



**HAL**  
open science

## Décisions liées aux intervalles d'une partition : le problème du choix dans la pratique de la recherche

Guy Morel

► **To cite this version:**

Guy Morel. Décisions liées aux intervalles d'une partition : le problème du choix dans la pratique de la recherche. Annales de l'ISUP, 1987, XXXII (1-2), pp.93-111. <hal-03685066>

**HAL Id: hal-03685066**

**<https://hal.science/hal-03685066v1>**

Submitted on 1 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Pub. Inst. Stat. Univ.  
XXXII, fasc. 1-2, 1987, 93 à 111

DECISIONS LIEES AUX INTERVALLES D'UNE PARTITION :  
LE PROBLEME DU CHOIX DANS LA PRATIQUE DE LA RECHERCHE\*

GUY MOREL

Université de Tours  
3 rue des Tanneurs 37000

SUMMARY.

This paper is devoted to statistical decision problem where the possible decisions are either one interval of a partition of the parameter space or two consecutive intervals of this partition. Two weight functions are used to partly order the decision functions space. Under suitable (and often realized) conditions a "good" decision function is selected and its computation is examined.

These decision procedures should be interesting to draw a conclusion in experimental researchs.

RESUME.

Ce travail concerne les problèmes de décision, où l'ensemble des actions est constitué des intervalles d'une partition de l'espace des paramètres et de ceux formés en unissant deux éléments consécutifs de cette partition. Les procédures de décision sont partiellement ordonnées par deux critères de

\* ce texte est issu d'un travail (cf. [8]) rédigé sous la direction de J.P. RAOULT (U.A. C.N.R.S. 759, Université de Rouen)

choix et, sous des conditions qui recouvrent un grand nombre de cas classiques, une "bonne" règle de décision, unique à une équivalence près, est extraite et son calcul envisagé.

Ces stratégies nous semblent adaptées au choix d'une conclusion dans les travaux de recherche expérimentale.

## 1. INTRODUCTION

Dans un grand nombre de recherches en sciences humaines, un "effet" des variables indépendantes sur les variables dépendantes est mesuré par la valeur d'un paramètre statistique réel  $\vartheta$ , cet effet étant considéré comme inexistant quand  $\vartheta$  est "proche" de 0. Cependant si un test statistique est utilisé la traduction de "non effet" est généralement l'hypothèse nulle :  $\vartheta = 0$ . Les tests classiques d'analyse de variance, du khi-deux, sur la nullité d'un coefficient de corrélation, etc., sont de ce type.

Cette inadéquation des hypothèses nulles et les erreurs d'interprétation qu'elle peut entraîner sont bien connues, Reuchlin [11] signale les avoir formulées dès 1953.

Les hypothèses réelles du chercheur se traduisent plutôt par la donnée d'une partition des valeurs de  $\vartheta$  en zones d'interprétations différentes. Par exemple s'il veut choisir entre trois affirmations de la forme : effet négatif, absence d'effet, effet positif, il devra définir une partition de trois intervalles. Pour prendre en compte des partitions moins grossières le nombre  $k$  des intervalles ne sera pas limité à 3. Lorsque  $\vartheta$  est la vraie valeur du paramètre il y a  $(k - 1)$  mauvais choix possibles. Une bonne procédure de

décision essaye de minimiser les probabilités de se tromper correspondant à chaque  $\vartheta$ . Cette fonction de risque ne peut pas être uniformément majorée par un seuil. Ainsi pour  $k = 2$ , la théorie des tests s'applique et le risque  $n'$  est majoré par le seuil que sous l'hypothèse  $H_0$ .

Cette dissymétrie dans la fiabilité du rejet de  $H_0$  et de celui de  $H_1$  peut être levée si on accepte la possibilité de ne pas conclure. Ceci a été envisagé par Neyman et Pearson dès 1933 (cf. [10]) et semble particulièrement adapté à la prise de décision dans la recherche scientifique. Le chercheur contrairement au contrôleur de fabrication n'est pas obligé de conclure à la fin de son étude.

Nous allons généraliser l'approche de Neyman et Pearson, lorsque  $k \geq 2$ , en acceptant d'autres conclusions que les atomes de la partition. Nous ajouterons les intervalles unions de deux intervalles consécutifs. Une décision est correcte pour une valeur  $\vartheta$  du paramètre, si c'est un intervalle simple ou double contenant  $\vartheta$ . Quand il existe une procédure de décision majorant uniformément le risque de prendre une décision incorrecte, elle n'est généralement pas unique. En effet, décider un intervalle double à la place d'un des atomes qu'il contient ne peut que diminuer le risque. Pourtant, à risque égal ou inférieur à un seuil donné on préfère décider un atome de la partition. Pour remédier à cette anomalie nous pourrions essayer d'introduire une fonction de perte non nulle sur les intervalles doubles. Mais alors nous perdrons l'interprétation simple du risque. Aussi choisissons nous d'introduire, en plus de la notion de décision correcte pour  $\vartheta$ , celle de décision juste pour  $\vartheta$ , qui est l'atome auquel appartient  $\vartheta$ . Dans notre choix d'une bonne règle de décision au seuil  $\alpha$ , c'est à dire de risque uniformément majoré par  $\alpha$ , nous tiendrons compte des probabilités de prendre une décision juste en essayant de les maximiser.

