



**HAL**  
open science

## Analyse de stabilité pour un système soumis à des saturations et avec des dynamiques négligées

Giorgio Valmorbida, Sophie Tarbouriech, Germain Garcia

### ► To cite this version:

Giorgio Valmorbida, Sophie Tarbouriech, Germain Garcia. Analyse de stabilité pour un système soumis à des saturations et avec des dynamiques négligées. *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, 2009, 43 (1-2), pp.1-24. hal-03685145

**HAL Id: hal-03685145**

**<https://hal.science/hal-03685145v1>**

Submitted on 1 Jun 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Analyse de stabilité pour un système soumis à des saturations et avec des dynamiques négligées

**Giórgio VALMÓRBIDA — Sophie TARBOURIECH — Germain GARCIA**

*LAAS-CNRS, Université de Toulouse, 7 avenue du Colonel Roche  
31077 Toulouse cedex 4, France  
{gvalmorb, tarbour, garcia}@laas.fr*

---

*RÉSUMÉ. Dans cet article nous considérons un système linéaire soumis à des saturations en entrée et en sortie, pour lequel une loi de commande stabilisante est supposée connue. L'impact sur la stabilité du système bouclé d'une dynamique linéaire négligée en entrée est étudié. Des conditions constructives basées sur des inégalités matricielles, si possible linéaires (LMI), sont proposées afin de caractériser des ensembles de dynamiques qui préservent la stabilité du système bouclé. L'influence sur l'estimation de la région de stabilité est également étudiée.*

*ABSTRACT. This paper considers linear systems subject to input and output saturations, for which a stabilizing control law has been a priori designed. The effects of beforehand neglected dynamics appearing at the input are studied with respect to the stability of the closed-loop system. Constructive conditions based on matrix inequalities, or at least linear matrix inequalities (LMI), are proposed in order to characterize some suitable dynamics preserving the closed-loop stability. The influence of these neglected dynamics on the estimate of the basin of attraction for closed-loop system is studied.*

*MOTS-CLÉS : Dynamiques négligées, saturations en entrée et en sortie, région de stabilité.*

*KEYWORDS: Neglected dynamics, input and output saturations, region of stability.*

---

## 1. Introduction

L'élaboration de lois de commande pour les systèmes dynamiques est une tâche d'autant plus ardue que le cahier des charges est exigeant. Compte tenu des performances souhaitées, le concepteur peut être amené à développer des contrôleurs avancés nécessitant des efforts de commande importants. Cependant, que ce soit pour des raisons physiques, technologiques ou liées à la sécurité, tout système physique est soumis à des limitations de fonctionnement qui se traduisent entre autres par des contraintes d'amplitude et de dynamiques sur les actionneurs et les capteurs (Bernstein, 2001). Ainsi le fait de ne pas prendre en compte ces limitations, lors de la conception du contrôleur ou de la mise en œuvre, peut avoir des conséquences indésirables (dégradation des performances) ou catastrophiques (perte de stabilité) pour le système (Glattfelder *et al.*, 2003), (Kapila *et al.*, 2002).

C'est pour toutes ces raisons que les systèmes soumis à des saturations en entrée et en sortie présentent de nombreux défis aussi bien dans un contexte d'analyse que de synthèse de lois de commande afin de garantir la stabilité et un certain niveau de performance : voir, par exemple, (Tarbouriech *et al.*, 2007) où les techniques les plus récentes sont présentées.

Un autre phénomène important qu'il convient de prendre en compte concerne les dynamiques négligées, qui peuvent provenir de dynamiques mal modélisées ou ignorées lors de la synthèse de la loi de commande. Dans (Arcak *et al.*, 2001), les auteurs proposent une méthode de re-design pour la loi de commande lorsqu'une dynamique non linéaire a été négligée. Dans (Arcak *et al.*, 2000), la procédure de *backstepping* est modifiée pour être robuste par rapport à des dynamiques négligées. L'article (Aldhahebi *et al.*, 1996) présente une analyse des systèmes avec une dynamique négligée dans l'actionneur et contenant un observateur avec un gain élevé dans la boucle fermée.

Cet article considère des systèmes linéaires soumis à des saturations sur les entrées et les sorties. On suppose que les actionneurs contiennent des dynamiques linéaires négligées au moment de la synthèse de la loi de commande. L'objectif est alors de caractériser un ensemble de dynamiques qui préservent la stabilité du système et ne dégradent pas trop l'approximation de la région d'attraction de celui-ci.

Des conditions constructives basées sur des inégalités matricielles sont proposées. Ces inégalités sont bilinéaires en les variables inconnues. Une transformation permettant de linéariser les inégalités est possible mais impose à la dynamique négligée d'être du même ordre que le système. Cependant, une méthode décrivant les matrices de la dynamique négligée sous forme d'un retour de sortie permet de considérer un ordre arbitraire pour la dynamique.

L'article est organisé de la manière suivante : la formulation du problème est présentée dans la section 2. La section 3 rappelle un certain nombre d'outils nécessaires au développement des conditions. Les principaux résultats théoriques sont donnés dans la section 4. Les procédures d'optimisation associées aux conditions théoriques

sont décrites en section 5. La section 6 illustre sur différents exemples numériques les avantages et les inconvénients des techniques proposées. En particulier, le cas de la présence d'un retard négligé lors de la synthèse est considéré : la dynamique négligée est alors représentée *via* une approximation de Padé. Enfin, quelques remarques et perspectives permettent de clore l'article.

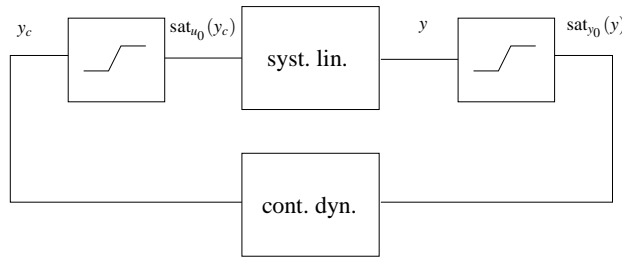
**Notation.**  $A'$  représente la transposée de la matrice  $A$ . Pour des matrices  $A$  et  $B$  symétriques,  $A > B$  signifie que  $A - B$  est définie positive. Pour les vecteurs  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \succeq y$  signifie  $x_{(i)} - y_{(i)} \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$ .  $A_{(i)}$  représente la ligne  $i$  de la matrice  $A$ .  $\text{diag}(A, B)$  représente une matrice bloc-diagonale avec les blocs  $A$  et  $B$ .  $I$  est la matrice identité et  $0$  la matrice avec les éléments égaux à zéro.  $\star$  représente des blocs symétriques dans des LMIs. Pour  $v \in \mathbb{R}^m$ ,  $\text{sat}_{v_0}(v) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  représente la fonction de saturation  $\text{sat}_{v_0}(v)_{(i)} = \text{sign}(v_{(i)}) \min(v_{0(i)}, |v_{(i)}|), \forall i = 1, \dots, m$ , où  $v_{0(i)} > 0$  est le seuil de chaque élément.  $\text{Null}(A)$  représente le noyau de  $A$ .

