))$$

$$\forall i > 2, E(t_i) = \frac{\epsilon_{i-1}^{-\epsilon_i}}{\epsilon_{i-1}} \cdot \frac{1}{\epsilon_i} (1 + o_3(\epsilon_{i-1}))$$

$$E(t_i^2) = \frac{\epsilon_{i-1}^{-\epsilon_i}}{\epsilon_{i-1}^2} \cdot \frac{2}{\epsilon_i^2} (1 + o_4(\epsilon_{i-1}))$$

$$E(\tau_1 \times t_i) = \frac{1}{\epsilon_i} \cdot \frac{\epsilon_{i-1}^{-\epsilon_i}}{\epsilon_{i-1}} \cdot \frac{1}{\epsilon_i} (1 + o_5(\epsilon_1))$$

$$\forall 2 \leq i < j, E(t_i, t_j) = \frac{\epsilon_{i-1}^{-\epsilon_i}}{\epsilon_{i-1} \times \epsilon_i} \cdot \frac{\epsilon_{j-1}^{-\epsilon_j}}{\epsilon_{j-1} \times \epsilon_j} (1 + o_6(\epsilon_{i-1}))$$

Les techniques de démonstration de cette proposition sont utiles pour la suite de notre étude c'est pourquoi nous donnons le calcul de la première et dernière formule.

1ère Formule.

$$\begin{aligned}
 P \{ \zeta_1 = n \} &= P \{ X_1 \geq \varepsilon_1, X_2 \geq \varepsilon_1, \dots, X_{n-1} \geq \varepsilon_1, X_n < \varepsilon_1 \} \\
 &= P \{ X_1 \geq \varepsilon_1, \dots, X_{n-2} \geq \varepsilon_1, X_n < \varepsilon_1 \} - P \{ X_1 \geq \varepsilon_1, \dots, X_{n-1} < \varepsilon_1, X_n < \varepsilon_1 \} \\
 &= P \{ X_1 \geq \varepsilon_1, \dots, X_{n-2} \geq \varepsilon_1 \} \cdot P \{ X_n < \varepsilon_1 \} - P \{ X_1 \geq \varepsilon_1, \dots, X_{n-1} < \varepsilon_1, X_n < \varepsilon_1 \}
 \end{aligned}$$

à cause de la deux-dépendance; donc

$$P \{ \zeta_1 = n \} = q_{n-2} [(\varepsilon_1) \varepsilon_1 + 0(P \{ X_1 < \varepsilon_1, X_2 < \varepsilon_1 \})] \quad , n \geq 2.$$

$$E(\zeta_1) = \sum_{n \geq 0} n p \{ \zeta_1 = n \} = \sum_{n \geq 0} n^k (\varepsilon_1) \mu^n (\varepsilon_1) = \frac{1}{\varepsilon_1} (1 + 0_1(\varepsilon_1))$$

Dernière formule : calcul de $E(t_i \times t_j)$, $2 \leq i < j$. Considérons le cas $j \geq i+2$.

soit $D = \{ \rho_1 \geq 1, n_i > 0, \rho_2 \geq 0, n_j > 0 \}$ et soit la fonction définie

sur D par :

$$\begin{aligned}
 P(\rho_1, n_i, \rho_2, n_j) &= P \{ \zeta_{\varepsilon_{i-1}} = \rho_1, \zeta_{\varepsilon_i} - \zeta_{\varepsilon_{i-1}} = n_i, \zeta_{\varepsilon_{j-1}} - \zeta_{\varepsilon_i} = \rho_2, \\
 &\zeta_{\varepsilon_j} - \zeta_{\varepsilon_{j-1}} = n_j \} \text{ alors } E(t_i \times t_j) = \sum_D P(\rho_1, n_i, \rho_2, n_j)
 \end{aligned}$$

soient les ensembles disjoints D_1 et D_2 dont la réunion est D :

$$D_1 = \{ \rho_1 \geq 1, n_i > 0, \rho_2 > 0, n_j > 0 \}$$

$$D_2 = \{ \rho_1 \geq 1, n_i > 0, \rho_2 = 0, n_j > 0 \}$$

calculons la somme quadruple précédente relative aux sous-ensembles Δ_1 de

D_1 et Δ_2 de D_2 .