## 2. CADRE THEORIQUE

Soit un intervalle  $\theta$  de  $\mathbb{R}$ . Nous considérons le modèle statistique  $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, (P_{\vartheta})_{\vartheta \in \theta})$ , où  $(P_{\vartheta})_{\vartheta \in \theta}$  admet par rapport à une mesure  $m$ , une famille de densités  $(p_{\vartheta})_{\vartheta \in \theta}$  à rapport de vraisemblance monotone, c'est-à-dire,

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta_1 \in \theta, \vartheta_2 \in \theta, \vartheta_1 \leq \vartheta_2 \\ t_1 \in \overline{\mathbb{R}}, t_2 \in \overline{\mathbb{R}}, t_1 \leq t_2 \end{array} \right| \Rightarrow p_{\vartheta_1}(t_1) p_{\vartheta_2}(t_2) - p_{\vartheta_1}(t_2) p_{\vartheta_2}(t_1) \geq 0.$$

Ce modèle correspond au modèle image, induit par un grand nombre des statistiques qui définissent les tests classiques. On sait (cf. [3]) que les distributions de Student, Fisher et khi-deux, à paramètre de non centralité  $\vartheta$ , constituent des familles à rapport de vraisemblance monotone.

L'ensemble  $D$  des décisions possibles est composé des  $k$  intervalles non vides d'une partition  $(\theta_i)_{i \in I = \{1, \dots, k\}}$  de  $\theta$  et des  $(k-1)$  intervalles unions de deux  $\theta_i$  consécutifs ; on posera  $D = I \cup I^{(2)}$  avec  $I^{(2)} = \{(i, i+1) ; i \in \{1, \dots, k-1\}\}$ , cet ensemble des décisions  $D$  est alors totalement ordonné par la relation d'ordre partiel, dénommée "être avant", définie sur  $\mathcal{P}(\theta) - \{\emptyset\}$  par

$$\theta' \leq \theta'' \Leftrightarrow (\forall a \in \theta' - \theta'') (\forall b \in \theta' \cap \theta'') (\forall c \in \theta'' - \theta') a < b < c.$$

Le caractère total de cet ordre est primordial pour les propositions qui suivent, c'est ce qui nous oblige à ne pas considérer les unions de plus de deux atomes. On notera pour tout  $d$ ,  $[+, d]$  (resp.  $[+, d[$ ) l'ensemble des décisions avant (resp. strictement avant)  $d$ .

Dans un tel cadre, nous définirons une règle de décision  $\delta$  comme une application de  $\overline{\mathbb{R}} \times \mathcal{P}(D)$  dans  $[0, 1]$  qui vérifie :

- 1) pour tout  $d$  de  $D$ ,  $\delta(\cdot, \{d\})$  est mesurable
- 2) pour tout  $t$  de  $\overline{\mathbb{R}}$ ,  $\delta(t, \cdot)$  est une probabilité sur  $(D, \mathcal{P}(D))$ .

Notons  $C_{\vartheta}$  l'ensemble des décisions correctes pour  $\vartheta$  ; lorsque  $\vartheta$  appartient à  $\theta_i$  on a :  $C_{\vartheta} = \{(i-1, i), i, (i, i+1)\}$  si  $1 < i < k$   
 $= \{1, (1, 2)\}$  si  $i = 1$   
 $= \{(k-1, k), k\}$  si  $i = k$ .

Le risque  $R(\vartheta, \delta)$  étant la probabilité de prendre une décision incorrecte avec la règle  $\delta$  quand  $\vartheta$  est la valeur du paramètre, il est égal à

$$\int (1 - \delta(t, C_\vartheta)) P_\vartheta(dt).$$

Notons  $J_\vartheta$  l'ensemble des décisions justes pour  $\vartheta$ , on a, si  $\vartheta$  appartient à  $\Theta_1$ ,  $J_\vartheta = \{i\}$ . Si nous définissons l'information d'une règle  $\delta$  comme l'application qui à tout  $\vartheta$  associe la probabilité de prendre la décision juste, on a

$$I(\vartheta, \delta) = \int \delta(t, J_\vartheta) P_\vartheta(dt).$$

Alors, étant données deux règles de décision  $\delta$  et  $\delta'$ ,  $\delta$  est dite aussi bonne que  $\delta'$  si, quel que soit  $\vartheta$ , on a :

- i)  $R(\vartheta, \delta) \leq R(\vartheta, \delta')$
- ii)  $I(\vartheta, \delta) \geq I(\vartheta, \delta')$ .