## 2. Formulation du problème

Soit le système linéaire soumis à des saturations sur l'entrée et la sortie commandé par une loi de commande connue décrit par [1] et représenté par la figure 1 :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\text{sat}_{u_0}(y_c(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \\ \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c \text{sat}_{y_0}(y(t)) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c \text{sat}_{y_0}(y(t)) \end{cases} \quad [1]$$

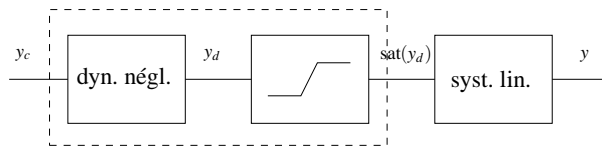
avec  $x \in \mathbb{R}^n$  l'état du système,  $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$  l'état du contrôleur dynamique,  $y \in \mathbb{R}^p$  la sortie du système et  $y_c \in \mathbb{R}^m$  la sortie du contrôleur,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ ,  $B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times p}$ ,  $C_c \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$  et  $D_c \in \mathbb{R}^{m \times p}$ . La loi de commande stabilisante composée par  $A_c, B_c, C_c$  et  $D_c$  peut être calculée en utilisant par exemple les techniques proposées par (Bateman *et al.*, 2003), (Tarbouriech *et al.*, 2006), (Garcia *et al.*, 2007).



**Figure 1.** Système commandé par un contrôleur dynamique

Les seuils de la saturation pour la commande et la sortie sont respectivement les vecteurs positifs  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  et  $y_0 \in \mathbb{R}^p$ .

Le système [1] ne représente pas le système complet. En effet pour synthétiser la loi de commande (c'est-à-dire les matrices  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$  et  $D_c$ ), nous avons négligé une dynamique linéaire à l'entrée. En d'autres termes, nous avons supposé que le signal  $y_c$  entre directement dans le bloc de saturation (entrée du système à contrôler). Cependant, l'entrée du système est la sortie d'un système dynamique négligé jusqu'ici et que nous supposons défini par les matrices  $\{A_d, B_d, C_d, D_d\}$  comme cela est illustré sur la figure 2.



**Figure 2.** Dynamique négligée à l'entrée

Le système complet que nous devons étudier est en fait le système décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\text{sat}_{u_0}(y_d(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \\ \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c \text{sat}_{y_0}(y(t)) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c \text{sat}_{y_0}(y(t)) \\ \dot{x}_d(t) &= A_d x_d(t) + B_d y_c(t) \\ y_d(t) &= C_d x_d(t) + D_d y_c(t) \end{cases} \quad [2]$$

avec  $x_d \in \mathbb{R}^{n_d}$  état de la dynamique négligée et  $y_d \in \mathbb{R}^m$  la sortie de la dynamique négligée. Les matrices  $A_d, B_d, C_d, D_d$  sont de dimensions appropriées.

Les problèmes que nous souhaitons résoudre dans cet article consistent à analyser la stabilité du système bouclé complet [2] lorsque l'on tient compte des dynamiques négligées.

Pris dans toute sa généralité, le problème est complexe et il semble *a priori* difficile de caractériser les dynamiques négligées en termes des matrices  $A_d, B_d, C_d, D_d$  les décrivant. Dans cet article, nous considérons donc les deux problèmes suivants qui présentent comme nous le verrons un intérêt en pratique.

**Problème 1.** Caractériser les dynamiques qui peuvent être négligées sans déstabiliser le système et sans trop dégrader la région de stabilité du système complet [2], exprimées sous la forme  $\{A_d, B_d, C_d, D_d\}$  où l'ordre  $n_d$  de la dynamique négligée est fixé a priori.

**Problème 2.** Pour une dynamique négligée fixée a priori (approximation d'un retard, dynamique dans l'actionneur), caractériser la région de stabilité du système complet [2].

Notons que les problèmes pourraient être reformulés afin de considérer également certains critères de performance.

### 3. Résultats préliminaires

En définissant les non-linéarités de type zone morte  $\phi_{u_0}(y_d(t)) = \text{sat}_{u_0}(y_d(t)) - y_d(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $\phi_{y_0}(y(t)) = \text{sat}_{y_0}(y(t)) - y(t) \in \mathbb{R}^p$ , et en considérant un état augmenté  $\xi = [x' \quad x'_c \quad x'_d] \in \mathbb{R}^{n+n_c+n_d}$ , nous pouvons réécrire le système [2] de la manière suivante :

$$\dot{\xi} = \tilde{A}\xi + \tilde{B}_1\phi_{y_0}(y) + \tilde{B}_2\phi_{u_0}(y_d) \quad [3]$$

$$\phi_{u_0}(y_d) = \text{sat}(\tilde{C}_2\xi + \tilde{D}_1\phi_{u_0}(\xi)) - (\tilde{C}_2\xi + \tilde{D}_1\phi_{u_0}(\xi)) \quad [4]$$

$$\phi_{y_0}(y) = \text{sat}(\tilde{C}_1\xi) - \tilde{C}_1\xi \quad [5]$$

avec :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A + BD_dD_cC & BD_dC_c & BC_d \\ B_cC & A_c & 0 \\ B_dD_cC & B_dC_c & A_d \end{bmatrix}; \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} BD_dD_c \\ B_c \\ B_dD_c \end{bmatrix}; \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [6]$$

$$\tilde{C}_1 = [C \quad 0 \quad 0]; \tilde{C}_2 = [D_dD_cC \quad D_dC_c \quad C_d]; \tilde{D}_1 = D_dD_c \quad [7]$$

Notons que  $\phi_{u_0}(y_d)$  et  $\phi_{y_0}(y)$  sont des non-linéarités imbriquées puisque par définition  $\phi_{u_0}(y_d)$  dépend de  $\phi_{y_0}(y)$ . Rappelons tout d'abord la condition de secteur modifiée que satisfait une non-linéarité de type zone morte (Tarbouriech *et al.*, 2006). Considérons une non-linéarité générique définie comme  $\phi_{v_0}(v) = \text{sat}_{v_0}(v) - v \in \mathbb{R}^m$  et l'ensemble polyédral :

$$S(v_0) = \{r \in \mathbb{R}^m; -v_0 \preceq r \preceq v_0\} \quad [8]$$

**Lemme 1.** *Si  $r$  est élément de  $S(v_0)$  alors la non-linéarité  $\phi_{v_0}(v) = \text{sat}_{v_0}(v) - v$  satisfait l'inégalité suivante :*

$$\phi_{v_0}(v)'T(\phi_{v_0}(v) + v - r) \leq 0 \quad [9]$$

avec  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  une matrice diagonale positive.

#### 4. Résultats principaux

Nous donnons tout d'abord un résultat sur la stabilité asymptotique du système [2].

**Proposition 1.** *Si il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{(n+n_c+n_d) \times (n+n_c+n_d)}$ , deux matrices diagonales définies positives  $T_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $T_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et trois matrices  $E_1 \in \mathbb{R}^{p \times (n+n_c+n_d)}$ ,  $E_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c+n_d)}$  et  $E_3 \in \mathbb{R}^{m \times p}$  satisfaisant :*

$$A_1 = \begin{bmatrix} \tilde{A}'P + P\tilde{A} & P\tilde{B}_1 - \tilde{C}'_1T_1 + E'_1T_1 & P\tilde{B}_2 - \tilde{C}'_2T_2 + E'_2T_2 \\ \star & -2T_1 & -\tilde{D}'_1T_2 \\ \star & \star & -2T_2 \end{bmatrix} < 0 \quad [10]$$

$$A_{2\ell} = \begin{bmatrix} P & E'_{1(\ell)} \\ \star & y_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \geq 0; \ell = 1, \dots, p \quad [11]$$

$$A_{3k} = \begin{bmatrix} P & E'_{2(k)} \\ \star & u_{0(k)}^2 \end{bmatrix} \geq 0; k = 1, \dots, m \quad [12]$$

alors les trajectoires du système [2] convergent asymptotiquement vers l'origine pour toute condition initiale appartenant à  $\mathcal{E}(P, 1)$  :

$$\mathcal{E}(P, 1) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+n_c+n_d}; \xi'P\xi \leq 1\} \quad [13]$$

**Démonstration.** Nous donnons les principales lignes de la démonstration qui est inspirée de (Tarbouriech *et al.*, 2006). Si l'on considère la fonction de Lyapunov candidate  $V(\xi) = \xi'P\xi$  avec  $P = P' > 0$ , on a :

$$\dot{V}(\xi) = 2\xi'P(\tilde{A}\xi + \tilde{B}_1\phi_{u_0} + \tilde{B}_2\phi_{y_0})$$

Considérons les ensembles polyédraux  $S(y_0)$  et  $S(u_0)$  :

$$S(y_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+n_c+n_d}; -y_0 \preceq E_1\xi \preceq y_0\}$$

$$S(u_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+n_c+n_d}; -u_0 \preceq E_2\xi \preceq u_0\}$$

En utilisant le complément de Schur, on peut montrer que l'ensemble polyédral  $S(y_0)$  (resp.  $S(u_0)$ ) contient l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(P, 1)$  si l'inégalité [11] (respectivement [12]) est vérifiée (Boyd *et al.*, 1994). Ainsi l'intersection des ensembles  $S(y_0)$  et  $S(u_0)$  contient l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(P, 1)$  si les inégalités [11] et [12] sont satisfaites.

