



**HAL**  
open science

# Optimisation des structures lattices : une comparaison entre le layout optimization et l'optimisation topologique

Enrico Stragiotti, François-Xavier Irisarri, Cédric Julien, Joseph Morlier

## ► To cite this version:

Enrico Stragiotti, François-Xavier Irisarri, Cédric Julien, Joseph Morlier. Optimisation des structures lattices : une comparaison entre le layout optimization et l'optimisation topologique. 15ème colloque national en calcul des structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. hal-03687214v1

**HAL Id: hal-03687214**

**<https://hal.science/hal-03687214v1>**

Submitted on 8 Jul 2022 (v1), last revised 3 Jun 2022 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Optimisation des structures lattices : une comparaison entre le *layout optimization* et l'optimisation topologique

Enrico Stragiotti<sup>1</sup>, François-Xavier Irisarri<sup>1</sup>, Cédric Julien<sup>1</sup> et Joseph Morlier<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ONERA/DMAS - Université Paris Saclay 92320 Châtillon, France  
{enrico.stragiotti, francois-xavier.irisarri, cedric.julien}@onera.fr

<sup>2</sup> ICA - Institut Clément Ader, ISAE - SUPAERO, 31400 Toulouse, France  
joseph.morlier@isae-supero.fr

**Résumé** — Nous discutons et comparons deux méthodes d'optimisation structurale pertinentes pour les structures lattices : l'optimisation topologique et le *layout optimization*. Nous présentons une application originale de ces deux méthodes dans le cadre de la minimisation de la masse structures lattices cellules masse en tenant compte d'un critère de rupture en contrainte. Nous proposons ensuite une comparaison qualitative de ces deux méthodes et discussions de leur pertinence respective pour l'optimisation des structures lattices.

**Mots clés** — Structures lattices, Optimisation topologique, Layout optimisation.

## 1 Introduction

Ce travail traite des structures lattices cellulaires, c'est-à-dire de structures treillis constituées de la répétition d'un motif élémentaire. La nature répétitive des structures lattices cellulaires apporte diverses caractéristiques intéressantes, parmi lesquelles des temps courts d'assemblage et de réparation, des outillages et des coûts de fabrication réduits. Un des principaux leviers d'optimisation pour ce type de structure réside dans la conception de la cellule, sa topologie et le choix de ses matériaux. Les structures lattices cellulaires se sont révélées être des candidats intéressants pour des structures de voilures innovantes [1, 2].

Dans cet article, nous discutons et comparons deux méthodes d'optimisation structurales pertinentes pour les structures lattices : l'optimisation topologique [3, 4] et le *layout optimization* [5]. L'optimisation topologique considère le domaine de conception comme un continuum, dans lequel chaque élément se voit assigné un matériau ou du vide, tandis que le *layout optimization* est appliquée à une structure treillis (*ground structure*), un environnement discret. Cette deuxième méthode vise à optimiser les sections et la connectivité des barres de la *ground structure*. Pour comparer les deux algorithmes, une optimisation sous contraintes de résistance est mise en place, dans laquelle l'objectif est de minimiser le volume de la structure. S'il s'agit du problème type pour le *layout optimization*, ce type de formulation s'accompagne de nombreuses difficultés en optimisation topologique et n'a pas, à notre connaissance été appliquée dans une logique d'optimisation cellulaire, sujet que nous abordons en section 2. Les performances, la forme et la fabricabilité des solutions optimisés par optimisation topologique et *layout optimization* sont ensuite comparées en section 3.

## 2 Optimisation topologique cellulaire sous contraintes de résistance

### 2.1 Optimisation topologique sous contraintes de résistance

Soit  $\Omega$  un domaine rectangulaire de dimensions  $X$  et  $Y$ , contenant respectivement  $N_x$  et  $N_y$  éléments linéaires à 4 nœuds. Suivant la théorie classique de l'optimisation topologique, une variable de densité  $\rho$  est liée à chaque élément de la structure. La variable de densité peut varier entre 0 et 1 et représente respectivement le vide ou le plein. Il s'agit ici de minimiser la masse de la structure avec des contraintes de résistance locale. Trois difficultés principales peuvent survenir dans ce contexte :

1. Les contraintes mécaniques ne sont définies que pour les éléments où  $\rho_i > 0$ , donc l'ensemble des

contraintes change au cours de l'optimisation. Cette classe de problèmes dite de *Mathematical Programs with Vanishing Constraints* (MPVC) [6] est connue pour être difficile à résoudre.

