



HAL
open science

Déformations des structures projectives branchées sur les surfaces de Riemann

Gustave Billon

► **To cite this version:**

Gustave Billon. Déformations des structures projectives branchées sur les surfaces de Riemann. 2022.
hal-03686133v1

HAL Id: hal-03686133

<https://hal.science/hal-03686133v1>

Preprint submitted on 2 Jun 2022 (v1), last revised 10 Oct 2023 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Déformations des structures projectives branchées sur les surfaces de Riemann

Gustave Billon

2 juin 2022

Résumé

Nous introduisons la notion de *classe de branchement* d'une structure projective complexe branchée sur une surface de Riemann. Celle-ci apparaît naturellement lorsqu'on généralise au cas branché la notion de fibré des 2-repères projectifs d'une surface de Riemann. Nous montrons que l'espace des classes de branchement de degré fixé sur une surface compacte de genre g donnée est une variété complexe. Nous montrons que l'espace des structures projectives branchées de degré fixé strictement inférieur à $2g - 2$ ou strictement supérieur à $4g - 4$ est une variété complexe lisse, qui fibre au-dessus de l'espace des classes de branchement dans le premier cas, qui se plonge dedans dans le second cas.

1 Introduction

Une structure projective complexe sur une surface lisse est un modelage local de cette surface sur la sphère de Riemann \mathbb{CP}^1 . D'un point de vue historique, les structures projectives ont été introduites comme quotients de solutions d'équations linéaire du second ordre, et leur étude est un élément clé dans la preuve du théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann. En particulier, le revêtement universel d'une surface de Riemann fournit une structure projective holomorphe sur cette surface de Riemann. Pour une présentation moderne et détaillée du lien entre structures projectives et uniformisation, on peut consulter [6].

De façon plus générale, les structures projectives fournissent un très grand nombre d'exemples de structures géométriques, dont la monodromie est très étudiée (voir par exemple [15], [5], [13]). Citons à ce sujet le théorème suivant, prouvé dans [19] (voir également [20]), sur la monodromie des structures projectives :

Théorème 1.0.1. *L'application qui à une structure projective (non branchée) associe la classe de conjugaison de sa monodromie est un homéomorphisme local.*

Dans cet article, nous nous intéressons aux structures projectives dans le cadre de la définition suivante :

Définition 1.0.2. Soit X une surface de Riemann compacte. Une structure projective sur S est la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X , ainsi que de fonctions holomorphes non constantes $z_i : U_i \rightarrow \mathbb{CP}^1$, telles que pour chaque $i, j \in I$, il existe $g_{ij} \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ tel que $z_i = g_{ij} \circ z_j$ sur $U_{ij} = U_i \cap U_j$.

En particulier, le diviseur de branchement de $z_i|_{U_{ij}}$ est le même que le diviseur de branchement de $z_j|_{U_{ij}}$. On peut donc associer à toute structure projective un diviseur de branchement D , dont les points correspondent à des singularités coniques de la structure projective, d'angle multiple de 2π . La notion de structure projective selon la définition précédente est stable par

tiré-en-arrière par un revêtement ramifié. Dans la suite, conformément à [25], nous parlerons de structure projective branchée quand le diviseur de branchement sera non nul, de façon à réserver l'appellation "structure projective" au cas non branché, comme dans [18].

L'un des phénomènes centraux dans l'étude des structures projectives est que dans le cas non branché (où le diviseur de branchement est réduit à 0), il est possible de les paramétrer à l'aide d'un opérateur différentiel, la dérivée schwarzienne, qui munit l'espace des structures projectives holomorphes sur une surface de Riemann X donnée d'une structure d'espace affine dirigé par l'espace vectoriel des différentielles quadratiques holomorphes globales sur X . Cette paramétrisation a été explicitée en termes modernes dans [18].

En combinant la structure affine de l'espace des structures projectives sur une surface de Riemann fixée avec la structure analytique de l'espace des surfaces de Riemann de genre g fixé, on obtient une structure analytique sur l'espace des structures projectives de genre fixé, selon le théorème suivant :

Théorème 1.0.3. *(Bers) L'espace \mathcal{P}_g des structures projectives (non branchées) marquées de genre fixé est un fibré affine au-dessus de l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g des surfaces de Riemann marquées de genre g .*

Comme l'espace \mathcal{T}_g est Stein, le fibré \mathcal{P}_g admet des sections globales, dont certaines sont données par l'uniformisation simultanée des surfaces de Riemann, introduite par Bers dans [3]. Une autre approche du théorème précédent, dans le cadre des petites déformations, a été mise en place plus tard par Hubbard dans [20].

Remarquons que la structure d'espace affine de \mathcal{P}_g permet d'avoir un point de vue riche de géométrie analytique sur divers problèmes liés aux structures projectives. Par exemple l'obstruction pour qu'un feuilletage holomorphe par courbes sur une variété M admette des structures projectives le long de ses feuilles qui varient holomorphiquement avec les feuilles est un élément de $H^1(M, K_{\mathcal{F}})$, où $K_{\mathcal{F}}$ est le fibré cotangent du feuilletage (voir [8], et aussi, dans le même esprit, [26]).

La situation est moins limpide dans le cas où le diviseur de branchement est non nul. Si l'on fixe une surface de Riemann X et un diviseur de branchement D , la différence entre deux structures projectives branchées sur X de diviseur D est donnée par une différentielle quadratique méromorphe sur X , de diviseur polaire $-D^{\text{red}}$, où D^{red} désigne le diviseur réduit associé à D . Mais l'espace $H^0(X, K_X^{\otimes 2}(-D^{\text{red}}))$, où K_X est le fibré cotangent de X , se comporte mal sous l'effet d'une déformation du diviseur D dans le cas où D n'est pas réduit.

Dans [25], Mandelbaum montre que la paramétrisation schwarzienne des structures projectives branchées permet d'établir le théorème suivant. Il concerne l'espace B_X^D des structures projectives branchées sur une surface de Riemann X de diviseur de branchement D :

Théorème 1.0.4. *(Mandelbaum) Si $\deg(D^{\text{red}}) = 1$ ou $\deg(D) \leq 2g - 2$, alors l'ensemble B_X^D est muni d'une structure d'espace analytique de dimension $3g - 3$.*

En particulier, l'espace B_X^D n'admet pas de structure affine évidente.

À ce résultat pour la paire (X, D) fixée répond un résultat récent de Calsamiglia, Deroin et Francaviglia (voir [5]), qui regarde l'ensemble des structures projectives branchées à monodromie fixée :

Théorème 1.0.5. *(Calsamiglia-Deroin-Francaviglia) Soit S une surface réelle lisse et $n \in \mathbb{N}$. Pour toute représentation non élémentaire $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{C})$, il existe une structure de variété complexe lisse sur l'espace $\mathcal{M}_{k, \rho}$ des structures projectives sur S de monodromie ρ et dont le diviseur de branchement est de degré k .*

L'objet de cet article est de montrer que la paramétrisation schwarzienne des structures projectives branchées permet bien d'obtenir une structure affine sur l'espace des structures

projectives branchées, à condition d'introduire un nouveau paramètre, en plus de la structure complexe X et du diviseur D . À chaque structure projective branchée, on associe une *classe de branchement*, qui peut être vue comme le fibré des 2-repères projectifs branché associé à la structure projective branchée.

Ce paramètre, qui n'apparaît pas dans le cas non branché, reflète un phénomène propre au cas branché. En effet, à une structure projective $(U_i, z_i)_{i \in I}$ sur X est associé un cocycle de changement de cartes $(g_{ij})_{i,j \in I}$, à valeurs dans $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$. Le cocycle $(g_{ij})_{i,j \in I}$ définit un $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ -fibré principal sur X . Dans le cas non-branché, ce fibré principal ne dépend pas de la structure projective considérée, et peut être vu comme le fibré des 2-repères projectifs de la surface de Riemann X (voir notamment [1]). La remarque principale de cet article est que l'analogie du fibré des 2-repères projectifs pour une structure projective branchée de diviseur D dépend de cette dernière, et vit dans une variété complexe, que nous avons appelée espace des classes de branchements sur (X, D) .

Si, en plus de la structure complexe X et du diviseur D sur X , on fixe une classe de branchement α sur la paire (X, D) , on retrouve une structure d'espace affine pour l'espace B_X^α des structures projectives branchées sur X , de diviseur D et de classe de branchement α :

Proposition 1.0.6. *L'espace B_X^α , s'il est non vide, est un espace affine dirigé par l'espace $H^0(X, K_X^{\otimes 2}(-D))$.*

De plus, l'espace des classes de branchement associées à une paire (X, D) admet lui-même une structure affine, d'espace vectoriel sous-jacent $H^0(X, K_X|_D)$. En utilisant le fait que l'espace $H^0(X, K_X|_D)$ se déforme bien avec la paire (X, D) , on construit, pour toute surface réelle lisse compacte S de genre g et tout entier n une variété $\mathcal{A}_g(n)$, de dimension $3g - 3 + 2n$, qui est l'ensemble des classes de branchement (marquées) associées à une structure complexe et un diviseur de degré n sur S . L'espace $\mathcal{A}_g(n)$ fibre clairement au-dessus de l'espace $\mathcal{T}_g(n)$ des structures complexes marquées sur S avec diviseur de degré n . L'espace $\mathcal{T}_g(n)$ fibre lui-même au-dessus de l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g .

L'existence d'une structure complexe sur l'espace $\mathcal{A}_g(n)$ permet d'établir une analogie entre l'espace \mathcal{P}_g de structures projectives marquées de genre g et l'espace $\mathcal{B}_g(n)$ des structures projectives branchées marquées de genre g et de degré n . L'espace $\mathcal{A}_g(n)$ est alors à $\mathcal{B}_g(n)$ ce que l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g est à \mathcal{P}_g . En particulier, on dispose d'une application $\mathcal{B}_g(n) \rightarrow \mathcal{A}_g(n)$. Le théorème principal de cet article est le suivant :

Théorème 1.0.7. *Si $n < 2g - 2$, l'ensemble $\mathcal{B}_g(n)$ est un fibré affine au-dessus de $\mathcal{A}_g(n)$, dirigé par le fibré vectoriel dont la fibre au-dessus d'un point $(X, D, \alpha) \in \mathcal{A}_g(n)$ est $H^0(X, K_X^{\otimes 2}(-D))$.*

Si $n > 4g - 4$, l'ensemble $\mathcal{B}_g(n)$ est une sous-variété lisse de $\mathcal{A}_g(n)$.

Dans le cas intermédiaire, $2g - 2 \leq n \leq 4g - 4$, l'application $\mathcal{B}_g(n) \rightarrow \mathcal{A}_g(n)$ n'est ni un fibré ni une immersion. Dans ce cas, on ne sait pas si l'espace des structures projectives branchées sur X de degré n admet une structure d'espace analytique.

La structure de cet article est la suivante. Dans la section 2, nous énonçons quelques faits connus sur les structures projectives (non branchées), en utilisant le formalisme des 2-repères projectifs, que l'on trouve dans [21], [10] et [1]. Dans la section 3, nous montrons que le formalisme de la section 2 se généralise très bien au cas branché, nous introduisons les fibrés de 2-repères projectifs branchés ainsi que la notion de classe de branchement. Nous étudions l'espace des structures projectives branchées à classe de branchement fixée ainsi que l'espace des classes de branchement pour une paire (X, D) donnée. Dans la section 4, nous étudions comment varie l'espace des classes de branchement quand la paire (X, D) varie, et comment varie l'espace des structures projectives branchées quand la classe de branchement varie. Nous nous inspirons pour cela du point de vue élaboré dans [20] pour le cas non-branché. Enfin, dans

la section 5, nous appliquons les résultats de la section 4 au cas où les déformations considérées sont des déformations universelles. Pour cela nous utilisons la théorie de Kodaira-Spencer, en nous inspirant là encore de la façon dont elle est appliquée aux structures projectives non branchées dans [20].

2 Structures projectives holomorphes et fibré des 2-repères projectifs

Dans cette section, nous donnons la description des structures projectives holomorphes à la façon de Kobayashi et Nomizu dans [22] et de Kobayashi dans [21]. Nous nous inspirons largement de [1]. Pour un point de vue général sur le rôle des fibrés de repères dans l'étude des structures géométriques, on peut voir [10] et les références qui y sont citées.

Dans toute la suite, X est une surface de Riemann connexe. On note T_X le fibré tangent de X et K_X son fibré cotangent. On note $G = PGL(2, \mathbb{C})$, $H \subset G$ le sous-groupe de G qui fixe $0 \in \mathbb{CP}^1$ et $L \subset H$ le sous-groupe de H qui fixe $0 \in \mathbb{CP}^1$ et qui agit trivialement sur l'espace tangent à \mathbb{CP}^1 en 0 . On note $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{l}$ leurs algèbres de Lie respectives.

L'action adjointe de G sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} ne préserve pas la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. En revanche, l'action adjointe de H sur son algèbre de Lie \mathfrak{h} préserve la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{h}$.

2.1 Fibré des 2-repères projectifs d'une surface de Riemann

Définition 2.1.1. On note $\pi : \mathcal{P}_X \rightarrow X$, le fibré des 2-repères projectifs sur la surface de Riemann X . Pour tout $x \in X$:

$$\mathcal{P}_{X,x} = \{j_x^2 \phi | \phi \text{ germe en } x \text{ de biholomorphisme local de } X \text{ vers } \mathbb{CP}^1\}$$

et $\pi(j_x^2 \phi) = x$.

Le groupe G agit à gauche sur \mathcal{P}_X par postcomposition. Cette action préserve les fibres et c'est un fait classique (voir par exemple [7]) qu'elle est libre et transitive en restriction aux fibres. Le fibré des 2-repères projectifs sur X est donc un G -fibré principal.

La droite projective complexe \mathbb{CP}^1 est donnée par le quotient $\mathbb{CP}^1 = H \backslash G$, où si $g \in PGL(2, \mathbb{C})$, on identifie $[g] \in H \backslash G$ à $g^{-1}(0) \in \mathbb{CP}^1$.

Définition 2.1.2. On appelle droite projective osculatrice à la surface de Riemann X et on note $\Pi : P_X \rightarrow X$ le quotient de \mathcal{P}_X par le sous-groupe $H : P_X = H \backslash \mathcal{P}_X$.

On définit un sous-fibré $\mathcal{H}_X \subset \mathcal{P}_X$ qui est un H -fibré principal en posant pour tout $x \in X$:

$$\mathcal{H}_{X,x} = \{j_x^2 \phi | \phi \text{ germe en } x \text{ de biholomorphisme local de } X \text{ vers } \mathbb{CP}^1, \phi(x) = 0\}$$

c'est-à-dire qu'une fibre de \mathcal{H}_X est l'ensemble des 2-jets de biholomorphisme locaux qui envoient un point donné de X sur $0 \in \mathbb{CP}^1$. Le sous-fibré \mathcal{H}_X définit une section canonique de la droite projective osculatrice P_X . On note s cette section.

L'action de G sur \mathbb{CP}^1 induit un isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \simeq H^0(\mathbb{CP}^1, T_{\mathbb{CP}^1})$, où le crochet de Lie sur l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes globaux sur $T_{\mathbb{CP}^1}$ est donné par le crochet de Lie des champs de vecteurs. Cet isomorphisme envoie \mathfrak{h} sur les champs de vecteurs qui s'annulent en 0 et \mathfrak{l} sur les champs dont le 1-jet en 0 est nul.

Pour tout $x \in X$, la fibre en x du fibré adjoint $\text{ad}(\mathcal{P}_X)$ correspond à l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes sur la fibre en x de la droite projective osculatrice, $P_{X,x}$. On définit

une filtration $F_1^X \subset F_2^X \subset \text{ad}(\mathcal{P}_X)$ en prenant pour $F_{2,x}^X$ l'espace vectoriel de rang 2 des champs de vecteurs sur $P_{X,x}$ qui s'annulent au niveau de la section canonique, c'est-à-dire en $s(x)$, et pour $F_{1,x}^X$ la droite vectorielle des champs de vecteurs de $P_{X,x}$ dont le 1-jet s'annule en $s(x)$. En particulier, on a $F_2^X = \text{ad}(\mathcal{H}_X)$.

Un élément $\bar{\phi} \in \mathcal{P}_{X,x}$ donne des identifications $\mathcal{P}_{X,x} \simeq \text{PGL}(2, \mathbb{C})$, $P_X \simeq \mathbb{CP}^1$ et $\text{ad}(\mathcal{P}_X)_x \simeq \mathfrak{g}$. Si de plus $\bar{\phi} \in \mathcal{H}_{X,x}$, la dernière identification identifie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ à $F_{2,x}$, et $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{h}$ à $F_{1,x}$. Cette dernière identification découle du fait que l'action adjointe de H sur son algèbre de Lie \mathfrak{h} préserve \mathfrak{l} .

Pour tout $x \in X$, notons $J_x^2(T_X)$ l'espace de rang 3 des jets d'ordre 2 en x de champs de vecteurs sur X . On dispose sur $J^2(T_X)$ d'une filtration $\tilde{F}_1^X \subset \tilde{F}_2^X \subset J^2(T_X)$, en prenant pour \tilde{F}_1^X le fibré en droites des 2-jets de champs de vecteurs qui s'annulent à l'ordre 1 et pour \tilde{F}_2^X le fibré de rang 2 des 2-jets de champs de vecteurs qui s'annulent à l'ordre 0. On a alors $\tilde{F}_1^X = K_X$, $\tilde{F}_2^X/\tilde{F}_1^X = \mathcal{O}_X$ et $J^2(T_X)/\tilde{F}_2^X = T_X$. Par ailleurs, étant donné un point $y \in \mathbb{CP}^1$, un champ de vecteur global sur \mathbb{CP}^1 est entièrement déterminé par son jet d'ordre 2 en y , ce qui donne un isomorphisme $H^0(\mathbb{CP}^1, T_{\mathbb{CP}^1}) \simeq J_y^2(T_{\mathbb{CP}^1})$. Ce dernier isomorphisme identifie l'espace des éléments de $J_y^2(T_{\mathbb{CP}^1})$ dont le 0-jet est nul (respectivement le 1-jet est nul) avec $H^0(\mathbb{CP}^1, T_{\mathbb{CP}^1}(-[y]))$ (respectivement $H^0(\mathbb{CP}^1, T_{\mathbb{CP}^1}(-2[y]))$).

Proposition 2.1.3. *Le fibré de rang 2 sur X , F_2^X est canoniquement isomorphe à \tilde{F}_2^X . De plus, cet isomorphisme envoie F_1^X sur \tilde{F}_1^X .*

Démonstration. Soit $x \in X$. Nous allons construire un isomorphisme de $\tilde{F}_{2,x}^X$ vers $F_{2,x}^X$. Soit $\bar{\phi} \in \mathcal{H}_{X,x}$, et soit ϕ un biholomorphisme local défini autour de x à valeurs dans \mathbb{CP}^1 tel que $\bar{\phi} = j_x^2 \phi$. En particulier $\phi(0) = 0$ et ϕ définit un isomorphisme $\delta\phi : J^2(T_X)_x \xrightarrow{\sim} J^2(T_{\mathbb{CP}^1})_0$. Il se trouve que la restriction de $\delta\phi$ à $\tilde{F}_{2,x}$ ne dépend que du jet d'ordre 2 de ϕ en x , c'est-à-dire de $\bar{\phi}$. De plus, $\delta\phi$ réalise un isomorphisme entre $\tilde{F}_{2,x}$ et l'espace des éléments de $J^2(T_{\mathbb{CP}^1})_0$ dont le 0-jet est nul.

En effet, fixant une coordonnée locale z au voisinage de x , on peut écrire $\phi = \varphi(z)$ avec φ un biholomorphisme local d'un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ vers \mathbb{C} , et $\varphi(0) = 0$. La coordonnée z identifie $J^2(T_X)_x$ à \mathbb{C}^3 , de sorte que si $f(z)\partial_z$ est une section de T_X définie au voisinage de x , on a $j_x^2(f(z)\partial_z) = (f(z), f'(z), f''(z))_z$. De façon similaire, $J^2(T_{\mathbb{CP}^1})_0 = J^2(T_{\mathbb{C}})_0$ est identifié à \mathbb{C}^3 . L'application $\delta\phi$ s'écrit alors $\delta\phi(a_0, a_1, a_2)_z = (\varphi' a_0, \varphi'' a_0 + \varphi' a_1, \varphi''' a_0 + 2\varphi'' a_1 + \varphi' a_2)$. On voit que si $(a_0, a_1, a_2)_z \in F_{2,x}$, c'est-à-dire si $a_0 = 0$, $\delta\phi(a_0, a_1, a_2)_z$ ne dépend que de φ' et φ'' , c'est-à-dire de $\bar{\phi}$. Comme ϕ est un biholomorphisme local, $\varphi' \neq 0$, ce qui montre que $\delta\phi$ induit un isomorphisme de $F_{2,x}$ vers l'espace des éléments de $J^2(T_{\mathbb{CP}^1})_0$ dont le 0-jet est nul.