$$\Delta_1 = \{\rho_1 \geq 2, n_i \geq 3, \rho_2 \geq 3, n_j \geq 3\}$$

$$\Delta_2 = \{\rho_1 \geq 2, n_i \geq 3, \rho_2 = 0, n_j \geq 3\} .$$

sur Δ_1 on a :

$$P(\rho_1, n_i, \rho_2, n_j) = q_{\rho_1-2}(\epsilon_{i-1}) \cdot q_{n_i-3}(\epsilon_i) \cdot q_{\rho_2-3}(\epsilon_{j-1}) \cdot q_{n_j-3}(\epsilon_j) \times \\ \times [\epsilon_{i-1} - \epsilon_i + O(F_1) + O(F_2)] \times [\epsilon_i - \epsilon_{j-1} + O(F_3) + O(F_4)] \times \\ \times [\epsilon_{j-1} - \epsilon_j + O(F_5) + O(F_6)] \times [\epsilon_j + O(F_7)] .$$

$$F_1 = P[X_1 < \epsilon_{i-1}, X_2 \in [\epsilon_i, \epsilon_{i-1}]] ; F_2 = P[X_1 \in [\epsilon_i, \epsilon_{i-1}], X_2 < \epsilon_i]$$

$$F_3 = P[X_1 < \epsilon_i, X_2 \in [\epsilon_{j-1}, \epsilon_i]] ; F_4 = P[X_1 \in [\epsilon_{j-1}, \epsilon_i], X_2 < \epsilon_{j-1}]$$

$$F_5 = P[X_1 < \epsilon_{j-1}, X_2 \in [\epsilon_j, \epsilon_{j-1}]] \quad F_6 = P[X_1 \in [\epsilon_j, \epsilon_{j-1}], X_2 < \epsilon_j]$$

$$F_7 = P[X_1 < \epsilon_j, X_2 < \epsilon_j] .$$

D'après l'hypothèse de la proposition, le produit des quatre derniers facteurs s'écrit :

$$(\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) (\epsilon_i - \epsilon_{j-1}) (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j) \epsilon_j (1 + O(\epsilon_{i-1})) .$$

sur Δ_2 , de manière analogue, on trouve :

$$P(\rho_1, n_i, \rho_2, n_j) = q_{\rho_1-2}(\epsilon_{i-1}) q_{n_i-3}(\epsilon_i) q_{n_j-3}(\epsilon_j) (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \times \\ \times (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j) \cdot \epsilon_j (1 + O(\epsilon_{i-1})) .$$

En appliquant la proposition 1-B, on obtient :

$$\sum_{\Delta_1 \cup \Delta_2} \Sigma \Sigma \Sigma = \frac{\epsilon_{i-1} - \epsilon_i}{\epsilon_{i-1} \epsilon_i} \cdot \frac{\epsilon_{j-1} - \epsilon_j}{\epsilon_{j-1} \cdot \epsilon_j} (1 + O(\epsilon_{i-1}))$$

$$\sum_{D_1 \cap \Delta_1} \Sigma \Sigma \Sigma = (\sum_{\Delta_1} \Sigma \Sigma \Sigma) O(\epsilon_{i-1})$$

$$\sum_{D_2 \cap \Delta_2} \Sigma \Sigma \Sigma = (\sum_{\Delta_2} \Sigma \Sigma \Sigma) O(\epsilon_{i-1})$$

Ce qui achève la démonstration, le cas $j = i+1$ se déduit du calcul précédent relatif à $\sum_{D_2} \Sigma \Sigma \Sigma$ en prenant $\epsilon_{j-1} = \epsilon_i$, $\epsilon_j = \epsilon_{i+1}$

2 - Encadrements presque sûrs dans le cas de la m-dépendance.

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a stationnaires m-dépendantes uniformes sur $[0,1]$, $Z_n = \inf(X_1, \dots, X_n)$ rappelons la définition de v.a m-dépendantes. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ sont dites m-dépendantes si pour $i_1 < i_2 < \dots$

$i_p < j_1 < j_2 \dots < j_q$ on a :

$$F_{i_1 i_2 \dots i_p j_1 \dots j_q}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}, x_{j_1}, \dots, x_{j_q}) = \\ = F_{i_1 \dots i_p}(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) \cdot F_{j_1 \dots j_q}(x_{j_1}, \dots, x_{j_q}) \text{ dès que } j_1 - i_p \geq m$$

en étant une suite strictement décroissante vers 0, on pose :

$$\overline{G}_{\epsilon_n} = \inf \{j \geq 1, Z_j \leq \epsilon_n\}.$$

A - Majoration presque sûre de Z_n .