$\delta$  est dite meilleure que  $\delta'$  si de plus il existe  $\vartheta$  tel que l'une au moins des deux inégalités (i) et (ii) soit stricte.

Nous nous proposons maintenant d'extraire de cet ordre partiel une "bonne" procédure de décision.

### 3. UNE CLASSE ESSENTIELLEMENT COMPLETE DE REGLES DE DECISION : LES REGLES DE DECISION MONOTONES.

a) Pour toute règle de décision  $\delta$ , toute décision  $d$  et toute observation  $t$  posons  $\delta_d(t) = \delta(t, [+, d])$ .  $\delta_d$  application de l'espace  $\overline{\mathbb{R}}$  des observations dans  $[0, 1]$ , est une fonction de test. La famille  $(\delta_d)_{d \in D}$  est croissante et vérifie  $\delta_k = 1_{\overline{\mathbb{R}}}$ .

Le modèle étant à rapport de vraisemblance monotone, les fonctions de test simples joueront un rôle primordial, comme dans la construction de tests uniformément de plus forte puissance à un seuil donné (cf. [6]).

Rappelons qu'une fonction de test simple est une application  $e$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  dans  $[0, 1]$  vérifiant : si  $e(t) > 0$ , alors  $e(s) = 1$  pour tout  $s \geq t$ ; notons  $E$  l'ensemble des fonctions de test simples; on remarque que pour qu'une application  $e$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  dans  $[0, 1]$  appartienne à  $E$ , il faut et il suffit qu'il

existe  $x$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  et  $\beta$  dans  $[0,1]$  tels que  $e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < x \\ \beta & \text{si } t = x \\ 0 & \text{si } t > x. \end{cases}$

L'ensemble  $E$  est totalement ordonné par la relation d'ordre usuelle sur les applications de  $\overline{\mathbb{R}}$  dans  $[0,1]$ .  $E$  sera muni de la topologie de la convergence simple, qui coïncide avec la topologie de l'ordre ; il est compact pour cette topologie.

b) Les travaux de Karlin et Rubin [4] et de Brown, Cohen et Strawderman [2] nous conduisent à considérer les règles de décision telles que, étant fixée une décision  $d$ , on ait d'autant plus de chances de prendre une décision avant  $d$  que l'observation  $t$  est plus petite.

DEFINITION 3.1 : une règle de décision  $\delta$  est dite monotone si et seulement si, pour toute décision  $d$ ,  $\delta_d$  est une fonction de test simple.

Notons  $\Delta_0$  l'ensemble des règles de décision monotones ; il s'identifie évidemment à l'ensemble des suites croissantes d'éléments de  $E$ ,  $(\delta_d)_{d \in D}$ , dont le dernier élément  $\delta_k$  est  $1_{\overline{\mathbb{R}}}$ . Nous le munissons de la topologie produit de la topologie de la convergence simple sur les fonctions de test simples : une suite  $(\delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente si et seulement si, pour toute décision  $d$ , la suite  $(\delta_d^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Il est alors compact.

Si  $E_{\mathcal{G}}$  désigne l'opérateur espérance mathématique relativement à la probabilité  $P_{\mathcal{G}}$ , on a pour  $\mathcal{G}$  dans  $\Theta_i$  :

$$\begin{aligned} 1 - R(\mathcal{G}, \delta) &= E_{\mathcal{G}}(\delta_{(i, i+1)}) - E_{\mathcal{G}}(\delta_{i-1}) \text{ si } 1 < i < k \\ &= E_{\mathcal{G}}(\delta_{(1, 2)}) \text{ si } i = 1 \\ &= 1 - E_{\mathcal{G}}(\delta_{k-1}) \text{ si } i = k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } I(\mathcal{G}, \delta) &= E_{\mathcal{G}}(\delta_i) - E_{\mathcal{G}}(\delta_{(i-1, i)}) \text{ si } 1 < i \\ &= E_{\mathcal{G}}(\delta_1) \text{ si } i = 1. \end{aligned}$$

Le risque et l'information sont donc des applications continues de  $\Delta_0$  dans  $[0,1]^0$ , muni de la topologie usuelle.

c) Comme dans les travaux cités en 3)b) on peut énoncer le théorème suivant :

**THEOREME 3.1** : l'ensemble  $\Delta_0$  des règles de décision monotones est une classe essentiellement complète dans l'ensemble des règles de décision.

Cet énoncé prend cependant ici un sens différent, du fait de la prise en compte des décisions "doubles" (dans  $I^{(2)}$ ) et de l'introduction d'un deuxième critère de choix (maximiser l'information).