D'après une remarque faite précédemment, l'espace des éléments de $J^2(T_{\mathbb{CP}^1})_0$ dont le 0-jet (respectivement le 1-jet) est nul est identifié à l'ensemble des champs de vecteurs sur \mathbb{CP}^1 qui s'annulent en 0 (respectivement dont le 1-jet est nul en 0). Enfin, $\bar{\phi}$ fournit une identification de $P_{X,x}$ avec \mathbb{CP}^1 , qui envoie $s(x)$ sur 0 car $\bar{\phi} \in \mathcal{H}_{X,x}$. En combinant toutes ces identifications, on obtient l'isomorphisme souhaité entre $\tilde{F}_{2,x}^X$ et $F_{2,x}^X$, qui envoie $\tilde{F}_{1,x}^X$ sur $F_{1,x}^X$, en se souvenant que $F_{2,x}^X$ (respectivement $F_{1,x}^X$) est donné par l'ensemble des champs sur $P_{X,x}$ qui s'annulent (respectivement dont le 1-jet s'annule) en $s(x)$.

On vérifie aisément que l'identification $\tilde{F}_{2,x}^X \simeq F_{2,x}^X$ ne dépend pas du choix de $\bar{\phi} \in \mathcal{H}_{X,x}$. Le caractère holomorphe de l'isomorphisme défini ainsi de \tilde{F}_2^X vers F_2^X apparaît en construisant les identifications $\tilde{F}_{2,y}^X \simeq F_{2,y}^X$, pour tout $y \in V$ en prenant, pour chaque y , $\bar{\phi} = j_y^2 \psi$, pour ψ un biholomorphisme local défini sur le voisinage V . \square

Proposition 2.1.4. *Le fibré de rang 2 sur X , $\text{ad}(\mathcal{P}_X)/F_1^X$ est canoniquement isomorphe à $J^2(T_X)/\tilde{F}_1^X = J^1(T_X)$. De plus, cet isomorphisme envoie le fibré en droites F_2^X/F_1^X sur $\tilde{F}_2^X/\tilde{F}_1^X$.*

Démonstration. On procède de façon similaire à la preuve de la proposition 2.1.3. Étant donné un point $x \in X$ et un élément $\bar{\phi} \in \mathcal{H}_{X,x}$, $\bar{\phi}$ identifie $J^1(T_X)_x$ à $J^1(\mathbb{CP}^1)_0$. Par ailleurs $J^1(\mathbb{CP}^1)_0$ est lui-même identifié à $H^0(\mathbb{CP}^1, T_{\mathbb{CP}^1})/H^0(\mathbb{CP}^1, T_{\mathbb{CP}^1}(-2[0]))$. Ce dernier espace est identifié par $\bar{\phi}$ à $\text{ad}(\mathcal{P}_{X,x})/F_{1,x}$. Tous ces isomorphismes préservent le drapeau associé à chacun des espaces vectoriels considérés. \square

Remarque 2.1.5. Les isomorphismes des propositions 2.1.3 et 2.1.4 sont "intrinsèques" au sens suivant. Soit Y une surface de Riemann et soit $f : X \simeq Y$ un biholomorphisme. Comme f identifie X et Y , f identifie aussi \mathcal{P}_X à \mathcal{P}_Y , $J^1(T_X)$ à $J^1(T_Y)$ et \tilde{F}_2^X à \tilde{F}_2^Y . En particulier, on dispose d'isomorphismes de fibrés holomorphes $\iota_1 : \text{ad}(\mathcal{H}_X) \simeq f^* \text{ad}(\mathcal{H}_Y)$, $\iota_2 : \text{ad}(\mathcal{P}_X)/F_1^X \simeq f^* \text{ad}(\mathcal{P}_Y)/F_1^Y$, $\iota_3 : J^1(T_X) \simeq f^* J^1(T_Y)$ et $\iota_4 : \tilde{F}_2^X \simeq f^* \tilde{F}_2^Y$. Les preuves des propositions 2.1.3 et 2.1.4 impliquent que les diagrammes suivants sont commutatifs, où les flèches horizontales sont données par les propositions 2.1.3 et 2.1.4 :

$$\begin{array}{ccc} \text{ad}(\mathcal{H}_X) & \longrightarrow & \tilde{F}_2^X \\ \downarrow \iota_1 & & \downarrow \iota_4 \\ f^* \text{ad}(\mathcal{H}_Y) & \longrightarrow & f^* \tilde{F}_2^Y \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{ad}(\mathcal{P}_X)/F_1^X & \longrightarrow & J^1(T_X) \\ \downarrow \iota_2 & & \downarrow \iota_3 \\ f^* \text{ad}(\mathcal{P}_Y)/F_1^Y & \longrightarrow & f^* J^1(T_Y) \end{array} \quad (2)$$

Les propositions 2.1.3 et 2.1.4 entraînent immédiatement :

Corollaire 2.1.6. *On dispose des identifications canoniques :*

- (i) $\text{ad}(\mathcal{P}_X)/F_2^X \simeq T_X$
- (ii) $F_2^X/F_1^X \simeq \mathcal{O}_X$
- (iii) $F_1^X \simeq K_X$

Remarque 2.1.7. Pour tout $x \in X$, la forme de Killing B_x sur l'algèbre de Lie $\text{ad}(\mathcal{P}_X)_x$ est non dégénérée car $\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{C}}$ est semi-simple. On vérifie que B_x définit une forme bilinéaire non dégénérée sur le produit $F_{1,x}^X \times (\text{ad}(\mathcal{P}_X)_x/F_{2,x}^X)$. La forme de Killing permet donc d'identifier $\text{ad}(\mathcal{P}_X)/F_2^X$ au fibré en droites dual de F_1^X . Cela établit l'équivalence des points (i) et (ii) du corollaire 2.1.6, indépendamment des propositions 2.1.3 et 2.1.4.

Remarque 2.1.8. Le fibré $\text{ad}(\mathcal{P}_X)$, muni de la filtration $F_1^X \subset F_2^X \subset \text{ad}(\mathcal{P}_X)$ est un $\text{SO}(3, \mathbb{C})$ -fibré filtré, au sens de [4].

2.2 Connexions projectives sur une surface de Riemann

Considérons à présent les fibrés d'Atiyah de \mathcal{P}_X et de \mathcal{H}_X , que l'on note respectivement $\text{At}(\mathcal{P}_X) = G \backslash T_{\mathcal{P}_X}$ et $\text{At}(\mathcal{H}_X) = H \backslash T_{\mathcal{H}_X} \subset \text{At}(\mathcal{P}_X)$. La différentielle de la projection $\pi : \mathcal{P}_X \rightarrow X$ induit une surjection $\tilde{\pi} : \text{At}(\mathcal{P}_X) \rightarrow T_X$.

Remarque 2.2.1. Du point de vue de la droite projective osculatrice $\Pi : P_X \rightarrow X$, le fibré d'Atiyah se prête à l'interprétation suivante. Si $x \in X$, un vecteur $v \in \text{At}(\mathcal{P}_X)_x$ correspond à un champ de vecteurs $\alpha(v) \in H^0(P_{X,x}, T_{P_X}|_{P_{X,x}})$ tel que pour tout $p \in P_{X,x}$, la projection $d\Pi_p(\alpha(v)_p) = \tilde{\pi}(v) \in T_{X,x}$. Si une section locale $\gamma : U \subset X \rightarrow \mathcal{P}_X$ et un vecteur $w \in T_{X,x}$ sont tels que la classe dans $\text{At}(\mathcal{P}_X)_x$ de $d\gamma_x(w)$ vérifie $[d\gamma_x(w)] = v$, γ fournit une trivialisatation de $P_X|_U : (\Pi, \mu) : P_X|_U \simeq U \times \mathbb{CP}^1$. Dans cette trivialisatation, $\alpha(v)$ est donné par $\alpha(v)_p = (w, 0) \in T_{U,x} \times T_{\mathbb{CP}^1, \mu(p)}$. La section γ est à valeurs dans \mathcal{H}_X si et seulement si la section canonique $s : X \rightarrow P_X$ correspond à une constante dans la trivialisatation (Π, μ) . Le vecteur $v \in \text{At}(\mathcal{P}_X)_x$ est dans $\text{At}(\mathcal{H}_X)_x$ si $\alpha(v)$ est tangent à la section s au point $s(x)$.

Proposition 2.2.2. *On dispose d'un isomorphisme $\Phi_X : \text{At}(\mathcal{H}_X)/F_1^X \xrightarrow{\sim} \text{ad}(\mathcal{P}_X)/F_1^X = j^1(T_X)$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \text{At}(\mathcal{H}_X)/F_1^X & \xrightarrow{\Phi_X} & \text{ad}(\mathcal{P}_X)/F_1^X = j^1(T_X) \\ \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \\ T_X & \xlongequal{\quad\quad\quad} & T_X \end{array} \quad (3)$$

Démonstration. Soit $x \in X$. Nous allons construire $\Phi_{X,x}$. Soit z_1 une coordonnée locale de X sur un voisinage U de x . Quitte à postcomposer z_1 par un élément (constant) de $PGL(2, \mathbb{C})$, on peut supposer $z_1(x) = 0$. La coordonnée z_1 définit une section (donc une trivialisaton) locale de \mathcal{P}_X , notée $\gamma_{z_1} = j^2 z_1$. La trivialisaton γ_{z_1} donne localement une connexion principale, c'est-à-dire qu'elle définit un morphisme $\phi : \text{At}(\mathcal{P}_X) \rightarrow \text{ad}(\mathcal{P}_X)$ qui scinde la suite exacte courte $0 \rightarrow \text{ad}(\mathcal{P}_X) \rightarrow \text{At}(\mathcal{P}_X) \rightarrow T_X \rightarrow 0$. De plus γ_{z_1} donne une trivialisaton locale de la droite projective osculatrice $(\Pi, \mu_{z_1}) : P_X|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{CP}^1$.

Si β est une section de $\mathcal{H}_X|_U$, on a pour tout $t \in U$, $\beta(t) = g(t)^{-1} \gamma_{z_1}(t)$, où g est une application holomorphe de U vers $PGL(2, \mathbb{C})$ telle que $g(t)$ envoie 0 sur $z_1(t)$ pour tout $t \in U$. La section canonique $s : X \rightarrow P_X$ s'écrit donc dans la trivialisaton $(\Pi, \mu_{z_1}) : (\Pi(s), \mu_{z_1}(s))(t) = (t, z_1(t)) \in U \times \mathbb{CP}^1$. En utilisant l'interprétation de $\text{At}(\mathcal{P}_X)$ faite à la remarque 2.2.1, le morphisme ϕ_x envoie un champ $V \in H^0(P_{X,x}, T_{P_X}|_{P_{X,x}}) = \text{At}(\mathcal{P}_X)_x$ sur $(d\mu_{z_1}|_{P_{X,x}})^{-1} d\mu_{z_1}(V) \in H^0(P_{X,x}, T_{P_{X,x}}) = \text{ad}(\mathcal{P}_X)_x$. Ainsi, l'application ϕ_x laisse $\text{ad}(\mathcal{P}_X) \subset \text{At}(\mathcal{P}_X)$ invariant. En particulier, elle envoie $F_1^X \subset \text{ad}(\mathcal{P}_X)$ sur F_1^X .

On pose, pour $V \in \text{At}(\mathcal{H}_X) \subset \text{At}(\mathcal{P}_X) : \Phi_{X,x}([V]) = [\phi_x(V)]$, où les crochets désignent à chaque fois la classe modulo $F_{1,x}$.

Il faut montrer que le morphisme $\Phi_{X,x}$ ainsi défini ne dépend pas de la coordonnée z_1 choisie. Si z_2 est une autre coordonnée locale définie sur l'ouvert U (on peut supposer $z_2(0) = 0$) et $\gamma_{z_2} = j^2(z_2)$ la section locale de \mathcal{P}_X induite par z_2 , on note $\gamma_{z_2}(t) = g(t) \cdot \gamma_{z_1}(t)$, où $g : U \rightarrow PGL(2, \mathbb{C})$ est une application holomorphe. Il nous suffit de montrer que pour $V \in \text{At}(\mathcal{P}_X)_x$, la différence $((d\mu_{z_1})_x - (d\mu_{z_2})_x)(V) \in H^0(\mathbb{CP}^1, T_{\mathbb{CP}^1}) = \mathfrak{sl}_{2,\mathbb{C}}$ s'annule jusqu'à l'ordre 1 en $0 = \mu_{z_1}(s(x)) = \mu_{z_2}(s(x))$, c'est-à-dire $((d\mu_{z_1})_x - (d\mu_{z_2})_x)(V) \in \mathfrak{l}$. Or la différence $(d\mu_{z_1} - d\mu_{z_2})(V) \in \mathfrak{sl}_{2,\mathbb{C}}$ est donnée par $dg_x(\tilde{\pi}_x(V))$, et il résulte du calcul effectué dans la démonstration du lemme 2.3.3 ci-dessous que dg_x est à valeurs dans \mathfrak{l} .

Si $V \in \text{At}(\mathcal{H}_X)_x$, c'est-à-dire si V est tangent à la section s au point $s(x) = 0$, on a $(d\mu_{z_1})_x(V) = (dz_1|_{P_{X,x}})_{s(x)}(d\Pi_x(V))$, puisque $\mu_{z_1}(s)$ est donné localement par z_1 . Cela montre que $\Phi_{X,x}$ composé avec la projection $j^1(T_X)_x \rightarrow T_{X,x}$ coïncide avec $\tilde{\pi}$. De plus, cela montre que si $\Phi_{X,x}(V) = 0$, alors $d\Pi_x(V) = 0$, donc $V \in \text{ad}(\mathcal{H}_X)_x = F_{2,x}$, puis comme $\Phi_{X,x}$ est l'identité en restriction à $F_{2,x}/F_{1,x}$, $V \in F_{1,x}$. Donc $\Phi_{X,x}$ est injective, donc bijective.

Enfin, on vérifie aisément que le morphisme de fibrés Φ_X ainsi défini est holomorphe. \square

Soit $\omega : \text{At}(\mathcal{P}_X) \rightarrow \text{ad}(\mathcal{P}_X)$ une connexion de Cartan pour les fibrés $\mathcal{H}_X \subset \mathcal{P}_X$, c'est-à-dire que ω scinde la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{ad}(\mathcal{P}_X) \rightarrow \text{At}(\mathcal{P}_X) \rightarrow T_X \rightarrow 0 \quad (4)$$

et induit un isomorphisme $\omega|_{\text{At}(\mathcal{H}_X)} : \text{At}(\mathcal{H}_X) \xrightarrow{\sim} \text{ad}(\mathcal{P}_X)$ (voir par exemple [12]). On dispose alors du diagramme suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_1^X & \longrightarrow & \text{At}(\mathcal{H}_X) & \longrightarrow & \text{At}(\mathcal{H}_X)/F_1^X \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \omega|_{F_2^X} & & \downarrow \Phi_X \\ 0 & \longrightarrow & F_1^X & \longrightarrow & \text{ad}(\mathcal{P}_X) & \longrightarrow & \text{ad}(\mathcal{P}_X)/F_1^X = J^1(T_X) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (5)$$

Le carré de gauche du diagramme (5) est commutatif pour toute connexion de Cartan ω . En revanche le carré de droite n'est pas nécessairement commutatif.

Définition 2.2.3. On appelle connexion projective sur X une connexion de Cartan pour les fibrés $\mathcal{H}_X \subset \mathcal{P}_X$ qui rend le diagramme (5) commutatif.

Remarque 2.2.4. Le fibré vectoriel $\text{ad}(\mathcal{P}_X)$, muni de la filtration $F_1^X \subset F_2^X \subset \text{ad}(\mathcal{P}_X)$ et d'une connexion projective est un $\text{SO}(3, \mathbb{C})$ -oper au sens de [4].

Soient ω_1, ω_2 deux connexions projectives sur X . Soit $x \in X$ et soit $v \in \text{At}(\mathcal{P}_X)_x$. Il existe $v_1 \in \text{ad}(\mathcal{P}_X)_x$ et $v_2 \in \text{At}(\mathcal{H}_X)_x$ tels que $v = v_1 + v_2$ (v_1 et v_2 ne sont pas uniques). On a $(i = 1, 2) : \omega_i(v_1) = v_1$ et $[\omega_i(v_2)] = \Phi_X([v_2]) \in J^1(T_X)_x$, où les crochets désignent la classe modulo F_1^X . Si bien que $(\omega_1 - \omega_2)_x(v) \in F_{1,x}$. Par ailleurs, la connexion ω_i étant une scission de la suite exacte (4), elle est aussi donnée par un morphisme de fibrés $\tilde{\omega}_i : T_X \rightarrow \text{At}(\mathcal{P}_X)$. On a pour tout $w \in T_{X,x}$, $(\tilde{\omega}_{2,x} - \tilde{\omega}_{1,x})(w) = (\omega_1 - \omega_2)(v) \in F_{1,x}$ (où $v \in \text{At}(\mathcal{P}_X)_x$ tel que $\tilde{\pi}(v) = w$), donc $\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1$ définit une section de $\text{Hom}(T_X, F_1^X)$, c'est-à-dire de $K_X^{\otimes 2}$ puisque $F_1^X = K_X$ d'après le corollaire 2.1.6. Réciproquement, si $\tilde{\omega} : T_X \rightarrow \text{At}(\mathcal{P}_X)$ définit une connexion projective et $\varphi \in H^0(X, K_X^{\otimes 2})$, $\tilde{\omega} + \phi$ définit à nouveau une connexion projective. On a montré la proposition :

Proposition 2.2.5. *L'ensemble des connexions projectives sur X est un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $H^0(X, K_X^{\otimes 2})$.*

2.3 Connexions projectives et structures projectives

Nous allons à présent montrer que la donnée d'une connexion projective équivaut à la donnée d'une structure projective, au sens de la définition ci-dessous :

Définition 2.3.1. On appelle atlas projectif sur X la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ et de coordonnées locales $z_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}P^1$ telles que pour tous $i, j \in I$, il existe un élément $g_{ij} \in PGL(2, \mathbb{C})$ tel que $z_i = g_{ij} \circ z_j$ sur $U_i \cap U_j$.

On dit que deux atlas projectifs sont équivalents si leur réunion est un atlas projectif. On appelle structure projective sur X une classe d'équivalence d'atlas projectifs.

Pour un survol sur la théorie des structures projectives holomorphes, on peut consulter [18], [23], [9] ou [24].

Soit une structure projective d'atlas maximal $(U_i, z_i)_{i \in I}$. Il est aisé de voir que chaque z_i définit une scission de la suite exacte (4) restreinte à U_i , et que ces scissions coïncident sur les $U_i \cap U_j$ (car les z_i diffèrent par multiplication par une constante de $PGL(2, \mathbb{C})$). De plus, la preuve de la proposition 2.2.2 montre que la connexion principale ainsi définie est une connexion projective. Ainsi, une structure projective sur X définit une connexion projective sur X .

Soit $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un biholomorphisme local. On appelle dérivée schwarzienne de f et on note $\mathcal{S}(f)$ la fonction définie sur U par :

$$\mathcal{S}(f) = \left(\frac{f''}{f'} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \quad (6)$$

On a $\mathcal{S}(f) = 0$ si et seulement si f est donnée par un élément de $PGL(2, \mathbb{C})$. Si f_1, f_2 sont deux fonctions définies sur des ouverts de \mathbb{C} tels que $f_2 \circ f_1$ est définie sur un ouvert non vide, on a la formule

$$\mathcal{S}(f_2 \circ f_1) = (\mathcal{S}(f_2) \circ f_1) (f_1')^2 + \mathcal{S}(f_1) \quad (7)$$

Si z_1 et z_2 sont des coordonnées locales sur un ouvert $U \subset X$, on note $\{z_2, z_1\}$ la fonction holomorphe définie sur U par $\{z_2, z_1\} = \mathcal{S}(f)$ où f est la fonction définie sur l'ouvert $z_1(U) \subset \mathbb{C}$

par $z_2 = f(z_1)$. La formule (7) montre que si z_3 est une autre coordonnée locale sur U , alors $\{z_3, z_1\}dz_1^{\otimes 2} = \{z_3, z_2\}dz_2^{\otimes 2} + \{z_2, z_1\}dz_1^{\otimes 2}$. Pour les propriétés de la dérivée Schwarzienne, on peut voir par exemple [20].