Proposition 1 - 2 . Supposons que la suite $\{x_n, n \geq 1\}$ vérifie :

$$\limsup_{\sup(x,z) \rightarrow 0} \frac{P \{X_1 < x, X_2 \in [y,z]\}}{\sup(x,z)(y-z)} < \infty$$

alors presque sûrement, lorsque $n \rightarrow \infty$, $A > 0, p \geq 4$, on a :

$$Z_n < \frac{1}{n} (\text{Log}_2^n + 2\text{Log}_3^n + \dots + (1+A)\text{Log}_p^n)$$

Preuve : On suit le plan de la démonstration dans le cas où les X_i sont indépendantes.

Il s'agit donc de prouver que :

$$\bar{C}_{\epsilon_n} < n(\text{Log}_2^n + 2\text{Log}_3^n + \dots + (1+A)\text{Log}_p^n)$$

p.s lorsque $n \rightarrow \infty$, $A > 0, p \geq 4$, soit

$$C_n = \{ \bar{C}_{\epsilon_n} > n(\text{Log}_2^n + 2\text{Log}_3^n + \text{Log}_4^n + \dots + (1+A)\text{Log}_p^n, \bar{C}_{\epsilon_{n+1}} - \bar{C}_{\epsilon_n} > 0 \}$$

$$D_n = \{ \bar{C}_{\epsilon_n} \leq n(\text{Log}_2^n + 2\text{Log}_3^n + \dots + (1+A)\text{Log}_p^n$$

$$\bar{C}_{\epsilon_{n-1}} > (n+1)(\text{Log}_2^{n+1} + 2\text{Log}_3^{n+1} + \text{Log}_4^{n+1} + \dots + (1+A)\text{Log}_p^{n+1})$$

Posons $N(n, A) = n(\text{Log}_2^n + 2\text{Log}_3^n + \dots + (1+A)\text{Log}_p^n)$.

D'après la proposition 2-B, on a :

$$P(C_n) = \sum_{r=3}^{\infty} \sum_{\rho=N(n, A)+1}^{\infty} P \{ \bar{C}_{\epsilon_n} = \rho, \bar{C}_{\epsilon_{n+1}} - \bar{C}_{\epsilon_n} = r \}$$

$$= \sum_{r=3}^{\infty} \sum_{\rho=N(n, A)+1}^{\infty} q_{p-2}(\epsilon_n) q_{r-3}(\epsilon_{n+1}) (\epsilon_n - \epsilon_{n+1}) \epsilon_{n+1} (1+O(\epsilon_n)).$$

or d'après la proposition 1-B

$$\sum_{\rho=N(n, A)+1}^{\infty} q_{p-2}(\epsilon_n) = \sum_{\rho=2}^{\infty} q_{p-2}(\epsilon_n) - \sum_{\rho=2}^{N(n, A)} q_{p-2}(\epsilon_n) =$$

$$= \frac{1}{\epsilon_n} (1+O(\epsilon_n)) - (1+O(\epsilon_n)) \frac{1}{\epsilon_n} [1 - (1-\epsilon_n)^{N(n, A)}] =$$

$$= \frac{1}{\epsilon_n} (1 - \epsilon_n)^{N(n, A)} (1+O(\epsilon_n)). \text{ et } \sum_{r=3}^{\infty} q_{r-3}(\epsilon_{n+1}) = \frac{1}{\epsilon_{n+1}} (1+O(\epsilon_{n+1})).$$

donc

$$P(C_n) = (\epsilon_n - \epsilon_{n+1}) \frac{1}{\epsilon_n} (1 - \epsilon_n)^{N(n,A)} (1 + O(\epsilon_n)).$$

et

$$\sum_{n \geq 1} P(C_n) = \frac{\epsilon_n - \epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} (1 + O(\epsilon_n)) \sum_{n \geq 1} (1 - \epsilon_n)^{N(n,A)}$$

Il est évident que si $A > 0$, $\sum P(C_n) < \infty$.

d'autre part :

$$\begin{aligned} P(D_n) &= P[\zeta_{\epsilon_n} \leq N(n,A), \zeta_{\epsilon_{n+1}} > N(n+1,A)] \\ &= \sum_{r=N(n+1)}^{\infty} \frac{N(n,A)}{\rho=2} q_{p-2}(\epsilon_n) q_{r-p-3}(\epsilon_{n+1}) (\epsilon_n - \epsilon_{n+1}) \epsilon_{n+1} (1 + O(\epsilon_n)). \\ &\triangleq \sum_{r=N(n+1,A)}^{\infty} \frac{N(n,A)}{\rho=2} \cdot \frac{q_{-2}(\epsilon_n)}{\mu^\rho(\epsilon_{n+1})} \cdot q_{r-3}(\epsilon_{n+1}) (\epsilon_n - \epsilon_{n+1}) \epsilon_{n+1} (1 + O(\epsilon_n)) \end{aligned}$$

où $\mu(\epsilon_{n+1}) = 1 - \epsilon_{n+1} + (P[X_1 < \epsilon_{n+1}, X_2 < \epsilon_{n+1}]) + O(\epsilon_{n+1}^2)$.

