



HAL
open science

Modélisation des diélectriques par impédance de surface d'ordre élevé

Christian Daveau

► **To cite this version:**

Christian Daveau. Modélisation des diélectriques par impédance de surface d'ordre élevé. [Rapport de recherche] CY Cergy Paris Université; laboratoire AGM, CNRS UMR 8088. 2022. hal-03690123

HAL Id: hal-03690123

<https://hal.science/hal-03690123v1>

Submitted on 7 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation des diélectriques par impédance de surface d'ordre
élevé

Daveau Christian

CY Cergy Paris Université
Laboratoire AGM
UMR 8088 du CNRS
F-95000 Cergy

1 Méthode de distribution

1.1 Théorie de distribution

Définition 1.1 *Formule de saut à travers une surface bornée*

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 , avec une frontière Γ Lipschitzienne, soit f fonction régulière dans \mathbb{R}^3 , tel que C^1 -régulière de chaque côté de Γ . Alors le saut de la fonction discontinue f à travers Γ est noté par, [?]:

$$[f]_{\Gamma} = f|_{\Gamma_-} - f|_{\Gamma_+}$$

avec $f|_{\Gamma_-}$, $f|_{\Gamma_+}$ sont les valeurs de f à l'intérieur et l'extérieur du domaine délimité par Γ respectivement. La normale \mathbf{n} à Γ est orienté de Γ_- à Γ_+ .

Proposition 1.1 *Avec les hypothèses de régularité de Ω , f , on a :*

le gradient au sens des distributions défini pour des fonctions qui sont discontinues à une interface Γ

$$\nabla f = (\nabla f) - [f]_{\Gamma} \mathbf{n} \delta_{\Gamma}$$

où (∇f) est le gradient usuel de la fonction la où il existe.

$$\partial_i f = (\partial_i f) - [f]_{\Gamma} \mathbf{n}_i \delta_{\Gamma}$$

$$\operatorname{div} f = (\operatorname{div} f) - [\mathbf{n} \cdot f]_{\Gamma} \delta_{\Gamma}$$

$$\operatorname{rot} f = (\operatorname{rot} f) - [\mathbf{n} \times f]_{\Gamma} \delta_{\Gamma}$$

En prenant les triangles comme domaine de calcul, on a des masses de Dirac qui vont apparaitre sur les arêtes des bords des triangles car la divergence des fonctions de Rao sont constantes par triangle :

$$\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{f}_n(x) = \begin{cases} +\frac{l_n}{|T_n^+|} & \text{dans } T_n^+ \\ -\frac{l_n}{|T_n^-|} & \text{dans } T_n^- \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1)$$

Définition 1.2

$$\varepsilon_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } T_i^+, \\ -1 & \text{sur } T_i^-, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1.3 *On définit le saut d'une fonction constante par morceaux par :*

$$\begin{aligned} [u]_{/i} &= (\varepsilon_i u)^{T_i^+} + (\varepsilon_i u)^{T_i^-} \\ &= \varepsilon_i^{T_i^+} u^{T_i^+} + \varepsilon_i^{T_i^-} u^{T_i^-} \\ &= u^{T_i^+} - u^{T_i^-} \end{aligned}$$

avec la trace de u sur T_i^+ et T_i^- notée $u^{T_i^+}$ et $u^{T_i^-}$ respectivement.

On a ainsi pour les sauts des divergences.

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot f_j]_{/i} &= [(\varepsilon_i \nabla \cdot f_j)^{T_i^+} + (\varepsilon_i \nabla \cdot f_j)^{T_i^-}] \\ &= \varepsilon_i^{T_i^+} \nabla \cdot f_j^{T_i^+} + \varepsilon_i^{T_i^-} \nabla \cdot f_j^{T_i^-} \end{aligned}$$

En utilisant (1), on aboutit à

$$[\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/i} = \varepsilon_j^{T_i^+} \frac{l_j}{|T_j|^{T_i^+}} - \varepsilon_j^{T_i^-} \frac{l_j}{|T_j|^{T_i^-}} \quad (2)$$

avec l_j la longueur de l'arête j .

1.2 Approximation des opérateurs intégraux

1.2.1 Approximation de l'opérateur D

Nous allons expliquer la méthode de calcul des éléments de matrices $D_{i,j}$. D'après les propriétés des opérateurs différentiels on a

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_i dS \\ &= - \sum_{l=1}^{Ne} [\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/l} \int_l \nu_l^+ \cdot \mathbf{f}_i ds \\ &= - \sum_{k=1}^5 [\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/k} \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de l'opérateur D_{ij} :

$$D_{ij} = - \sum_{k=1}^5 [\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/k} \quad (3)$$

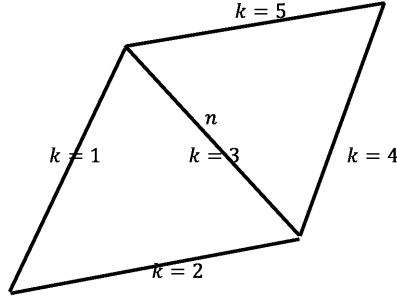


FIGURE 1

avec k est le nombre local des 5 arêtes voisines de l'arête j et ν_k^+ est la normale sortante à l'arête k qui va de T_k^+ vers T_k^- dans le plan du triangle. Afin de déterminer l'opérateur ci-dessus, il est nécessaire de distinguer plusieurs configurations géométriques :

— le cas des arêtes i et j n'ont pas de triangle commun.

Alors, on a $T_i^{\pm} \neq T_j^{\pm}$. de plus $\varepsilon_j^{T_i^+} = \varepsilon_j^{T_i^-} = 0$. en appliquant la définition (2) à $[\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/i}$, on obtient $[\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/i} = 0$.

- le cas de l'arête i et j ont un triangle commun. on a les possibilités suivantes :
 - $i = j$: alors $T_i^+ = T_j^+$ et $T_i^- = T_j^-$ alors, on réécrit (2) comme

$$[\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/i} = \frac{l_i}{|T_i^+|} + \frac{l_i}{|T_i^-|}.$$

- l'arête j est du côté de T_i^+ . Dans ce cas, $T_i^+ = T_j^\pm$, $T_i^- \neq T_j^\pm$ et $\varepsilon_j^{T_i^-} = 0$, on obtient aussi l'expression suivante

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/i} &= \varepsilon_i^{T_i^+} \varepsilon_j^{T_i^+} \frac{l_j}{|T_j|^{T_i^+}} \\ &= \varepsilon_j^{T_i^+} \frac{l_j}{|T_i^+|} = \pm \frac{l_j}{|T_i^+|}. \end{aligned}$$

- l'arête j est du côté T_i^- . Dans ce cas, $T_i^- = T_j^\pm$, $T_i^+ \neq T_j^\pm$ et $\varepsilon_j^{T_i^+} = 0$. Alors, l'opérateur $[\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/i}$ peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/i} &= \varepsilon_i^{T_i^-} \varepsilon_j^{T_i^-} \frac{l_j}{|T_j|^{T_i^-}} \\ &= -\varepsilon_j^{T_i^-} \frac{l_j}{|T_i^-|} = \pm \frac{l_j}{|T_i^-|}. \end{aligned}$$

1.2.2 Approximation de l'opérateur E

En utilisant les propriétés, on a :

$$\begin{aligned} E_{i,j} &= \int_{\Gamma_h} \nabla_\Gamma \nabla_\Gamma \cdot \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_i \, ds \\ &= - \sum_{l=1}^{Ne} [\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/l} \int_l \nu_l^+ \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_i \, ds \\ &= - \sum_{k=1}^5 [\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/k} \int_k \nu_k^+ \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_i \, ds \end{aligned}$$

Alors l'expression de l'opérateur E s'écrit :

$$E_{i,j} = - \sum_{k=1}^5 [\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/k} \int_k \nu_k^+ \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_i \, ds \quad (4)$$

L'opérateur :

$$\int_{\Gamma_h} L_D(\mathbf{n} \times \mathbf{f}_j) \cdot \mathbf{f}_i \, ds$$

est la transposée de $E_{i,j}$ noté $E^t = E_{j,i}$

1.2.3 Approximation de l'opérateur G

On a :

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \int_{\Gamma_h} \nabla_\Gamma \nabla_\Gamma \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{f}_j) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{f}_i) \, ds \\ &= - \sum_{l=1}^{13} [\nabla \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{f}_j)]_{/l} \int_l \nu_l^+ \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{f}_i^+) \, ds \end{aligned}$$

avec l sont les 13 arêtes voisines de l'arête j

1.2.4 Assemblage de matrices

On approxime le problème (??).

En utilisant les approximations (??), (??), (??), (??), (??) et (??), on obtient :

$$[Z_{11}^T] = Z_j Z_0 [(B - S)] + \frac{a_0}{2} [L] + \frac{a_1}{2} [D] - \frac{a_2}{2} [G]$$

$$[Z_{12}^T] = [Q] - \frac{b_1}{2} [E^t] + \frac{b_2}{2} [E]$$

$$[Z_{21}^T] = -[Q] + \frac{a_2}{2a_0} [E^t] - \frac{a_1}{2a_0} [E]$$

$$[Z_{22}^T] = \frac{1}{Z_j Z_0} [(B - S)] + \frac{1}{2a_0} [I] - \frac{b_2}{2a_0} [D] + \frac{b_1}{2a_0} [G]$$

Selon l'équation (??), on écrit la forme bilinéaire $A^h(U_h, \Psi_h)$ sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} Z_{11}^T & Z_{12}^T \\ Z_{21}^T & Z_{22}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

où les vecteurs de droite sont définis par :

$$E_i = \int_{\Gamma_h} \mathbf{E}^{inc} \cdot \mathbf{f}_i ds, \quad H_i = \int_{\Gamma_h} \mathbf{H}^{inc} \cdot \mathbf{f}_i ds, \quad i = 1, \dots, Ne.$$

Analogiquement

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ J_{Ne} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{Ne} \end{pmatrix}$$

2 Méthode de projection

3 Introduction

Les opérateurs issus de la discrétisation du HOIBC qui ont $(n \times \mathbf{f}_i)$ dans l'intégrale ne sont pas faciles à calculer, cela ajoute des problèmes de jonctions. La surface RWG est discontinue au croisement de l'arête qui borde les deux éléments sur lesquels elles sont définies [?]. Pour faciliter le calcul des opérateurs, nous proposons la deuxième solution de discrétisations qui est la méthode de projection.