Soient z_1 et z_2 des coordonnées locales sur un ouvert $U \subset X$. Les deux coordonnées locales z_1, z_2 définissent deux structures projectives p_1, p_2 sur l'ouvert U , donc deux connexions projectives $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ sur U . D'après la proposition 2.2.5, la différence $\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1$ est donnée par une différentielle quadratique sur U , c'est-à-dire $\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1 \in H^0(U, K_X|_U^{\otimes 2})$

Proposition 2.3.2. *Avec les notations précédentes, on a $\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1 = \{z_2, z_1\}dz_1^{\otimes 2}$.*

Lemme 2.3.3. *Soit $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un biholomorphisme local. Soit $g : U \rightarrow PGL(2, \mathbb{C})$ l'application holomorphe telle que pour tout $t \in U$, $j_t^2(g(t)) = j_t^2 f$, c'est-à-dire $g(t)(t) = f(t)$, $g(t)'(t) = f'(t)$, $g(t)''(t) = f''(t)$.*

La dérivée $\frac{dg(t)}{dt}$ est une fonction de U vers $\mathfrak{sl}_{2, \mathbb{C}}$. En identifiant $\mathfrak{sl}_{2, \mathbb{C}}$ à $H^0(\mathbb{CP}^1, T_{\mathbb{CP}^1})$, on a

$$\left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \mathcal{S}(f)(t_0) \frac{(t-t_0)^2}{2} \frac{\partial}{\partial t}$$

Démonstration. Un calcul donne que pour tout $t \in U$, $g(t)$ est donnée par la matrice

$$g(t) \equiv \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} a &= f f'' - 2(f')^2 \\ b &= -2f f' - t(f f'' - 2(f')^2) \\ c &= f'' \\ d &= -2f' - t f'' \end{aligned} \tag{8}$$

Avec cette notation, la dérivée de g en t_0 , exprimée comme un champ de vecteurs sur \mathbb{CP}^1 , a pour expression

$$\begin{aligned} g'(t_0) &= \frac{1}{a(t_0)d(t_0) - b(t_0)c(t_0)} ((a(t_0)c'(t_0) - a'(t_0)c(t_0))t^2 \\ &\quad + (a'(t_0)d(t_0) - b(t_0)c'(t_0) - a(t_0)d'(t_0) + b'(t_0)c(t_0))t + (b'(t_0)d(t_0) - d'(t_0)b(t_0))) \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

Ces deux formules composées donnent le résultat souhaité. \square

Démonstration. (de la proposition 2.3.2) Posons $z_2 = f(z_1)$, et soient γ_{z_1} et γ_{z_2} les sections locales de \mathcal{P}_X définies par z_1 et z_2 . On a $\gamma_{z_2} = g \cdot \gamma_{z_1}$, où $g : U \rightarrow PGL(2, \mathbb{C})$ vérifie pour tout $x \in U$: $j_{z_1(x)}^2 g = j_{z_2(x)}^2 f$.

Si l'on note $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 : T_X|_U \rightarrow \text{At}(\mathcal{P}_X)|_U$ les morphismes de fibrés qui donnent les connexions projectives associées à z_1 et z_2 , $\tilde{\omega}_1$ est donné par $d\gamma_{z_1}$. Si l'on se place dans la trivialisaton de \mathcal{P}_X donnée par z_1 , on voit que $(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1) \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)$ est l'élément de $\mathfrak{sl}_{2, \mathbb{C}}$ donné par $g'(z_1)$. Le lemme 2.3.3 donne alors que $(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1)|_{z_1(x)} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right) = \{z_2, z_1\}(x) \frac{(z_1 - z_1(x))^2}{2} \frac{\partial}{\partial z_1}$. Comme $\left. \frac{d}{dz_1} \frac{(z_1 - z_1(x))^2}{2} \right|_{z_1 = z_1(x)} = 0$ et $\frac{d^2}{dz_1^2} \frac{(z_1 - z_1(x))^2}{2} = 1$, la démonstration de la proposition 2.1.3 implique que dz_1 est identifié à l'élément de $\text{ad}(\mathcal{H}_X)$ donné par $\frac{1}{2}(z_1 - z_1(x))^2 \frac{\partial}{\partial z_1}$, ce qui démontre la proposition. \square

Corollaire 2.3.4. *Toute connexion projective sur X provient d'une structure projective sur X .*

Démonstration. Cela découle de la proposition 2.3.2 et du fait que pour toute fonction h définie sur un ouvert de \mathbb{C} , l'équation $\mathcal{S}(f) = h$ admet des solutions localement. \square

Ainsi, la donnée d'une structure projective sur X équivaut à la donnée d'une connexion projective sur X . La proposition 2.2.5 donne alors :

Proposition 2.3.5. *L'ensemble des structures projectives sur X est un espace affine, d'espace vectoriel sous-jacent l'ensemble des différentielles quadratiques globales sur X .*

3 Structures projectives branchées et fibrés des 2-repères projectifs branchés

3.1 Revêtements ramifiés et action de $PGL(2, \mathbb{C})$

Soit (U, x) un germe de surface de Riemann, que l'on peut supposer identifié à $(V, 0)$, où $V \subset \mathbb{C}$ est un voisinage de 0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R_{x,n}$ l'ensemble des jets d'ordre $2(n+1)$ en x d'applications holomorphes ϕ à valeurs dans $\mathbb{C}P^1$, ramifiées en x de degré n (c'est-à-dire $\phi'(x) = \phi''(x) = \dots = \phi^{(n)}(x) = 0$ et $\phi^{(n+1)}(x) \neq 0$) :

$$R_{x,n} = \{j_x^{2(n+1)}\phi \mid \phi \text{ germe en } x \text{ d'application holomorphe ramifiée de degré } n \}$$

Notons de plus $R_{x,n}^0 = \{j_x^{2(n+1)}\phi \in R_{x,n} \mid \phi(x) = 0\}$.

En utilisant l'identification $(U, x) \simeq (V, 0)$, on peut écrire explicitement un élément $j_x^{2(n+1)}\phi$ de $R_{x,n}$ de la façon suivante :

$$j_x^{2(n+1)}\phi = a_0 + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots + a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}$$

On identifie ainsi $R_{x,n}$ à l'espace $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1}$ avec une bijection $\alpha : R_{x,n} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1}$, en posant $\alpha(j_x^{2n}\phi) = (a_0, a_{n+1}, \dots, a_{2(n+1)})$. Un autre choix de coordonnées pour le germe (U, x) induit une autre identification $\beta : R_{x,n} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1}$. On vérifie que la composition $\beta \circ \alpha^{-1}$ est un automorphisme algébrique de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1}$, ce qui permet de considérer $R_{x,n}$ comme une variété algébrique de dimension $n+3$. L'ensemble $R_{x,n}^0 \subset R_{x,n}$ est alors une hypersurface, donnée par l'équation $(a_0 = 0)$.

Le groupe algébrique G agit à gauche sur la variété algébrique $R_{x,n}$ par postcomposition : si $g \in G$, $g \cdot j_x^{2n}\phi = j_x^{2n}(g \circ \phi)$. Il est de plus aisé de constater que l'action est algébrique. L'action du sous-groupe $H \subset G$ préserve l'hypersurface $R_{x,n}^0$.

Proposition 3.1.1. *L'action de G sur $R_{x,n}$ est libre. De plus, le quotient $G \backslash R_{x,n}$ est égal au quotient $H \backslash R_{x,n}^0$, et est muni d'une structure de variété complexe de dimension n , isomorphe à \mathbb{C}^n .*

Démonstration. Comme le groupe G agit transitivement sur $\mathbb{C}P^1$, le sous-ensemble $R_{x,n}^0$ engendre $R_{x,n}$ sous l'action de G , c'est-à-dire $G \cdot R_{x,n}^0 = R_{x,n}$. Cela montre d'une part $G \backslash R_{x,n} = H \backslash R_{x,n}^0$, et d'autre part qu'il suffit de montrer que l'action de H sur $R_{x,n}^0$ est libre.

Soit $h \in H$, et posons $h = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, avec $\alpha, \delta \neq 0$. On a

$$\frac{\alpha(a_{n+1}z^{n+1} + \dots + a_{2(n+1)}z^{2(n+1)} + O(z^{2(n+1)+1}))}{\gamma(a_{n+1}z^{n+1} + \dots + a_{2(n+1)}z^{2(n+1)} + O(z^{2(n+1)+1})) + \delta} = \frac{\alpha}{\delta}(a_{n+1}z^{n+1} + \dots + a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}) + \left(\frac{\alpha}{\delta}a_{2(n+1)} - \frac{\alpha\gamma}{\delta^2}a_{n+1}^2\right)z^{2(n+1)} + O(z^{2(n+1)+1})$$

Ainsi, si l'on prend $j_x^{2(n+1)}\phi \in R_{x,n}^0$ et qu'on écrit $j_x^{2(n+1)}\phi = (0, a_{n+1}, \dots, a_{2(n+1)})$ en utilisant l'identification $R_{x,n} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1}$, on a

$$h \cdot j_x^{2(n+1)}\phi = \left(0, \frac{\alpha}{\delta}a_{n+1}, \dots, \frac{\alpha}{\delta}a_{2(n+1)}, \frac{\alpha}{\delta}a_{2(n+1)} - \frac{\alpha\gamma}{\delta^2}a_{n+1}^2\right)$$

donc $h \cdot j_x^{2(n+1)}\phi = j_x^{2(n+1)}\phi$ si et seulement si $\alpha = \delta$ et $\gamma = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $h = \text{id}$. Cela montre que l'action de H sur $R_{x,n}^0$, donc l'action de G sur $R_{x,n}$, est libre. On dispose de plus d'une submersion holomorphe $\pi : R_{x,n}^0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ en posant $\pi(0, a_{n+1}, \dots, a_{2(n+1)}) = \left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}, \dots, \frac{a_{2n+1}}{a_{n+1}}\right)$. Les fibres de l'application π sont exactement les orbites de l'action de H . L'application π dépend de la coordonnée choisie pour (U, x) , mais on vérifie que si une autre coordonnée donne une autre application π' , on a que $\pi' = f \circ \pi$, où f est un biholomorphisme de \mathbb{C}^n . La submersion π munit donc $G \backslash R_{x,n} = H \backslash R_{x,n}^0$ d'une structure de variété complexe, biholomorphe à \mathbb{C}^n . \square

Remarque 3.1.2. Soit $j_x^{2(n+1)}\phi \in R_{x,n}$ et soit α un biholomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, qui n'est pas nécessairement restriction d'une transformation de Möbius. Un calcul direct montre que $j_x^{2(n+1)}(\alpha \circ \phi) \in R_{x,n}$ est dans la même orbite que $j_x^{2(n+1)}\phi$ sous l'action de G . En particulier, si Y est une surface de Riemann et $\psi : U \rightarrow Y$ un revêtement ramifié à l'ordre n en x , et si $\chi : \psi(U) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est une carte holomorphe, la classe de $j_x^{2(n+1)}(\chi \circ \psi) \in R_{x,n}$ modulo l'action de G ne dépend pas du choix de la carte holomorphe ψ . On peut donc parler de la classe de ψ dans l'espace $G \backslash R_{x,n}$.

Remarque 3.1.3. Le groupe $\text{Aff}(\mathbb{C})$ des biholomorphismes de \mathbb{C} agit librement sur l'espace

$$\tilde{R}_{x,n} = \{j_x^{2n+1}\phi | \phi \text{ germe en } x \text{ d'application holomorphe ramifiée de degré } n \}$$

et il ressort du calcul dans la preuve de la proposition 3.1.1 que les orbites de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ dans $\tilde{R}_{x,n}$ sont les images des orbites de G dans $R_{x,n}$ par la projection évidente $R_{x,n} \rightarrow \tilde{R}_{x,n}$. Autrement dit, $G \backslash R_{x,n} = \text{Aff}(\mathbb{C}) \backslash \tilde{R}_{x,n}$.

3.2 Fibrés des 2-repères projectifs branchés

Soit

$$D = \sum_{i=1}^r n_i \cdot y_i \tag{9}$$

un diviseur sur la surface de Riemann X , avec $n_i \geq 1$ pour $1 \leq i \leq r$, et les y_i deux à deux distincts. Posons $\mathbb{D} = \{y_1, \dots, y_r\}$. Notons $\mathbb{X} = X \setminus \mathbb{D}$.

Pour chaque i compris entre 1 et r , soit $\alpha_i \in G \backslash R_{y_i, n_i}$. Autrement dit, comme à la sous-section 3.1, α_i est une orbite pour l'action de G sur l'ensemble des jets d'ordre $2(n_i + 1)$ de germes en y_i d'applications holomorphes ramifiées à l'ordre n_i et à valeurs dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

On pose pour tout $x \in X$:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_X^D(\alpha_1, \dots, \alpha_r)_x = \mathcal{P}_{X,x} & \text{si } x \in \mathbb{X} \\ \mathcal{P}_X^D(\alpha_1, \dots, \alpha_r)_x = \alpha_i & \text{si } x = y_i, 1 \leq i \leq r \end{cases} \tag{10}$$

Ainsi pour tout $x \in X$, le groupe G agit holomorphiquement, librement et transitivement sur la variété $\mathcal{P}_X^D(\alpha_1, \dots, \alpha_r)_x$.

Fixons i entre 1 et r , et soit U_i un voisinage de y_i dans X , qui ne contient aucun y_j pour $j \neq i$. Soit $\phi : U_i \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ une application holomorphe ramifiée à l'ordre n_i en y_i , et qui est un biholomorphisme local en tout autre point de U_i . Supposons également que $j_{y_i}^{2(n_i+1)}\phi \in \alpha_i$. Posons pour tout $x \in U_i \cap \mathbb{X}$, $s(x) = j_x^2\phi$ et $s(y_i) = j_{y_i}^{2(n_i+1)}\phi$, de sorte que pour tout $x \in U_i$, $s(x) \in \mathcal{P}_X^D(\alpha_1, \dots, \alpha_r)_x$. Il existe une unique structure de variété holomorphe sur $\bigsqcup_{x \in U_i} \mathcal{P}_X^D(\alpha_1, \dots, \alpha_r)_x$ telle que $\bigsqcup_{x \in U_i} \mathcal{P}_X^D(\alpha_1, \dots, \alpha_r)_x \rightarrow U_i$ soit un fibré principal holomorphe de groupe structural G , dont l'application s est une section. En particulier, la structure holomorphe définie par s sur $\bigsqcup_{x \in U_i} \mathcal{P}_X^D(\alpha_1, \dots, \alpha_r)_x$ coïncide, en restriction à $\mathbb{X} \cap U_i$, avec la structure holomorphe de $\mathcal{P}_X|_{U_i \cap \mathbb{X}}$, le fibré des 2-repères projectifs restreint à $U_i \cap \mathbb{X}$.

Si ψ est un autre choix de fonction holomorphe sur U_i qui vérifie les mêmes conditions que ϕ , et si σ est l'application induite de U_i vers $\bigsqcup_{x \in U_i} \mathcal{P}_X^D(\alpha_1, \dots, \alpha_r)_x$, on a $\sigma(x) = g(x) \cdot s(x)$, où $g : U_i \rightarrow G$. On vérifie grâce à la formule (8) que l'application g est holomorphe. Cela montre que la structure de fibré principal holomorphe sur U_i de $\bigsqcup_{x \in U_i} \mathcal{P}_X^D(\alpha_1, \dots, \alpha_r)_x$ ne dépend pas du choix de la fonction ϕ .

Ainsi l'union disjointe $\bigsqcup_{x \in X} \mathcal{P}_X^D(\alpha_1, \dots, \alpha_r)_x$, munie de la projection évidente sur X , est munie d'une structure de fibré principal holomorphe au voisinage U_i de chaque y_i , qui coïncide avec celle de $\mathcal{P}_X|_{\mathbb{X}}$ sur les intersections $U_i \cap \mathbb{X}$. Nous disposons donc d'un fibré principal holomorphe $\mathcal{P}_X^D(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \bigsqcup_{x \in U_i} \mathcal{P}_X^D(\alpha_1, \dots, \alpha_r)_x$.

Définition 3.2.1. On dit que le fibré principal $\mathcal{P}_X^D(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ est le fibré des 2-repères projectifs branchés sur X de diviseur de branchement D et de classe de branchement $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in R_{y_1, n_1} \times \dots \times R_{y_r, n_r}$.

En quotientant le fibré $\mathcal{P}_X^D(\alpha)$ (où on note $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in R_{y_1, n_1} \times \dots \times R_{y_r, n_r}$) par le sous-groupe $H \subset G$, on obtient un fibré sur X de fibre \mathbb{CP}^1 .

Définition 3.2.2. On appelle le quotient $H \backslash \mathcal{P}_X^D(\alpha)$ droite projective osculatrice branchée sur X , de diviseur de branchement S et de classe de branchement α , et on le note $P_X^D(\alpha) = H \backslash \mathcal{P}_X^D(\alpha)$.

De même que dans le cas non branché, on dispose de façon canonique d'un sous- H -fibré principal de $\mathcal{P}_X^D(\alpha)$, noté $\mathcal{H}_X^D(\alpha)$, et dont la fibre en $x \in X$ est définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_X^D(\alpha)_x = \mathcal{H}_{X,x} & \text{si } x \in \mathbb{X} \\ \mathcal{H}_X^D(\alpha)_x = \alpha_i \cap R_{y_i, n_i}^0 & \text{si } x = y_i, 1 \leq i \leq r \end{cases} \quad (11)$$

C'est-à-dire que $\mathcal{H}_X^D(\alpha)_x$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}_X^D(\alpha)_x$ dont la valeur en x est 0. En particulier le sous-fibré $\mathcal{H}_X^D(\alpha)$ définit une section canonique de $P_X^D(\alpha)$, que l'on note s lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le diviseur de branchement D ni la classe de branchement α .

Soit f une fonction sur un ouvert $U \subset X$ dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{X} \cap U$ et telle que $j_x^{2(n_i+1)} f \in \alpha_i$ pour tout $y_i \in U$. On a vu dans la construction du fibré $\mathcal{P}_X^D(\alpha)$ que f définit une section \bar{f} du fibré $\mathcal{P}_X^D(\alpha)|_U$, donc une trivialisatation locale du fibré $P_X^D(\alpha)$, que l'on note $(\Pi, \mu) : P_X^D(\alpha) \simeq U \times \mathbb{CP}^1$. On vérifie que dans la trivialisatation induite par f , la section canonique s s'écrit $\mu(s(x)) = f(x)$. En particulier, cela montre que la section s est holomorphe, donc le sous-fibré $\mathcal{H}_X^D(\alpha)$ également.

De façon exactement analogue au cas non branché, on définit une filtration du fibré vectoriel adjoint de $\mathcal{P}_X^D(\alpha)$, que l'on note $F_1^{X,D}(\alpha) \subset F_2^{X,D}(\alpha) \subset \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))$. Si $x \in D$, on identifie $\text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))_x$ à $H^0(P_X^D(\alpha)_x, T_{P_X^D(\alpha)_x})$ et on pose

$$\begin{cases} F_2^{X,D}(\alpha)_x = H^0(P_X^D(\alpha)_x, T_{P_X^D(\alpha)_x}(-[s(x)])) \\ F_1^{X,D}(\alpha)_x = H^0(P_X^D(\alpha)_x, T_{P_X^D(\alpha)_x}(-2[s(x)])) \end{cases} \quad (12)$$

On a $F_2^{X,D}(\alpha) = \text{ad}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))$. Si $\gamma \in \mathcal{P}_X^D(\alpha)_x$, γ fournit une identification de $\mathcal{P}_X^D(\alpha)_x$ avec G . $\text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))_x$ est alors identifié à \mathfrak{g} . Si de plus $\gamma \in \mathcal{H}_X^D(\alpha)_x$, alors $F_2^{X,D}(\alpha)_x = \text{ad}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))_x$ est identifié à \mathfrak{h} et $F_1^{X,D}(\alpha)_x$ est identifié à \mathfrak{l} .

3.3 Fibrés des 2-repères projectifs branchés et tiré-en-arrières du fibré des 2-repères projectifs

Dans cette sous-section, nous prolongeons les idées soulevées dans la remarque 2.1.5 et nous les étendons au cas branché. Soit Y une surface de Riemann.

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application holomorphe localement injective. On dispose d'un isomorphisme de G -fibrés principaux $\delta f : \mathcal{P}_X \rightarrow f^*\mathcal{P}_Y$, dont l'inverse $(\delta f)^{-1}$ est défini de la façon suivante. Si $x \in X$, $(f^*\mathcal{P}_Y)_x = \mathcal{P}_{Y,f(x)}$. On pose pour $j_{f(x)}^2\phi \in (f^*\mathcal{P}_Y)_x : (\delta f)_x^{-1}(j_{f(x)}^2\phi) = j_x^2(\phi \circ f) \in \mathcal{P}_{X,x}$. Si $\phi : U \subset Y \rightarrow \mathbb{C}P^1$ est un biholomorphisme local et si $\bar{\phi}$ désigne la section de $\mathcal{P}_Y|_U$ induite par ϕ , alors $(\delta f)^{-1}(f^*\bar{\phi}) = \bar{\phi \circ f}$, où $\bar{\phi \circ f}$ est la section de $\mathcal{P}_X|_{f^{-1}(U)}$ induite par $\phi \circ f$. Cela montre que $(\delta f)^{-1}$ est holomorphe. Il est de plus clair que $(\delta f)^{-1}$ est équivariant par rapport à l'action de G sur \mathcal{P}_X et $f^*\mathcal{P}_Y$, donc δf est bien un isomorphisme de fibrés principaux. On vérifie aisément que si $f' : Y \rightarrow Z$ est un biholomorphisme local entre Y et une surface de Riemann Z , on a $\delta(f' \circ f) = f^*(\delta f') \circ (\delta f)$. Si $U \subset X$ est un ouvert tel que $f|_U$ est un biholomorphisme sur son image, on se convainc que $\delta f|_U$ est donné par l'identification de $\mathcal{P}_X|_U$ à $\mathcal{P}_Y|_{f(U)}$ étudiée dans la remarque 2.1.5.