Avec l'inclusion de l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(P, 1)$  dans  $S(u_0)$  et  $S(u_0)$  il est possible de prendre en compte l'inégalité [9] du lemme 1 en considérant  $r = E_1\xi$  pour  $\phi_{u_0}$  et  $r = E_2\xi$  pour  $\phi_{y_0}$ , ceci donne pour  $\dot{V}$  :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) \leq & 2\xi'P(\tilde{A}\xi + \tilde{B}_1\phi_{u_0} + \tilde{B}_2\phi_{y_0}) \\ & - 2\phi_{u_0}'T_1(\phi_{u_0} - E_1\xi + \tilde{C}_1\xi) - 2\phi_{y_0}'T_2(\phi_{y_0} - E_2\xi + \tilde{C}_2\xi + \tilde{D}_1\phi_{u_0}) \end{aligned} \quad [14]$$

pour tout  $\xi \in \mathcal{E}(P, 1)$ .

Ainsi si le terme de droite de l'inégalité [14] est négatif, autrement dit si l'inégalité [10] est vérifiée, le système est asymptotiquement stable dans  $\mathcal{E}(P, 1)$ .

□

Notons que, lorsque les matrices  $A_d, B_d, C_d$  et  $D_d$  sont données, les conditions de la proposition 1 sont linéaires par rapport à la variable de décision  $P$  mais bilinéaires par rapport aux variables  $E_i$  et  $T_j$ . Il existe néanmoins un changement de variables adéquat permettant de les rendre linéaires par rapport à toutes les variables (Tarbouriech *et al.*, 2006). Cependant, dès que l'on considère les matrices  $A_d, B_d, C_d$  et  $D_d$  comme des variables, les inégalités obtenues sont bilinéaires car elles présentent en plus des produits entre  $E_i$  et  $T_j$ , les produits  $P\tilde{A}$  et  $P\tilde{B}_1$  ( $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}_1$  sont formées par les matrices du système négligé, considérées comme des variables).

L'objectif de l'article est de déterminer des matrices  $A_d, B_d, C_d$  et  $D_d$  admissibles qui, d'une part, ne déstabilisent pas le système [2], et qui, d'autre part, préservent la taille de la région de stabilité. Dans ce but, nous allons considérer des techniques permettant de résoudre le problème de façon le plus linéaire possible.

#### 4.1. Quasi-linéarisation

Cette première technique peut être appliquée lorsque  $D_d = 0$ , c'est-à-dire, lorsque l'on considère une dynamique négligée sans transmission directe.

Dans ce cas, le système [2] se réécrit comme :

$$\dot{\xi} = \tilde{A}_0\xi + \tilde{B}_2\phi_{u_0}(y_d) + \tilde{B}_{10}\phi_{y_0}(y)$$

où  $\phi_{y_0}(y)$  est donné par [5] et  $\phi_{u_0}(y_d)$  ne dépend plus que de  $\xi$  :

$$\phi_{u_0}(y_d) = \text{sat}_{u_0}(\tilde{C}_{20}\xi) - \tilde{C}_{20}\xi$$

avec :



$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & BC_d \\ B_c C & A_c & 0 \\ B_d D_c C & B_d C_c & A_d \end{bmatrix}; \tilde{B}_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \\ B_d D_c \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{20} = [ 0 \quad 0 \quad C_d ]$$

Définissons les sous-matrices suivantes :

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}; \mathbb{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbb{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} = [ C \quad 0 ]; \mathbb{C}_c = [ D_c C \quad C_c ]$$

Nous pouvons alors donner le premier résultat pour le problème 1 dans le cas  $n_d = n + n_c$ .

**Proposition 2.** *S'il existe des matrices symétriques définies positives  $R \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ , des matrices diagonales définies positives  $S_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $S_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , des matrices  $H \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c)}$ ,  $F_1 \in \mathbb{R}^{p \times 2(n+n_c)}$ ,  $F_2 \in \mathbb{R}^{m \times 2(n+n_c)}$  et  $Z \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times m}$  satisfaisant les inégalités suivantes :*

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc} \mathbb{A}R + \mathbb{B}L + L'\mathbb{B}' + R\mathbb{A}' & \mathbb{A} + H' \\ * & S\mathbb{A} + ZC + \mathbb{A}'S + \mathbb{C}'_c Z' \end{array} \right] \\ \\ \left[ \begin{array}{cc} \mathbb{B}_c & \\ S\mathbb{B}_c + ZD_c & \end{array} \right] S_1 - \left[ \begin{array}{c} RC' \\ C' \end{array} \right] + F'_1 & \left[ \begin{array}{c} \mathbb{B} \\ S\mathbb{B} \end{array} \right] S_2 - \left[ \begin{array}{c} L' \\ 0 \end{array} \right] + F'_2 \\ -2S_1 & 0 \\ * & -2S_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{15}$$

$$\mathcal{A}_{2\ell} = \left[ \begin{array}{cc} \left[ \begin{array}{cc} R & I \\ * & S \end{array} \right] & F'_{1(\ell)} \\ * & y_{0(\ell)}^2 \end{array} \right] \geq 0; \ell = 1, \dots, p \tag{16}$$

$$\mathcal{A}_{3k} = \left[ \begin{array}{cc} \left[ \begin{array}{cc} R & I \\ * & S \end{array} \right] & F'_{2(k)} \\ * & u_{0(k)}^2 \end{array} \right] \geq 0; k = 1, \dots, m \tag{17}$$

alors la dynamique négligée définie via les matrices :

$$\begin{aligned}
C_d &= L(M')^{-1} \\
B_d &= N^{-1}Z \\
A_d &= N^{-1}(H - S\mathbb{A}R - S\mathbb{B}L - ZC_cR)(M')^{-1}
\end{aligned}$$

où les matrices  $M$  et  $N$  sont inversibles et vérifient la relation :

$$MN' = I - RS \quad [18]$$

est une solution du problème 1 pour le cas particulier  $n_d = n + n_c$  et est telle que l'ensemble  $\mathcal{E}(P, 1)$  défini par [13] avec :

$$P = \begin{bmatrix} S & N \\ N' & T \end{bmatrix} \quad [19]$$

est une région de stabilité pour le système bouclé [2].

**Démonstration.** Considérons l'inégalité [10] avec  $S_i = T_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2$ . En structurant les matrices  $P$  et  $P^{-1}$  comme :

$$P = \begin{bmatrix} S & N \\ N' & T \end{bmatrix}; P^{-1} = \begin{bmatrix} R & M \\ M' & Q \end{bmatrix} \quad [20]$$

on a la relation [18]. Notons que la matrice  $I - RS$  est non singulière, impliquant qu'il est toujours possible de déterminer des matrices carrées et non singulières  $M$  et  $N$  satisfaisant [18] (Scherer *et al.*, 1997).