Pour cette raison, nous exprimons ces opérateurs en termes de l'opérateur D en effectuant la projection de $H(div)$ vers $H(rot)$. Par conséquent, nous exprimons f dans la base $H(rot)$ base pour simplifier la discrétisation de ces opérateurs.

4 Problématique

La procédure Galerkin est complétée par tester les opérateurs avec N_e fonctions bases choisies de manière appropriée.

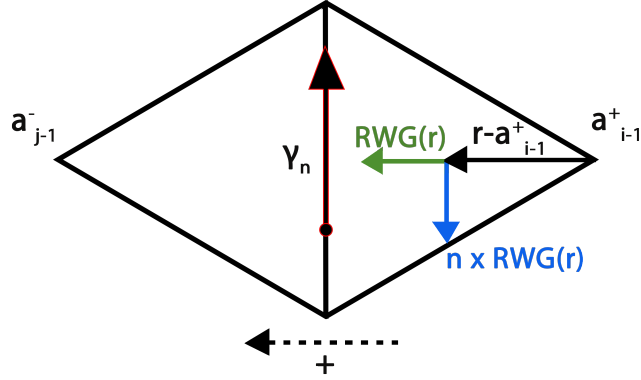


FIGURE 2 – Orientation sur une arête du maillage : Sens des fonctions de RWG

Le test des opérateurs L et D est effectué en utilisant des fonctions dans $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$, conformément au choix classique des RWG comme fonctions de test pour ces opérateurs. Il est bien connu que les fonctions de base RWG appartiennent à l'espace fonctionnel $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$, c'est à dire l'espace des fonctions définies dans (ref definition).

Ici, la barre indique une conjugaison complexe pour les autres opérateurs E et G . En effet, on peut montrer que ces opérateurs appartiennent à $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$ [16], qui est l'espace des fonctions j pour lesquelles $\text{rot} j$ appartient à $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$. Cependant, pour ces opérateurs E et G la situation est différente, les fonctions de test soient dans $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$. Les fonctions RWG, couramment utilisées pour tester le MFIE, ne résident pas dans $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$, mais dans $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$. Alors, nous présentons une méthode pour tester les opérateurs E et G qui, contrairement à la procédure couramment utilisée, utilise des fonctions de test en $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$. Comme indiqué ci-dessus, dans le schéma de discrétisation classique, les fonctions RWG f_n [qui résident dans $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$] sont utilisées pour tester L et D , la logique étant que ce choix rend la matrice discrétisant ces opérateur bien conditionnée.

Étant donné que les fonctions de test auraient plutôt dû être sélectionnées dans $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$, il peut sembler approprié d'utiliser les fonctions de base de Bendali RWG "rotational" fonctions $\text{rot} f$ [qui résident dans $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$] comme fonctions de test. Cependant, ce choix rend singulière la matrice discrétisant l'opérateur identité, entraînant une discrétisation mal conditionnée du MFIE. Pour obtenir une discrétisation conforme et bien conditionnée du MFIE, il suffit de trouver un ensemble de fonctions de test qui réside dans $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$ et aboutit à une discrétisation bien conditionnée de l'opérateur d'identité lorsqu'il est utilisé en combinaison avec des fonctions d'expansion RWG. l'ensemble des fonctions de Bendali « tournées » $\text{rot} f_i$, défini sur le raffinement du maillage, constitue un tel ensemble [17]. Les fonctions BC sont définies comme des combinaisons linéaires de fonctions RWG subordonnées au raffinement barycentrique. Le

gradient de la divergence de surface de RWG va à l'infini sur les bords des deux éléments, de même que leur surface *rot*. Il nous donne la fonction Dirac sur les arêtes des deux éléments. Et la surface définie par le maillage n'a pas de dérivées continues du premier ordre. La fonction de base avec des propriétés similaires a déjà été proposée par F. Andriulli [?]. Nous réécrivons les fonctions de base RWG comme une combinaison linéaire des fonctions de base dans $H(\text{rot})$ définies sur le même triangle comme suit :

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^{Ne} c_i^j (n \times \mathbf{f}_j) \quad (6)$$

avec les coefficients de pondération $(c_i^j)_{i,j=1,Ne}$ sont les composants de la fonction \mathbf{f}_i dans $\tilde{\mathbf{f}}_j \in H(\text{curl})$. Nous considérons ces composantes comme les coefficients inconnus de la matrice de projection notée par $[P]$.

D'autre part, on réécrit la fonction de base \mathbf{f}_i comme combinaison linéaire comme suit :

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^{Ne} e_i^j \mathbf{f}_j \quad (7)$$

avec $e_i^j = \delta_{ij}$ le delta de Kronecker.

D'après (6) et (7), on obtient une égalité :

$$\sum_{j=1}^{Ne} c_i^j (n \times \mathbf{f}_j) = \sum_{j=1}^{Ne} e_i^j \mathbf{f}_j \quad (8)$$

5 Calcul des coefficients de la matrice de projection

Afin d'exprimer notre problème sous forme matricielle, nous multiplions \mathbf{f}_i par \mathbf{q}_i la fonction test proposée dans [?] définie comme suit :

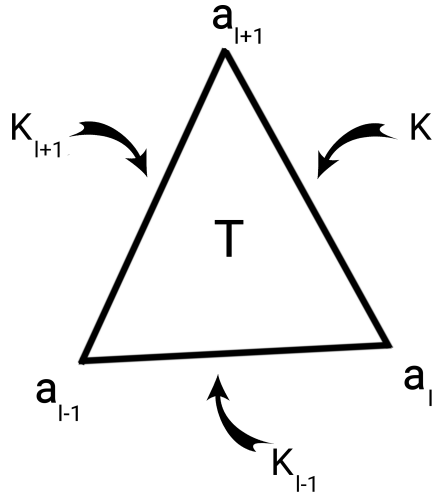


FIGURE 3 – Convention de Notations d'un triangle T

Définition 5.1 On note par : $(a_l)_{l=1,2,3}$ les sommets d'un triangle T (compté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre dans le plan du triangle T déterminé par la normale unitaire \mathbf{n} qui pointe vers l'extérieur du diffuseur), K_l est l'arête qui relie a_{l-1} à a_l et n_l^T est son numéro global. Une orientation est fixée pour chaque arête dans le maillage pour que n_l^T soit positif quand l'orientation est compatible avec celle du numérotation des sommets de T et négatif sinon. $\lambda_l^T(x)$ est la l^{eme} coordonnées barycentrique de x relative à T (fig. 3). La fonction test de Bendali associée à un triangle T du maillage est définie comme suit [?]:

$$\mathbf{q}(x) = \sum_{l=1}^3 \epsilon_l^T q_{|n_l^T|} (1 - 2\lambda_{l+1}^T(x)) (a_l - a_{l-1}) \quad (9)$$

Où chaque fonction \mathbf{q} est caractérisé par un vecteur colonne $\{\mathbf{q}\} := \{q_k\}_{k=1}^{Ne}$ qui donne ses degrés de liberté.

Soit k le nombre global d'une arête, pour calculer les coefficients de pondération $(c_i^j)_{i,j=1,Ne}$, on multiplie (??*LaTeXWarning: Commandnvalidinmathmodegalitgalit*) par la fonction test q_k de Bendali associée à l'arête k et on intègre sur Γ_h . On obtient :

$$\sum_{j=1}^N c_i^j \int_{\Gamma_h} (n \times \mathbf{f}_j) \cdot q_k ds = \sum_{j=1}^{Ne} e_i^j \int_{\Gamma_h} \mathbf{f}_j \cdot q_k ds. \quad (10)$$

Or,

$$\sum_{j=1}^{Ne} e_i^j \int_{\Gamma_h} \mathbf{f}_j \cdot q_k ds = \int_{\Gamma_h} \mathbf{f}_i \cdot q_k ds$$

on définit les intégrales obtenus dans l'expression ci-dessus par :

$$[CH]_{kj} = \int_{\Gamma_h} (n \times \mathbf{f}_j) \cdot q_k ds, \quad [CK]_{ki} = \int_{\Gamma_h} \mathbf{f}_i \cdot q_k ds \quad (11)$$

D'après [?], $[CH]$ est une matrice diagonale et inversible :

$$[CH]_{kj} = \begin{cases} \frac{|T_k^+| + |T_k^-|}{3} & \text{pour } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors :

$$c_i^k = \frac{3}{|T_k^+| + |T_k^-|} \int_{\Gamma_h} \mathbf{f}_i \cdot q_k ds = \frac{3}{|T_k^+| + |T_k^-|} [CK]_{ki}$$

À partir des expressions (10) et (11), nous dérivons la matrice de projection sous une forme matricielle :

$$[P] = [CK][CH]^{-1} \quad (12)$$

5.1 Approximation des opérateurs

5.1.1 Approximation de l'opérateur D

On commence par l'opérateur D qui est défini comme suit :

$$D_{ij} = \langle \nabla_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i \rangle \quad (13)$$

Nous utilisons la formule de saut pour surmonter la difficulté de la discrétisation. On a :

$$D_{ij} = \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_i ds = [\nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{f}_j]_{/i}$$

Cependant, cette technique ne fonctionne pas dans l'évaluation des autres opérateurs qui apparaissent dans la formulation.

5.1.2 Approximation de l'opérateur E

L'opérateur E_{ij} est défini comme suit :

$$E_{ij} = \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{f}_j \cdot (n \times \mathbf{f}_i) ds \quad (14)$$

En reportant \mathbf{f}_i par (6) dans (14), on obtient

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{f}_j \cdot (n \times \mathbf{f}_i) ds \\ &= \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{f}_j \cdot (n \times \sum_{k=1}^{Ne} c_i^k (n \times \mathbf{f}_k)) ds \\ &= \sum_{k=1}^{Ne} c_i^k \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{f}_j \cdot (n \times (n \times \mathbf{f}_k)) ds \\ &= - \sum_{k=1}^{Ne} c_i^k \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_k ds \end{aligned}$$

D'après la dernière ligne, nous pouvons exprimer cet opérateur en termes de l'opérateur D :

$$E_{ij} = - \sum_{k=1}^{Ne} c_i^k D_{kj} \quad (15)$$

On raisonne de la même manière pour la transposée de l'opérateur E .