Supposons à présent et jusqu'à la fin de cette sous-section que $f : X \rightarrow Y$ est une application holomorphe non constante. Notons comme en (9) $D = \sum_{i=1}^r n_i \cdot y_i$ le diviseur défini par le lieu de branchement de f , $\mathbb{D} = \{y_1, \dots, y_n\}$ et $\mathbb{X} = X \setminus \mathbb{D}$. Comme indiqué dans la remarque 3.1.2, pour tout $y_i \in \mathbb{D}$, $j_{y_i}^{2(n_i+1)}f$ définit une classe α_i de $G \setminus R_{y_i, n_i}$. On note $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$

Comme dans le cas non-branché, on définit un isomorphisme de fibrés principaux $\delta f : \mathcal{P}_X^D(\alpha) \simeq f^*\mathcal{P}_Y$ en posant pour $j_{f(x)}^2\phi \in (f^*\mathcal{P}_Y)_x$:

$$\begin{cases} (\delta f)^{-1}(j_{f(x)}^2\phi) = j_x^2(\phi \circ f) & \text{si } x \in \mathbb{X} \\ (\delta f)^{-1}(j_{f(x)}^2\phi) = j_x^{2(n_i+1)}(\phi \circ f) & \text{si } x = y_i, 1 \leq i \leq r \end{cases} \quad (13)$$

Les mêmes arguments que dans le cas non-branché montrent que f est un isomorphisme de G -fibrés principaux. En particulier, sur la surface \mathbb{X} , l'isomorphisme δf coïncide avec celui défini dans le cas non-branché.

On dispose donc, de façon analogue à la remarque 2.1.5, d'isomorphismes $\iota_1 : \text{ad}(\mathcal{H}_X^D(\alpha)) \simeq f^* \text{ad}(\mathcal{H}_Y)$, $\iota_2 : \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha) \simeq f^* \text{ad}(\mathcal{P}_Y)/F_1^Y$. Comme δf envoie $\mathcal{H}_X^D(\alpha)$ sur $f^*\mathcal{H}_Y$, l'isomorphisme ι_1 (respectivement ι_2) envoie $F_1^{X,D}(\alpha)$ (resp. $F_2^{X,D}(\alpha)/F_1^{X,D}(\alpha)$) sur $f^*F_1^Y$ (resp. $f^*(F_2^Y/F_1^Y)$). En restriction à \mathbb{X} , f est un biholomorphisme local, donc induit des isomorphismes $\iota_3 : J^1(T_X|_{\mathbb{X}}) \simeq f^*J^1(T_Y|_{f(\mathbb{X})})$ et $\iota_4 : \tilde{F}_2^{X,D}(\alpha)|_{\mathbb{X}} \simeq f^*\tilde{F}_2^Y|_{f(\mathbb{X})}$. On obtient alors, en restriction à \mathbb{X} , des diagrammes commutatifs analogues aux diagrammes (1) et (2).

Remarque 3.3.1. (i) L'isomorphisme ι_1 restreint au sous-fibré $F_1^{X,D}(\alpha)$, composé avec l'isomorphisme $F_1^Y \simeq K_Y$ de la proposition 2.1.3, donne un isomorphisme $I_1 : F_1^{X,D}(\alpha) \simeq f^*K_Y$. En composant sur \mathbb{X} avec l'identification $K_{\mathbb{X}} = K_X|_{\mathbb{X}} \simeq F_1^{X,D}(\alpha)|_{\mathbb{X}} = F_1^{\mathbb{X}}$, on obtient un isomorphisme $\tilde{I}_1 : K_{\mathbb{X}} \simeq f^*(K_Y|_{f(\mathbb{X})})$. La commutativité du diagramme (1) implique que \tilde{I}_1 coïncide avec l'application duale de la différentielle $(df|_{\mathbb{X}})^{-1}$.

(ii) De même, l'isomorphisme ι_2 , composé avec l'identification de la proposition 2.1.4 donne un isomorphisme $I_2 : \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))/\text{ad}(\mathcal{H}_X^D(\alpha)) \simeq f^*T_Y$. En restriction à \mathbb{X} , I_2 induit un isomorphisme $\tilde{I}_2 : T_{\mathbb{X}} \simeq f^*(T_Y|_{f(\mathbb{X})})$. La commutativité du diagramme (2) implique que \tilde{I}_2 coïncide avec la différentielle $df|_{\mathbb{X}}$.

(iii) Enfin, l'isomorphisme ι_1 (respectivement ι_2) donne en quotientant par $F_1^{X,D}(\alpha)$ (resp. en restriction à $\text{ad}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))$) un isomorphisme $\text{ad}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha) \simeq f^*(\text{ad}(\mathcal{H}_Y)/F_1^Y)$, qui composé avec les identifications des propositions 2.1.3 et 2.1.4 donne un isomorphisme $I_3 : \text{ad}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha) \simeq f^*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$. En restriction à \mathbb{X} , I_3 induit un isomorphisme $\tilde{I}_3 : \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{X}}$. La commutativité du diagramme 1 (alternativement la commutativité du diagramme 2) implique que \tilde{I}_3 est l'identité.

Intéressons-nous à présent au fibré d'Atiyah $\text{At}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))$. L'isomorphisme $\delta f : \mathcal{P}_X^D(\alpha) \simeq f^*\mathcal{P}_Y$ nous fournit un isomorphisme

$$\epsilon : \text{At}(\mathcal{P}_X^D(\alpha)) \simeq \text{At}(f^*\mathcal{P}_Y) \quad (14)$$

Par ailleurs, le tiré-en-arrière $f^*\mathcal{P}_Y$ vient avec une application tautologique $F : f^*\mathcal{P}_Y \rightarrow \mathcal{P}_Y$, équivariante par rapport à l'action de G , telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathcal{P}_Y & \xrightarrow{F} & \mathcal{P}_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (15)$$

Comme F est équivariante par rapport à l'action de G , la différentielle dF induit le morphisme suivant, que l'on note aussi dF par abus de notation :

$$dF : \text{At}(f^*\mathcal{P}_Y) \rightarrow f^* \text{At}(\mathcal{P}_Y) \quad (16)$$

Par construction, dF est un isomorphisme en restriction à \mathbb{X} .

En composant ϵ et dF , on obtient ainsi un morphisme $dF \circ \epsilon : \text{At}(\mathcal{P}_X^D(\alpha)) \rightarrow f^* \text{At}(\mathcal{P}_Y)$, qui est un isomorphisme en restriction à \mathbb{X} , et qui induit un morphisme de suites exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha)) & \longrightarrow & \text{At}(\mathcal{P}_X^D(\alpha)) & \longrightarrow & T_X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow dF \circ \epsilon & & \downarrow df \\ 0 & \longrightarrow & f^* \text{ad}(\mathcal{P}_Y) & \longrightarrow & f^* \text{At}(\mathcal{P}_Y) & \longrightarrow & f^* T_Y \longrightarrow 0 \end{array} \quad (17)$$

où l'isomorphisme de fibrés ι est induit par δf . On vérifie de plus que $dF \circ \epsilon$ envoie $\text{At}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))$ sur $f^* \text{At}(\mathcal{H}_Y)$.

3.4 Connexions projectives branchées

Soient D , \mathbb{D} et \mathbb{X} comme en (9). Contrairement à la sous-section 3.3, on ne suppose pas que D soit le diviseur de branchement d'une application holomorphe. Soit $\alpha \in \prod_{i=1}^r G \backslash R_{y_i, n_i}$.

Proposition 3.4.1. (i) *Le fibré en droites $F_1^{X,D}(\alpha)$ est canoniquement isomorphe au fibré en droites $K_X(-D)$.*

(ii) *Le fibré en droites $\text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))/\text{ad}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))$ est canoniquement isomorphe au fibré en droites $T_X(D)$.*

(iii) *Le fibré en droites $\text{ad}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha)$ est canoniquement isomorphe au fibré en droites \mathcal{O}_X .*

Démonstration. Les preuves de (i), (ii) et (iii) sont analogues, elles utilisent respectivement les isomorphismes I_1 , I_2 et I_3 de la remarque 3.3.1. Nous nous contentons de démontrer le point (i).

On a $\mathcal{P}_X^D(\alpha)|_{\mathbb{X}} = \mathcal{P}_{\mathbb{X}}$. Donc d'après le corollaire 2.1.6, on a un isomorphisme $\kappa : F_1^{X,D}(\alpha)|_{\mathbb{X}} \simeq K_X|_{\mathbb{X}}$.

Pour chaque entier i compris entre 1 et r , soit U_i un voisinage ouvert de y_i dans X tel que $U_i \cap \mathbb{D} = \{y_i\}$. Soit $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}P^1$ une application non constante dont le diviseur de branchement est $n_i \cdot y_i$ et telle que $j_{y_i}^{2(n_i+1)} f_i \in \alpha_i$. Comme on l'a vu à la sous-section 3.3, l'application f_i induit un isomorphisme de fibrés $\delta f_i : \mathcal{P}_X^D(\alpha)|_{U_i} \simeq f_i^* \mathcal{P}_{f_i(U_i)}$. Suivant la remarque 3.3.1, δf_i nous donne un isomorphisme $I_{1,i} : F_1^{X,D}(\alpha)|_{U_i} \simeq f_i^* K_{f_i(U_i)}$. Par ailleurs, l'isomorphisme dual de la différentielle $df : T_X|_{U_i} \simeq f^* T_{f(U_i)}$ est un isomorphisme $df^* : f^* K_{f(U_i)} \simeq K_X|_{U_i}(-n_i \cdot y_i)$. On a donc un isomorphisme $df^* \circ I_{1,i} : F_1^{X,D}(\alpha)|_{U_i} \simeq K_X|_{U_i}(-n_i \cdot y_i)$.

En restriction à $U_i \cap \mathbb{X}$, les isomorphismes κ et $df^* \circ I_{1,i}$ coïncident. En effet, suivant la remarque 3.3.1, si l'on identifie $F_1^{X,D}(\alpha)|_{U_i \cap \mathbb{X}}$ à $K_{U_i \cap \mathbb{X}}$, l'isomorphisme $I_{1,i} \circ \kappa$ coïncide avec $(df^*)^{-1}$.

On peut donc recoller les $I_{1,i}$ ($1 \leq i \leq r$) avec κ sur les intersections $U_i \cap \mathbb{X}$, pour obtenir un isomorphisme $F_1^{X,D}(\alpha) \simeq K_X(-D)$ □

Proposition 3.4.2. *On dispose d'un morphisme :*

$$\Phi_X^D(\alpha) : \text{At}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha) \rightarrow \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha) \quad (18)$$

qui est un isomorphisme en restriction à \mathbb{X} et tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{At}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha) & \xrightarrow{\Phi_X^D(\alpha)} & \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_X & \xrightarrow{\quad} & T_X(D) = \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))/\text{ad}(\mathcal{H}_X^D(\alpha)) \end{array} \quad (19)$$

Démonstration. On procède comme dans la preuve de la proposition 3.4.1, en utilisant le caractère intrinsèque des objets construits dans le cas non branché.

La proposition 2.2.2 nous fournit un isomorphisme $\Phi_{\mathbb{X}} : \text{At}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha)|_{\mathbb{X}} \xrightarrow{\sim} \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha)|_{\mathbb{X}}$.

Soit pour chaque i compris entre 1 et r , U_i un ouvert tel que $U_i \cap \mathbb{X} = y_i$. Soit aussi $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}P^1$ une application dont le diviseur de branchement est $n_i \cdot y_i$ et telle que $j_{y_i}^{2(n_i+1)} f \in \alpha_i$. D'après la proposition 2.2.2, il existe un isomorphisme canonique $\Phi_{f_i(U_i)} : \text{At}(\mathcal{H}_{f_i(U_i)})/F_1^{f_i(U_i)} \xrightarrow{\sim} \text{ad}(\mathcal{P}_{f_i(U_i)})/F_1^{f_i(U_i)}$. De plus, l'isomorphisme $\delta f_i : \mathcal{P}_X^D(\alpha)|_{U_i} \simeq f_i^* \mathcal{P}_{f_i(U_i)}$ induit un isomorphisme $\text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha)|_{U_i} \simeq f_i^* \text{ad}(\mathcal{P}_{f_i(U_i)})/F_1^{f_i(U_i)}$, ainsi que le morphisme $dF \circ \epsilon : \text{At}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha)|_{U_i} \rightarrow f_i^* \text{At}(\mathcal{H}_{f_i(U_i)})/F_1^{f_i(U_i)}$ construit à la sous-section 3.3. Ainsi, le tiré-en-arrière $f_i^* \Phi_{f_i(U_i)}$ induit un morphisme $\tau_i : \text{At}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha)|_{U_i} \rightarrow \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha)|_{U_i}$. Comme le morphisme $dF \circ \epsilon$ est un isomorphisme en restriction à $U_i \cap \mathbb{X}$, il en va de même pour τ_i .

La construction de l'isomorphisme Φ_X de la proposition 2.2.2 est "intrinsèque à la variété X ", dans un sens similaire à celui de la remarque 2.1.5. Plus concrètement, ici, les isomorphismes τ_i et $\Phi_{\mathbb{X}}$ coïncident en restriction à $U_i \cap \mathbb{X}$. En particulier, les τ_i et $\Phi_{\mathbb{X}}$ se recollent pour donner le $\Phi_X^D(\alpha)$ recherché. La commutativité du digramme (19) découle de la commutativité des diagrammes (3) et (17). □

L'existence du morphisme $\Phi_X^D(\alpha)$ nous permet de définir une connexion projective branchée sur le fibré $\mathcal{P}_X^D(\alpha)$ de façon similaire à ce que l'on a fait pour le fibré des 2-repères projectifs.

Une connexion de Cartan branchée pour les fibrés $\mathcal{H}_X^D(\alpha) \subset \mathcal{P}_X^D(\alpha)$ est un morphisme $\omega : \text{At}(\mathcal{P}_X^D(\alpha)) \rightarrow \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))$ qui scinde la suite exacte courte suivante, similaire à (4) :

$$0 \rightarrow \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha)) \rightarrow \text{At}(\mathcal{P}_X^D(\alpha)) \rightarrow T_X \rightarrow 0 \quad (20)$$

et induit un morphisme $\omega|_{\text{At}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))} : \text{At}(\mathcal{H}_X^D(\alpha)) \rightarrow \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))$ qui est un isomorphisme en restriction à $X \setminus D$, où D est une partie discrète de X . Une telle connexion ω induit le diagramme commutatif suivant (en utilisant l'isomorphisme (ii) de la proposition 3.4.1) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{ad}(\mathcal{H}_X^D(\alpha)) & \longrightarrow & \text{At}(\mathcal{H}_X^D(\alpha)) & \longrightarrow & T_X \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \omega|_{\text{At}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))} & & \downarrow \theta \\ 0 & \longrightarrow & \text{ad}(\mathcal{H}_X^D(\alpha)) & \longrightarrow & \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha)) & \longrightarrow & T_X(D) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (21)$$

On appelle diviseur de branchement de la connexion ω le diviseur d'annulation du morphisme de fibrés en droites θ .

Un telle connexion de Cartan branchée donne également lieu au diagramme suivant, dont le carré de gauche est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & F_1^{X,D}(\alpha) & \longrightarrow & \text{At}(\mathcal{H}_X^D(\alpha)) & \longrightarrow & \text{At}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha) \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow \omega|_{\text{At}(\mathcal{H}_X^D(\alpha))} & & \downarrow \Phi_X^D(\alpha) \\
0 & \longrightarrow & F_1^{X,D}(\alpha) & \longrightarrow & \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha)) & \longrightarrow & \text{ad}(\mathcal{P}_X^D(\alpha))/F_1^{X,D}(\alpha) \longrightarrow 0
\end{array} \tag{22}$$

Définition 3.4.3. On appelle connexion projective branchée sur X , de diviseur de branchement D et de classe de branchement α une connexion de Cartan branchée pour les fibrés $\mathcal{H}_X^D(\alpha) \subset \mathcal{P}_X^D(\alpha)$ qui rend le diagramme (22) commutatif.

Si ω est une connexion projective branchée sur X , de diviseur de branchement D et de classe de branchement α , alors d'après le diagramme (19), le morphisme θ du diagramme (21) est l'inclusion $T_X \hookrightarrow T_X(D)$, et donc le diviseur de branchement de ω est donné par D , ce qui correspond au vocabulaire choisi.

Remarque 3.4.4. Par construction, le morphisme $\Phi_X^D(\alpha)$ de la proposition 3.4.2 correspond en restriction à \mathbb{X} à l'isomorphisme $\Phi_{\mathbb{X}}$ de la proposition 2.2.2. En particulier, cela implique qu'une connexion projective branchée sur X induit une connexion projective en restriction à \mathbb{X} .

La discussion précédant la proposition 2.2.5 est valable *mutatis mutandis* dans le cas des connexions projectives branchées sur X , de diviseur de branchement D et de classe de branchement α . En particulier, la différence de deux telles connexions est donnée par une section globale du fibré $\text{Hom}(T_X, F_1^{X,D}(\alpha))$. En utilisant l'isomorphisme (i) de la proposition 3.4.1, la proposition 2.2.5 devient dans le cas branché :

Proposition 3.4.5. *L'ensemble des connexions projectives branchées sur X , de diviseur de branchement D et de classe de branchement α , est ou bien vide, ou bien un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $H^0(X, K_X^{\otimes 2}(-D))$.*

3.5 Structures projectives branchées

Dans cette sous-section, nous faisons le lien entre la notion classique de structure projective branchée et la notion de connexion projective branchée dont il a été question à la section 3.4.

Fixons un diviseur D sur X , comme en (9).

Définition 3.5.1. On appelle atlas projectif branché sur X de diviseur de branchement D la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ et d'applications holomorphes non constantes $z_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}P^1$ dont le lieu de branchement est $D|_{U_i}$ et telles que pour tous $i, j \in I$, il existe un élément $g_{ij} \in G$ tel que $z_i = g_{ij} \circ z_j$ sur $U_i \cap U_j$.

On dit que deux atlas projectifs branchés de diviseur D sont équivalents si leur réunion est un atlas projectif branché de diviseur D . On appelle structure projective branchée de diviseur D une classe d'équivalence d'atlas projectifs branchés de diviseur D .

Pour un survol sur la théorie des structures projectives branchées, on peut voir par exemple [15] et les références qui y sont citées.

Étant donnée une structure projective branchée sur X de diviseur D et d'atlas maximal $(U_i, z_i)_{i \in I}$, on peut lui associer une classe de branchement $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in G \setminus R_{y_1, n_1} \times \dots \times G \setminus R_{y_r, n_r}$ en prenant $\alpha_k = j_{y_k}^{2(n_k+1)} z_i \bmod G$, où $i \in I$ est tel que $y_k \in U_i$.

On a vu à la sous-section 3.2 que pour tout $i \in I$, l'application z_i définit une section et donc une connexion principale du fibré $\mathcal{P}_X^D(\alpha)|_{U_i}$. Comme les z_i diffèrent par composition par un élément de G , les connexions principales qu'elles définissent coïncident sur les $U_i \cap U_j$ et définissent donc une connexion principale ω sur $\mathcal{P}_X^D(\alpha)$. L'étude effectuée dans le cas non branché montre que, en restriction à \mathbb{X} , la connexion ω fait commuter le diagramme (22). De plus, si y_k ($1 \leq k \leq r$) est un point de branchement de l'atlas (U_i, z_i) et $i_0 \in I$ est tel que $y_k \in U_{i_0}$, on peut voir $\omega|_{U_{i_0}}$ comme le tiré-en-arrière par z_{i_0} de la connexion projective sur \mathbb{CP}^1 qui correspond à la structure projective triviale sur \mathbb{CP}^1 . Comme, dans la preuve de la proposition 3.4.2, on a obtenu l'application $\Phi_X^D(\alpha)|_{U_{i_0}}$ en tirant en arrière l'application $\Phi_{\mathbb{CP}^1}$, le fait que la connexion projective tautologique sur \mathbb{CP}^1 fasse commuter le diagramme (5) pour $X = \mathbb{CP}^1$ implique que ω fait commuter le diagramme (22) en restriction à U_{i_0} .

On a montré le lemme suivant :

Lemme 3.5.2. *Une structure projective branchée définit une connexion projective branchée, qui a le même diviseur de branchement et la même classe de branchement.*

3.6 Structures projectives branchées, fibrés des repères projectifs branchés et dérivée schwarzienne

Commençons par rappeler le résultat fondamental suivant, qui est une conséquence de la théorie de Fuchs locale et qui joue un rôle central dans la compréhension des structures projectives branchées. On peut consulter [6] pour plus de détails.

Soit $n \geq 2$ un entier naturel, soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et soit $U \subset \mathbb{C}$ un voisinage ouvert simplement connexe de z_0 .