Soit les matrices  $\Gamma_1 = \text{diag}(\Pi, S_1, S_2)$  et  $\Gamma_2 = \text{diag}(\Pi, I)$  avec :

$$\Pi = \begin{bmatrix} R & I \\ M' & 0 \end{bmatrix}$$

Alors à partir des conditions de la proposition 1, les transformations  $\Gamma_1' A_1 \Gamma_1$ ,  $\Gamma_2' A_{2\ell} \Gamma_2$  et  $\Gamma_2' A_{3k} \Gamma_2$ , et les changements de variables  $L = C_d M'$ ,  $Z = N B_d$ ,  $H = S\mathbb{A}R + ZC_cR + S\mathbb{B}L + N A_d M'$  et  $F_i = E_i \Pi$ ,  $i = 1, 2$ , permettent d'obtenir les inégalités [15], [16] et [17]. En utilisant le même raisonnement que dans le cadre de la proposition 1, on peut montrer que l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(P, 1)$ , avec la matrice  $P$  définie dans [20], est une région de stabilité pour le système bouclé.

□

REMARQUE 1. — Les valeurs propres de la matrice  $A_d$  sont invariantes par rapport au choix de la décomposition qui calcule  $M$  et  $N$  à partir de l'équation [18].

REMARQUE 2. — Pour rendre possible la quasi-linéarisation des inégalités [10]-[12], il est nécessaire d'imposer  $D_d = 0$ . Les inégalités [16] et [17] sont linéaires, tandis que l'inégalité [15] est quasi linéaire dans le sens qu'il reste les termes non linéaires  $(S\mathbb{B}_c + ZD_c)S_1$  et  $S\mathbb{B}S_2$ . Notons que l'on pourrait rendre linéaire cette inégalité en fixant préalablement les matrices  $S_1$  et  $S_2$ . Il est clair que ce choix élimine des degrés de liberté pour la recherche d'une solution. Cependant on pourrait conserver les matrices  $S_1 = T_1^{-1}$  et  $S_2 = T_2^{-1}$ , comme variables de décision, et utiliser alors un algorithme avec relaxation comme cela est fait dans (Garcia *et al.*, 2007).

REMARQUE 3. — Il est important de souligner qu'avec l'approche utilisée dans la proposition 2, nous ne sommes pas capables de formuler une procédure pour maximiser l'ensemble des dynamiques qui pourraient être négligées. Par contre une procédure orientant le choix des dynamiques négligées admissibles afin de maximiser la taille de la région de stabilité peut être mise en œuvre (voir section 5).

#### 4.2. Retour de sortie

Pour le cas d'un contrôleur sans transmission directe ( $D_c = 0$ ) il est possible de réécrire les matrices du système augmenté [6]-[7] comme :

$$\begin{aligned} \tilde{A} = A_a + B_a K C_b = & \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ B_c C & A_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_d & C_d \\ B_d & A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C_c & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad [21] \end{aligned}$$

$$\tilde{C}_2 = C_a K C_b = [ I \ 0 ] \begin{bmatrix} D_d & C_d \\ B_d & A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C_c & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}; \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \\ 0 \end{bmatrix}; \tilde{D}_1 = 0 \quad [22]$$

les matrices  $\tilde{B}_2$  et  $\tilde{C}_1$  restant inchangées. A partir de la matrice  $K$  qui contient les termes de la dynamique négligée, le problème peut être posé comme un problème de retour de sortie statique. La matrice  $\tilde{A}$  fait apparaître le terme  $P(A_a + B_a K C_b)$  dans le bloc (1,1) de  $A_1$  dans l'équation [10], ce qui transforme l'inégalité en une BMI (*bilinear matrix inequality*). Pour résoudre un tel problème, l'approche proposée dans

(Peaucelle *et al.*, 2001) peut être employée. Cette approche consiste tout d'abord à trouver un gain de retour d'état  $K_s = KC_b$  puis à l'utiliser pour calculer le retour de sortie en utilisant des variables additionnelles à partir du lemme d'élimination. Si la paire  $(A_a, B_a)$  est stabilisable, une méthode pour trouver le gain de retour d'état est donnée par le résultat suivant :

**Proposition 3.** *S'il existe une matrice symétrique définie positive  $W \in \mathbb{R}^{(n+n_c+n_d) \times (n+n_c+n_d)}$ , deux matrices diagonales positives  $S_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $S_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et trois matrices  $Q \in \mathbb{R}^{(m+n_d) \times p}$ ,  $F_1 \in \mathbb{R}^{p \times (n+n_c+n_d)}$ ,  $F_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c+n_d)}$  satisfaisant les inégalités linéaires suivantes :*

$$\begin{bmatrix} WA'_a + A_aW + Q'B'_a + B_aQ & \tilde{B}_1S_1 - W\tilde{C}'_1 + F'_1 & \tilde{B}_2S_2 - Q'C_a + F'_2 \\ \star & -2S_1 & 0 \\ \star & \star & -2S_2 \end{bmatrix} < 0 \quad [23]$$

$$\begin{bmatrix} W & F'_{1(i)} \\ \star & y_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0; \quad i = 1, \dots, p \quad [24]$$

$$\begin{bmatrix} W & F'_{2(j)} \\ \star & u_{0(j)}^2 \end{bmatrix} \geq 0; \quad j = 1, \dots, m \quad [25]$$

alors avec  $KC_b = K_s$ ,  $K_s$  étant donné par  $K_s = QW^{-1}$ , l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(W^{-1}, 1) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+n_c+n_d}; \xi'W^{-1}\xi \leq 1\}$  est une région de stabilité asymptotique pour le système [2].

**Démonstration.** Posons  $W = P^{-1}$ ,  $S_1 = T_1^{-1}$  et  $S_2 = T_2^{-1}$ . On multiplie les équations [10], [11], [12] à gauche et à droite respectivement par  $\text{diag}(W, S_1, S_2)$ ,  $\text{diag}(W, 1)$  et  $\text{diag}(W, 1)$ . Considérons les matrices  $\tilde{A}$  et  $\tilde{C}_2$  décrites dans les équations [21]-[22] et  $K_s = KC_b$ . Avec les changements de variables  $F_1 = E_1W$ ,  $F_2 = E_2W$  et  $Q = K_sW$ , les inégalités linéaires [23], [24], [25] sont obtenues. □

A partir d'un gain  $K_s$  qui stabilise la paire  $(A_a, B_a)$  il est alors possible d'énoncer le résultat suivant qui peut être vu comme une application du résultat issu de (Peaucelle *et al.*, 2001).