2. Les MPVC peuvent présenter des de *singular minima* [7], des optimums locaux le plus souvent inaccessibles aux optimiseur à gradient standard. Ce problème est souvent résolu en utilisant une technique appelée *relaxation* du domaine de conception.
3. La contrainte mécaniques est une mesure locale, et donc un grand ensemble de contraintes d'optimisation est généré lorsqu'un maillage EF raisonnablement fin est utilisé (un élément, une contrainte). Ce problème est souvent résolu en utilisant des techniques d'*agrégation* des contraintes.

La contrainte de résistance locale normalisée est formulée comme :

$$\bar{g}_i = \bar{\rho}_i g_i = \bar{\rho}_i \left( \frac{\sigma_{VM,i}}{\sigma_l} - 1 \right) \leq 0, \quad \forall i \in \Omega. \quad (1)$$

où  $\sigma_{VM,i}$  représente la contrainte de von Mises pour l'élément  $i$ , et  $\sigma_l$  est la contrainte de von Mises maximale admissible. Dans cette formulation, la contrainte mécanique est évaluée en utilisant la formulation dite des contraintes microscopiques qui permet de mieux modéliser la contrainte mécanique dans les cellules à densité inférieure à 1 [8].

L'implémentation de cet article est basée sur l'utilisation d'une fonction Kreisselmeier-Steinhausser (KS) [9] modifiée pour appliquer la relaxation et l'agrégation en même temps [10]. La borne inférieure de la fonction KS est utilisée pour approximer la contrainte de contrainte relaxée locale maximale :

$$G_{KS}^l = \frac{1}{P} \ln \left( \frac{1}{N_e} \sum e^{P \bar{g}_i} \right) \quad \text{avec } N_e = \text{nombre d'éléments } e \in \Omega. \quad (2)$$

Cette méthode présente l'avantage de n'utiliser qu'un unique hyperparamètre  $P$  pour contrôler l'agrégation et la relaxation des contraintes, simplifiant la phase de recherche des bons paramètres pour l'optimisation. Le problème d'optimisation traité s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}_1) : \quad \min_{\rho} \quad & V = \frac{1}{V_0} \sum_{i \in \Omega} \bar{\rho}_i v_i \\ \text{s.t.} \quad & G_{KS}^l = \frac{1}{P} \ln \left( \frac{1}{N_e} \sum_{i \in \Omega} e^{P \bar{g}_i} \right) \leq 0 \\ & \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ & 0 \leq \rho_i \leq 1, \end{aligned} \quad (3)$$

où  $v_i$  représente le volume du  $i$ -ième élément et la fonction objectif  $V$  est la fraction de volume occupée dans le volume  $V_0 = \sum v_i$ .  $\rho = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{N_e}]^T$  représente la variable de conception de l'optimisation, tandis que  $\bar{\rho} = [\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \dots, \bar{\rho}_{N_e}]^T$  représente la densité physique, obtenue après filtrage et projection de  $\rho$  (deux opérations nécessaires pour éviter les problèmes numériques de solutions en damier et minimiser la présence de valeurs de densité intermédiaires en fin d'optimisation, voir [11] pour plus de détails sur les méthodes implémentées).  $\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$  est l'équation d'état du problème et définit la réponse élastique de la structure à une charge externe  $\mathbf{F} = [f_1, f_2, \dots, f_{N_e}]^T$ . La matrice de rigidité globale  $\mathbf{K}$  est assemblée à partir de la matrice de rigidité des éléments  $\mathbf{K} = \sum_{i \in \Omega} \mathbf{K}_{e,i}$  et  $\mathbf{K}_{e,i} = E_i \mathbf{K}_{e,0}$  où  $\mathbf{K}_{e,0}$  représente la matrice de rigidité relative au type d'élément choisi et  $E_i(\bar{\rho}_i)$  le module de Young de l'élément. Dans cet article, nous utilisons l'approche Solid Isotropic Material Interpolation with Penalization (SIMP) [12] pour calculer  $E_i(\bar{\rho}_i)$  avec le paramètre  $p = 3$ .