En utilisant la définition de l'opérateur P , nous obtenons l'opérateur E sous forme matricielle comme suit :

$$[E] = [CK][CH]^{-1}[D] = [P][D] \quad (16)$$

5.1.3 Approximation de l'opérateur G

Maintenant, on s'intéresse à l'approximation de l'opérateur G , on remplace f_i comme on a fait ci-dessus :

$$\mathbf{f}_i = \sum_{k=1}^{Ne} c_i^k (n \times \mathbf{f}_k)$$

et

$$\mathbf{f}_j = \sum_{l=1}^{Ne} c_j^l (n \times \mathbf{f}_l)$$

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot (n \times \mathbf{f}_j) \cdot (n \times \mathbf{f}_i) ds \\
&= \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot (n \times \sum_{l=1}^{Ne} c_j^l (n \times \mathbf{f}_l)) \cdot (n \times \sum_{k=1}^{Ne} c_i^k (n \times \mathbf{f}_k)) ds \\
&= \sum_{l,k=1}^{Ne} c_j^l c_i^k \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot (n \times n \times \mathbf{f}_l) \cdot (n \times n \times \mathbf{f}_k) ds \\
&= \sum_{l,k=1}^{Ne} c_j^l c_i^k \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{f}_l \cdot \mathbf{f}_k ds
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'opérateur G_{ij} est

$$G_{ij} = \sum_{l,k=1}^{Ne} c_j^l c_i^k D_{kl}$$

En écriture matricielle :

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1Ne} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{Ne,1} & \cdots & c_{Ne,Ne} \end{pmatrix} \left[\int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{f}_h ds \right] \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1Ne} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{Ne,1} & \cdots & c_{Ne,Ne} \end{pmatrix}^T$$

En appliquant l'opérateur P , l'opérateur G a la relation matricielle suivante :

$$[G] = [P][D][P]^T \quad (17)$$

5.1.4 Assemblage de matrices

Nous définissons $[Z_{11}]$, $[Z_{12}]$, $[Z_{22}]$ et $[Z_{21}]$ par

$$[Z_{11}] = [S] + \frac{a_0}{2}[I] - \frac{a_1}{2}[D] - \frac{a_2}{2}[P][D][P]^T \quad (18a)$$

$$[Z_{12}] = [D] + \frac{b_1}{2}[D][P] + \frac{b_2}{2}[P]^T[D] \quad (18b)$$

$$[Z_{21}] = [D]^T + \frac{a_2}{2a_0}[D][P] - \frac{a_1}{2a_0}[P]^T[D] \quad (18c)$$

$$[Z_{22}] = [S] + \frac{1}{2a_0}[I] - \frac{b_2}{2a_0}[D] - \frac{b_1}{2a_0}[P][D][P]^T \quad (18d)$$

En utilisant (18), opérateur E et (17), nous présentons maintenant sous la forme matricielle suivante

$$Z^{HOIBC} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Le système final :

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{inc} \\ -\mathbf{H}^{inc} \end{bmatrix} \quad (20)$$

6 Lien entre la méthode de distribution et la méthode de projection

6.1 Introduction

On a :

$$E_{i,j} = \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_i ds \quad (21)$$

En méthode de projection cet opérateur égale à (voir (15)) :

$$E_{ij} = - \sum_{k=1}^{Ne} c_i^k D_{kj} \quad (22)$$

D'autre part, cet opérateur, par la méthode de distribution, est égal à (voir (4)) :

$$E_{ij} = - \sum_{k=1}^5 [\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/k} \int_k \nu_k^+ \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_i ds$$

On rappelle que l'opérateur D_{kj} égale à (voir (3)) :

$$D_{kj} = - \sum_{k=1}^5 l_k [\nabla \cdot \mathbf{f}_j]_{/k}$$

Alors on peut écrire l'opérateur E_{ij} comme suit :

$$E_{ij} = \sum_{k=1}^5 D_{kj} \times \frac{1}{l_k} \int_k \nu_k^+ \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_i ds$$

7 Calcul de $\int_k \nu_k^+ \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_i ds$

On a d'après la propriétés (...):

$$\int_k \nu_k^+ \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_i ds = \int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds$$

Prenons deux arêtes i et k :

$$\int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds = \int_{i \in T_k^+} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds + \int_{i \in T_k^-} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds \quad (23)$$

On distingue deux cas :

— Cas où l'arête i et l'arête k n'ont pas de triangle commun ($i \notin T_k^+$ et $i \notin T_k^-$) :

$$\int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds = 0$$

— Cas où l'arête i et l'arête k ont un triangle commun, on a les possibilités suivantes :

- Si $i \in T_k^+$ (fig. 4), l'intégral (23) s'écrit $\int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds = \int_{i \in T_k^+} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds$.

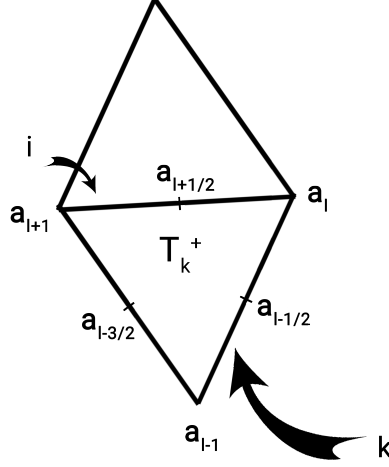


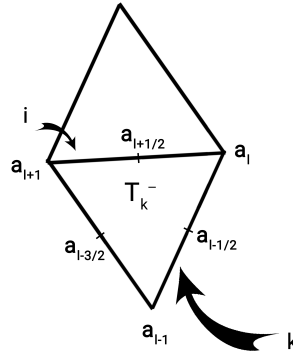
FIGURE 4 – Cas où $i \in T_k^+$

$$\begin{aligned}
 \int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds &= \int_{[a_{l-1}, a_l]} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds \\
 &= \epsilon_k^{T_k^+} \frac{(a_l - a_{l-1})}{\|a_l - a_{l-1}\|} \cdot \left(\int_{[a_{l-1}, a_l]} \mathbf{f}_i ds \right) \\
 &= \frac{\epsilon_k^{T_k^+}}{l_k} (a_l - a_{l-1}) \cdot \frac{\epsilon_i^{T_k^+} l_i l_k}{2|T_k^+|} (a_{l-1/2} - a_{l-1}) \\
 &= \frac{\epsilon_i^{T_k^+} l_i}{2|T_k^+|} (a_l - a_{l-1}) \cdot (a_{l-1/2} - a_{l-1})
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds = \frac{\epsilon_i^{T_k^+} l_i}{2|T_k^+|} (a_l - a_{l-1}) \cdot (a_{l-1/2} - a_{l-1}) \quad (24)$$

- Si $i \in T_k^-$ (fig. 5), l'intégral (23) s'écrit $\int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds = \int_{i \in T_k^-} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds$.

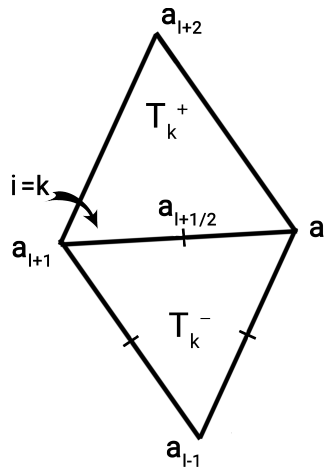
FIGURE 5 – Cas où $i \in T_k^-$

$$\begin{aligned}
 \int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds &= \int_{[a_{l-1}, a_i]} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds \\
 &= \epsilon_k^{T_k^-} \frac{(a_l - a_{l-1})}{\|a_l - a_{l-1}\|} \cdot \left(\int_{[a_{l-1}, a_i]} \mathbf{f}_i ds \right) \\
 &= \frac{\epsilon_k^{T_k^-}}{l_k} (a_l - a_{l-1}) \cdot \frac{\epsilon_i^{T_k^-} l_i l_k}{2|T_k^-|} (a_{l-1/2} - a_{l-1}) \\
 &= -\frac{\epsilon_i^{T_k^-} l_i}{2|T_k^-|} (a_l - a_{l-1}) \cdot (a_{l-1/2} - a_{l-1})
 \end{aligned}$$

L'expression finale :

$$\int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds = -\frac{\epsilon_i^{T_k^-} l_i}{2|T_k^-|} (a_l - a_{l-1}) \cdot (a_{l-1/2} - a_{l-1}) \quad (25)$$

- Si $i = k$ (fig. 6), c'est à dire à la fois $i \in T_k^+$ et $i \in T_k^-$
 et $\int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds = \int_{i \in T_k^+} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds + \int_{i \in T_k^-} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds$.

FIGURE 6 – Cas où $i = k$

$$\begin{aligned}
\int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds &= \int_{[a_l, a_{l+1}]} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds + \int_{[a_l, a_{l+1}]} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds \\
&= \epsilon_k^{T_k^+} \frac{(a_{l+1} - a_l)}{\|a_{l+1} - a_l\|} \cdot \left(\int_{[a_l, a_{l+1}]} \mathbf{f}_i ds \right) + \epsilon_k^{T_k^-} \frac{(a_{l+1} - a_l)}{\|a_{l+1} - a_l\|} \cdot \left(\int_{[a_l, a_{l+1}]} \mathbf{f}_i ds \right) \\
&= \frac{\epsilon_i^{T_k^+} l_i}{2|T_k^+|} (a_{l+1} - a_l) \cdot (a_{l+1/2} - a_{l+2}) - \frac{\epsilon_i^{T_k^-} l_i}{2|T_k^-|} (a_{l+1} - a_l) \cdot (a_{l+1/2} - a_{l-1}) \\
&= \frac{l_i}{2|T_k^+|} (a_{l+1} - a_l) \cdot (a_{l+1/2} - a_{l+2}) + \frac{l_i}{2|T_k^-|} (a_{l+1} - a_l) \cdot (a_{l+1/2} - a_{l-1})
\end{aligned}$$

On obtient à la fin :

$$\int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds = \frac{l_i}{2|T_k^+|} (a_{l+1} - a_l) \cdot (a_{l+1/2} - a_{l+2}) + \frac{l_i}{2|T_k^-|} (a_{l+1} - a_l) \cdot (a_{l+1/2} - a_{l-1}) \quad (26)$$