Proposition 3.6.1. *Soit $\phi = \varphi dz^{\otimes 2}$ une différentielle quadratique holomorphe définie sur $U \setminus \{z_0\}$. Il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n+1}]$ tel que les assertions (A) et (B) suivantes sont équivalentes.*

(A) *Il existe une fonction holomorphe f définie sur U dont le diviseur de branchement est exactement $n \cdot z_0$ et telle que $\varphi = \mathcal{S}(f)$ sur l'ensemble de définition de ϕ*

(B) *Les trois conditions suivantes sont vérifiées*

(i) *La différentielle quadratique ϕ se prolonge en une différentielle quadratique méromorphe sur U qui admet un pôle d'ordre 2 en z_0 : $\varphi = \frac{\alpha_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{\alpha_{-1}}{z-z_0} + \alpha_0 + \alpha_1(z - z_0) + \alpha_2(z - z_0)^2 + \dots$*

(ii) $\alpha_{-2} = \frac{1-(n+1)^2}{2}$

(iii) $P_n(\alpha_{-1}, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) = 0$

De plus, le polynôme P_n s'écrit $P_n = \lambda X_{n+1} + \tilde{P}(X_1, \dots, X_n)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\tilde{P} \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$

Remarque 3.6.2. La proposition 3.6.1 implique en particulier qu'étant donnés $\alpha_{-1}, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-2} \in \mathbb{C}$, il existe une fonction f définie sur U dont le diviseur de branchement est $n \cdot z_0$ et telle que $\mathcal{S}(f) = \frac{1-(n+1)^2}{2(z-z_0)^2} + \frac{\alpha_{-1}}{z-z_0} + \alpha_0 + \alpha_1(z - z_0) + \dots + \alpha_{n-2}(z - z_0)^{n-2} + \mathcal{O}(z - z_0)^{n-1}$. En effet, il suffit de résoudre l'équation $\mathcal{S}(f) = \frac{1-(n+1)^2}{2(z-z_0)^2} + \frac{\alpha_{-1}}{z-z_0} + \alpha_0 + \alpha_1(z - z_0) + \dots + \alpha_{n-2}(z - z_0)^{n-2} + \left(-\frac{\tilde{P}(\alpha_{-1}, \dots, \alpha_{n-2})}{\lambda}\right)(z - z_0)^{n-1}$

Nous pouvons à présent établir la réciproque de la proposition 3.5.2. Soit ω une connexion projective branchée, de diviseur D et de classe de branchement α . La connexion ω est une connexion projective en restriction à \mathbb{X} , donc elle provient d'une structure projective p sur \mathbb{X} d'après le corollaire 2.3.4. Pour i entre 1 et r , soit U_i un voisinage de y_i et $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{CP}^1$, de diviseur de branchement $n_i \cdot y_i$ et telle que $j_{y_i}^{2(n_i+1)} f_i \in \alpha_i$. On a vu que f_i définit une connexion projective branchée sur U_i de même classe de branchement que ω . En particulier, la différence $\omega - \omega_i$ correspond à une différentielle quadratique $\phi_i \in \Gamma(U_i, K_X^{\otimes 2}(-n_i \cdot y_i))$. Fixons

également une connexion projective non branchée ω_0 sur X . D'après le corollaire 2.3.4, ω_0 est donnée par une structure projective sur X . Sur \mathbb{X} , la différence $\omega - \omega_0$ correspond à une différentielle quadratique $\psi \in \Gamma(\mathbb{X}, K_X^{\otimes 2})$ et sur $U_i \cap \mathbb{X}$, la différence $\omega_i - \omega_0$ donne lieu à une différentielle quadratique $\psi_i \in \Gamma(U_i \cap \mathbb{X}, K_X^{\otimes 2})$. On a de plus $\psi = \phi_i|_{U_i \cap \mathbb{X}} + \psi_i$. Comme ϕ_i s'annule à l'ordre n_i en y_i , les développements de Laurent de ψ et ψ_i dans une coordonnée locale z_i de la structure projective ω_0 coïncident jusqu'à l'ordre $n_i - 1$. D'après la proposition 3.6.1, il existe donc une application h_i définie sur U_i , dont le diviseur de branchement est $n_i \cdot y_i$ et telle que $\{h_i, z_i\} dz_i^{\otimes 2} = \psi$. En particulier la connexion projective induite par h_i sur $U_i \cap \mathbb{X}$ coïncide avec ω . De plus le lemme 3.6.4 montre que h_i a la même classe de branchement en y_i que f_i , donc f_i définit une connexion projective branchée de classe de branchement α_i , qui coïncide donc avec ω sur U_i tout entier par prolongement analytique. En restriction à U_i , ω provient donc d'une structure projective branchée b_i de classe de branchement α_i . Les structures branchées b_i se recollent sur les $U_i \cap \mathbb{X}$ avec la structure non-branchée p pour donner une structure projective branchée sur X tout entière, dont la connexion projective associée est ω .

On a démontré la proposition suivante :

Proposition 3.6.3. *La donnée d'une structure projective branchée sur X de diviseur de branchement D et de classe de branchement α équivaut à la donnée d'une connexion projective branchée sur X , de diviseur D et de classe α .*

À présent, reprenons les notations de la proposition 3.6.1. Soit de plus f une fonction holomorphe sur U telle que f' admet un zéro d'ordre n en z_0 . Fixons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + a_{n+2}(z - z_0)^{n+2} + \dots + a_{2n+1}(z - z_0)^{2n+1} + \mathcal{O}(z - z_0)^{2n+2} \\ \frac{f''(z)}{f'(z)} &= \frac{n}{z - z_0} + \delta_0 + \delta_1(z - z_0) + \dots + \delta_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + \mathcal{O}(z - z_0)^n \\ \mathcal{S}(f)(z) &= \frac{1 - n^2}{2(z - z_0)^2} + \frac{\alpha_{-1}}{(z - z_0)} + \dots + \alpha_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + \mathcal{O}(z - z_0)^n \end{aligned}$$

Un calcul direct donne le lemme suivant :

Lemme 3.6.4. *Il existe deux bijections bialgébriques $D_n : \mathbb{C}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$ et $S_n : \mathbb{C}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$ telles que pour toute fonction f , on ait*

$$(\delta_0, \dots, \delta_{n-1}) = D_n \left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}, \frac{a_{n+3}}{a_{n+1}}, \dots, \frac{a_{2n+1}}{a_{n+1}} \right)$$

et

$$(\alpha_{-1}, \dots, \alpha_{n-2}) = S_n \left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}, \frac{a_{n+3}}{a_{n+1}}, \dots, \frac{a_{2n+1}}{a_{n+1}} \right)$$

Soit X une surface de Riemann. Rappelons la définition de structure affine sur X , similaire à celle de structure projective.

Définition 3.6.5. On appelle atlas affine holomorphe sur X la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ et de coordonnées locales $z_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ telles que pour tous $i, j \in I$, il existe un élément $g_{ij} \in \text{Aff}(\mathbb{C})$ tel que $z_i = g_{ij} \circ z_j$ sur $U_i \cap U_j$.

On dit que deux atlas affines sont équivalents si leur réunion est un atlas affine. On appelle structure affine sur X une classe d'équivalence d'atlas affines.

De façon similaire aux structures projectives (en plus simple), l'espace des structures affines holomorphes sur un ouvert $U \subset X$ est un espace affine dirigé par l'espace $\Gamma(U, K_X)$ des différentielles holomorphes sur U . Si z_1 et z_2 sont deux coordonnées sur U avec $z_2 = f(z_1)$, la différence entre les structures affines définies par z_2 et z_1 est donnée par $[z_2, z_1] dz_1$ où $[z_2, z_1] = \frac{f''}{f'}$.

Soit D un diviseur effectif sur X , comme dans (9). Notons $A_X^D = \prod_{i=1}^r G \setminus R_{y_i, n_i}$ l'espace des fibrés de 2-repères projectifs branchés sur X de diviseur D . Soient $\alpha, \alpha' \in A_X^D$ deux classes de branchement. Soit également, pour tout $i \in [[1, r]]$, f_i (respectivement g_i) une fonction holomorphe définie sur un voisinage U_i de y_i , branchée à l'ordre n_i en y_i (et pas ailleurs) et dont la classe de branchement en y_i est α_i (respectivement α'_i). La différence entre les structures projectives (respectivement les structures affines) définies par g_i et f_i sur $U_i \setminus \{x_0\}$ est donnée par la différentielle quadratique $\{g_i, f_i\}df_i^{\otimes 2}$ (respectivement par la différentielle $[g_i, f_i]df_i$).

Lemme 3.6.6. (i) La différentielle quadratique $\{g_i, f_i\}df_i^{\otimes 2}$ se prolonge en une section dans $\Gamma(U_i, K_X^{\otimes 2}(y_i))$. La différentielle $[g_i, f_i]df_i$ se prolonge en une section dans $\Gamma(U_i, K_X)$
(ii) Le $(n_i - 1)$ -jet de $\{g_i, f_i\}df_i^{\otimes 2}$ en y_i (respectivement le $(n_i - 1)$ -jet de $[g_i, f_i]df_i$) ne dépend pas du choix de f_i et g_i , de classes de branchement α et α'

Démonstration. Soit z_i une coordonnée locale sur U_i , centrée en y_i . On a $\{g_i, f_i\}df_i^{\otimes 2} = \{g_i, z_i\}dz_i^{\otimes 2} - \{f_i, z_i\}dz_i^{\otimes 2}$. D'après la proposition 3.6.1, le coefficient devant $\frac{1}{z_i^2}$ dans $\{f_i, z_i\}$ et $\{g_i, z_i\}$ est $\frac{1-(n_i+1)^2}{2}$. Donc la différence $\{f_i, z_i\} - \{g_i, z_i\}$ a un pôle d'ordre 1 en $z_i = 0$, puis $\{g_i, f_i\}df_i^{\otimes 2} \in \Gamma(U_i, K_X^{\otimes 2}(y_i))$. De même, $[g_i, f_i]df_i = [g_i, z_i]dz_i - [f_i, z_i]dz_i$ et le résidu de $[g_i, z_i]$ et $[f_i, z_i]$ en y_i est n . Donc la différence $[g_i, z_i] - [f_i, z_i]$ est holomorphe sur U_i , puis $[g_i, f_i]df_i \in \Gamma(U_i, K_X)$. Cela démontre le point (i).

Si à présent \tilde{f}_i, \tilde{g}_i sont deux autres fonctions de classe de branchement α_i en y_i , d'après le lemme 3.6.4, les coefficients de $\{f_i, z_i\}$ et $\{\tilde{f}_i, z_i\}$ coïncident jusqu'à l'ordre $n_i - 2$, et de même en remplaçant f_i par g_i et \tilde{f}_i par \tilde{g}_i . En particulier, $\{g_i, f_i\}df_i^{\otimes 2} = \{g_i, z_i\}dz_i^{\otimes 2} - \{f_i, z_i\}dz_i^{\otimes 2}$ coïncide avec $\{g_i, \tilde{f}_i\}d\tilde{f}_i^{\otimes 2} = \{g_i, z_i\}dz_i^{\otimes 2} - \{\tilde{f}_i, z_i\}dz_i^{\otimes 2}$ jusqu'à l'ordre $n_i - 2$. Cela s'écrit aussi $j_{y_i}^{n_i-1}\{g_i, f_i\}df_i^{\otimes 2} = j_{y_i}^{n_i-1}\{g_i, \tilde{f}_i\}d\tilde{f}_i^{\otimes 2}$, puisque $\{g_i, f_i\}df_i^{\otimes 2} \in \Gamma(U_i, K_X^{\otimes 2}(y_i))$. Le même argument vaut *mutatis mutandis* pour montrer $j_{y_i}^{n_i-1}[g_i, f_i]df_i = j_{y_i}^{n_i-1}[g_i, \tilde{f}_i]d\tilde{f}_i$. Cela prouve le point (ii). \square

De plus, d'après la remarque 3.6.2, pour tout $(n_i - 1)$ -jet en y_i , de section $j_{y_i}^{n_i-1}\phi \in J_{y_i}^{n_i-1}K_X^{\otimes 2}(y_i)$, il existe une classe de branchement α''_i telle que si h_i a pour classe de branchement α''_i , alors $j_{y_i}^{n_i-1}\{h_i, f_i\}df_i^{\otimes 2} = j_{y_i}^{n_i-1}\phi$. De même, si $j_{y_i}^{n_i-1}\psi \in J_{y_i}^{n_i-1}K_X$, il existe une classe de branchement α'''_i telle que si h_i a pour classe de branchement α'''_i , alors $j_{y_i}^{n_i-1}[h_i, f_i]df_i = j_{y_i}^{n_i-1}\psi$. En effet, une différentielle avec un pôle d'ordre 1 en y_i s'écrit $[h_i, z_i]dz_i$ pour une certaine fonction holomorphe h_i de diviseur de branchement $n \cdot y_i$ si et seulement son résidu en y_i est n .

Remarquons enfin les égalités $\prod_{i=1}^r J_{y_i}^{n_i-1}K_X^{\otimes 2}(-D^{\text{red}}) = H^0(D, K_X^{\otimes 2}(-D^{\text{red}})|_D)$ et $\prod_{i=1}^r J_{y_i}^{n_i-1}K_X = H^0(D, K_X|_D)$

On a montré la proposition suivante :

Proposition 3.6.7. La dérivée schwarziennne munit la variété algébrique A_X^D d'une structure d'espace affine, dirigé par l'espace vectoriel $H^0(D, K_X^{\otimes 2}(-D^{\text{red}})|_D)$.

L'opérateur différentiel $f \mapsto \frac{f''}{f'}$ munit la variété algébrique A_X^D d'une structure d'espace affine dirigé par l'espace vectoriel $H^0(D, K_X|_D)$.

4 Espace des structures projectives branchées sur une famille de courbes complexes donnée

Soit X une surface de Riemann de genre $g \in \mathbb{N}$, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit D un diviseur de degré n , comme en (9). Soit de plus $\alpha \in A_X^D$ une classe de branchement sur X de diviseur D .

Notons B_X^α l'espace des structures projectives branchées sur X de classe de branchement α (et donc de diviseur de branchement D). On a vu à la proposition 3.4.5 que l'espace B_X^α est ou bien vide, ou bien un espace affine dirigé par l'espace vectoriel $H^0(X, K_X^{\otimes 2}(-D))$.

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la façon dont les espaces affines B_X^α se recollent lorsque la classe de branchement α , le diviseur D et la structure complexe X varient.

En préambule, voyons un critère pour savoir si la surface de Riemann X admet une structure projective branchée de diviseur D et de classe de branchement α . Soit FB_X^α le faisceau des structures projectives branchées sur X de classe de branchement α : Si $U \subset X$ est un ouvert, l'espace des sections $\Gamma(U, FB_X^\alpha)$ est l'espace des structures projectives branchées sur U de diviseur $D|_U$ et de classe $\alpha|_U$ (où la restriction d'une classe de branchement à un ouvert correspond à la restriction du fibré des 2-repères projectifs branchés associé). Le faisceau FB_X^α est un faisceau en espaces affines localement non vide, dirigé par le faisceau $K_X^{\otimes 2}(-D)$, au sens où $\Gamma(U, FB_X^\alpha)$ est ou bien vide, ou bien un espace affine dirigé par $\Gamma(U, K_X^{\otimes 2}(-D))$, et $\Gamma(U, FB_X^\alpha)$ est non vide si U est suffisamment petit (par exemple si U est le domaine de définition d'une fonction holomorphe définissant la classe α).

Un faisceau en espaces affines \mathcal{A} sur X localement non vide dirigé par un faisceau en espaces vectoriel \mathcal{F} définit un élément $c \in H^1(X, \mathcal{F})$, avec $c = 0$ si et seulement si $H^0(X, \mathcal{A}) \neq \emptyset$. La classe de cohomologie c est définie de la façon suivante. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X avec pour tout $i \in I$, $\Gamma(U_i, \mathcal{A}) \neq \emptyset$ et soit $a_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{A})$. Notons pour $i, j \in I$, $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et $q_{ij} = a_j - a_i \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{F})$. La famille $(q_{ij})_{i, j \in I}$ définit clairement un 1-cocycle de \mathcal{F} . L'élément $c \in H^1(X, \mathcal{F})$ est défini comme la classe de cohomologie du cocycle (q_{ij}) , et ne dépend pas du recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ ni de la famille $(a_i)_{i \in I}$, puisqu'étant données deux telles famille, leur réunion reste une telle famille. Si $c = 0$, alors il existe des $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$ tels que $q_{ij} = f_j - f_i$. En notant $\tilde{a}_i = a_i - f_i$, les \tilde{a}_i se recollent pour donner une section globale du faisceau \mathcal{A} . Réciproquement, si $H^0(X, \mathcal{A}) \neq \emptyset$, on peut prendre $I = \{0\}$, $a_0 \in H^0(X, \mathcal{A})$. La classe de cohomologie associée est clairement nulle. Dans le cas qui nous intéresse, on obtient le lemme suivant :

Lemme 4.0.1. *Au faisceau FB_X^α est associée une classe de cohomologie $c_X^\alpha \in H^1(X, K_X^{\otimes 2}(-D))$, qui est nulle si et seulement si $B_X^\alpha = H^0(X, FB_X^\alpha) \neq \emptyset$.*

4.1 Espace des 2-repères projectifs branchés associé à une famille de courbes avec diviseurs

On appelle famille de courbes complexes un triplet (S, \mathcal{X}, π) où \mathcal{X} et S sont des espaces analytiques et $\pi : \mathcal{X} \rightarrow S$ est un morphisme propre et simple d'espaces analytiques dont les fibres sont des courbes. On entend "simple" au sens de [16], c'est-à-dire que π est plat et ses fibres sont des courbes complexes lisses. Cela équivaut à dire que π est localement trivial sur \mathcal{X} : chaque point de \mathcal{X} admet un voisinage $U \subset \mathcal{X}$ tel que $V = \pi(U)$ est un ouvert de S et il existe un isomorphisme d'espaces analytiques $\phi : U \simeq V \times \Omega$ où Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $\pi = \text{pr}_1 \circ \phi$, où pr_1 désigne la projection sur le premier facteur. En particulier, dans le cas où la base S est lisse, on retrouve le concept de submersion holomorphe. D'après [17], $\pi : X \rightarrow S$ est topologiquement un fibré localement trivial.

Soit $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi)$ une famille de courbes complexes compactes avec diviseurs, c'est-à-dire que (S, \mathcal{X}, π) est une famille localement triviale de courbes complexes, et \mathcal{D} est un diviseur de Cartier sur \mathcal{X} qui ne contient aucune fibre de π .

En notant $X_s = \pi^{-1}(\{s\})$, le théorème de Rouché implique que le degré de $D_s = D|_{X_s}$ est indépendant de s . On appelle degré de la famille $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi)$ le degré des diviseurs D_s . Notons

$$\mathcal{A}_X^{\mathcal{D}} = \{(s, \alpha) | s \in S, \alpha \in A_{X_s}^{\mathcal{D}}\} \quad (23)$$

l'espace des classes de branchement associé à une des courbes avec diviseur de la famille $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi)$. On dispose d'une projection évidente

$$\lambda : \mathcal{A}_X^{\mathcal{D}} \rightarrow S \quad (24)$$

Pour chaque $s \in S$, d'après la proposition 3.6.7, l'espace $\lambda^{-1}(s) = A_{X_s}^{D_s}$ est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel $H^0(D_s, K_{X_s|D_s}) = ((\pi|_{\mathcal{D}})_*(K_{\mathcal{X}/S|_{\mathcal{D}}}))_s$. Pour avoir une structure naturelle sur $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$ de fibré affine sur S , dirigé par le fibré vectoriel $(\pi|_{\mathcal{D}})_*(K_{\mathcal{X}/S|_{\mathcal{D}}})$, il suffit d'avoir de sections locales naturelles de la surjection λ . Ces sections nous sont données par la définition suivante :

Définition 4.1.1. (i) On appelle atlas branché sur la courbe complexe X de diviseur de branchement D la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X , ainsi que pour chaque $i \in I$ d'une fonction $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ dont le diviseur de branchement est $D|_{U_i}$, tels que la classe de branchement définie par f_i sur $U_{ij} = U_i \cap U_j$ est la même que la classe de branchement définie par f_j sur U_{ij} .

(ii) On appelle atlas branché sur \mathcal{X} relatif à S , de diviseur de branchement \mathcal{D} , la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de \mathcal{X} , ainsi que pour chaque $i \in I$ d'une fonction $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ tels que pour chaque $s \in S$, la famille $(U_i \cap X_s, f_i|_{U_i \cap X_s})_{i \in I}$ est un atlas branché sur X_s de diviseur D_s .

Remarquons que, quitte à restreindre la base S , il existe un atlas branché sur \mathcal{X} relativement à S et de diviseur de branchement \mathcal{D} . En effet, soit $s \in S$ et pour chaque point y_k de $D_s = \sum_{k=1}^r n_k y_k$, soit U_k un voisinage de y_k dans \mathcal{X} muni d'une fonction $g_k : U_k \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\mathcal{D} \cap U_k$ est le lieu des zéros de g_k . Posons $V = \pi(U_1) \cap \dots \cap \pi(U_r) \subset S$. C'est un voisinage de s . Soit enfin $(W_i, f_i)_{i \in I}$ un atlas relatif (i.e. un atlas relatif branché de diviseur de branchement nul) pour la famille $\pi^{-1}(V) \setminus \mathcal{D}$, qui existe par la trivialité locale de la famille (S, \mathcal{X}, π) . Alors la réunion de l'atlas $(W_i, f_i)_{i \in I}$ et de la famille $(U_k, g_k)_{1 \leq k \leq r}$ est un atlas relatif branché pour la famille $\pi^{-1}(V)$ de diviseur $\mathcal{D}|_{\pi^{-1}(V)}$.

La donnée d'un atlas branché $(U_i, f_i)_{i \in I}$ sur \mathcal{X} relativement à S de diviseur \mathcal{D} définit une section $\mathbf{a} : S \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$ de la projection λ , appelée classe de branchement relative de l'atlas relatif $(U_i, f_i)_{i \in I} : \mathbf{a}(s)$ est la classe de branchement de l'atlas branché $(U_i \cap X_s, f_i|_{U_i \cap X_s})$.