## 2.2 Approche cellulaire - Variable linking

La littérature sur l'optimisation des structures cellulaires est principalement divisée en approches dites *full-scale* ou *multi-scale* [13], où la separation d'échelle entre le motif et la structure représente le facteur discriminant. Cet article se concentre sur les structures cellulaires pour lesquelles il n'y a pas de separation d'échelle claire entre le motif répétitif et la structure complète pour lesquelles une approche *full-scale* semble plus pertinente. Bien que des approches *full-scale* aient déjà été appliquées

aux problèmes de minimisation de la souplesse (*compliance*) [13] et de conception de mécanismes [14], il n'existe, à la connaissance des auteurs, aucune étude publiée sur l'optimisation topologique *full-scale* sous contrainte de résistance.

L'approche cellulaire est implémentée en utilisant un schéma de *variable linking* sur une grille structurée. Les variables de conception deviennent  $\kappa = [\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n_e}]^T$ , où  $n_e = n_x \times n_y$  est le nombre d'éléments définis dans la cellule de conception  $\Omega_c$ .  $\kappa$  est défini sur tous les éléments finis de  $\Omega_c$  et liés à la densité  $\rho$  sur toute la structure  $\Omega$  (voir Figure 1).

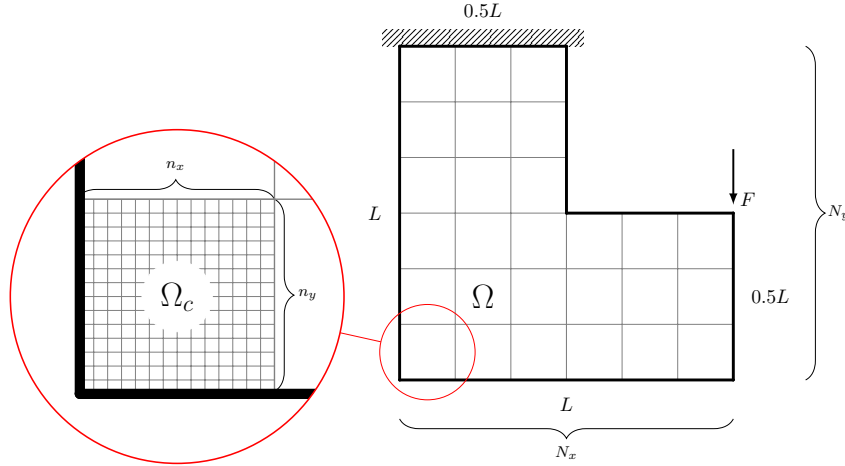


FIGURE 1 – Domaine de conception et conditions aux limites pour une poutre en L encastée en son sommet. Les variables de conception  $\kappa$  à l'intérieur du domaine  $\Omega_c$  sont liées à la structure  $\Omega$  dont le maillage est constituée par la répétition de la cellule de conception.

Une matrice de passage  $G$  est utilisée pour relier les variables  $\kappa$  aux densités  $\rho$  selon la relation  $\rho = G\kappa$ .  $G$  est une matrice sparse  $N_e \times n_e$  dans laquelle la variable de conception  $\kappa_j$  est liée à la variable d'optimisation  $\rho_i$ , alors  $G(i, j) = 1$ . Le problème  $\mathbb{P}_1$  est alors reformulé comme suit :

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{P}_1^*) : \quad & \min_{\kappa} \quad V = \frac{1}{V_0} \sum_{k \in \Omega_c} \kappa_k v_k \\
 \text{s.t.} \quad & G_{KS}^l = \frac{1}{P} \ln \left( \frac{1}{N} \sum_{i \in \Omega} e^{P \bar{g}_i} \right) \leq 0 \\
 & KU = F \\
 & 0 \leq \kappa_k \leq 1 \\
 & \rho = G\kappa.
 \end{aligned} \tag{4}$$

### 2.3 Application au cas de la poutre en L

Une poutre en L encastée en son sommet est utilisée pour valider l'algorithme. Le maillage est constitué de  $400 \times 400$  éléments linéaires à 4 nœuds (voir Figure 1). La charge est répartie sur 10 éléments pour éviter les concentrations de contraintes. Le problème  $\mathbb{P}_1^*$  est résolu pour quatre nombres différents de cellules de conception ( $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$  et  $8 \times 8$  cellules). Il est important de noter que le maillage de la structure est le même pour tous les cas, tandis que l'espace de conception  $\Omega_c$  diminue lorsque le nombre de cellules augmente.