7.1 Calcul de $\int_{\Gamma_h} q_k \cdot \mathbf{f}_i ds$

D'autre part, on a d'après [?] :

$$\int_T \mathbf{q}(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) dx = \frac{|T|}{3} \sum_{l=1}^3 \epsilon_l^T q_{|n_l^T|} (1 - 2\lambda_{l+1}^T(a_{l+1/2})) \cdot \mathbf{f}_i(a_{l+1/2}) \quad (27)$$

On prends deux arêtes de numéros globaux k et i , q_k est la fonction de Bendali associée à l'arête k . (+figure)

$$q_k(x) = \epsilon_k^T (1 - 2\lambda_{l+1}^T(x)) (a_{l+1} - a_l) \quad (28)$$

on a :

$$\int_{\Gamma_h} q_k \cdot \mathbf{f}_i ds = \int_{T_k^+} q_k \cdot \mathbf{f}_i ds + \int_{T_k^-} q_k \cdot \mathbf{f}_i ds$$

On distingue deux cas :

— Cas où l'arête i et l'arête k n'ont pas de triangle commun ($i \notin T_k^+$ et $i \notin T_k^-$) :

$$\int_{\Gamma_h} q_k \cdot \mathbf{f}_i ds = 0$$

— Cas où l'arête i et l'arête k ont un triangle commun :

- Si $i \in T_k^+$ c'est à dire $\int_{T_k^-} q_k \cdot \mathbf{f}_i ds = 0$

$$\int_{\Gamma_h} q_k \cdot \mathbf{f}_i ds = \int_{T_k^+} q_k \cdot \mathbf{f}_i ds$$

D'après (27) et (28) :

$$\begin{aligned}
\int_{T_k^+} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) ds &= \frac{|T_k^+|}{3} \frac{\epsilon_k^{T_k^+} \epsilon_i^{T_k^+} l_i}{2|T_k^+|} (a_l - a_{l-1}) \cdot (a_{l-1/2} - a_{l-1}) \\
&= \frac{|T_k^+|}{3} \frac{\epsilon_i^{T_k^+} l_i}{2|T_k^+|} (a_l - a_{l-1}) \cdot (a_{l-1/2} - a_{l-1})
\end{aligned}$$

- Si $i \in T_k^-$ c'est à dire $\int_{T_k^+} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) ds = 0$

$$\int_{\Gamma_h} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) ds = \int_{T_k^-} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) ds$$

D'après (27) et (28) :

$$\begin{aligned} \int_{T_k^-} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) ds &= \frac{|T_k^-|}{3} \frac{\epsilon_k^{T_k^-} \epsilon_i^{T_k^-} l_i}{2|T_k^-|} (a_l - a_{l-1}) \cdot (a_{l-1/2} - a_{l-1}) \\ &= -\frac{|T_k^-|}{3} \frac{\epsilon_i^{T_k^-} l_i}{2|T_k^-|} (a_l - a_{l-1}) \cdot (a_{l-1/2} - a_{l-1}) \end{aligned}$$

- si $i = k$ c'est à dire $T_i^\pm = T_k^\pm$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_h} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) ds &= \int_{T_k^+} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) ds + \int_{T_k^-} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) ds \\ &= \frac{|T_k^+|}{3} \frac{\epsilon_k^{T_k^+} \epsilon_i^{T_k^+} l_i}{2|T_k^+|} (a_{l+1} - a_l) \cdot (a_{l+1/2} - a_{l+2}) \\ &\quad + \frac{|T_k^-|}{3} \frac{\epsilon_k^{T_k^-} \epsilon_i^{T_k^-} l_i}{2|T_k^-|} (a_{l+1} - a_l) \cdot (a_{l+1/2} - a_{l-1}) \\ &= \frac{|T_k^+|}{3} \frac{l_i}{2|T_k^+|} (a_{l+1} - a_l) \cdot (a_{l+1/2} - a_{l+2}) \\ &\quad + \frac{|T_k^-|}{3} \frac{l_i}{2|T_k^-|} (a_{l+1} - a_l) \cdot (a_{l+1/2} - a_{l-1}) \end{aligned}$$

L'expression finale est :

$$\int_{\Gamma_h} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) ds = \frac{|T_k^+|}{3} \frac{l_i}{2|T_k^+|} (a_{l+1} - a_l) \cdot (a_{l+1/2} - a_{l+2}) + \frac{|T_k^-|}{3} \frac{l_i}{2|T_k^-|} (a_{l+1} - a_l) \cdot (a_{l+1/2} - a_{l-1})$$

On remarque que à l'aide (26) :

$$\int_{\Gamma_h} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) ds \stackrel{(26)}{=} \frac{|T_k^+|}{3} \int_{i \in T_k^+} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds + \frac{|T_k^-|}{3} \int_{i \in T_k^-} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds \quad (29)$$

7.2 Calcul des coefficients c_i^k

Soit q_k la fonction de Bendali [?], Calculons : $\int_{\Gamma_h} q_k \cdot \mathbf{f}_i ds$.

Premièrement, on réécrit la fonction de base f_i comme définit dans (6)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_h} q_k \cdot \mathbf{f}_i ds &= \sum_{j=1}^{Ne} c_i^j \int_{\Gamma_h} q_k \cdot (n \times f_j) ds \\ &\stackrel{[?]}{=} \frac{|T_k^+| + |T_k^-|}{3} c_i^k \end{aligned}$$

car :

$$\int_{\Gamma_h} q_k \cdot (n \times f_j) ds = \begin{cases} \frac{|T_k^+| + |T_k^-|}{3} & \text{pour } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors :

$$c_i^k = \frac{3}{|T_k^+| + |T_k^-|} \int_{\Gamma_h} q_k \cdot \mathbf{f}_i ds \quad (30)$$

D'après cette relation (30), et après avoir calculer l'intégral $\int_{\Gamma_h} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) dx$, on peut déduire le calcul des coefficients c_i^k pour chaque cas.

- Si l'arête i et l'arête k n'ont pas de triangle commun, $c_i^k = 0$.
- Si l'arête i et l'arête k ont un triangle commun :
 - Si $i \in T_k^+$, d'après la relation (30), on en déduit le calcul des coefficients c_i^k qui est relié au calcul de l'intégral $\int_{\Gamma_h} q_k \cdot \mathbf{f}_i ds$ s'écrit :

$$\begin{aligned} c_i^k &= \frac{3}{|T_k^+| + |T_k^-|} \int_{\Gamma_h} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) ds \\ &= \frac{3}{|T_k^+| + |T_k^-|} \frac{|T_k^+|}{3} \frac{\epsilon_i^{T_k^+} l_i}{2|T_k^+|} (a_l - a_{l-1}) \cdot (a_{l-1/2} - a_{l-1}) \\ &= \frac{|T_k^+|}{|T_k^+| + |T_k^-|} \frac{\epsilon_i^{T_k^+} l_i}{2|T_k^+|} (a_l - a_{l-1}) \cdot (a_{l-1/2} - a_{l-1}) \\ &\stackrel{(24)}{=} \frac{|T_k^+|}{|T_k^+| + |T_k^-|} \int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds \end{aligned}$$

D'où :

$$c_i^k = \frac{|T_k^+|}{|T_k^+| + |T_k^-|} \int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds \quad (31)$$

- Si $i \in T_k^-$ on en déduit le calcul des coefficients c_i^k qui est relié au calcul de l'intégral $\int_{\Gamma_h} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) dx$ s'écrit :

$$\begin{aligned} c_i^k &= \frac{3}{|T_k^+| + |T_k^-|} \int_{\Gamma_h} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) ds \\ &= -\frac{3}{|T_k^+| + |T_k^-|} \frac{|T_k^-|}{3} \frac{\epsilon_i^{T_k^-} l_i}{2|T_k^-|} (a_l - a_{l-1}) \cdot (a_{l-1/2} - a_{l-1}) \\ &= -\frac{|T_k^-|}{|T_k^+| + |T_k^-|} \frac{\epsilon_i^{T_k^-} l_i}{2|T_k^-|} (a_l - a_{l-1}) \cdot (a_{l-1/2} - a_{l-1}) \\ &\stackrel{(25)}{=} \frac{|T_k^-|}{|T_k^+| + |T_k^-|} \int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds \end{aligned}$$

D'où :

$$c_i^k = \frac{|T_k^-|}{|T_k^+| + |T_k^-|} \int_k \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds \quad (32)$$

- si $i = k$:

$$\begin{aligned}
c_i^k &= \frac{3}{|T_k^+| + |T_k^-|} \int_{\Gamma_h} q_k(x) \cdot \mathbf{f}_i(x) ds \\
&\stackrel{(7.1)}{=} \frac{3}{|T_k^+| + |T_k^-|} \left[\frac{|T_k^+|}{3} \int_{i \in T_k^+} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds + \frac{|T_k^-|}{3} \int_{i \in T_k^-} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds \right] \\
&= \frac{|T_k^+|}{|T_k^+| + |T_k^-|} \int_{i \in T_k^+} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds + \frac{|T_k^-|}{|T_k^+| + |T_k^-|} \int_{i \in T_k^-} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{c_i^k = \frac{|T_k^+|}{|T_k^+| + |T_k^-|} \int_{i \in T_k^+} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds + \frac{|T_k^-|}{|T_k^+| + |T_k^-|} \int_{i \in T_k^-} \nu_k^+ \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_i ds} \quad (33)$$

Ayant obtenu ce résultat, on remarque que pour chaque cas cité dessus :

$$c_i^k = \frac{|T_k^\pm|}{|T_k^+| + |T_k^-|} \int_k \nu_k^+ \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_i ds$$

On propose une autre interprétation de l'opérateur E_{ij} , présenté dans (22), en l'écrivant :

$$E_{ij} = - \sum_{k=1}^{Ne} c_i^k D_{kj} \quad (34)$$

$$= - \sum_{k=1}^{Ne} \frac{|T_k^\pm|}{|T_k^+| + |T_k^-|} D_{kj} \int_k \nu_k^+ \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_i ds \quad (35)$$

8 Tests de référence pour la validation des méthodes

Introduction

L'ANALYSE des propriétés de diffusion d'objets diélectriques sous l'excitation d'ondes électromagnétiques suscite un intérêt particulier dans la communauté de l'électromagnétisme computationnel (CEM). Basée sur des équations intégrales, la méthode des moments (MoM) est l'une des méthodes les plus populaires parmi une variété de méthodes d'analyse, en raison de sa bonne précision et de sa flexibilité. Dans l'analyse MoM, les équations intégrales de surface (SIE) basées sur le principe d'équivalence de surface en discrétisant tridimensionnellement l'objet.