**Proposition 4.** *S'il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{(n+n_c+n_d) \times (n+n_c+n_d)}$ , deux matrices diagonales positives  $T_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $T_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et cinq matrices  $R \in \mathbb{R}^{(m+n_d) \times (m+n_c+n_d)}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{(m+n_d) \times (m+n_d)}$ ,  $F_{s2} \in \mathbb{R}^{(m+p) \times (n+n_c+n_d+m)}$ ,  $E_1 \in \mathbb{R}^{p \times (n+n_c+n_d)}$ ,  $E_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c+n_d)}$ ,  $G_1 \in \mathbb{R}^{(n+n_c+n_d+m) \times (n+n_c+n_d+m)}$ ,  $G_2 \in \mathbb{R}^{(m+n_d) \times (n+n_c+n_d+m)}$  satisfaisant les inégalités [11], [12] et la suivante :*

$$M(P, T_1, T_2, E_1, E_2) + T_G(F_{s2}, G_1, G_2)T_D(R, F) + T_D(R, F)'T_G(F_{s2}, G_1, G_2)' < 0 \quad [26]$$

avec :

$$M(P, T_1, T_2, E_1, E_2) = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} A'_a P + P A_a & P \tilde{B}_1 - \tilde{C}'_1 T_1 + E'_1 T_1 & P \tilde{B}_2 - \tilde{C}'_2 T_2 + E'_2 T_2 \\ * & -2T_1 & 0 \\ * & * & -2T_2 \end{array} \right] \\ \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & B'_a P & -C'_a T_2 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{array} \right] \end{array} \right] \quad [27]$$

$$T_D(R, F) = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} RC_b & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{ccc} F & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array} \right] \end{array} \right] \quad [28]$$

$$T_G(F_{s2}, G_1, G_2) = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} K'_s & 0 \\ 0 & F_{s2} \end{array} \right] \\ - \left[ \begin{array}{cc} I & G_1 \\ 0 & G_2 \end{array} \right] \end{array} \right] \quad [29]$$

alors avec  $K = F^{-1}R$ , retour de sortie qui stabilise le système défini par les matrices [21]-[22], l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(W^{-1}, 1) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+n_c+n_d}; \xi'W^{-1}\xi \leq 1\}$  est une région de stabilité asymptotique pour le système [2]. Les matrices  $\{A_d, B_d, C_d, D_d\}$  correspondantes à un tel gain  $K$  définissent alors une dynamique qui peut être négligée sans déstabiliser le système.

**Démonstration.** La preuve est similaire à celle présentée dans (Peaucelle *et al.*, 2001). Si l'on pose  $D_c = 0$ , [10] est équivalent à :

$$\left[ \begin{array}{c} I \\ \left[ \begin{array}{ccc} C'_b K' & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array} \right] \end{array} \right] M(P, T_1, T_2, E_1, E_2) \left[ \begin{array}{c} I \\ \left[ \begin{array}{ccc} KC_b & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array} \right] \end{array} \right] \quad [30]$$

A partir du lemme d'élimination il est possible de montrer que [10] est satisfaite si et seulement s'il existe des matrices  $P, T_1, T_2, E_1, E_2$  et  $J$  telles que :

$$M(P, T_1, T_2, E_1, E_2) + J\mathcal{K} + \mathcal{K}'J' < 0 \quad [31]$$

avec :

$$\mathcal{K} = \left[ \begin{array}{ccc|c} \left[ \begin{array}{cc} KC_b & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array} \right] & & & -I \end{array} \right] \quad [32]$$

En structurant la matrice  $J$  comme :

$$J = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} F_s & 0 \\ 0 & F_{s2} \end{array} \right] \\ - \left[ \begin{array}{cc} F & G_1 \\ 0 & G_2 \end{array} \right] \end{array} \right] \quad [33]$$

le choix  $K_s = (F_s F^{-1})'$  et le changement de variables  $R = FK$  nous donnent l'inégalité [26]. Il faut remarquer que comme dans (Peaucelle *et al.*, 2001), la matrice  $F$  est non singulière si l'inégalité [26] est satisfaite car le bloc  $F + F'$  est présent dans sa diagonale.

□

REMARQUE 4. — Pour transformer l'inégalité [26] en une LMI, il reste nécessaire de fixer  $T_1$  et  $T_2$ . Les matrices de la solution de [23] peuvent être utilisées dans ce cas.

REMARQUE 5. — La proposition 4 permet de trouver une dynamique négligée d'ordre arbitraire et fournit l'approximation de la région de stabilité correspondante.

REMARQUE 6. — Le choix de  $K_s$  est déterminant pour trouver une solution à l'inégalité [26]. Il sera considéré toujours comme un gain qui stabilise  $(A_a, B_a)$ . Une des méthodes possibles pour le calculer est donnée par la proposition 3.

REMARQUE 7. — Certains critères d'optimisation peuvent être considérés pour la recherche des matrices  $F$  et  $R$  qui définissent  $K$ . Un critère peut être, par exemple, l'élargissement de l'ensemble des conditions initiales admissibles.

### 4.3. Dynamiques imposées

Un cas particulier intéressant est lorsque la dynamique négligée  $\{A_d, B_d, C_d, D_d\}$  a une structure préalablement imposée, ou bien encore des valeurs imposées : cela

peut par exemple être le cas si des caractéristiques dynamiques des actionneurs sont connues et qu'il faut tester leur influence sur la boucle fermée ; ou bien on peut tester l'influence de retards sur la stabilité du système à partir d'approximations de Padé. Dans ce contexte, le résultat suivant découle directement de la proposition 1 et est une solution pour le problème 2.

**Proposition 5.** *S'il existe une matrice symétrique définie positive  $W \in \mathbb{R}^{(n+n_c+n_d) \times (n+n_c+n_d)}$ , deux matrices diagonales positives  $S_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $S_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et trois matrices  $R \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $F_1 \in \mathbb{R}^{p \times (n+n_c+n_d)}$ ,  $F_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c+n_d)}$  satisfaisant les inégalités linéaires suivantes :*

$$\begin{bmatrix} W\tilde{A}' + \tilde{A}W & \tilde{B}_1 S_1 - W\tilde{C}'_1 + F'_1 & \tilde{B}_2 S_2 - W\tilde{C}'_2 + F'_2 \\ \star & -2S_1 & -S_1 \tilde{D}'_1 \\ \star & \star & -2S_2 \end{bmatrix} < 0 \quad [34]$$

$$\begin{bmatrix} W & F'_{1(i)} \\ \star & y_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0; \quad i = 1, \dots, p \quad [35]$$

$$\begin{bmatrix} W & F'_{2(j)} \\ \star & u_{0(j)}^2 \end{bmatrix} \geq 0; \quad j = 1, \dots, m \quad [36]$$

alors l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(W^{-1}, 1) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+n_c+n_d}; \xi'W^{-1}\xi \leq 1\}$  est une région de stabilité asymptotique pour le système [2].

**Démonstration.** Posons  $W = P^{-1}$ ,  $U_1 = T_1^{-1}$  et  $U_2 = T_2^{-1}$ . On multiplie les inégalités [10], [11], [12] à gauche et à droite respectivement par  $\text{diag}(W, U_1, U_2)$ ,  $\text{diag}(W, 1)$  et  $\text{diag}(W, 1)$ . Avec les changements de variables,  $F_1 = E_1 W$  et  $F_2 = E_2 W$ , les inégalités linéaires [34], [35], [36] sont obtenues.  $\square$

REMARQUE 8. — Soit une matrice symétrique définie positive  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ , deux matrices diagonales  $S_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $S_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et deux matrices  $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{R}^{p \times (n+n_c)}$ ,  $\mathcal{F}_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c)}$  satisfaisant les inégalités linéaires suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W}\tilde{A}' + \tilde{A}\mathcal{W} & \tilde{B}_1 S_1 - W\tilde{C}'_1 + \mathcal{F}'_1 & \tilde{B}_2 S_2 - W\tilde{C}'_2 + \mathcal{F}'_2 \\ \star & -2S_1 & -S_1 \tilde{D}'_1 \\ \star & \star & -2S_2 \end{bmatrix} < 0 \quad [37]$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W} & \mathcal{F}'_{1(i)} \\ \star & y_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0; \quad i = 1, \dots, p \quad \begin{bmatrix} \mathcal{W} & \mathcal{F}'_{2(j)} \\ \star & u_{0(j)}^2 \end{bmatrix} \geq 0; \quad j = 1, \dots, m \quad [38]$$

avec :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}; \quad \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} BD_c \\ B_c \end{bmatrix}; \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [39]$$

$$\tilde{C}_1 = [ C \ 0 ]; \tilde{C}_2 = [ D_c C \ C_c ]; \tilde{D}_1 = D_c \quad [40]$$

Alors la région  $\mathcal{E}(\mathcal{W}^{-1}, 1) = \{\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{n+n_c}; \bar{\xi}' \mathcal{W}^{-1} \bar{\xi} \leq 1\}$ , avec  $\bar{\xi} = [ x' \ x'_c ]'$  est une région de stabilité asymptotique pour le système bouclé sans dynamique négligée. En structurant la matrice  $W$  de la proposition 5, comme :

$$W = \begin{bmatrix} \alpha \mathcal{W} & W_2 \\ \star & W_3 \end{bmatrix} \quad [41]$$

où  $\mathcal{W}$  est solution de [37]-[38] et  $\alpha$  est un scalaire tel que  $0 < \alpha < 1$ , on peut s'inspirer de la technique développée dans (Tarbouriech *et al.*, 2008) afin de mesurer *via*  $\mathcal{W}$  et  $\alpha$  la dégradation de la région de stabilité  $\mathcal{E}(W^{-1}, 1) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+n_c}; \xi' W^{-1} \xi \leq 1\}$ , dans les directions  $[ x' \ x'_c \ 0 ]'$ .