Lemme 4.1.2. Soient $(U_i, f_i)_{i \in I}$ et $(U_i, g_i)_{i \in I}$ deux atlas branchés sur \mathcal{X} relatifs à S de diviseur \mathcal{D} . Soient $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 : S \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$ les classes de branchement relatives des atlas $(U_i, f_i)_{i \in I}$ et $(U_i, g_i)_{i \in I}$ respectivement. Posons pour chaque $s \in S$, $\mathbf{a}_2(s) = \mathbf{a}_1(s) + \phi(s)$, avec $\phi(s) \in H^0(D_s, K_{X_s|D_s})$. Alors ϕ est une section holomorphe du fibré vectoriel $(\pi|_{\mathcal{D}})_*(K_{\mathcal{X}/S|_{\mathcal{D}}})$.

Démonstration. Soit $s_0 \in S$, $y \in X_{s_0}$ un point du diviseur D_{s_0} . Par la trivialité locale de (S, \mathcal{X}, π) , il existe un voisinage ouvert V de s_0 dans S , un voisinage ouvert $U \subset \mathcal{X}$ de y avec $\pi(U) = V$, et des coordonnées locales $(z, w) : U \rightarrow V \times \mathbb{C}$ avec $\pi(z, w) = z$. On peut supposer que U est un ouvert de carte commun aux atlas relatifs branchés $(U_i, f_i)_{i \in I}$ et $(U_i, g_i)_{i \in I}$, et que $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ sont des cartes de ces deux atlas. D'après la proposition 3.6.7, il suffit de montrer que la fonction

$$\frac{\partial_w^2 g}{\partial_w g} - \frac{\partial_w^2 f}{\partial_w f} : U \rightarrow \mathbb{C}$$

est holomorphe.

Les fonctions f et g ont même diviseur de branchement en restriction à chaque fibre de X , c'est-à-dire que les fonctions $\partial_w g$ et $\partial_w f$ ont même lieu d'annulation, ou encore il existe une fonction holomorphe qui ne s'annule pas $h : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ telle que $\partial_w g = h \cdot \partial_w f$. Alors on a $\partial_w^2 g / \partial_w g - \partial_w^2 f / \partial_w f = \partial_w h / h$, qui est holomorphe. \square

Ainsi les atlas projectifs branchés sur \mathcal{X} , relativement à S et de diviseur \mathcal{D} définissent bien une structure de fibré affine sur $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$.

Lemme 4.1.3. Soit $\mathbf{a} : S \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$ une section holomorphe. Il existe un atlas sur \mathcal{X} , relatif à S et branché sur \mathcal{D} de classe de branchement relative \mathbf{a} .

Démonstration. La réunion de deux atlas relatifs branchés de classe de branchement relative \mathbf{a} est toujours un atlas relatif branché de classe de branchement relative \mathbf{a} . Par conséquent, il suffit de montrer le lemme localement sur S , puis de considérer la réunion de tous les atlas locaux obtenus.

Soit $s \in S$. Quitte à restreindre S à un voisinage ouvert de s , il existe un atlas relatif branché $(U_i, f_i)_{i \in I}$ sur $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi)$, de classe de branchement relative $\mathbf{a}_0 : S \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$. Soit $y \in X_s$ un point de D_s . Soit (U, f) une carte de l'atlas $(U_i, f_i)_{i \in I}$ avec $y \in U$. Comme (S, \mathcal{X}, π) est localement triviale, quitte à restreindre U , on dispose d'un biholomorphisme local $(z, w) : U \rightarrow V \times \mathbb{C}$, où $V = \pi(U)$ et $\pi(z, w) = z$. La différence $\mathbf{a} - \mathbf{a}_0$ est une section du fibré vectoriel $(\pi|_{\mathcal{D}})_*(K_{\mathcal{X}/S}|_{\mathcal{D}})$ sur S , qui peut être vue comme une section du fibré vectoriel $K_{\mathcal{X}/S}|_{\mathcal{D}}$ sur \mathcal{D} . Avec ce point de vue, quitte à restreindre U , $(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0)|_U$ est donnée par $\phi|_{\mathcal{D}}$, où ϕ est une section sur U de $K_{\mathcal{X}/S}$, donnée par $\phi = \varphi(z, w)dw$. Quitte à restreindre U (en particulier de façon à le rendre contractile), il existe une fonction holomorphe qui ne s'annule pas $h : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ telle que $\varphi = \partial_w h/h$. En restreignant encore U , on trouve une fonction $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\partial_w g = h \cdot \partial_w f$. Le diviseur de branchement de g est alors $\mathcal{D}|_U$ et sa classe de branchement en chaque point de $\mathcal{D}|_U$ est donnée par \mathbf{a} .

En procédant ainsi en chaque point de D_s , en restreignant S à l'intersection des ouverts $\pi(U)$ obtenus, puis en complétant avec un atlas relatif sur $\mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$, on obtient un atlas relatif branché sur $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi)$ de classe de branchement relative \mathbf{a} . \square

Récapitulons les résultats de cette sous-section dans le théorème suivant :

Théorème 4.1.4. *Soit $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi)$ une famille de courbes complexes compactes avec diviseurs de degré n au-dessus de S . L'espace $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$ des classes de branchements de $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi)$, muni de la projection évidente $\lambda : \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}} \rightarrow S$, est un fibré affine sur S dirigé par le fibré vectoriel $(\pi|_{\mathcal{D}})_*(K_{\mathcal{X}/S}|_{\mathcal{D}})$ et dont les sections holomorphes sont les classes de branchement relatives des atlas relatifs branchés sur \mathcal{X} relativement à S de diviseur \mathcal{D} .*

Remarque 4.1.5. La structure de fibré affine de l'espace $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$ est compatible avec les changements de base. Si $\phi : S' \rightarrow S$ est une application holomorphe entre espaces analytiques, on peut considérer la famille de courbes complexes avec diviseurs $(S', \mathcal{X}', \mathcal{D}', \pi') = \phi^*(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi)$, tirée-en-arrière par ϕ de $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi)$. On a alors $\mathcal{A}_{\mathcal{X}'}^{\mathcal{D}'} = \phi^* \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$. En effet, c'est clair d'un point de vue ensembliste, et les tirés-en-arrière de sections holomorphes de $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$ sont bien des sections holomorphes de $\mathcal{A}_{\mathcal{X}'}^{\mathcal{D}'}$ puisque le tiré-en-arrière d'un atlas branché relatif reste un atlas branché relatif.

Remarque 4.1.6. L'espace $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$ est la base d'un atlas branché relatif qui est l'atlas branché universel pour $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi)$ au sens suivant. Soit $(S' = \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}, \mathcal{X}', \mathcal{D}', \pi')$ le tiré-en-arrière de $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi)$ par l'application (24) $\lambda : \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}} \rightarrow S$. L'espace $\mathcal{A}_{\mathcal{X}'}^{\mathcal{D}'}$ est donné par $\mathcal{A}_{\mathcal{X}'}^{\mathcal{D}'} = \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}} \times_S \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$ d'après la remarque 4.1.5. On dispose donc d'une section holomorphe privilégiée de $\lambda' : \mathcal{A}_{\mathcal{X}'}^{\mathcal{D}'} \rightarrow S'$ qui est la section diagonale $\delta : \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}} \times_S \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$. D'après le théorème 4.1.4, la section δ définit un atlas relatif branché (U'_i, f'_i) pour la famille $(S', \mathcal{X}', \mathcal{D}', \pi')$. Si à présent $\phi : S'' \rightarrow S$ est une application holomorphe entre espaces analytiques et (U''_i, f''_i) un atlas relatif branché pour $(S'', \mathcal{X}'', \mathcal{D}'', \pi'') = \phi^*(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi)$, alors il existe une unique application $\phi' : S'' \rightarrow S'$ telle que $\lambda \circ \phi' = \phi$ et l'atlas (U''_i, f''_i) est de même classe de branchement que le tiré-en-arrière par ϕ' de l'atlas (U'_i, f'_i) . En effet l'atlas (U''_i, f''_i) est donné par une section $S'' \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{X}''}^{\mathcal{D}''} = \phi^* \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$, c'est-à-dire une section $\phi' : S'' \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}} = S'$ avec $\lambda \circ \phi' = \phi$. Par définition de l'atlas relatif branché (U'_i, f'_i) , son tiré-en-arrière par ϕ' est bien de même classe de branchement que l'atlas (U''_i, f''_i) . L'unicité de ϕ' est claire.

4.2 Espace des structures projectives branchées associé à une famille de courbes avec diviseurs et classes de branchement

Soit $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi, \mathbf{a})$ une famille de courbes complexes compactes avec diviseurs de degré n et classes de branchement, c'est-à-dire que $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi)$ est une famille de courbes avec diviseurs et $\mathbf{a} : S \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$ est une section holomorphe. Notons pour $s \in S$, $\alpha_s = \mathbf{a}(s)$. Considérons

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}} = \{(s, b) | s \in S, b \in B_{X_s}^{\alpha_s}\} \quad (25)$$

l'ensemble des structures projectives branchées sur l'une des courbes avec diviseur et classe de branchement de la famille $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi, \mathbf{a})$. On dispose d'une application évidente

$$\mu : \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}} \rightarrow S \quad (26)$$

Pour chaque $s \in S$, on a vu que la fibre $\mu^{-1}(s)$ est ou bien vide ou bien un espace affine dirigé par $H^0(X_s, K_{X_s}^{\otimes 2}(-D))$. L'annulation de la classe de cohomologie $c_{X_s}^{\alpha_s} \in H^1(X_s, K_{X_s}^{\otimes 2}(-D))$ permet de discriminer ces deux situations. Les deux éléments déterminants dans l'étude de la structure de $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}$ sont donc la variation avec s de l'espace $H^0(X_s, K_{X_s}^{\otimes 2}(-D))$ et de la classe de cohomologie $c_{X_s}^{\alpha_s}$.

Nous allons nous attarder sur la notion d'atlas projectif branché relatif, qui permet de faire le lien entre les différents espaces $B_{X_s}^{\alpha_s}$ à l'intérieur de $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}$.

Définition 4.2.1. On appelle atlas projectif branché sur \mathcal{X} , relativement à S , de diviseur \mathcal{D} et de classe de branchement relative \mathbf{a} la donnée d'un atlas sur \mathcal{X} , relatif à S de diviseur \mathcal{D} et de classe de branchement relative \mathbf{a} tel que les atlas branchés induits sur les X_s sont des atlas projectifs branchés.

Un tel atlas maximal est appelé structure projective branchée sur \mathcal{X} , relative à S et de classe de branchement relative \mathbf{a} .

Remarque 4.2.2. Si $\pi : \mathcal{X} \rightarrow S$ est une famille de courbes complexes compactes (sans diviseurs ni classes de branchement prescrits), on appelle structure projective branchée sur \mathcal{X} , relativement à S , la donnée d'une structure projective sur \mathcal{X} , relativement à S , de diviseur \mathcal{D} et de classe de branchement relative \mathbf{a} , où \mathcal{D} est un diviseur sur \mathcal{X} qui ne contient aucune fibre de π et \mathbf{a} est une section holomorphe de $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}} \rightarrow S$. On retrouve alors la notion usuelle de structure projective branchée relative.

Lemme 4.2.3. Soit β_0 une structure projective branchée sur \mathcal{X} relativement à S de classe de branchement relative \mathbf{a} .

- (i) Si β est une structure projective branchée sur \mathcal{X} relativement à S de classe de branchement relative \mathbf{a} , alors la différence $\beta - \beta_0$ définit une section holomorphe du fibré vectoriel $K_{\mathcal{X}/S}^{\otimes 2}(-\mathcal{D})$.
- (ii) Si $q : \mathcal{X} \rightarrow K_{\mathcal{X}/S}^{\otimes 2}(-\mathcal{D})$ est une section holomorphe, alors il existe une structure projective β sur \mathcal{X} relative à S et de classe de branchement relative \mathbf{a} telle que $\beta - \beta_0 = q$.

Démonstration. (i) Soit (z, w) une coordonnée locale sur $U \subset \mathcal{X}$ adaptée à la famille localement triviale (S, \mathcal{X}, π) , c'est-à-dire avec $z = \tilde{z} \circ \pi$, où \tilde{z} coordonnée locale sur S . Soit également $\phi_0 : U \rightarrow \mathbb{C}P^1$ une carte locale de β_0 sur U et $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}P^1$ une carte locale de β sur U . La différence $\beta - \beta_0$ est donnée par la différentielle quadratique relative méromorphe $q = ((\partial_w(\partial_w^2 \phi / \partial_w \phi) - 1/2(\partial_w^2 \phi / \partial_w \phi)^2) - (\partial_w(\partial_w^2 \phi_0 / \partial_w \phi_0) - 1/2(\partial_w^2 \phi_0 / \partial_w \phi_0)^2)) dw^{\otimes 2}$. Or β_0 et β définissent en restriction aux fibres de π des structures projectives branchées de même classe de branchement, donc $q|_{X_s}$ est une section holomorphe locale de $K_{X_s}^{\otimes 2}(-D_s)$. On en déduit que la différentielle quadratique q est en fait une section holomorphe locale de $K_{\mathcal{X}/S}^{\otimes 2}(-\mathcal{D})$.

(ii) Soit $x \in \mathcal{X}$, U un voisinage ouvert de x , (U, ϕ_0) une carte de β_0 , et (z, w) une coordonnée sur U adaptée à la famille localement triviale (S, \mathcal{X}, π) . Notons $q|_U = tdw^{\otimes 2}$. Quitte à restreindre U , d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}P^1$ une solution holomorphe de l'équation aux dérivées partielles $\partial_w(\partial_w^2 \phi / \partial_w \phi) - 1/2(\partial_w^2 \phi / \partial_w \phi)^2 = t + (\partial_w(\partial_w^2 \phi_0 / \partial_w \phi_0) - 1/2(\partial_w^2 \phi_0 / \partial_w \phi_0)^2)$. Il résulte du théorème 3.6.1 que ϕ définit sur U une structure projective branchée relative de classe de branchement relative \mathbf{a} . En procédant ainsi au voisinage de chaque point de \mathcal{X} , on obtient un atlas projectif branché sur \mathcal{X} relatif à S de classe de branchement relative \mathbf{a} . Cet atlas définit une structure projective branchée relative β , et on a $\beta - \beta_0 = q$. \square

Notons $BR_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}$ le faisceau des structures projectives branchées sur \mathcal{X} relativement à S et de classe de branchement relative \mathbf{a} : l'espace des sections $\Gamma(U, BR_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}})$ est l'ensemble des structures projectives sur U relatives à $\pi(U)$ de classe de branchement relative $\alpha|_{\pi(U)}$. Le lemme 4.2.3 implique que $BR_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}$ est un faisceau en espaces affines dirigé par le fibré en droites $K_{\mathcal{X}/S}^{\otimes 2}(-\mathcal{D})$. $BR_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}$ est clairement localement non vide. En particulier, il lui est associée une classe de cohomologie $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}} \in H^1(\mathcal{X}, K_{\mathcal{X}/S}^{\otimes 2}(-\mathcal{D}))$ avec $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}} = 0$ si et seulement si $H^0(\mathcal{X}, BR_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}) \neq \emptyset$, c'est-à-dire s'il existe une structure projective branchée sur \mathcal{X} , relative à S et de classe de branchement relative \mathbf{a} .

Observons de plus que la suite spectrale de Leray donne une suite exacte (voir [27]) :

$$H^1\left(S, \pi_* K_{\mathcal{X}/S}^{\otimes 2}(-\mathcal{D})\right) \rightarrow H^1\left(\mathcal{X}, K_{\mathcal{X}/S}^{\otimes 2}(-\mathcal{D})\right) \xrightarrow{\chi} H^0\left(S, R^1 \pi_* K_{\mathcal{X}/S}^{\otimes 2}(-\mathcal{D})\right) \quad (27)$$

Notons $\mathbf{c}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}} = \chi(\mathcal{C}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}})$.

Rappelons à présent la formule de Riemann-Roch pour $K_{X_s}^{\otimes 2}(-D_s)$:

$$h^0(X, K_{X_s}^{\otimes 2}(-D_s)) - h^1(X, K_{X_s}^{\otimes 2}(-D_s)) = 3g - 3 - n \quad (28)$$

Jusqu'à la fin de cette section, nous supposons que $h^0(X, K_{X_s}^{\otimes 2}(-D_s))$, et donc $h^1(X, K_{X_s}^{\otimes 2}(-D_s))$ ne dépend pas de s . Alors les faisceaux $\pi_* K_{\mathcal{X}/S}^{\otimes 2}(-\mathcal{D})$ et $R^1 \pi_* K_{\mathcal{X}/S}^{\otimes 2}(-\mathcal{D})$ sont des fibrés vectoriels, et pour $s \in S$, $\mathbf{c}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}(s) = c_{X_s}^{\alpha_s}$.

Notons $Z_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}} \subset S$ le lieu des zéros de la section $\mathbf{c}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}$. Ainsi, X_s admet une structure projective branchée de diviseur D_s et de classe α_s si et seulement si $s \in Z_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}$. Soit $\iota : Z_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}} \hookrightarrow S$ l'immersion évidente. On a donc

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}} = \{(s, b) | s \in Z_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}, b \in B_{X_s}^{\alpha_s}\} = \iota^* \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}$$

La projection $\mu : \iota^* \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}} \rightarrow Z_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}$ est un fibré affine dirigé par le fibré vectoriel $\pi_* K_{\iota^* \mathcal{X}/Z_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}}^{\otimes 2}(-\mathcal{D}) = \pi_* K_{\mathcal{X}/S}^{\otimes 2}(-\mathcal{D})|_{Z_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}}$, et dont les sections holomorphes locales sont données par les structures projectives branchées sur $\iota^* \mathcal{X} = \pi^{-1}(Z_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}})$ (localement sur $Z_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}$) relativement à $Z_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}$ et de classe de branchement $\iota^* \mathbf{a} = \mathbf{a}|_{Z_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}}$. En effet l'existence de telles structures localement sur $Z_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}$ est donnée par la suite exacte (27) et par le fait que si S est Stein, $H^1(S, \pi_* K_{\mathcal{X}/S}^{\otimes 2}(-\mathcal{D})) = 0$; de plus ces structures relatives définissent bien une structure de fibré affine sur $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}}$ par le lemme 4.2.3. En particulier, l'application $\mu : \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\mathbf{a}} \rightarrow S$ est une application holomorphe.

Soit g le genre des fibres de π et n le degré des diviseurs D_s . D'après la formule de Riemann-Roch, $h^1(X, K_{X_s}^{\otimes 2}(-D_s)) = 0$ pour tout $s \in S$ si $n < 2g - 2$ et $h^0(X, K_{X_s}^{\otimes 2}(-D_s)) = 0$ pour tout $s \in S$ si $n > 4g - 4$.

La discussion précédente donne la proposition suivante.

Proposition 4.2.4. *Soient $n, g \in \mathbb{N}$. Soit $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi, \mathbf{a})$ une famille de courbes complexes de genre g avec diviseurs de degré n et classes de branchement.*

- (i) Si $n < 2g - 2$, l'espace $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\alpha}$ des structures projectives branchées sur l'une des fibres X_s avec diviseur D_s et classe de branchement α_s est un fibré affine sur S dirigé par le fibré vectoriel $\pi_* \left(K_{\mathcal{X}/S}^{\otimes 2}(-\mathcal{D}) \right)$, la fibration étant donnée par l'application évidente $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\alpha} \rightarrow S$.
- (ii) Si $n > 4g - 4$, l'espace $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\alpha}$ est un sous-espace analytique de S , le plongement étant donné par l'application évidente $\mu : \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\alpha} \rightarrow S$.

Remarque 4.2.5. Le tiré-en-arrière d'une structure projective branchée relative par une application holomorphe étant une structure projective branchée relative, la structure complexe de l'espace $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{D}}$ est compatible avec les changements de base, dans un sens analogue à celui de la remarque 4.1.5. L'espace $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\alpha}$ est la base d'une structure projective branchée relative qui est universelle pour la famille $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi, \mathbf{a})$, dans un sens analogue à celui de la remarque 4.1.6.

Remarque 4.2.6. Dans le cas limite $n = 2g - 2$, l'ensemble S_0 points $s \in S$ pour lesquels $h^1(X_s, K_{X_s}^{\otimes 2}) \neq 0$ est constitué des points pour lesquels D_s est un diviseur canonique de X_s . Si $S' = S \setminus S_0$, $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\alpha}|_{S'}$ est muni d'une structure complexe. Il est frappant que selon [14], la condition que le diviseur de branchement soit canonique pour la courbe complexe sous-jacente est nécessaire pour qu'une structure projective branchée soit un point critique de l'application holomorphe $\mathcal{M}_{\lambda, \rho} \rightarrow \mathcal{T}(R)$, où R est une surface différentiable, λ est une partition de $k \leq 2g - 2$, ρ est une représentation de $\pi_1(R)$ dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_{\lambda, \rho}$ est la variété complexe des structures projectives branchées sur R de monodromie ρ et dont les points de branchement sont répartis selon la partition λ . De plus, d'après [14], la condition est suffisante dans le cas où la courbe complexe sous-jacente est hyperelliptique et le diviseur est réduit.