Dans ce chapitre, on va étudier la SER à partir de géométries bidimensionnelles complexes qui sont des tests de références. Dans cette thèse, les RCS de cibles avec des géométries complexes importées sont analysées. Ces structures de référence sont analysées, montrant la fiabilité, les performances et la polyvalence du HOIBC pour s'exécuter sur une grande variété de plateformes informatiques. Les tests sur des corps complexes sont utilisés dans les mesures du RCS pour évaluer les performances réalisables du code.

9 Cône-sphère revêtu

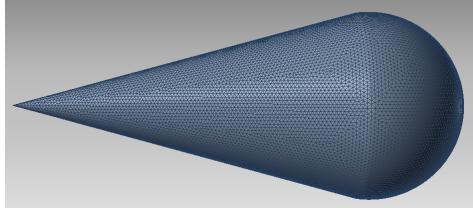


FIGURE 7 – Le maillage du cône sphère

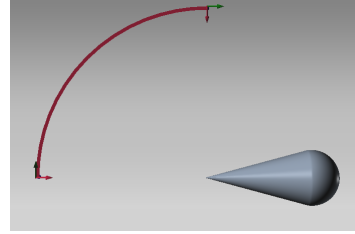


FIGURE 8 – champs source monostatique

métrie du cône sphère est illustré dans la fig. 7.

On l'illumine par un champs source incident qui coïncide avec la pointe extrême du cône. $\theta = 90^\circ$ et $\phi = 0, 180$

La géo-

9.1 Validation avec la méthode de projection

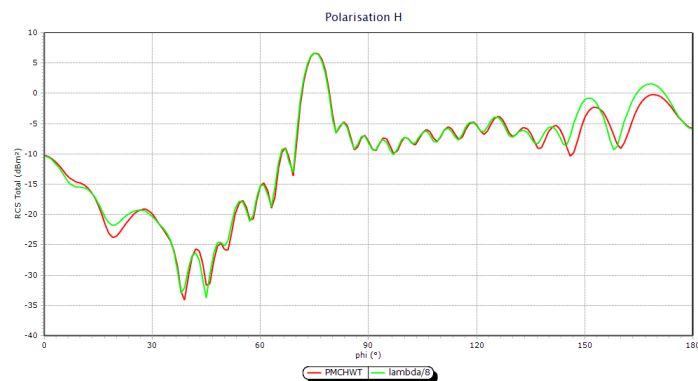


FIGURE 9 – La composante $\phi\phi$ du RCS monostatique pour cône sphère conductrice revêtu et solution HOIBC

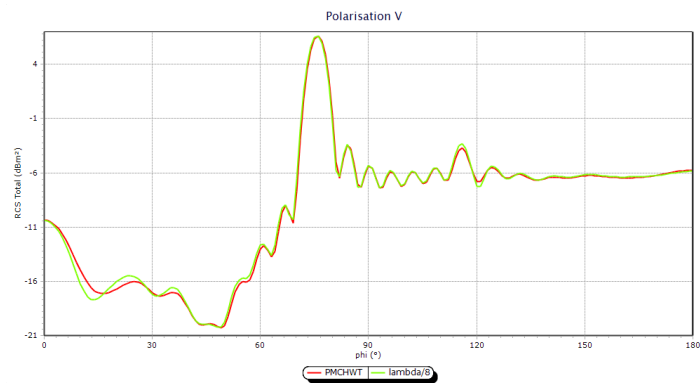


FIGURE 10 – La composante $\theta\theta$ du RCS monostatique pour cône sphère conductrice revêtu et solution HOIBC

9.2 Validation avec la méthode de distribution

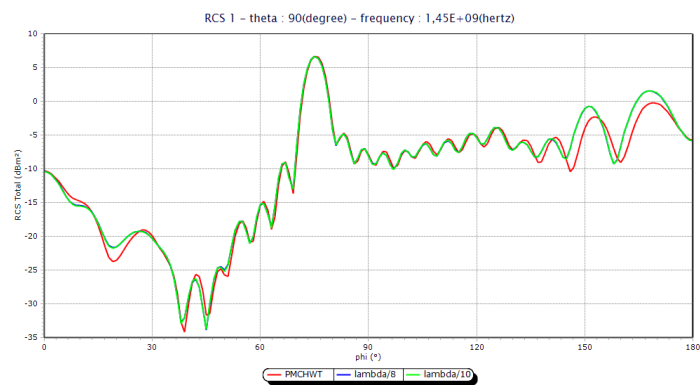


FIGURE 11 – La composante $\phi\phi$ du RCS monostatique pour cône sphère conductrice revêtu et solutions HOIBC

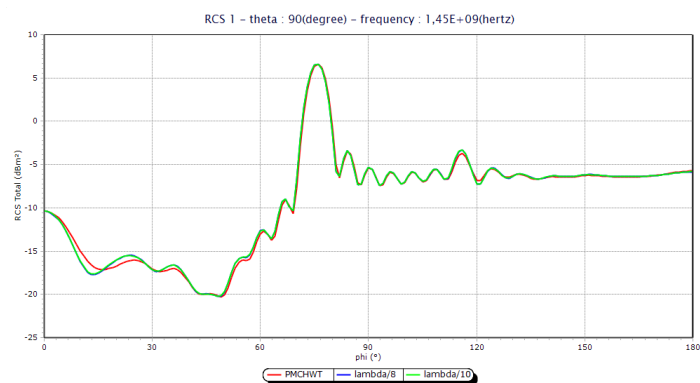


FIGURE 12 – La composante $\theta\theta$ du RCS monostatique pour cône sphère conductrice revêtu et solutions HOIBC

10 Nasa-almond revêtue

- resolu v1.2.png

FIGURE 13 – La géométrie de la Nasa-almond

La NASA-almond (Figure 13) est une référence populaire dans la communauté de l'électromagnétique computationnelle, il est particulièrement adapté pour vérifier les performances du code. Il s'agit d'une géométrie à double courbure, où l'on peut trouver des zones à la fois lisses et pointues. Les équations paramétriques qui définissent sa géométrie sont bien connues (par exemple, [?]).

Pour nos expériences, l'amande est revêtue d'un matériau diélectrique de constantes $\epsilon_r = 4$ et $\mu_r = 1$ et d'épaisseur de revêtement est $\delta = 0,03m$.

La NASA-almond a des longueurs caractéristiques environ égales à $4.169\lambda_0 \times 1.612\lambda_0 \times 0.537\lambda_0$ où λ_0 est la longueur d'onde du vide.

L'onde plane incidente illumine l'amande par la pointe à 0,5GHz et parcourt le demi-plan XY de l'amande ($\theta = 90; \phi = 0, 180$).

L'analyse de RCS monostatique de la NASA-Almond à plusieurs densité de maillage a été considérée en premier, en effet, les maillages étudiés correspondent à des précisions variant de $\lambda/h \sim 10$ à $\lambda/h \sim 25$.

10.1 Validation avec la méthode de projection

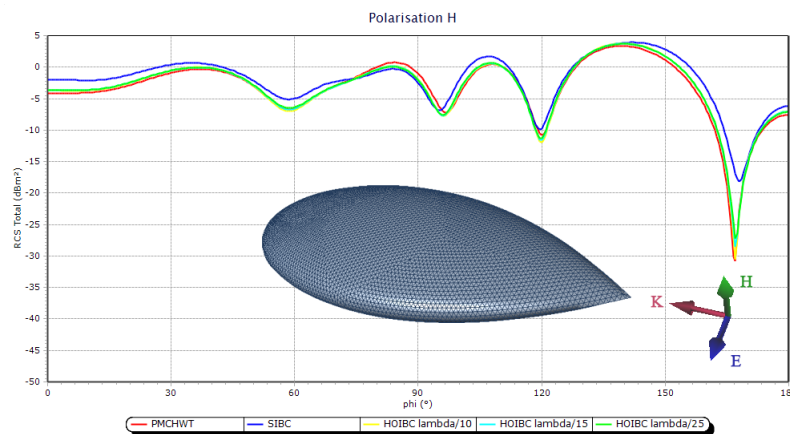


FIGURE 14 – $\phi\phi$ composante du RCS monostatique pour Nasa-amande conductrice revêtu, solution SIBC et solutions HOIBC.

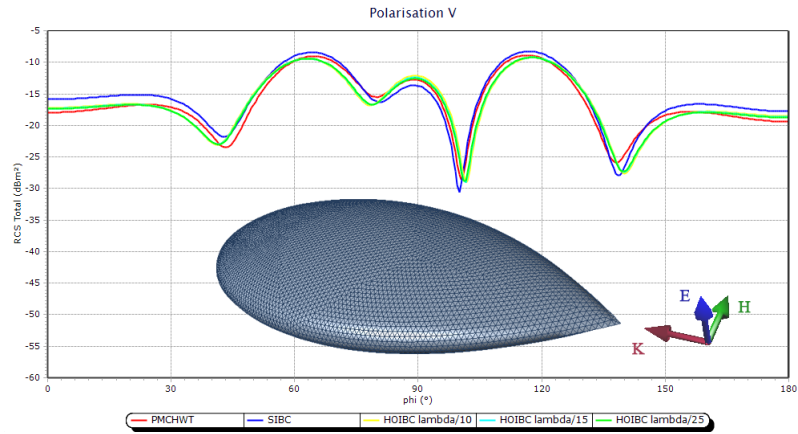


FIGURE 15 – $\theta\theta$ composante du RCS monostatique pour Nasa-amande conductrice revêtue, solution SIBC et solutions HOIBC.

Dans les deux polarisations, on observe un très bon accord entre la solution référence et le résultat numérique avec les différentes densités de maillage. De plus, on remarque que les solutions HOIBC sont plus précises que la solution SIBC (fig. 14 , fig. 15).