L'algorithme d'optimisation choisi est le *Method of Moving Asymptotes* (MMA) [15]. Le paramètre appelé *movelimit* [10] est défini sur 0.1. Les autres paramètres de l'algorithme sont mis à leur valeur par défaut. Le nombre d'itérations max est fixé à 3000, le critère d'arrêt est calculé comme  $\|r_k\|_2 / \sqrt{N_e}$  avec le residual calculé comme  $r_k = \bar{\rho}_k - \bar{\rho}_{k-1}$  et fixé à  $10^{-4}$ . Le paramètre d'agrégation  $P$  est défini à 32 et la taille du filtre est fixée à 7 elements. Les propriétés matériau utilisées ici sont  $E = 1$ ,  $\nu = 0.3$  et la contrainte équivalente maximale admissible est fixée à  $\sigma_L = 0.25$ . L'optimisation ne prend en compte que le comportement linéaire de la structure.

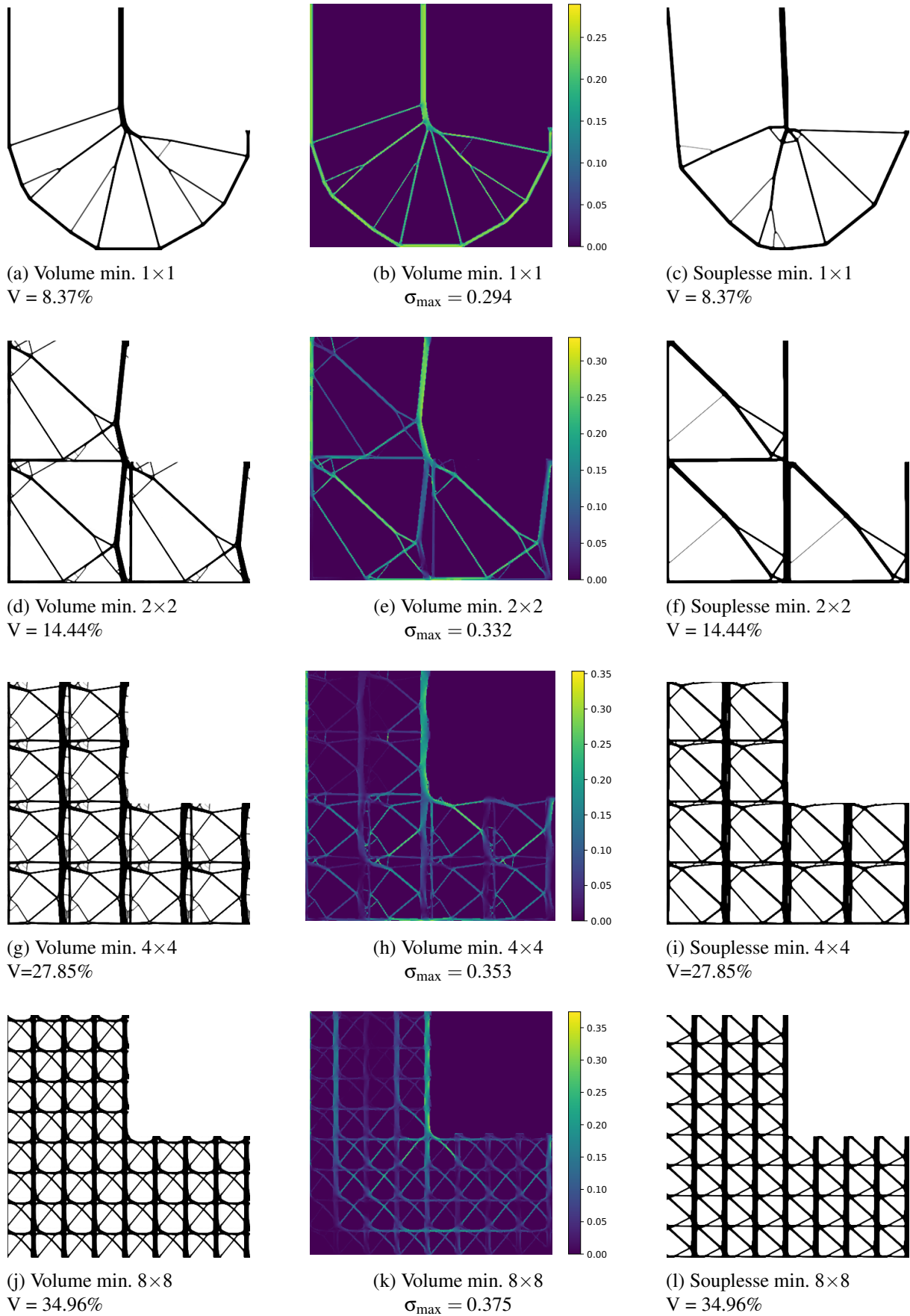


FIGURE 2 – Résultats de l'optimisation topologique. Les deux colonnes de gauche présentent les résultats de la densité de minimisation du volume. Les sous-figures centrales présentent la contrainte de von Mises équivalente pour les éléments de densité  $\bar{\rho} > 0,5$ . La dernière colonne présente les résultats de la minimisation de la souplesse. La contrainte volumique correspond au résultats de gauche.