comme défini dans le théorème 1-B.

donc :

$$\begin{aligned} P(D_n) &= \frac{1 - \left(\frac{1 - \epsilon_n}{1 - \epsilon_{n+1}}\right)^{N(n,A)}}{(\epsilon_n - \epsilon_{n+1})(1 - \epsilon_{n+1})} (1 + O(\epsilon_n)) \cdot \frac{(1 - \epsilon_{n+1})^{N(n+1,A)-3}}{\epsilon_{n+1}} (1 + O(\epsilon_{n+1})) \\ &= \frac{1}{(\epsilon_{n+1})(\epsilon_n - \epsilon_{n+1})(1 - \epsilon_{n+1})} \left(1 - \left(\frac{1 - \epsilon_n}{1 - \epsilon_{n+1}}\right)^{N(n,A)}\right) \times \\ &\quad \times (1 - \epsilon_{n+1})^{N(n+1,A)-3} \times (1 + O(\epsilon_{n+1})) \\ &= \frac{1}{\epsilon_{n+1}(\epsilon_n - \epsilon_{n+1})} \cdot (1 - \epsilon_{n+1})^{N(n+1,A)-2} \left(1 - \left(\frac{1 - \epsilon_n}{1 - \epsilon_{n+1}}\right)^{N(n,A)}\right) (1 + O(\epsilon_n)) \end{aligned}$$

$\sum_{n \geq 1} P(D_n)$ est finie pour $A > 0$.

On déduit de la convergence des séries :

$$\sum_{n \geq 1} p(C_n) \text{ et } \sum_{n \geq 1} P(D_n) \text{ que pour } A > 0$$

$$Z_n < \frac{1}{n} (\text{Logn} + 2\text{Logn} + \text{Logn} + \dots + (1+A)\text{Logn})$$

p.s. lorsque $n \rightarrow \infty$

Minoration presque sûre de Z_n .

Proposition 2-2 . Presque sûrement, lorsque $n \rightarrow \infty$, $A > 0$, $P \geq 4$ on a :

$$Z_n > \frac{1}{n \text{Logn} \text{Logn}_2 \dots (\text{Logn})^{1+A}}$$

preuve puisque :

$$\sum_{n \geq 1} P \left\{ X_n < \frac{1}{n \text{Logn} \text{Logn}_2 \dots (\text{Logn})^{1+A}} \right\}$$

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \text{Logn} \text{Logn}_2 \dots (\text{Logn})^{1+A}} \text{ et que cette série converge pour}$$

$$A > 0, \text{ il s'ensuit que } P \left\{ Z_n < \frac{1}{n \text{Logn} \text{Logn}_2 \dots (\text{Logn})^{1+A}} \text{ i.o.} \right\} = 0$$

BIBLIOGRAPHIE .

- [1] SM. BERMAN (1962) Limiting distribution of the maximum term in a sequence of dependent random variables *Ann. Math statist*, 33, 894-908.
SM. BERMAN (1964) : Limit theorems for the maximum term in stationary sequences. *Ann. Math statist*, 35, 502-516.
- [2] DEHEUVELS P. : Majoration et minoration presque sûre des extremums de suites de v.a. indépendantes, de même loi; *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 278, (1974).
DEHEUVELS P. : Majoration et minoration presque sûre optimale des éléments de la statistique ordonnée d'un échantillon croissant de v.a. indépendantes. *Accad Naz Dei Lincei Dal*, Vol LVI, 1974, Fasc. 5.
DEHEUVELS P. : Valeurs extrémales d'échantillons croissants d'une v.a. réelle. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol X, n° 1, (1974). 89 - 114.
- [3] GALAMBOS J. : The asymptotic theory of extreme order -statistics. John Wiley & sons, New York, 1978.
- [4] HAIMAN G. : Valeurs extrémales de suite stationnaires de v.a. m-dépendantes. *Ann. I.H. Poincaré*, 17, 3, 1981 .
- [5] LEADBETTER MR. : Extreme value theory under weak mixing conditions (1978).

Reçu en Octobre 1982