10.2 Validation avec la méthode de distribution

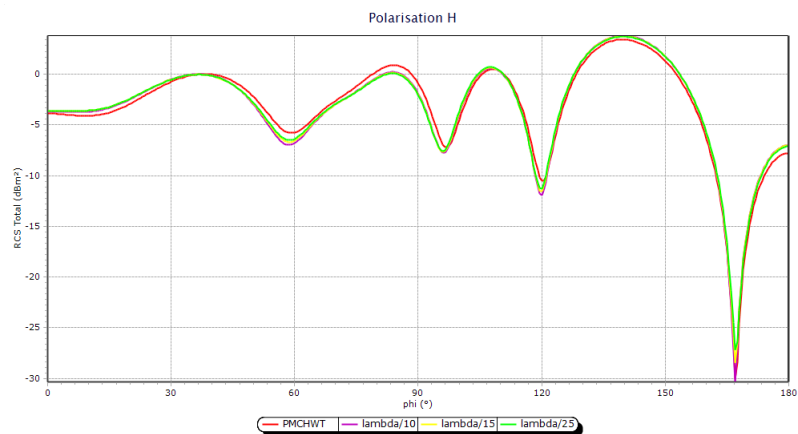


FIGURE 16 – $\phi\phi$ composante du RCS monostatique pour Nasa-amande conductrice revêtue et solutions HOIBC.

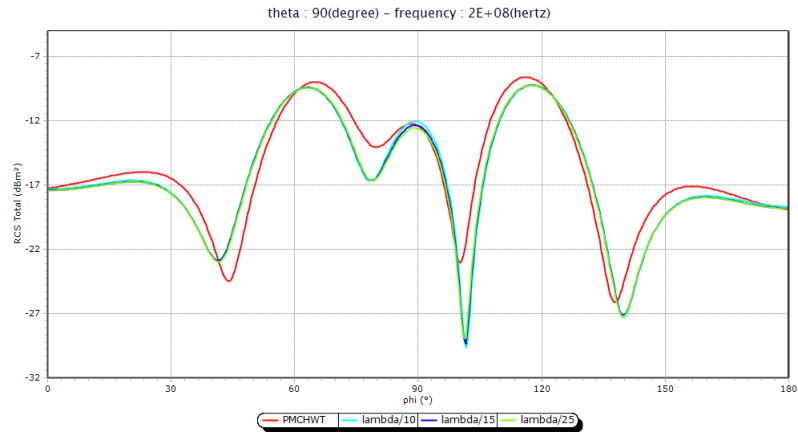


FIGURE 17 – $\theta\theta$ composante du RCS monostatique pour Nasa-amande conductrice revêtu et solutions HOIBC.

Figure 16 et Figure 17 montrent la RCS monostatique de l'amande avec la méthode de distribution en différentes polarisations H et V. On remarque que les courbes sont très proches de celle de PMCHWT dans les deux polarisations.

11 Simple ogive revêtue

Le corps ogival est un cas de test de RCS classique, les expressions analytiques des ogives sont présentées dans ([?]).

Dans ce test de référence, on a fixé l'angle θ à 90° et on a varié l'angle ϕ de 0° à 180° .

11.1 Validation avec la méthode de projection

Dans les figures ci-dessous, les vues en trois dimensions de la cible sont présentées avec leurs champs source.

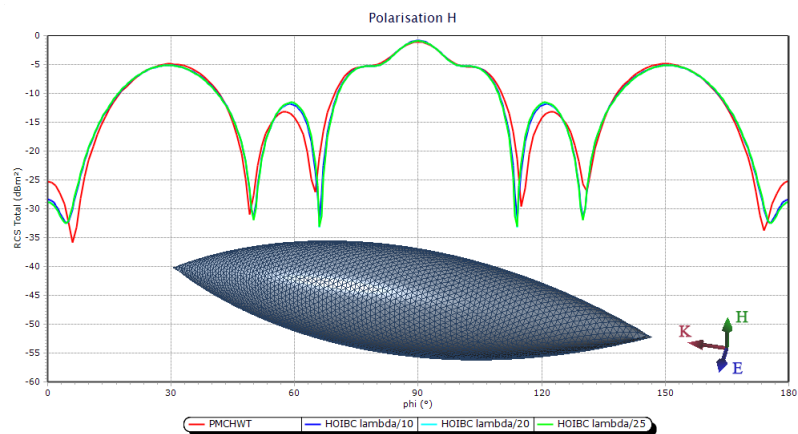


FIGURE 18 – Polarisation Horizontale du RCS monostatique pour simple ogive conductrice revêtu et solutions HOIBC.

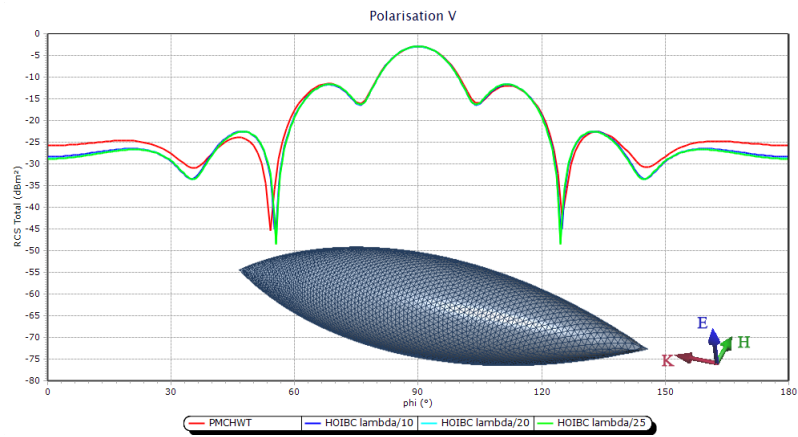


FIGURE 19 – Polarisation verticale du RCS monostatique pour simple ogive conductrice revêtue et solutions HOIBC.

Dans les deux polarisations, on a tracé la RCS de la référence PMCHWT et différentes solutions de HOIBC attribuées aux différentes densités de maillage.

11.2 Validation avec la méthode de distribution

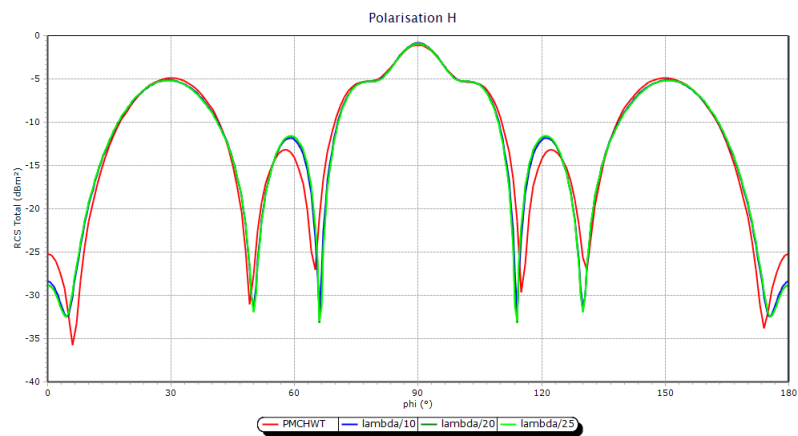


FIGURE 20 – $\phi\phi$ composante du RCS monostatique pour simple ogive conductrice revêtue, solution PMCHWT et solutions HOIBC.

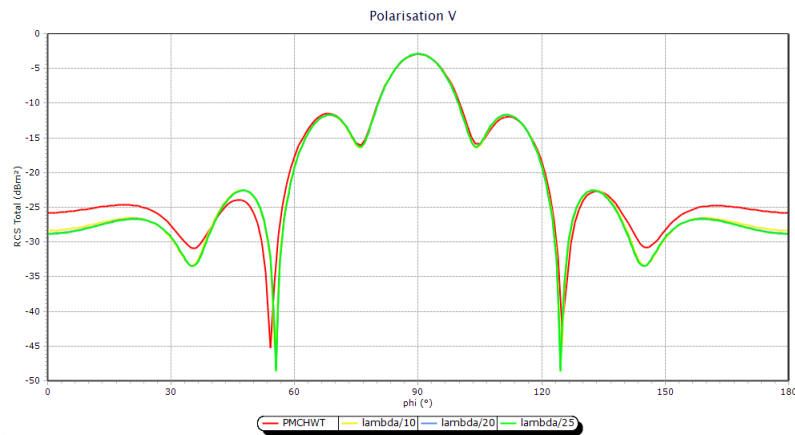


FIGURE 21 – $\theta\theta$ composante du RCS monostatique pour simple ogive conductrice revêtu, solution PMCHWT et solutions HOIBC.

On note que la valeur de la RCS, polarisée horizontalement ou verticalement, en 0° doit être égale à 180° ([?]) dans fig. 20 et fig. 21.

12 Double-ogive revêtue

La double ogive est constituée de deux demi-ogives de tailles différentes. Les expressions analytiques de l'ogive sont citées dans ([?]).

L'angle d'élévation dans ce test est égale à 90° . L'azimut vari de 0° à 180° . On a choisi cela, car l'azimut à zéro degré correspond à l'incidence sur la pointe de l'ogive. Elle est positionnée comme montré ci dessous.

12.1 Validation avec la méthode de distribution

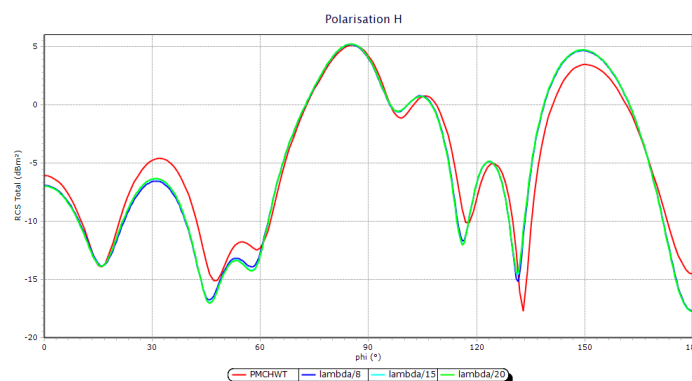


FIGURE 22 – La composante $\phi\phi$ du RCS monostatique pour double-ogive conductrice revêtue et solutions HOIBC

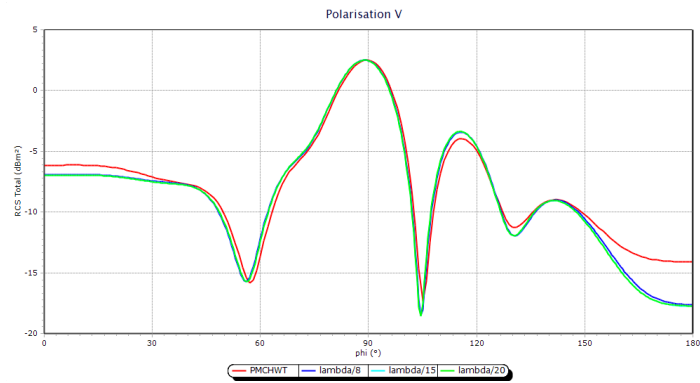


FIGURE 23 – La composante $\theta\theta$ du RCS monostatique pour double-ogive conductrice revêtue et solutions HOIBC

12.2 Validation avec la méthode de projection

Dans les fig. 24 et fig. 25, on calcule la RCS en fonction de l'angle azimut dans les deux polarisations.