		Minimisation de volume		Minimisation de souplesse	
Volume	Cellules	Souplesse	Contrainte max	souplesse	Contrainte max
8.37 (1.00)	1x1	438.23 (1.03)	0.294 (1.00)	427.66 (1.00)	0.911 (3.09)
14.44 (1.72)	2x2	456.12 (1.11)	0.332 (1.00)	409.41 (1.00)	0.924 (2.78)
27.85 (3.32)	4x4	363.97 (1.16)	0.353 (1.00)	312.24 (1.00)	0.746 (2.11)
34.96 (4.17)	8x8	321.30 (1.05)	0.375 (1.00)	305.76 (1.00)	0.763 (2.03)

TABLE 1 – Comparaison des résultats obtenus en minimisation de volume et en minimisation de souplesse. Entre parenthèses, les résultats sont normalisés, pour les contraintes, par rapport à la contrainte maximale de la formulation volumique et, pour la souplesse, par rapport au résultat de la minimisation de souplesse à fraction volumique maximale imposée identique.

Le tableau 1 et la figure 2 synthétisent les résultats obtenus en minimisation de volume, sous contrainte de résistance, et en minimisation de souplesse pour une fraction volumique maximale imposée égale au résultat de la minimisation de volume.

La formulation de minimisation de volume tend à créer des structures de type *full-stress* (voir les figures 2a et b). Lorsque l’approche des *variable linking* est utilisée, les cellules deviennent moins sollicitées, avec la présence de redondances structurelles et de multiples chemins de contraintes.

La contrainte maximale de von Mises est toujours supérieure à la valeur réelle admissible de 0.25, car la fonction de contrainte  $G_{KS}^l$  est toujours inférieure au  $\bar{g}$  réel. C’est un problème connu de cette formulation [10]. Nous observons que la fraction volumique optimisée augmente avec le nombre de cellules, pour une contrainte maximale admissible fixe. Au fur et à mesure que la structure est divisée en cellules supplémentaires, l’espace de conception se rétrécit, contraignant encore plus notre problème.

La topologie de la solution non-cellulaire en Fig. 2a réduite la concentration de contraintes au niveau du raccord du L en proposant une forme courbe, sans angle marqué. Cela apparaît d’une façon moins prononcé dans le cas cellulaire, ce qui s’accompagne d’une baisse de performance globale des solution cellulaires avec l’augmentation du nombre de cellules.

### 3 Comparaison entre l’optimisation topologique et le *layout optimization*

#### 3.1 Cellular layout optimisation

Le *layout optimization* est une technique d’optimisation dédiée aux treillis de barres. Au lieu de travailler avec un domaine continu comme dans le cas de l’optimisation topologique, le *layout optimization* optimise les sections et la connectivité des barres d’une *ground structure* discrète [5]. La *ground structure* est définie comme l’ensemble complet des barres qui relie une grille de points  $M$ . Pour chaque barre, nous définissons une section  $a$  et une longueur  $l$ . Comme tous les joints de la *ground structure* sont traités comme des pivots, tous les éléments barres ne subissent qu’une charge de traction ou de compression.

Par rapport à l’optimisation topologique basée sur SIMP décrite dans la section 2, le *layout optimization* semble attrayante pour les raisons suivantes :

1. En regardant les travaux pionniers de la NASA [1] sur des structures ultralégères, nous observons que la fraction volumique des cellules est très faible (environ 0.438%). On sait qu’une fraction volumique aussi faible sur un maillage EF régulier augmente considérablement le nombre d’éléments nécessaires pour discrétiser correctement la structure dans un cadre d’optimisation topologique.
2. Même si l’optimisation topologique offre davantage de liberté dans la forme des structures, il est connu qu’à ces fractions volumiques et, surtout si les contraintes de flambement et les considérations de fabrication sont prises en compte, la topologie optimale est un treillis [16].
3. La conception des structures en treillis repose naturellement sur des contraintes de résistance (contrainte maximale admissible), de flambement et d’élancement maximal, qui sont toutes connues pour être difficiles à mettre en œuvre pour l’optimisation topologique, mais son beaucoup plus aisées à implémenter en *layout optimization*.
4. L’optimisation topologique nécessite des ressources de calcul massives pour fonctionner sur des

structures de grande taille [17], tandis que le *layout optimization* s'est avérée efficace et rapide pour des grandes applications aérospatiales [2]. En plus, le *layout optimization* est facile à formuler pour un problème 3D.