#### 4.4. Région de stabilité imposée

Une approche complémentaire à celle consistant à imposer des dynamiques négligées est d'imposer une région de stabilité. Afin de ne pas trop dégrader la région obtenue lors de la synthèse du contrôleur, il est possible de choisir les matrices qui définissent l'influence des états initiaux de la dynamique négligée dans la région d'attraction. Considérons  $P = P' > 0$  structurée comme :

$$P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ \star & P_4 \end{bmatrix} & P_3 \\ & P_5 \\ & \star & P_6 \end{bmatrix} \quad [42]$$

Les matrices  $P_1, P_2$  et  $P_4$  sont calculées lors de l'obtention du contrôleur dynamique. Il est alors possible de fixer les valeurs de  $P_3, P_5$  et  $P_6$  pour établir une région d'attraction souhaitée et chercher des dynamiques qui satisfont les inégalités [10]-[12] avec une telle matrice  $P$ .

**Corollaire 1.** *Etant donné la matrice  $P = P' > 0$ , s'il existe une matrice diagonale positive  $S_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et des matrices  $A_d \in \mathbb{R}^{(n+n_c+n_d) \times (n+n_c+n_d)}$ ,  $B_d \in \mathbb{R}^{(n+n_c+n_d) \times m}$ ,  $C_d \in \mathbb{R}^{p \times (n+n_c+n_d)}$ ,  $D_d \in \mathbb{R}^{m \times p}$  satisfaisant les inégalités linéaires [11], [12] et :*

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'P + P\tilde{A} & P\tilde{B}_1 - \tilde{C}'_1 + E'_1 & P\tilde{B}_2 S_2 - \tilde{C}'_2 + E'_2 \\ \star & -2I & -\tilde{D}'_1 \\ \star & \star & -2S_2 \end{bmatrix} < 0 \quad [43]$$

alors l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(P, 1) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+n_c+n_d}; \xi' P \xi \leq 1\}$  est une région de stabilité asymptotique pour le système [2], avec  $\{A_d, B_d, C_d, D_d\}$  solution de [43].



**Démonstration.** Posons  $T_1 = I$  et  $S_2 = T_2^{-1}$ . On multiplie l'inégalité [10] à gauche et à droite par  $\text{diag}(I, I, S_2)$ . L'inégalité linéaire [43] est obtenue. Les conditions d'inclusion [11] et [12] restent inchangées.  $\square$

REMARQUE 9. — Considérant la région de stabilité de départ  $\mathcal{E}(P_0, 1) = \{\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{n+n_c}; \bar{\xi}' P_0 \bar{\xi} \leq 1\}$  avec  $\bar{\xi} = [x' \quad x'_c]'$  et :

$$P_0 = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ \star & P_4 \end{bmatrix} \tag{44}$$

il est possible d'imposer des limites pour la dégradation dans les directions  $[x' \quad x'_c \quad 0]'$  de la région  $\mathcal{E}(P, 1) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+n_c+n_d}; \xi' P \xi \leq 1\}$ . Si la matrice de Lyapunov des LMIs du corollaire 1 est donnée par :

$$P_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ \star & P_4 \end{bmatrix} & P_3 \\ & P_5 \\ & \star & P_6 \end{bmatrix} \tag{45}$$

avec  $\alpha > 1$ , alors la dégradation de la région  $\mathcal{E}(P_0, 1)$ , peut être mesurée par le paramètre  $\alpha$ .

### 5. Procédures d'optimisation

L'approche proposée dans la section 4.1 permet la maximisation de l'approximation de la région d'attraction du système quand les états initiaux du contrôleur sont égaux à zéro en dépit de la présence de dynamiques négligées.

Le problème d'optimisation consistant à maximiser l'ensemble des conditions initiales qui assurent la stabilité du système [2], peut donc être considéré :

$$\begin{aligned} &\min \beta \\ &\text{sous} \\ &\beta I < S < c_\beta \beta I, [15], [16], [17] \end{aligned} \tag{46}$$

où  $\beta$  est une variable scalaire positive,  $S$  est la variable de décision définie dans la proposition 2 et  $c_\beta$  est un scalaire positif préalablement fixé.

### 6. Exemples numériques

L'interface Yalmip (Löfberg, 2004) et le solver Sedumi (Sturm, n.d.) ont été utilisés pour l'obtention des résultats de cette section.

### 6.1. Résultats de la quasi-linéarisation

On considère le système, le contrôleur dynamique et les seuils des saturations du système [2] définis par les données suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; C = [ 1 \quad 0 ] \\ A_c &= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}; B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}; C_c = [ 0.5 \quad 0 ]; D_c = -4 \\ u_0 &= 2; y_0 = 2 \end{aligned} \quad [47]$$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  et du système en boucle fermée sont respectivement  $\lambda_{BO} = \{1.1231, -7.1231\}$  et  $\lambda_{BF} = \{-3.0000, -8.0418, -1.8435, -4.1147\}$ . Pour résoudre [46] de façon linéaire, il est nécessaire de fixer les matrices  $S_1$  et  $S_2$ . Les résultats de l'exemple correspondent au choix  $S_1 = 1$  et  $S_2 = 2$ .

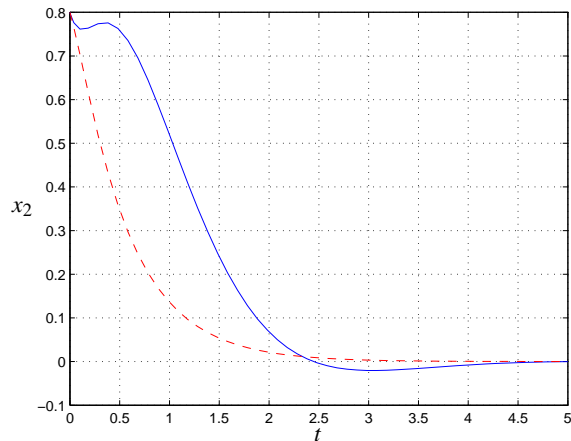
Les matrices d'une dynamique négligée possible, obtenues après la résolution du problème d'optimisation [46] sont :