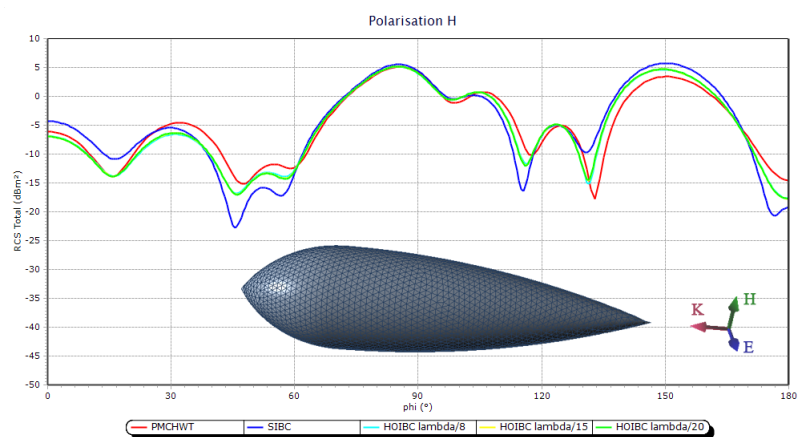


FIGURE 24 – $\phi\phi$ composante du RCS monostatique pour double ogive conductrice revêtue, solution PMCHWT, solution SIBC et solutions HOIBC.

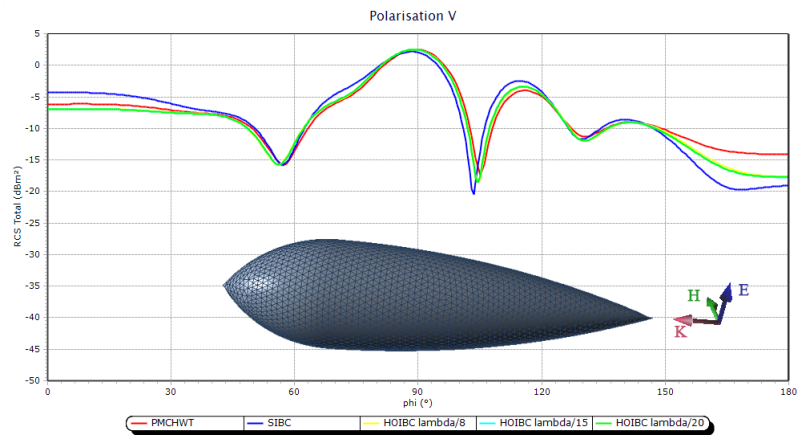


FIGURE 25 – $\theta\theta$ composante du RCS monostatique pour simple ogive conductrice revêtu, solution PMCHWT, solution SIBC et solutions HOIBC.

13 Autres cas complexes : WORKSHOP EM ISAE 2021

13.1 Cône revêtu

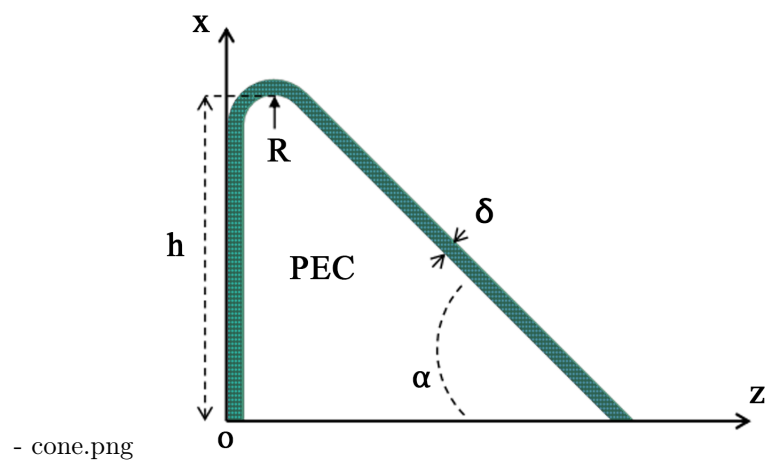


FIGURE 26 – La géométrie du cône revêtu

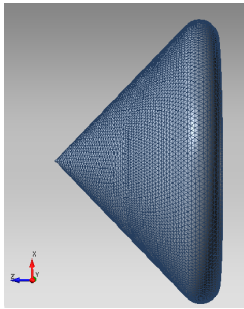


FIGURE 27 – Exemple de maillage de dimensions : $1.751\lambda_0 \times 1.751\lambda_0 \times 1.041\lambda_0$

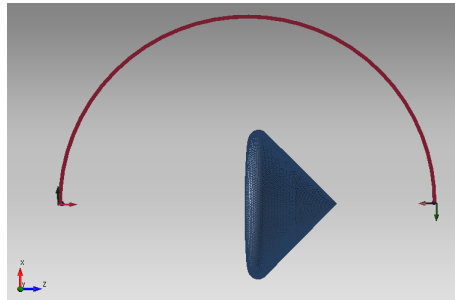


FIGURE 28 – Champs source monostatique

13.1.1 Validation avec la méthode de projection

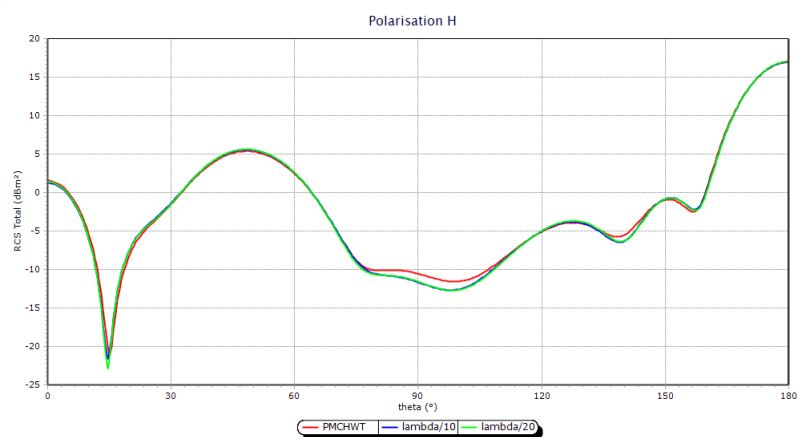


FIGURE 29 – $\phi\phi$ composante du RCS monostatique pour cône conductrice revêtu, solution PMCHWT et solutions HOIBC.

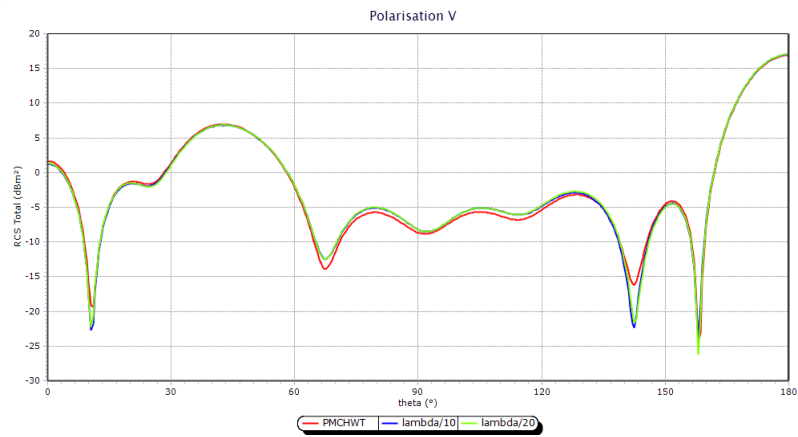


FIGURE 30 – $\theta\theta$ composante du RCS monostatique pour cône conductrice revêtu, solution PMCHWT et solutions HOIBC.

13.1.2 Validation avec la méthode de distribution

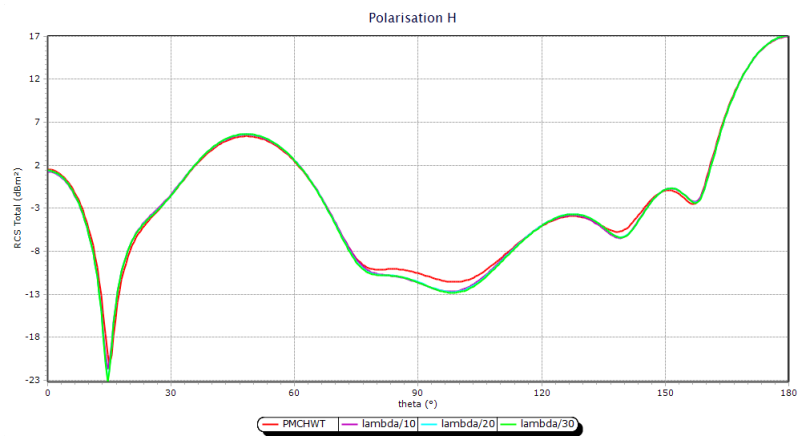


FIGURE 31 – $\phi\phi$ composante du RCS monostatique pour cône conductrice revêtu, solution PMCHWT et solutions HOIBC.