5 Espace universel de déformations des structures projectives branchées marquées sur une surface fermée donnée

Dans cette section, nous fixons une surface réelle lisse R . Rappelons qu'un marquage sur une courbe complexe lisse X est une classe d'homotopie de difféomorphismes $R \xrightarrow{\sim} X$. De même, un marquage sur une famille de courbes complexes $\mathcal{X} \rightarrow S$ est la donnée d'une classe d'homotopie de difféomorphismes $R \times S \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}$ qui respectent la projection π . On a bien sûr des notions de famille marquée de courbes avec diviseurs et classes de branchement, d'atlas relatif marqué, de structure projective branchée (relative) marquée...

Dans cette section nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 5.0.1. *Soit $g \geq 2$ un entier, et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < 2g - 2$ ou $n > 4g - 4$. Il existe une variété complexe (lisse) $\mathcal{B}_g(n)$, de dimension $6g - 6 + n$, qui est un espace universel de déformation pour les structures projectives branchées marquées de degré n sur une courbe de genre g .*

Plus précisément nous allons construire une famille marquée de courbes complexes compactes de genre g notée $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}_g(n)$ ainsi qu'une structure projective branchée relative $\beta_g(n)$ sur \mathcal{X} , de degré n sur chaque fibre, telles que $\beta_g(n)$ est une famille universelle de structures projectives branchées de genre g et de degré n au sens suivant. Si $\mathcal{X}' \rightarrow S$ est une famille marquée de courbes de genre g munie d'une structure projective branchée relative β , alors il existe un unique morphisme $f : S \rightarrow \mathcal{B}_g(n)$ tel que la famille marquée \mathcal{X}' est isomorphe à la tirée-en-arrière par f de \mathcal{X} et la structure projective relative marquée β est isomorphe à la tirée-en-arrière par f de $\beta_g(n)$.

5.1 Stratégie

La stratégie pour construire la variété $\mathcal{B}_g(n)$ est la suivante. Nous commençons par considérer l'espace de Teichmüller pour le genre g , \mathcal{T}_g , qui est l'espace des modules pour les courbes

complexes marquées de genre g . L'espace \mathcal{T}_g vient avec une famille universelle de courbes marquées de genre g , notée $\pi_g : \mathcal{X}_g \rightarrow \mathcal{T}_g$. Notons $\mathcal{T}_g(n) \rightarrow \mathcal{T}_g$ le n -ème produit symétrique relatif de \mathcal{X}_g par rapport à \mathcal{T}_g : La fibre de $\mathcal{T}_g(n)$ au-dessus d'un point $t \in \mathcal{T}_g$ est donnée par le n -ème produit symétrique de la fibre $\pi_g^{-1}(t) = X_{g,t}$ de \mathcal{X}_g au-dessus de t , c'est-à-dire par l'espace des diviseurs de degré n sur $X_{g,t}$. On appellera $\mathcal{T}_g(n)$ l'espace de Teichmüller de genre g avec diviseurs de degré n .

L'espace de Teichmüller avec diviseurs $\mathcal{T}_g(n)$ vient avec une famille de courbes complexes tautologique $\pi_g(n) : \mathcal{X}_g(n) \rightarrow \mathcal{T}_g(n)$ et un diviseur tautologique $\mathcal{D}_g(n)$ dans $\mathcal{X}_g(n)$, tel que la restriction de $\mathcal{D}_g(n)$ à chaque fibre de $\pi_g(n)$ est un diviseur de degré n . La famille de courbes complexes avec diviseur $(\mathcal{T}_g(n), \mathcal{X}_g(n), \mathcal{D}_g(n), \pi_g(n))$ est une famille universelle de déformation d'un couple (X, D) , où X est une courbe complexe compacte marquée de genre g et D un diviseur sur X de degré n .

Suivant la discussion de la sous-section 4.1, nous considérons ensuite la variété définie en (23) $\mathcal{A}_g(n) = \mathcal{A}_{\mathcal{X}_g(n)}^{\mathcal{D}_g(n)}$ des classes de branchements sur les fibres de la famille $(\mathcal{T}_g(n), \mathcal{X}_g(n), \mathcal{D}_g(n), \pi_g(n))$. Soient $\pi'_g(n) : \mathcal{X}'_g(n) \rightarrow \mathcal{A}_g(n)$ et $\mathcal{D}'_g(n)$ les tirés-en-arrière respectifs de $\pi_g(n) : \mathcal{X}_g(n) \rightarrow \mathcal{T}_g(n)$ et $\mathcal{D}_g(n)$ par la projection naturelle (24) $\mathcal{A}_g(n) \rightarrow \mathcal{T}_g(n)$. On dispose d'une classe de branchement relative tautologique $\mathfrak{a}_g(n)$ pour la famille de courbes avec diviseurs $(\mathcal{A}_g(n), \mathcal{X}'_g(n), \mathcal{D}'_g(n), \pi'_g(n))$: pour tout $t \in \mathcal{A}_g(n)$, $\mathfrak{a}_g(n)(t) = t$. Ainsi, on dispose d'une famille de courbes marquées avec diviseurs et classes de branchements $(\mathcal{A}_g(n), \mathcal{X}'_g(n), \mathcal{D}'_g(n), \pi'_g(n), \mathfrak{a}_g(n))$, qui est, selon la remarque 4.1.6, une famille universelle de déformations d'un triplet (X, D, α) où (X, D) est une courbe marquée avec diviseurs et α est une classe de branchement pour (X, D) .

L'espace $\mathcal{B}_g(n)$ est alors obtenu comme l'ensemble $\mathcal{B}_g(n) = \mathcal{B}_{\mathcal{X}'_g(n)}^{\mathfrak{a}_g(n)}$ des structures projectives branchées sur les fibres de de la famille $(\mathcal{A}_g(n), \mathcal{X}'_g(n), \mathcal{D}'_g(n), \pi'_g(n), \mathfrak{a}_g(n))$, défini en (25). La structure projective branchée relative de base $\mathcal{B}_g(n)$ est obtenue en suivant la remarque 4.2.5. Dans le cas où $n < 2g - 2$, la proposition 4.2.4 permet à elle seule d'affirmer que l'espace analytique $\mathcal{B}_g(n)$ est lisse. Ce n'est pas le cas *a priori* si $n > 4g - 4$. Le principal objet de cette section est de montrer que $\mathcal{B}_g(n)$ est lisse dans ce dernier cas. On considère pour cela des déformations infinitésimales localement triviales à la Kodaira-Spencer, comme dans [20].

5.2 Espace universel de déformations d'une courbe avec diviseur

Soit $g \geq 2$ un entier, et soit $\pi_g : \mathcal{X}_g \rightarrow \mathcal{T}_g$ la courbe marquée universelle de genre g , où \mathcal{T}_g est l'espace de Teichmüller de genre g . Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_g(n) : \mathcal{T}_g(n) \rightarrow \mathcal{T}_g$ la puissance symétrique n -ème de \mathcal{X}_g relativement à \mathcal{T}_g . L'espace $\mathcal{T}_g(n)$ est lisse car \mathcal{X}_g et \mathcal{T}_g sont lisses. La famille de courbes $\mathcal{X}_g(n) = \gamma_g(n)^* \mathcal{X}_g = \mathcal{T}_g(n) \times_{\mathcal{T}_g} \mathcal{X}_g$ vient avec une projection $\pi_g(n) : \mathcal{X}_g(n) \rightarrow \mathcal{T}_g(n)$ et admet un diviseur tautologique $\mathcal{D}_g(n)$, avec pour $s \in \mathcal{T}_g(n)$, $\mathcal{D}|_{\pi_g(n)^{-1}(s)} = s$, où un point de la puissance symétrique n -ème d'une courbe est vu comme un diviseur de degré n sur cette courbe.

On a donc une famille de courbes complexes marquées avec diviseurs de degré n , notée $(\mathcal{T}_g(n), \mathcal{X}_g(n), \mathcal{D}_g(n), \pi_g(n))$, qui est universelle au sens du lemme suivant :

Lemme 5.2.1. *Soit $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi)$ une famille de courbes complexes marquées avec diviseurs. Il existe un unique morphisme $f : S \rightarrow \mathcal{T}_g(n)$ tel que $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi) = f^*(\mathcal{T}_g(n), \mathcal{X}_g(n), \mathcal{D}_g(n), \pi_g(n))$.*

Démonstration. La famille de courbes marquées (S, \mathcal{X}, π) est déterminée par un unique morphisme $f_0 : S \rightarrow \mathcal{T}_g$, telle que $(S, \mathcal{X}, \pi) = f_0^*(\mathcal{T}_g, \mathcal{X}_g, \pi_g)$. La donnée du diviseur de Cartier \mathcal{D} sur \mathcal{X} dont la réduction à chaque fibre de π est un diviseur de degré n équivaut à la donnée d'une n -multisection de π , c'est-à-dire d'une section δ du produit symétrique relatif $\text{Sym}_S^n \mathcal{X} = f_0^* \text{Sym}_{\mathcal{T}_g}^n \mathcal{X}_g$ (pour plus de détails sur les multigraphes, on peut voir [2]). En com-

posant δ avec $\gamma_g(n)^* f_0$, on obtient la section souhaitée $f : S \rightarrow \text{Sym}_{\mathcal{T}_g}^n \mathcal{X}_g = \mathcal{T}_g(n)$. L'unicité de f découle des unicités de f_0 et δ . \square

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une partition de n est une suite finie ordonnée $(k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_r)$ d'entiers strictement positifs avec $k_1 + \dots + k_r = n$. Notons $\text{Part}(n)$ l'ensemble des partitions de l'entier n . Soit $(X, D, m) \in \mathcal{T}_g(n) : X$ est une surface de Riemann, m est un marquage sur X , et D est un diviseur de degré n sur X . Le diviseur D s'écrit $D = k_1 \cdot x_1 + \dots + k_r \cdot x_r$ avec $k_i \in \mathbb{N}^*$, $x_i \in X$ et $k_1 + \dots + k_r = n$. Si l'on suppose de plus les x_i deux à deux distincts et les k_i ordonnés, on obtient une partition (k_1, \dots, k_r) de l'entier n , uniquement déterminée par le diviseur D .

On dispose donc d'une application $\varpi : \mathcal{T}_g(n) \rightarrow \text{Part}(n)$. Pour toute partition $\kappa = (k_1, \dots, k_r)$ de n , il découle de la structure des puissances symétriques d'une courbe complexe lisse (voir [2]) que $\varpi^{-1}(\kappa)$ est un sous-espace analytique lisse de $\mathcal{T}_g(n)$, de dimension $3g - 3 + r$. On note $\mathcal{T}_g(\kappa) = \varpi^{-1}(\kappa)$ cet espace, et $(\mathcal{T}_g(\kappa), \mathcal{X}_g(\kappa), \mathcal{D}_g(\kappa), \pi_g(\kappa))$ la restriction de la famille $\mathcal{X}_g(n)$ à $\mathcal{T}_g(\kappa)$. Notons également $\gamma_g(\kappa) : \mathcal{T}_g(\kappa) \rightarrow \mathcal{T}_g$ la submersion "oubli", restriction de $\gamma_g(n)$. Enfin, on note $\text{Sym}_\kappa(X)$ la sous-variété de $\text{Sym}^n(X)$ contenant les diviseurs correspondant à la partition κ .

Intéressons-nous à présent à l'espace $\mathcal{T}_g(\kappa)$ du point de vue des déformations infinitésimales des courbes marquées avec diviseur. Soit $(X, D, m) \in \mathcal{T}_g(\kappa)$ une courbe complexe lisse marquée avec diviseur (m désigne le marquage de X). On dispose d'une première suite exacte :

$$0 \rightarrow (T_{\text{Sym}_\kappa(X)})_D \rightarrow (T_{\mathcal{T}_g(\kappa)})_{(X,D,m)} \rightarrow (T_{\mathcal{T}_g})_{(X,m)} \rightarrow 0 \quad (29)$$

et d'une autre, en notant D^{red} le diviseur réduit sur X qui a le même support que D :

$$0 \rightarrow T_X(-D^{\text{red}}) \rightarrow T_X \rightarrow T_X|_{D^{\text{red}}} \rightarrow 0 \quad (30)$$

Dont on déduit en cohomologie :

$$0 \rightarrow H^0(X, T_X|_{D^{\text{red}}}) \rightarrow H^1(X, T_X(-D^{\text{red}})) \rightarrow H^1(X, T_X) \rightarrow 0 \quad (31)$$

On dispose d'un isomorphisme évident $\iota : (T_{\text{Sym}_\kappa(X)})_D \xrightarrow{\sim} H^0(X, T_X|_{D^{\text{red}}})$. On dispose aussi d'un isomorphisme $KS : (T_{\mathcal{T}_g})_{(X,m)} \xrightarrow{\sim} H^1(X, T_X)$, appelé isomorphisme de Kodaira-Spencer, dont nous allons rappeler la construction.

Considérons la suite exacte $0 \rightarrow T_{\mathcal{X}_g/\mathcal{T}_g} \rightarrow T_{\mathcal{X}_g} \xrightarrow{d\pi_g} \pi_g^* T_{\mathcal{T}_g} \rightarrow 0$. Elle donne en appliquant le foncteur exact à gauche π_{g*} un morphisme de fibrés vectoriels $T_{\mathcal{T}_g} \rightarrow R^1 \pi_{g*} T_{\mathcal{X}_g/\mathcal{T}_g}$ qui est un isomorphisme par propriété de l'espace de Teichmüller (voir par exemple [11]). L'application KS est l'isomorphisme précédent restreint à la fibre au-dessus de (X, m) (comme π_g est à fibres compactes, $\pi_{g*} \pi_g^* T_{\mathcal{T}_g} = T_{\mathcal{T}_g}$).

Notons $\mathcal{D}_g(\kappa)$ la restriction du diviseur $\mathcal{D}_g(n)$ à la variété $\mathcal{X}_g(\kappa)$. On s'est restreint aux courbes avec diviseurs correspondant à la partition κ de sorte que le diviseur réduit associé à $\mathcal{D}_g(\kappa)$, noté $\mathcal{D}_g(\kappa)^{\text{red}}$, est une variété complexe lisse, transverse aux fibres de $\pi_g(\kappa)$. On peut donc écrire la suite exacte de Kodaira-Spencer en se restreignant aux champs de vecteurs sur $\mathcal{X}_g(\kappa)$ tangents à $\mathcal{D}_g(\kappa)^{\text{red}}$:

$$0 \rightarrow T_{\mathcal{X}_g(\kappa)/\mathcal{T}_g(\kappa)}(-\mathcal{D}_g(\kappa)^{\text{red}}) \rightarrow T_{\mathcal{X}_g(\kappa)}(-\log \mathcal{D}_g(\kappa)^{\text{red}}) \xrightarrow{d\pi_g(\kappa)} \pi_g(\kappa)^* T_{\mathcal{T}_g(\kappa)} \rightarrow 0 \quad (32)$$

Rappelons que $T_{\mathcal{X}_g(\kappa)}(-\log \mathcal{D}_g(\kappa)^{\text{red}})$ est le faisceau des champs de vecteurs sur \mathcal{X} tangents à $\mathcal{D}_g(\kappa)^{\text{red}}$. Remarquons que le fait que dans le diagramme ci-dessus la flèche $d\pi_g(\kappa)$ soit surjective est une conséquence du fait que $\mathcal{D}_g(\kappa)^{\text{red}}$ est une variété lisse et transverse aux fibres de $d\pi_g(\kappa)$. En appliquant le foncteur exact à gauche $\pi_g(\kappa)_*$, on obtient entre autres un morphisme de fibrés vectoriels $T_{\mathcal{T}_g(\kappa)} \rightarrow R^1 \pi_{g*} T_{\mathcal{X}_g(\kappa)/\mathcal{T}_g(\kappa)}(-\mathcal{D}_g(\kappa)^{\text{red}})$. En regardant ce morphisme au point (X, D, m) , on obtient une application linéaire

$$KS' : (T_{\mathcal{T}_g(\kappa)})_{(X,D,m)} \rightarrow H^1(X, T_X(-D^{\text{red}})) \quad (33)$$

On se convainc aisément que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (T_{\text{Sym}_\kappa(X)})_D & \longrightarrow & (T_{\mathcal{T}_g(\kappa)})_{(X,D,m)} & \longrightarrow & (T_{\mathcal{T}_g})_{(X,m)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \iota & & \downarrow KS' & & \downarrow KS \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X, T_X|_{D^{\text{red}}}) & \longrightarrow & H^1(X, T_X(-D^{\text{red}})) & \longrightarrow & H^1(X, T_X) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (34)$$

On en déduit le lemme suivant :

Lemme 5.2.2. *L'application KS' en (33) est un isomorphisme.*

5.3 Espace universel des courbes marquées avec diviseur et classe de branchement

Soit X une surface de Riemann, D un diviseur sur X et $\alpha \in A_X^D$ une classe de branchement. Soit U un ouvert de X et soit $V \in \Gamma(U, T_X(-D^{\text{red}}))$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ proche de 0, on note ϕ_V^t le flot au temps t de V . On pose

$$\chi_\alpha(V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_V^t)^* \alpha - \alpha}{t} \in \Gamma(U, K_X|_D)$$

où le tiré-en-arrière des classes de branchement est le tiré-en-arrière des jets d'applications holomorphes (donc le tiré-en-arrière des applications holomorphes).

Soit ζ une fonction holomorphe non constante sur U , dont les jets aux points de $D|_U$ fournissent un représentant pour la classe de branchement $\alpha|_U$. Notons $V = f(\zeta)\partial_\zeta$, où f est une fonction holomorphe multiforme à $1 + \deg(D|_U)$ déterminations sur $\zeta(U) \subset \mathbb{C}$. Un calcul montre que $\chi_\alpha(V) = f''(\zeta)d\zeta$. On en déduit que si $D|_U = nx$ avec $x \in U$ et z est une coordonnée centrée en x telle que $\zeta = z^{n+1}$, alors si $V = (a_1z + a_2z^2 + \dots)\partial_z$, la section $\chi_\alpha(V) \in \Gamma(U, K_X|_D)$ s'écrit dans la coordonnée z :

$$\chi_\alpha(V) = ((n+2)a_2 + 2(n+3)a_3z + 3(n+4)a_4z^2 + \dots + n(2n+1)a_{n+1}z^{n-1}) dz \quad (35)$$

En particulier, le morphisme de faisceaux $\chi_\alpha : T_X(-D^{\text{red}}) \rightarrow K_X|_D$ est surjectif. En notant Γ_α son noyau, on obtient une suite exacte :

$$0 \rightarrow \Gamma_\alpha \rightarrow T_X(-D^{\text{red}}) \xrightarrow{\chi_\alpha} K_X|_D \rightarrow 0 \quad (36)$$

qui donne en cohomologie une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(X, K_X|_D) \rightarrow H^1(X, \Gamma_\alpha) \rightarrow H^1(X, T_X(-D^{\text{red}})) \rightarrow 0 \quad (37)$$

Soit $\mathcal{A}_g(n) = \mathcal{A}_{\mathcal{X}'_g(n)}^{\mathcal{D}_g(n)}$ l'espace des classes de branchement sur les fibres de la famille $(\mathcal{T}_g(n), \mathcal{X}_g(n), \mathcal{D}_g(n), \pi_g(n))$, et $\lambda_g(n) : \mathcal{A}_g(n) \rightarrow \mathcal{T}_g(n)$ la surjection naturelle. D'après le théorème 4.1.4, $\lambda_g(n)$ est un fibré affine. Soit $(\mathcal{A}'_g(n), \mathcal{X}'_g(n), \mathcal{D}'_g(n), \pi'_g(n))$ la famille tirée-en-arrière de la famille $(\mathcal{T}_g(n), \mathcal{X}_g(n), \mathcal{D}_g(n), \pi_g(n))$ par $\lambda_g(n)$, qui vient avec un atlas branché relatif tautologique, noté $\mathfrak{a}_g(n)$, donné en chaque point de la base $\alpha \in \mathcal{A}_g(n)$ par l'atlas branché α .

On dispose ainsi d'une famille marquée de courbes compactes avec diviseurs et classes de branchement $(\mathcal{A}_g(n), \mathcal{X}'_g(n), \mathcal{D}'_g(n), \pi'_g(n), \mathfrak{a}_g(n))$, qui est universelle au sens du lemme suivant.