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} -7.0798 & 8.0748 & 0.5696 & -0.1744 \\ 1.0242 & -5.6524 & 0.6515 & -0.0486 \\ 0.3022 & -2.1848 & -5.7059 & -0.5374 \\ -0.6735 & -0.0856 & -1.5908 & -4.3570 \end{bmatrix}; B_d = \begin{bmatrix} 0.1197 \\ 0.3998 \\ -0.0378 \\ 0.0567 \end{bmatrix} \\ C_d &= [ 2.4614 \quad 3.4426 \quad -0.7894 \quad 0.1463 ] \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice  $A_d$  obtenue sont  $\lambda_{A_d} = \{-9.2026, -5.9871, -4.0770, -3.5284\}$ . La matrice  $P$  qui définit la région de stabilité  $\mathcal{E}(P, 1)$  est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 2.0418 & -0.7314 & 0.0250 & -0.0019 \\ -0.7314 & 0.9633 & 0.0074 & -0.0134 \\ 0.0250 & 0.0074 & 2.4407 & 0.2471 \\ -0.0019 & -0.0134 & 0.2471 & 2.7777 \\ 1.0158 & -0.4105 & 1.5262 & 1.3921 \\ 0 & 1.7516 & 1.8481 & 1.6807 \\ 0 & 0 & 4.6980 & 2.5335 \\ 0 & 0 & 0 & -6.3563 \\ 1.0158 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4105 & 1.7516 & 0 & 0 \\ 1.5262 & 1.8481 & 4.6980 & 0 \\ 1.3921 & 1.6807 & 2.5335 & -6.3563 \\ 2.6412 & 1.8927 & 4.3418 & -3.1123 \\ 1.8927 & 9.3216 & 4.9319 & -3.7668 \\ 4.3418 & 4.9319 & 12.4723 & -5.0132 \\ -3.1123 & -3.7668 & -5.0132 & 16.9614 \end{bmatrix}$$

Une comparaison entre les réponses du système qui inclut cette dynamique négligée (trait plein) et du système sans cette dynamique négligée (trait pointillé) pour une condition initiale donnée par  $\xi(0) = [0.1 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]'$ , est montrée dans la figure 3.



**Figure 3.** Evolution de l'état  $x_2$

## 6.2. Retour de sortie

Considérons le système, le contrôleur dynamique et les seuils des saturations du système [2] définis par les données suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0.3000 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -10 \end{bmatrix}; C = [ 1 \quad 2 ] \quad [48]$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}; B_c = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}; C_c = [ 0.3 \quad -2 ]$$

$$u_0 = 2; y_0 = 2$$

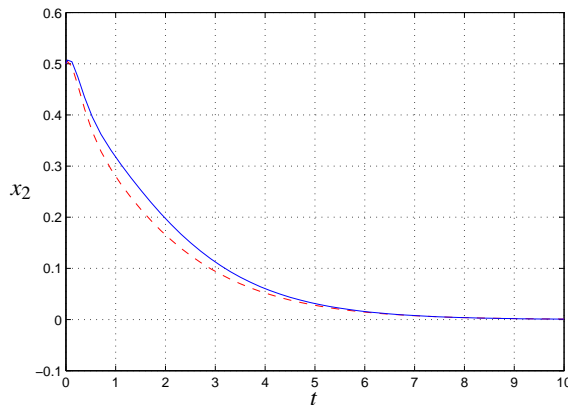
Les valeurs propres de la matrice  $A$  et du système en boucle fermée sont respectivement  $\lambda_{BO} = \{-1, 0.5\}$  et  $\lambda_{BF} = \{-5.5544 + 2.0835i, -5.5544 - 2.0835i, -0.6956 + 0.1395i, -0.6956 - 0.1395i\}$ . Les matrices de la dynamique négligée obtenues après la résolution du problème d'optimisation [46] sont :

$$A_d = \begin{bmatrix} -1.1406 & 0.7707 \\ -0.7737 & -1.1374 \end{bmatrix}; B_d = \begin{bmatrix} 0.452 \\ 0.121 \end{bmatrix}$$

$$C_d = [ -0.08204 \quad 0.07964 ]; D_d = 1.0275$$

Les valeurs propres de la matrice  $A_d$  obtenue sont  $\lambda_{A_d} = \{-1.1390 + 0.7722i, -1.1390 - 0.7722i\}$ .

Les valeurs de  $T_1$  et  $T_2$  ont été *a priori* fixées comme  $T_1 = T_2 = 1$ . La figure 4 présente la comparaison de l'évolution de l'état  $x_2$  du système qui inclut une telle dynamique (trait plein) et du système qui la néglige (trait pointillé) pour une condition initiale donnée par  $\xi(0) = [0 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0.03 \ 0.08]'$ .



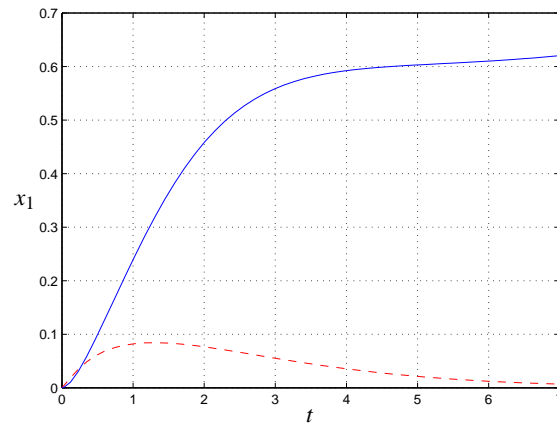
**Figure 4.** Evolution de l'état  $x_2$

Il est aussi important de remarquer que pour certaines conditions initiales le système en boucle fermée peut devenir instable. La figure 5 présente la comparaison de l'évolution de l'état  $x_1$  du système qui comporte une telle dynamique (trait plein) et du système qui la néglige (trait pointillé) pour une condition initiale donnée par  $\xi(0) = [0 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 1.6 \ 1.7]'$ .

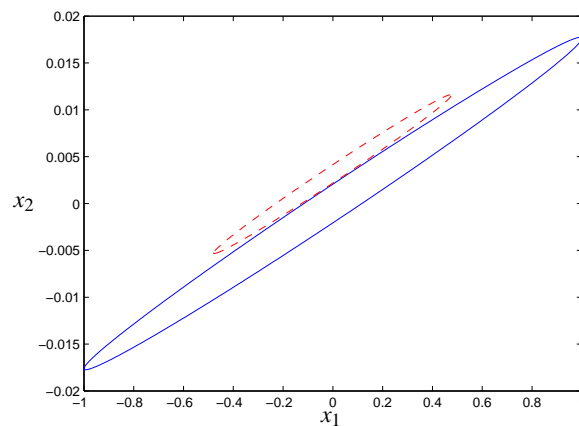
La matrice  $P$  qui vérifie l'inégalité [26] et qui fournit une approximation pour la région de stabilité est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 20.2349 & -0.3404 & 4.4314 & -1.5223 & -0.2135 & -0.6236 \\ -0.3404 & 0.9256 & -0.2991 & 2.3315 & 0.0068 & 0.0649 \\ 4.4314 & -0.2991 & 5.7119 & -8.9356 & -0.0142 & 0.4425 \\ -1.5223 & 2.3315 & -8.9356 & 35.2684 & -0.0438 & -0.7709 \\ -0.2135 & 0.0068 & -0.0142 & -0.0438 & 104.5991 & -0.0170 \\ -0.6236 & 0.0649 & 0.4425 & -0.7709 & -0.0170 & 104.5093 \end{bmatrix}$$

Pour un état initial dans la dynamique à l'entrée  $x_d \neq 0$  les valeurs de l'état  $x$  pour lesquels la stabilité est garantie sont changés. La figure 6 montre la projection de l'ellipsoïde qui approxime la région de stabilité dans le plan  $(x_1, x_2)$  pour les conditions initiales  $x_c(0) = x_d(0) = 0$  (trait plein) et pour les conditions initiales  $x_c(0) = 0$   $x_d(0) = [0.05 \ 0.05]'$  (trait pointillé).