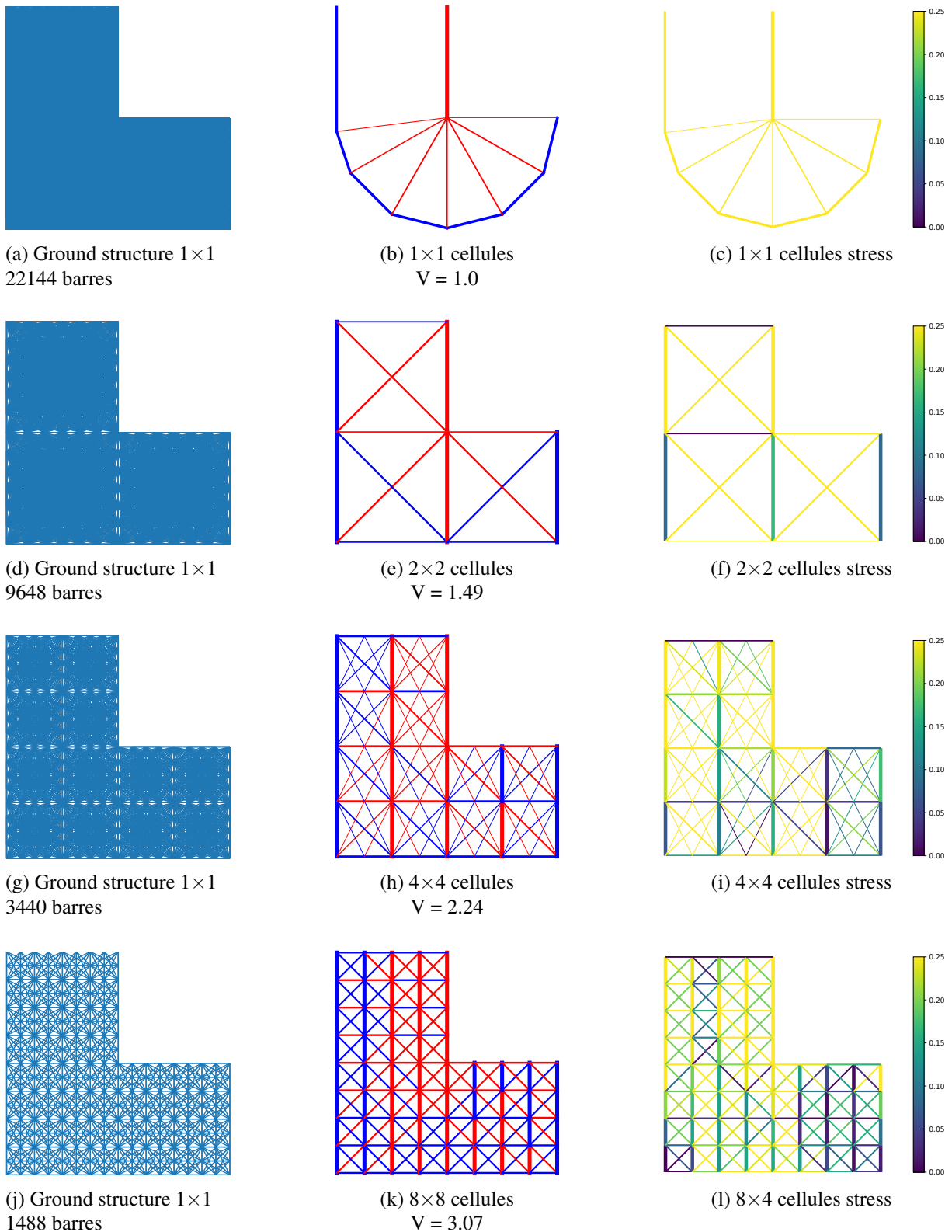


FIGURE 3 – Résultats de *layout optimization*. À gauche, la représentation des *ground structures* initiales. Au centre, la couleur de la barre représente l'état de charge, le rouge indique les barres sollicitées en la compression et le bleu en traction. L'épaisseur des segments est proportionnel à la section optimale des barres. Les sous-figures de droite présentent la contrainte dans les barres.