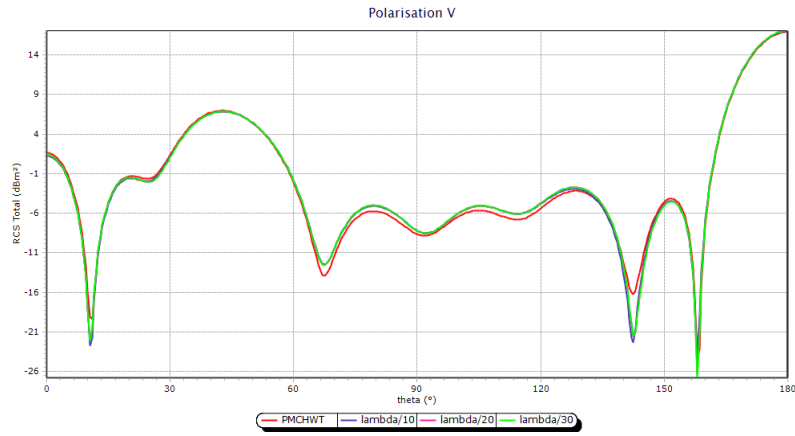


FIGURE 32 – $\theta\theta$ composante du RCS monostatique pour cône conductrice revêtu, solution PMCHWT et solutions HOIBC.

13.2 Sphère-cône-sphère revêtue

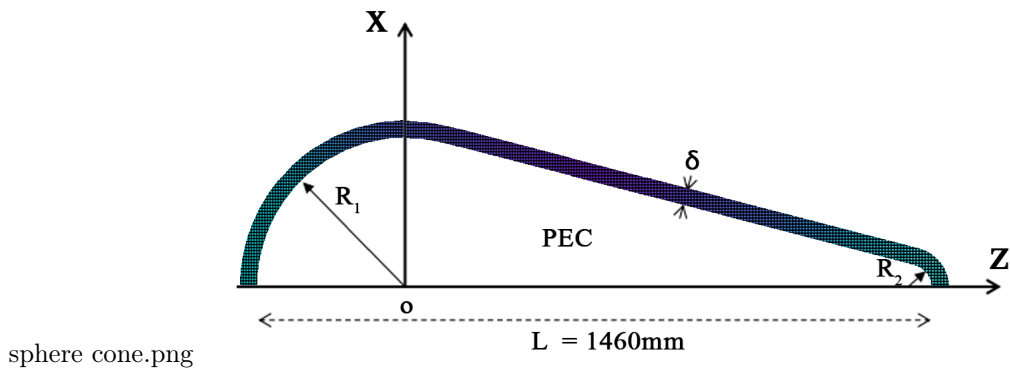


FIGURE 33 – Dimensions $1.312m \times 1.312m \times 0.798m$

13.2.1 Validation avec la méthode de projection

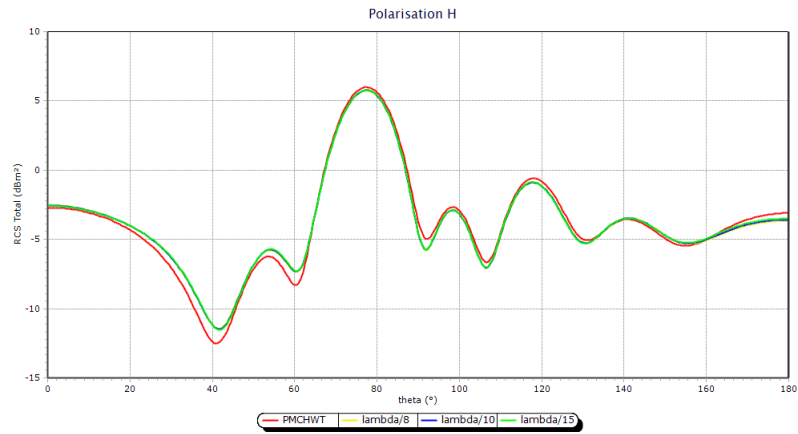


FIGURE 34 – $\phi\phi$ composante du RCS monostatique pour sphère-cône-sphère conductrice revêtu, solution SIBC et solutions HOIBC.

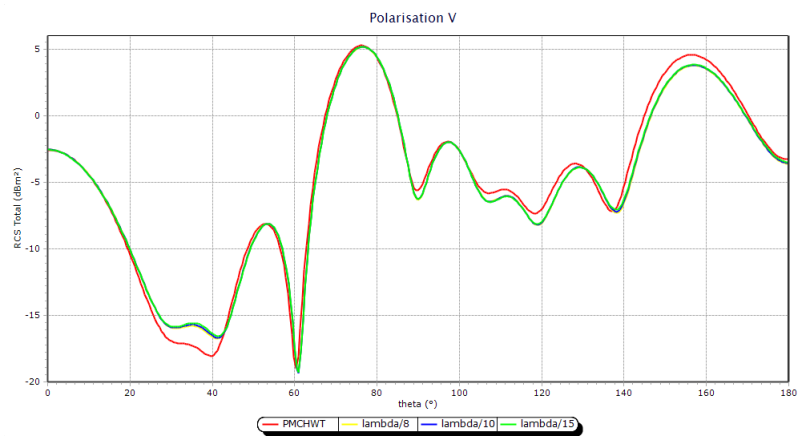


FIGURE 35 – $\theta\theta$ composante du RCS monostatique pour sphère-cône-sphère conductrice revêtu, solution SIBC et solutions HOIBC.

13.2.2 Validation avec la méthode de distribution

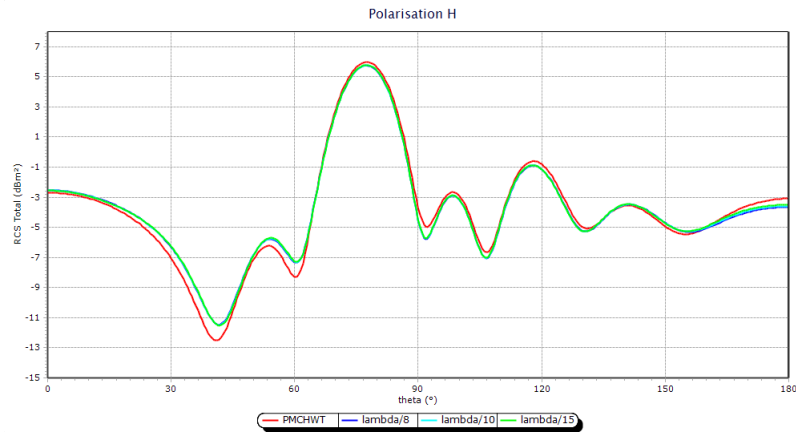


FIGURE 36 – $\phi\phi$ composante du RCS monostatique pour sphère-cône-sphère conductrice revêtu, solution PMCHWT et solutions HOIBC.

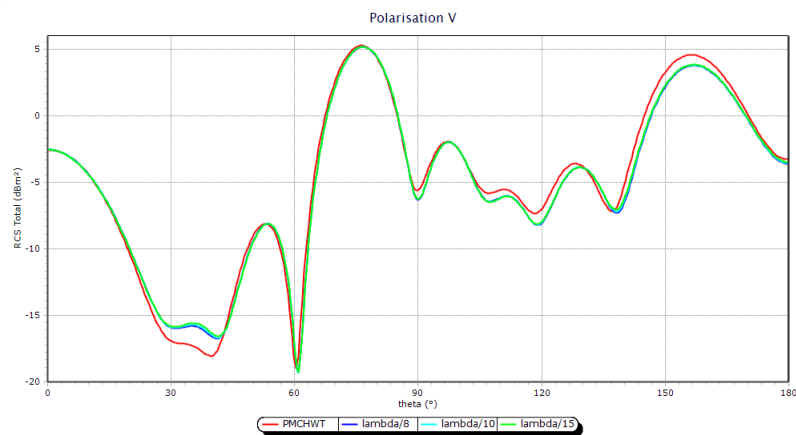


FIGURE 37 – $\theta\theta$ composante du RCS monostatique pour sphère-cône-sphère conductrice revêtu, solution PMCHWT et solutions HOIBC.

14 Temps d'exécution pour différents cas complexes

Conclusion

Ces deux méthodes sont implémentés dans un code de calcul, quelques comparaisons numériques avec la formulation de PMCHWT ont montré l'efficacité des nouvelles méthodes proposées dans cette thèse.

L'analyse de SER de plusieurs structures de référence a été réalisée à l'aide d'un code MoM où on a implémenté la HOIBC avec les deux méthodes.

Les résultats obtenus ont montré la fiabilité, les performances et la polyvalence du code qui a fonctionné sur une grande variété de tests à l'aide des supercalculateurs. En conclusion, ces

Géométrie	Fréquence	Maillages	NDL	Temps de calcul	
				Projection	Distribution
Cône-sphère	1.45 GHz	$\lambda/8$	44982	2h18m	h m
Nasa-Almond	0.2 GHz	$\lambda/10$	5712	5s	6s
		$\lambda/15$	11358	15s	16s
		$\lambda/25$	31440	1m42s	1m50s
Simple ogive	0.7 GHz	$\lambda/10$	7758	8s	10s
		$\lambda/20$	27042	1m17s	1m21s
		$\lambda/25$	42186	3m28s	3m34s
Double ogive	0.3 GHz	$\lambda/8$	5016	5s	6s
		$\lambda/15$	17790	1m9s	1m27s
		$\lambda/20$	31554	1m56s	2m50s
Cône	0.35 GHz	$\lambda/10$	9936	12s	13s
		$\lambda/20$	39642	1h42m	2h54m
		$\lambda/30$	89802	15h22m	15h35m
Sphère-cône-sphère	0.45 GHz	$\lambda/8$	12342	17s	18 s
		$\lambda/10$	19218	38s	41 s
		$\lambda/15$	43068	3m27s	3m39s
		$\lambda/20$	77346	11h	10h16

TABLE 1 – Table de calculs

deux nouvelles méthodes semble être une alternative intéressante aux formulations classiques dans le contexte des objets PEC avec un revêtement diélectrique.

Références

- [1] Y. Rahmat-Samii and D. J. Hoppe, *Impedance boundary conditions in electromagnetics*, Taylor & Francis, (1995).
- [2] A. Aubakirov, *Electromagnetic Scattering Problem with Higher Order Impedance Boundary Conditions and Integral Methods*, UCP, (2014).
- [3] S. Oueslati and I. Balloumi and C. Daveau and A. Khelifi, *Analytical method for the evaluation of singular integrals arising from boundary element method in electromagnetism*, *International Journal of Numerical Modelling*, Vol. 34 (2020).
- [4] , B. Stupfel and O. Marceaux, *High-Order Impedance Boundary Conditions for Multilayer Coated 3-D Objects IEEE Trans. Antenna and Propagations*, Vol. 48,N. 3 pp. 429-436, March(2000).