**Figure 5.** Evolution de l'état  $x_1$  pour une condition initiale qui déstabilise le système



**Figure 6.** Projection dans le plan  $(x_1, x_2)$  des approximations de la région de stabilité

### 6.3. Dynamiques imposées. Approximation de Padé

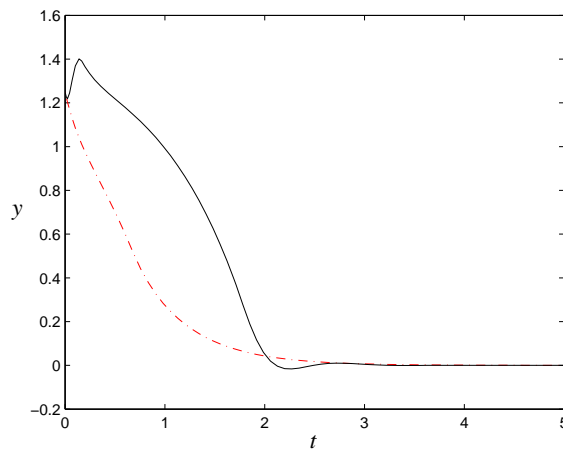
Les conditions de stabilité de la proposition 5 pour le système [47] ont été testées pour une dynamique donnée par une approximation de Padé du deuxième ordre pour un retard à l'entrée qui avait été négligé. En utilisant la proposition 5 et en faisant varier la valeur du retard, le système est identifié comme stable jusqu'à un retard de  $\tau = 0.4102$ . Pour la valeur de retard de  $\tau = 0.2$  une réalisation de l'approximation est donnée par :

$$A_d = \begin{bmatrix} -30.0 & -300.0 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix}; B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; C_d = [ -60 \quad 0 ]; D_d = 1$$

Avec une telle dynamique négligée le système bouclé reste stable et l'approximation de la région d'attraction est définie par [13] avec la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 0.5772 & 0.0861 & 0.0067 & 0.0001 & 0.0248 & 22.941 \\ 0.0861 & 0.0161 & 0.002 & 0.0002 & 0.0168 & 3.8507 \\ 0.0067 & 0.002 & 0.0207 & -0.0047 & 0.0164 & 0.7327 \\ 0.0001 & 0.0002 & -0.0047 & 0.0036 & 0.0001 & -0.001 \\ 0.0248 & 0.0168 & 0.0164 & 0.0001 & 4.202 & 3.1288 \\ 22.941 & 3.8507 & 0.7327 & -0.001 & 3.1288 & 2047.4715 \end{bmatrix}$$

La figure 7 montre la trajectoire de la sortie pour un état initial du système  $x(0) = [1.25 \ 0]^T$  ( $x_c(0) = x_d(0) = 0$ ) avec l'approximation du retard (trait plein) et sans le considérer (trait pointillé).



**Figure 7.** Sortie avec une dynamique approximant un retard négligé

#### 6.4. Région de stabilité imposée

Considérons le système, contrôleur et seuils de saturation donnés par [47] et la région de stabilité [13] définie par la matrice  $P$  donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 2.3628 & -0.7032 & 0.0342 & -0.0046 & 0 & 0 \\ -0.7032 & 0.9522 & 0.0152 & -0.0093 & 0 & 0 \\ 0.0342 & 0.0152 & 2.3589 & 0.2351 & 0 & 0 \\ -0.0046 & -0.0093 & 0.2351 & 2.6766 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

En utilisant les conditions du corollaire 1, le système dynamique :

$$A_d = \begin{bmatrix} -58.8190 & 0 \\ 0.0103 & -29.4402 \end{bmatrix}; B_d = \begin{bmatrix} 1.1724 \\ -1.7902 \end{bmatrix}$$

$$C_d = [ -0.0492 \quad 0.1638 ]$$

est obtenu et peut être alors considéré à l'entrée du système. La stabilité du système bouclé complet est garantie dans la région de stabilité définie par [13].

## 7. Conclusion

Dans cet article, quelques résultats préliminaires ont été obtenus pour la caractérisation des dynamiques linéaires négligées lors de la synthèse de la loi de commande qui préservent les propriétés souhaitées pour le système bouclé lorsqu'elles sont présentes. Le système considéré est un système linéaire soumis à des saturations en entrée et en sortie. L'objectif était alors de caractériser un ensemble de dynamiques négligées qui ne déstabilisent pas le système bouclé et qui ne dégradent pas trop la région de stabilité associée.

Nous avons mis en évidence que la région de stabilité dépend de la dynamique négligée : ainsi sur un exemple illustratif nous avons pu montrer que pour certaines conditions initiales de la dynamique négligée, le système pouvait être déstabilisé.

Dans cet article, nous avons considéré deux approches : une approche par quasi-linéarisation, qui si elle conduit à des conditions quasi linéaires facilement testables numériquement, impose une contrainte forte sur l'ordre de la dynamique négligée (même ordre que le système); une approche basée sur le lemme d'élimination (Peaucelle *et al.*, 2001) qui permet d'avoir une dynamique d'ordre arbitraire en divisant le problème en deux étapes qui peuvent être résolues de façon linéaire.

Nous avons pu montrer que lorsque la dynamique négligée a une structure imposée, les conditions de stabilité deviennent linéaires : c'est par exemple le cas si on néglige la présence d'un retard en entrée, retard que l'on peut représenter *via* une approximation de Padé.

## Remerciements

Cet article est partiellement financé par le Programme Alban, le programme de l'Union Européenne de Bourses de Haut Niveau pour l'Amérique latine, bourse (E06D100941BR).

## 8. Bibliographie

- Aldhaferi R. W., Khalil H. K., « Effect of unmodeled actuator dynamics on output feedback stabilization of nonlinear systems », *Automatica*, vol. 32, n° 9, p. 1323-1327, 1996.
- Arcak M., Seron M., Braslavsky J., Kokotovic P., « Robustification of backstepping against input unmodeled dynamics », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, n° 7, p. 1358-1363, 2000.
- Arcak M., Teel A., Kokotovic P., « Robust nonlinear control of feedforward systems with unmodeled dynamics », *Automatica*, vol. 37, p. 265-272, 2001.
- Bateman A., Lin Z., « An analysis and design method for linear systems under saturation », *System and Control Letters*, vol. 48, p. 41-52, 2003.
- Bernstein D. S., « A plant taxonomy for designing control experiments », *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 21, p. 7-14, 2001.
- Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V., *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- Garcia G., Tarbouriech S., Gomes da Silva Jr. J. M., « Dynamic output controller design for linear systems with actuator and sensor saturation », *Proceedings of the ACC 2007*, 2007.
- Glattfelder A., Schaufelberger W., *Control systems with input and output constraints*, Springer-Verlag, London, 2003.
- Kapila V., Grigoriadis K., *Actuator saturation control*, Marcel Dekker, Inc., 2002.
- Löfberg J., « YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB », *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004.
- Peaucelle D., Arzelier D., « An efficient numerical solution for  $H_2$  static output feedback synthesis », *ECC 2001*, 2001.
- Scherer C., Gahinet P., Chilali M., « Multiobjective output feedback control via LMI optimization », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, n° 7, p. 896-911, 1997.
- Sturm J. F., *Using SEDUMI 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones*. n.d., Optimization Online.
- Tarbouriech S., Garcia G., Glattfelder A., (Eds.), *Advanced strategies in control systems with input and output constraints*, LNCIS, vol.346, Springer Verlag, 2007.
- Tarbouriech S., Prieur C., Gomes da Silva Jr J. M., « Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturation », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, n° 8, p. 1364-1371, 2006.
- Tarbouriech S., Valmorbida G., Garcia G., Biannic J.-M., « Stability and performance analysis for linear systems with actuator and sensor saturations subject to unmodeled dynamics », *Proceedings of the ACC 2008*, Seattle, USA, June, 2008.

Reçu le : 9 octobre 2007

Accepté après révisions le : 17 octobre 2008