De façon analogue à la section 2.2, nous appliquons ici une méthode *variable linking* : les variables

de conception sont  $\mathbf{q}$  et  $\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n_e}]^T$  définis dans une cellule de conception  $\Omega_c$ . Dans la suite, nous formulons le problème de *layout optimization* de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
(\mathbb{P}_2) : \quad & \min_{\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{q}} \quad V = \mathbf{l}^T \boldsymbol{\kappa} \\
& \text{s.t.} \quad \mathbf{B}\mathbf{q} = \mathbf{f} \\
& \quad \quad -\boldsymbol{\sigma}^- \mathbf{a} \leq \mathbf{q} \leq \boldsymbol{\sigma}^+ \mathbf{a} \\
& \quad \quad \boldsymbol{\kappa} \geq 0, \\
& \quad \quad \mathbf{a} = \mathbf{G}\boldsymbol{\kappa}.
\end{aligned} \tag{5}$$

où  $V$  représente le volume structurel évalué comme le produit des longueurs des éléments  $\mathbf{l} = [l_1, l_2, \dots, l_N]^T$  et les sections des éléments  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$ .  $\mathbf{B}$  est une matrice de  $2M \times N$  contenant les cosinus directeurs du  $j$ -ième barre par rapport au  $i$ -ième degré de liberté pour calculer l'équilibre des forces nodales.  $M$  est le nombre de nœuds et  $N$  le nombre de barres d'une *ground structure*.  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_N]^T$  est un vecteur contenant les efforts internes des barres causés par la charge externe  $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_M]^T$ .  $\boldsymbol{\sigma}^-$  et  $\boldsymbol{\sigma}^+$  sont les contraintes maximales admissibles en compression et en traction du matériau, respectivement. La résolution du problème 5 produit des structures complexes composées d'une multitude de petits barres qui tendent vers les formes des structures de Michell [18]. Bien que l'on sache que ces structures sont presque optimales, on voudrait limiter la complexité de la structure. En remplaçant  $\mathbf{l}$  par  $\tilde{\mathbf{l}} = [l_1 + s, l_2 + s, \dots, l_N + s]^T$ , on pénalise l'apparition de petits barres. Le *layout optimization* suit la formulation de conception plastique. Cela signifie que la déformation dans la région élastique est considérée comme négligeable, et une contrainte constante  $\sigma$  est supposée pour toute déformations non nulles.

Tel qu'il est formulé, le problème 5 représente un problème de *linear programming* (LP) qui peut être résolu efficacement par des algorithmes modernes. Dans ce travail, nous avons utilisé la bibliothèque Python CVXPY [19] et le solveur ECOS. L'implémentation Python du problème 5 est basée sur le code fourni par He et al. [20]. Le code a été étendu par les auteurs pour effectuer le *variable linking*.

### 3.2 Application au cas de la poutre en L et discussion

On reprend ici le cas d'application traité en section 2.3. L'analyse est réalisée sur une *ground structure* constituée de  $17 \times 17$  points, avec un total de barres candidats qui dépend du nombre de cellules à cause de la différente connectivité (voir figure 3). La contrainte maximale admissible est fixée à  $\sigma_L = 0,25$  pour la traction et la compression.

Une comparaison directe des deux formulations n'est pas triviale. Nous avons remarqué que la modification du module de Young  $E$  influence la solution trouvée par l'optimisation topologique. Le *layout optimization*, au contraire, n'est pas du tout influencé par ce paramètre. En plus de ça, la nature discrete du treillis ne se rapproche pas de la discretisation du maillage EF de l'optimisation topologique. Il est donc difficile de comparer les deux formulations d'un point de vue quantitatif.