Lemme 5.3.1. *Soit $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi, \mathbf{a})$ une famille marquée de courbes complexes avec diviseurs et classes de branchement. Il existe un unique morphisme $f : S \rightarrow \mathcal{A}_g(n)$ tel que $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi, \mathbf{a}) = f^* (\mathcal{A}_g(n), \mathcal{X}'_g(n), \mathcal{D}'_g(n), \pi'_g(n), \mathbf{a}_g(n))$.*

Démonstration. D'après le lemme 5.2.1, il existe un unique morphisme $f_1 : S \rightarrow \mathcal{T}_g(n)$ tel qu'on ait l'égalité de familles de courbes avec diviseurs $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi) = f_1^* (\mathcal{T}_g(n), \mathcal{X}_g(n), \mathcal{D}_g(n), \pi_g(n))$. D'après la remarque 4.1.6, il existe un unique morphisme $f : S \rightarrow \mathcal{A}_g(n)$ tel que $f_1 = \lambda_g(n) \circ f$ et $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi, \mathbf{a}) = f^* (\mathcal{A}_g(n), \mathcal{X}'_g(n), \mathcal{D}'_g(n), \pi'_g(n), \mathbf{a}_g(n))$ \square

Pour toute partition κ de l'entier n , on note $\mathcal{A}_g(\kappa)$ la restriction du fibré $\mathcal{A}_g(n) \rightarrow \mathcal{T}_g(n)$ à la base $\mathcal{T}_g(\kappa) \subset \mathcal{T}_g(n)$. Soit $(\mathcal{A}_g(\kappa), \mathcal{X}'_g(\kappa), \mathcal{D}'_g(\kappa), \pi'_g(\kappa), \mathbf{a}_g(\kappa))$ la famille tirée-en-arrière de $(\mathcal{A}_g(n), \mathcal{X}'_g(n), \mathcal{D}'_g(n), \pi'_g(n), \mathbf{a}_g(n))$ par l'inclusion $\mathcal{A}_g(\kappa) \rightarrow \mathcal{A}_g(n)$. On note $\lambda_g(\kappa)$ la restriction de $\lambda_g(n)$ à $\mathcal{A}_g(\kappa)$.

Soit $(X, D, \alpha, m) \in \mathcal{A}_g(n)$ une courbe marquée avec diviseur de degré n et classe de branchement. Soit κ la partition de n correspondant au diviseur D . La proposition 3.6.7 implique que l'espace tangent à la fibre $\lambda_g(\kappa)^{-1}(X, D, m)$ en (X, D, α, m) est $(T_{\lambda_g(\kappa)^{-1}(X, D, m)})_{(X, D, \alpha, m)} = H^0(X, K_X|_D)$. De plus on a vu à la sous-section 5.2 qu'on a un isomorphisme de Kodaira-Spencer $KS' : (T_{\mathcal{T}_g(\kappa)})_{(X, D, m)} \xrightarrow{\sim} H^1(X, T_X(-D^{\text{red}}))$. On a donc, similairement à la sous-section 5.2 des identifications entre les noyaux et conoyaux des suites exactes courtes (37) et

$$0 \rightarrow (T_{\lambda_g(\kappa)^{-1}(X, D, m)})_{(X, D, \alpha, m)} \rightarrow (T_{\mathcal{A}_g(\kappa)})_{(X, D, \alpha, m)} \rightarrow (T_{\mathcal{T}_g(\kappa)})_{(X, D, m)} \rightarrow 0 \quad (38)$$

Soit \mathcal{F} (respectivement \mathcal{F}^{rel}) le sous-faisceau de $\mathcal{T}_{\mathcal{X}'_g(\kappa)}$ (respectivement $\mathcal{T}_{\mathcal{X}'_g(\kappa)/\mathcal{A}_g(n)}$) constitué des champs de vecteurs qui préservent l'atlas branché relatif $\mathbf{a}_g(n)$. La suite exacte de Kodaira-Spencer pour la famille $\mathcal{X}'_g(\kappa)$ s'écrit, en restriction aux champs de vecteurs qui préservent $\mathbf{a}_g(n)$:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^{\text{rel}} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \pi'_g(\kappa)^* T_{\mathcal{A}_g(\kappa)} \rightarrow 0 \quad (39)$$

En appliquant le foncteur exact à gauche $\pi'_g(\kappa)_*$, on obtient entre autres un morphisme de faisceaux $T_{\mathcal{A}_g(\kappa)} \rightarrow R^1 \pi'_g(\kappa)_* \mathcal{F}^{\text{rel}}$. En regardant ce morphisme au point (X, D, α, m) , on obtient une application linéaire

$$KS'' : (T_{\mathcal{A}_g(\kappa)})_{(X, D, \alpha, m)} \rightarrow H^1(X, \Gamma_\alpha) \quad (40)$$

On se convainc aisément que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (T_{\lambda_g(\kappa)^{-1}(X, D, m)})_{(X, D, \alpha, m)} & \longrightarrow & (T_{\mathcal{A}_g(n)})_{(X, D, \alpha, m)} & \longrightarrow & (T_{\mathcal{T}_g(\kappa)})_{(X, D, m)} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow KS'' & & \downarrow KS' \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X, K_X|_D) & \longrightarrow & H^1(X, \Gamma_\alpha) & \longrightarrow & H^1(X, T_X(-D^{\text{red}})) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (41)$$

Comme KS' est un isomorphisme, on en déduit le lemme suivant :

Lemme 5.3.2. *L'application KS'' en (40) est un isomorphisme.*

5.4 Espace universel des structures projectives branchées marquées

Soit X une surface de Riemann, D un diviseur sur X , $\alpha \in A_X^D$ une classe de branchement et $p \in B_X^\alpha$ une structure projective branchée. De même qu'à la sous-section 5.3, soit U un ouvert de X et soit $V \in \Gamma(U, \Gamma_\alpha)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ proche de 0, on note toujours ϕ_V^t le flot au temps t

de V . Remarquons que $V \in \Gamma_\alpha$ signifie que pour tout t proche de 0 on a $(\phi_V^t)^* \alpha - \alpha = 0$. On pose

$$\xi_p(V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_V^t)^* p - p}{t} \in \Gamma(U, K_X^{\otimes 2}(-D))$$

Soit ζ une carte sur U de la structure projective branchée p . Notons $V = f(\zeta)\partial_\zeta$, où f est un fonction holomorphe multiforme à $\deg(D|_U)$ déterminations sur U . Un calcul montre que $\xi_p(V) = f'''(\zeta)d\zeta^{\otimes 2}$. Supposons $D|_U = nx$ avec $x \in U$ et z une coordonnée centrée en x telle que $\zeta = z^{n+1}$. Notons $V = (a_1z + a_2z^2 + \dots)\partial_z$. On a alors

$$\xi_p(V) = \left(\sum_{k \geq 1} k(k+n+1)(k-(n+1))a_{k+1}z^{k-2} \right) dz^{\otimes 2}$$

D'après l'équation 35, V est une section de Γ_α si et seulement si $a_2 = a_3 = \dots = a_{n+1} = 0$. Par conséquent, on a

$$\xi_p(V) = \left(\sum_{l \geq n} (l+2)(l+n+3)(l-n+1)a_{l+3}z^l \right) dz^{\otimes 2} \quad (42)$$

Comme pour tout $l \geq n$, $(l+2)(l+n+3)(l-n+1) \neq 0$, le morphisme de faisceaux $\xi_p : \Gamma_\alpha \rightarrow K_X^{\otimes 2}(-D)$ est surjectif. En notant Λ_p son noyau, on obtient une suite exacte :

$$0 \rightarrow \Lambda_p \rightarrow \Gamma_\alpha \xrightarrow{\xi_p} K_X^{\otimes 2}(-D) \rightarrow 0 \quad (43)$$

qui donne en cohomologie une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(X, K_X^{\otimes 2}(-D)) \rightarrow H^1(X, \Lambda_p) \rightarrow H^1(X, \Gamma_\alpha) \rightarrow H^1(X, K_X^{\otimes 2}(-D)) \rightarrow 0 \quad (44)$$

Soit, comme en (25), $\mathcal{B}_g(n) = \mathcal{B}_{\mathcal{X}'_g(n)}^{\mathfrak{a}_g(n)}$ l'ensemble des structures projectives branchées sur les fibres de $\mathcal{X}'_g(n)$ dont les classes de branchement sont données par $\mathfrak{a}_g(n)$. Soit $\mu_g(n) : \mathcal{B}_g(n) \rightarrow \mathcal{A}_g(n)$ l'application canonique (26).

Si $n < 2g - 2$ ou $n > 4g - 4$, l'espace $\mathcal{B}_g(n)$ est un espace analytique d'après la proposition 4.2.4. Dans ce cas, notons $(\mathcal{B}_g(n), \mathcal{X}''_g(n), \mathcal{D}''_g(n), \pi''_g(n), \mathfrak{a}''_g(n))$ la famille tirée-en-arrière par $\mu_g(n)$ de la famille $(\mathcal{A}_g(n), \mathcal{X}'_g(n), \mathcal{D}'_g(n), \pi'_g(n), \mathfrak{a}_g(n))$.

D'après la remarque 4.2.5, la famille $(\mathcal{B}_g(n), \mathcal{X}''_g(n), \mathcal{D}''_g(n), \pi''_g(n), \mathfrak{a}''_g(n))$ admet une structure projective branchée relative tautologique $\mathfrak{p}_g(n)$, qui est universelle au sens du lemme suivant :

Lemme 5.4.1. *Supposons $n < 2g - 2$ ou $n > 4g - 4$. Soit $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi, \mathfrak{a})$ une famille marquée de courbes complexes avec diviseurs et classes de branchement, munie d'une structure projective branchée relative \mathfrak{p} . Il existe un unique morphisme $f : S \rightarrow \mathcal{B}_g(n)$ tel que $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi, \mathfrak{a}) = f^*(\mathcal{B}_g(n), \mathcal{X}''_g(n), \mathcal{D}''_g(n), \pi''_g(n), \mathfrak{a}''_g(n))$ et $\mathfrak{p} = f^*\mathfrak{p}_g(n)$.*

Démonstration. D'après le lemme 5.3.1, il existe un unique morphisme $f_1 : S \rightarrow \mathcal{A}_g(n)$ tel que $(S, \mathcal{X}, \mathcal{D}, \pi, \mathfrak{a}) = f^*(\mathcal{A}_g(n), \mathcal{X}'_g(n), \mathcal{D}'_g(n), \pi'_g(n), \mathfrak{a}_g(n))$. D'après la remarque 4.2.5 et par définition de $\mathfrak{p}_g(n)$, il existe un unique morphisme $f : S \rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{A}_g(n)}^{\mathfrak{a}_g(n)} = \mathcal{B}_g(n)$ tel que $\mathfrak{p} = f^*\mathfrak{p}_g(n)$ et $\mu_g(n) \circ f = f_1$. \square

Notons également $\mathfrak{c}_g(n) = \mathfrak{c}_{\mathcal{X}'_g(n)}^{\mathfrak{a}_g(n)}$ la section globale définie en (27) du fibré sur $\mathcal{A}_g(n)$ dont la fibre au-dessus de (X, D, α, m) est $H^1(X, K_X^{\otimes 2}(-D))$. Si $(X, D, \alpha, m) \in \mu_g(n)(\mathcal{B}_g(n))$, on a $\mathfrak{c}_g(n)(X, D, \alpha, m) = 0$. Dans ce cas, la différentielle $(d\mathfrak{c}_g(n))_{(X, D, \alpha, m)}$ est une application linéaire de $(T_{\mathcal{A}_g(n)})_{(X, D, \alpha, m)}$ dans $H^1(X, K_X^{\otimes 2}(-D))$

Le théorème 5.0.1 est découlé de la proposition suivante :

Proposition 5.4.2. *Dans le cas où $n < 2g - 2$ ou $n > 4g - 4$, l'espace analytique $\mathcal{B}_g(n)$ est lisse.*

Démonstration. Dans le cas où $n < 2g - 2$, d'après la proposition 4.2.4, $\mathcal{B}_g(n)$ est un fibré affine au-dessus de la variété lisse $\mathcal{A}_g(n)$, et est donc lisse. Le cas où $n > 4g - 4$ est plus délicat, et justifie notre intérêt pour la théorie de la déformation de Kodaira-Spencer. On suppose donc dans la suite de la preuve $g > 4g - 4$, de sorte que l'espace $\mathcal{B}_g(n) \subset \mathcal{A}_g(n)$ est donné par les zéros de la section $\mathbf{c}_g(n)$ d'après proposition 4.2.4. On va montrer qu'en tout point (X, D, α, m) de $\mathcal{B}_g(n)$, la différentielle de $\mathbf{c}_g(n)$, vue comme application linéaire de $(T_{\mathcal{A}_g(n)})_{(X, D, \alpha, m)}$ dans $H^1(X, K_X^{\otimes 2}(-D))$, est surjective. Cela implique que $\mathcal{B}_g(n)$ est lisse.

Pour toute partition κ de l'entier n , on note $\mathcal{B}_g(\kappa)$ la restriction du fibré $\mathcal{B}_g(n) \rightarrow \mathcal{A}_g(n)$ à la base $\mathcal{A}_g(\kappa) \subset \mathcal{A}_g(n)$. Soit $(\mathcal{B}_g(\kappa), \mathcal{X}_g''(\kappa), \mathcal{D}_g''(\kappa), \pi_g''(\kappa), \mathbf{a}_g''(\kappa))$ la famille tirée-en-arrière de $(\mathcal{B}_g(n), \mathcal{X}_g''(n), \mathcal{D}_g''(n), \pi_g''(n), \mathbf{a}_g''(n))$ par l'inclusion $\mathcal{B}_g(\kappa) \rightarrow \mathcal{B}_g(n)$. On note $\mu_g(\kappa)$ la restriction de $\mu_g(n)$ à $\mathcal{B}_g(\kappa)$.

Soit $(X, D, \alpha, p, m) \in \mathcal{A}_g(n)$ une courbe marquée avec diviseur de degré n , classe de branchement et structure projective branchée. Soit κ la partition de n correspondant au diviseur D . La proposition 3.4.5, implique que l'espace tangent à la fibre $\mu_g(\kappa)^{-1}(X, D, \alpha, m)$ en (X, D, α, p, m) est $(T_{\mu_g(\kappa)^{-1}(X, D, \alpha, m)})_{(X, D, \alpha, p, m)} = H^0(X, K_X^{\otimes 2}(-D))$. De plus on a vu à la sous-section 5.3 qu'on a un isomorphisme de Kodaira-Spencer $KS'' : (T_{\mathcal{A}_g(\kappa)})_{(X, D, \alpha, m)} \xrightarrow{\sim} H^1(X, \Gamma_\alpha)$. On a donc, similairement à la sous-section 5.2 des identifications entre les premiers et troisièmes termes des suites exactes (44) et

$$0 \rightarrow (T_{\mu_g(\kappa)^{-1}(X, D, \alpha, m)})_{(X, D, \alpha, m)} \rightarrow (T_{\mathcal{B}_g(\kappa)})_{(X, D, \alpha, p, m)} \rightarrow (T_{\mathcal{A}_g(\kappa)})_{(X, D, \alpha, m)} \xrightarrow{(d\mathbf{c}_g(\kappa))_{(X, D, \alpha, m)}} H^1(X, K_X^{\otimes 2}(-D)) \rightarrow 0 \quad (45)$$

Soit \mathcal{G} (respectivement \mathcal{G}^{rel}) le sous-faisceau de \mathcal{F} (respectivement \mathcal{F}^{rel}) constitué des champs de vecteurs qui préservent la structure projective branchée relative $\mathfrak{p}_g(n)$. La suite exacte de Kodaira-Spencer pour la famille $\mathcal{X}_g''(\kappa)$ s'écrit, en restriction aux champs de vecteurs qui préservent $\mathfrak{p}_g(n)$:

$$0 \rightarrow \mathcal{G}^{\text{rel}} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \pi_g''(\kappa)^* T_{\mathcal{B}_g(\kappa)} \rightarrow 0 \quad (46)$$

En appliquant le foncteur exact à gauche $\pi_g''(\kappa)_*$, on obtient entre autres un morphisme de faisceaux $T_{\mathcal{B}_g(\kappa)} \rightarrow R^1 \pi_g''(\kappa)_* \mathcal{G}^{\text{rel}}$. En regardant ce morphisme au point (X, D, α, p, m) , on obtient une application linéaire

$$KS''' : (T_{\mathcal{B}_g(\kappa)})_{(X, D, \alpha, p, m)} \rightarrow H^1(X, \Lambda_p) \quad (47)$$

On se convainc aisément que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (T_{\mathcal{B}_g(n)})_{(X, D, \alpha, p, m)} & \longrightarrow & (T_{\mathcal{A}_g(n)})_{(X, D, \alpha, m)} & \xrightarrow{(d\mathbf{c}_g(\kappa))_{(X, D, \alpha, m)}} & H^1(X, K_X^{\otimes 2}(-D)) \\ & & \downarrow KS''' & & \downarrow KS'' & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & H^1(X, \Lambda_p) & \longrightarrow & H^1(X, \Gamma_\alpha) & \longrightarrow & H^1(X, K_X^{\otimes 2}(-D)) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (48)$$

Comme KS'' est un isomorphisme, on en déduit le lemme suivant :

Lemme 5.4.3. *L'application KS''' en (47) est un isomorphisme. De plus la différentielle $d\mathbf{c}_g(\kappa)$ est surjective en tout point de $\mathcal{A}_g(\kappa)$.*

Comme la différentielle $d\mathbf{c}_g(\kappa)$, qui est la restriction de $d\mathbf{c}_g(n)$, est surjective, *a fortiori* la différentielle $d\mathbf{c}_g(n)$ est surjective en tout point de $\mathcal{A}_g(n)$. Cela implique que le sous-espace analytique $\mathcal{B}_g(n) \subset \mathcal{A}_g(n)$, donné par les zéros de $\mathbf{c}_g(n)$, est lisse. □

Références

- [1] Charles Gregory Anderson. *Projective structures on Riemann surfaces and developing maps to $H(3)$ and $CP(n)$* . ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1998. Thesis (Ph.D.)—University of California, Berkeley.
- [2] Daniel Barlet and Jón Magnússon. *Cycles analytiques complexes. I. Théorèmes de préparation des cycles*, volume 22 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2014.
- [3] Lipman Bers. Simultaneous uniformization. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66 :94–97, 1960.
- [4] Indranil Biswas and Sorin Dumitrescu. Branched projective structures, branched $SO(3, \mathbb{C})$ -opers and logarithmic connections on jet bundle. *Geom. Dedicata*, 215 :191–227, 2021.
- [5] Gabriel Calsamiglia, Bertrand Deroin, and Stefano Francaviglia. Branched projective structures with Fuchsian holonomy. *Geom. Topol.*, 18(1) :379–446, 2014.
- [6] Henri Paul de Saint-Gervais. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. ENS Éditions, Lyon, 2010. Retour sur un théorème centenaire. [A look back at a 100-year-old theorem], The name of Henri Paul de Saint-Gervais covers a group composed of fifteen mathematicians : Aurélien Alvarez, Christophe Bavard, François Béguin, Nicolas Bergeron, Maxime Bourrigan, Bertrand Deroin, Sorin Dumitrescu, Charles Frances, Étienne Ghys, Antonin Guilloux, Frank Loray, Patrick Popescu-Pampu, Pierre Py, Bruno Sévenec, and Jean-Claude Sikorav.
- [7] Pierre Deligne. *Équations différentielles à points singuliers réguliers*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [8] Bertrand Deroin and Adolfo Guillot. *Foliated affine and projective structures*, 2021.
- [9] David Dumas. Complex projective structures. In *Handbook of Teichmüller theory. Vol. II*, volume 13 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 455–508. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [10] Sorin Dumitrescu. Sur l’uniformisation locale et globale des structures géométriques holomorphes rigides. In *Complex manifolds, foliations and uniformization*, volume 34/35 of *Panor. Synthèses*, pages 53–99. Soc. Math. France, Paris, 2011.
- [11] Clifford J. Earle and James Eells. A fibre bundle description of Teichmüller theory. *J. Differential Geometry*, 3 :19–43, 1969.
- [12] Charles Ehresmann. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 1*, pages Exp. No. 24, 153–168. Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [13] Thomas Le Fils. *Holonomy of complex projective structures on surfaces with prescribed branch data*, 2021.
- [14] Stefano Francaviglia and Lorenzo Ruffoni. Local deformations of branched projective structures : Schiffer variations and the Teichmüller map. *Geom. Dedicata*, 214 :21–48, 2021.
- [15] Daniel Gallo, Michael Kapovich, and Albert Marden. The monodromy groups of Schwarzian equations on closed Riemann surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 151(2) :625–704, 2000.

- [16] Alexander Grothendieck. Techniques de construction en géométrie analytique. VI. étude locale des morphismes : germes d'espaces analytiques, platitude, morphismes simples. *Séminaire Henri Cartan*, 13(1), 1960-1961. talk :13.
- [17] Alexander Grothendieck. Techniques de construction en géométrie analytique. X. Construction de l'espace de Teichmüller. *Séminaire Henri Cartan*, 13(2), 1960-1961. talk :17.
- [18] R. C. Gunning. *Lectures on Riemann surfaces*. Princeton Mathematical Notes. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1966.
- [19] Dennis A. Hejhal. Monodromy groups and Poincaré series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(3) :339–376, 1978.
- [20] John H. Hubbard. The monodromy of projective structures. In *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, volume 97 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 257–275. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.
- [21] Shoshichi Kobayashi. *Transformation groups in differential geometry*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1972 edition.
- [22] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [23] Frank Loray and David Marín Pérez. Projective structures and projective bundles over compact Riemann surfaces. *Astérisque*, (323) :223–252, 2009.
- [24] Brice Loustau. The complex symplectic geometry of the deformation space of complex projective structures. *Geom. Topol.*, 19(3) :1737–1775, 2015.
- [25] Richard Mandelbaum. Branched structures on Riemann surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 163 :261–275, 1972.
- [26] Zhao Shengyuan. A note on holomorphic families of complex projective structures. 2021.
- [27] Claire Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, volume 10 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2002.