Cependant, nous pouvons comparer d'un point de vue qualitatif les résultats. La figure 3 nous montre que le *layout optimization* présente les mêmes tendances de l'optimisation topologique concernant les propriétés mécaniques par rapport au nombre de cellules. Toutefois, le *layout optimization* ne crée pas de raccord courbe entre les branches de la poutre en L et conserve l'angle droit, pourtant critique du point de vue de la tenue. Cela est dû au fait que les joints sont considérées comme des pivots et ne peuvent pas être le lieu de concentrations de contraintes. Une autre remarque importante est que le temps de calcul du *layout optimization* pour un nombre comparable de variables de conception a toujours été inférieur de trois ordres de grandeur (secondes vs heures sur un ordinateur portable) par rapport à l'optimisation topologique. L'absence d'analyse EF et la formulation linéaire du problème réduisent le coût et le nombre d'itérations.

## 4 Conclusions

Nous présentons ici une formulation innovante d'optimisation topologique cellulaire pour minimiser la masse d'une structure 2D en tenant compte des contraintes mécaniques. L'implémentation cellulaire est basée sur la méthode du *variable linking*. Cette méthode et les résultats obtenus sont discutés comparativement à la méthode du *layout optimization*. Les tendances générales observées sont similaires avec



les deux méthodes. En particulier, subdiviser la structure en cellules identiques tend à diminuer les performances mécaniques globales lorsque le nombre de cellules augmente, ce qui suggère d’élaborer des stratégies permettant de différencier les cellules et d’explorer le compromis entre performances et facilité de fabrication. Dans l’optique de concevoir des structures cellulaires ultra-légères, le *layout optimisation* semble mieux adapté de par sa capacité à gérer de très faibles fraction volumiques, et un très faible coût de calcul, en particulier. Toutefois la formulation plastique ne permet pas de décrire le comportement élastique de la structure, limitation à laquelle nous tacherons de remédier dans nos prochains travaux.

## Références

- [1] N. B. Cramer, D. W. Cellucci, O. B. Formoso, C. E. Gregg, B. E. Jenett, J. H. Kim, M. Lendraitis, S. S. Sweit, G. T. Trinh, K. V. Trinh, and K. C. Cheung. Elastic shape morphing of ultralight structures by programmable assembly. *Smart Materials and Structures*, 28(5) :055006, April 2019.
- [2] M. M. J. Opgenoord and K. E. Willcox. Design for additive manufacturing : cellular structures in early-stage aerospace design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 60(2) :411–428, August 2019.
- [3] M. P. Bendsøe. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization*, 1(4) :193–202, December 1989.
- [4] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology Optimization*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [5] W. S. Dorn, R. E. Gomory, and H. Greenberg. Automatic design of optimal structures. *J. Mécanique*, 1964.
- [6] W. Achtziger and C. Kanzow. Mathematical programs with vanishing constraints : optimality conditions and constraint qualifications. *Mathematical Programming*, 114(1) :69–99, July 2008.
- [7] G. Rozvany. On design-dependent constraints and singular topologies. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2) :164–172, April 2001.
- [8] P. Duysinx and M. P. Bendsøe. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(8) :1453–1478, 1998.
- [9] G. Kreisselmeier and R. Steinhauser. Systematic Control Design by Optimizing a Vector Performance Index. *IFAC Proceedings Volumes*, 12(7) :113–117, September 1979.
- [10] A. Verbart, M. Langelaar, and F. v. Keulen. A unified aggregation and relaxation approach for stress-constrained topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, February 2017.
- [11] F. Wang, B. S. Lazarov, and O. Sigmund. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(6) :767–784, June 2011.
- [12] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 69(9) :635–654, November 1999.
- [13] J. Wu, O. Sigmund, and J. P. Groen. Topology optimization of multi-scale structures : a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, March 2021.
- [14] K. Wu, O. Sigmund, and J. Du. Design of metamaterial mechanisms using robust topology optimization and variable linking scheme. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 63(4) :1975–1988, April 2021.
- [15] K. Svanberg. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2) :359–373, 1987.
- [16] O. Sigmund, N. Aage, and E. Andreassen. On the (non-)optimality of Michell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 54(2) :361–373, August 2016.
- [17] N. Aage, E. Andreassen, B. S. Lazarov, and O. Sigmund. Giga-voxel computational morphogenesis for structural design. *Nature*, 550(7674) :84–86, October 2017. Number : 7674 Publisher : Nature Publishing Group.
- [18] A. G. M. Michell. The limits of economy of material in frame-structures. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 8(47) :589–597, November 1904.
- [19] S. Diamond and S. Boyd. CVXPY : A Python-Embedded Modeling Language for Convex Optimization, 2016.
- [20] L. He, M. Gilbert, and X. Song. A Python script for adaptive layout optimization of trusses. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 60(2) :835–847, August 2019.