La démonstration consiste à construire, à partir d'une règle  $\delta$ , une règle  $\delta'$  de  $\Delta_0$  vérifiant  $R(\vartheta, \delta') \leq R(\vartheta, \delta)$  et  $I(\vartheta, \delta') \geq I(\vartheta, \delta)$ . Cette construction se trouve dans [8], elle peut aussi s'obtenir dans un cadre plus général, l'ensemble des décisions  $D$  n'étant pas nécessairement fini (cf. [9]).

#### 4. CRITERE MINIMAX DE SELECTION D'UNE REGLE DE DECISION

##### a) Notion de règle minimax à un seuil donné

Dans l'introduction nous avons proposé l'étude des règles de décision à un seuil donné,  $\alpha$ . Pour chacune de ces règles et pour tout  $\vartheta$  dans  $\Theta$  la probabilité moyenne de se tromper (c.-à-d. le risque) est inférieure ou égale à  $\alpha$ .

D'après le paragraphe précédent nous pouvons restreindre notre choix à l'ensemble  $\Delta_0(\alpha)$  des règles de décision monotones de risque inférieur ou égal à  $\alpha$ . Il résulte de la continuité du risque (voir 3.b)) que  $\Delta_0(\alpha)$  est une partie fermée (et donc compacte) de  $\Delta_0$ .

Dans le cas  $I = \{1,2\}$ ,  $\Delta_0(\alpha)$  n'est jamais vide puisqu'il contient la règle constante qui consiste à prendre toujours la décision (1,2) (règle de risque nul mais d'information également nulle !).  $\Delta_0(\alpha)$  peut être vide lorsque  $k > 2$ . Il est facile d'en construire des exemples en se servant de la propriété suivante.

**LEMME 4.1** : soit  $k > 2$  ; pour que  $\Delta_0(\alpha)$  ne soit pas vide, il faut et il suffit qu'il existe une suite croissante  $(a_i)_{1 \leq i \leq k-2}$  dans  $E$ , vérifiant, pour tout  $i$  de  $I$  et tout  $\vartheta$  de  $\Theta_i$ ,  $E_\vartheta(a_i - a_{i-2}) \geq 1 - \alpha$  (avec les conventions  $a_{-1} = a_0 = 1_\emptyset$ ,  $a_{k-1} = a_k = 1_{\overline{\mathbb{R}}}$ ).

La condition suffisante est évidente en posant  $\delta_1 = 1_\emptyset$  et

$\delta_{(i,i+1)} = \delta_{i+1} = a_i$  pour  $i$  dans  $\{1, \dots, k-1\}$ . Quant à la condition nécessaire elle découle de l'existence d'une règle de décision de  $\Delta_0(\alpha)$  qui ne charge que  $I^{(2)}$ .

Nous supposerons pour la suite  $\Delta_0(\alpha) \neq \emptyset$ . Dans le dernier paragraphe nous examinerons les stratégies possibles lorsque  $\Delta_0(\alpha) = \emptyset$ .

Afin de pouvoir choisir un élément de  $\Delta_0(\alpha)$  nous allons définir sur  $\Delta_0(\alpha)$  une relation de préordre total. Pour une règle de décision  $\delta$  de  $\Delta_0(\alpha)$  nous considérons  $m_i(\delta) = \inf_{\vartheta \in \Theta_i} I(\vartheta, \delta)$ . C'est la probabilité minimum de donner

la réponse juste (voir 1.)  $i$  quand  $\vartheta$  appartient à  $\Theta_i$ . Le vecteur

$\vec{m}(\delta) = (m_i(\delta))_{1 \leq i \leq k}$  de  $[0, 1]^k$  réordonné par valeurs croissantes sera noté  $(m^i(\delta))_{1 \leq i \leq k}$ .

Deux règles de  $\Delta_0(\alpha)$ ,  $\delta$  et  $\delta'$ , seront dites  $\vec{m}$ -équivalentes si et seulement si  $(m^i(\delta))_{1 \leq i \leq k} = (m^i(\delta'))_{1 \leq i \leq k}$ .  $\delta$  sera dite strictement préférée à  $\delta'$  si  $\delta'$  est avant  $\delta$  pour l'ordre lexicographique sur les suites

$\{(m^i(\delta))_{1 \leq i \leq k}\}_{\delta \in \Delta_0(\alpha)}$  : autrement dit, posant  $J = \{i \in I ; m^i(\delta) \neq m^i(\delta')\}$ ,  $\delta$  sera strictement préférée à  $\delta'$  lorsque  $J \neq \emptyset$  et  $m^{\inf(J)}(\delta') < m^{\inf(J)}(\delta)$ .

Notons  $\sqsubset$  la préférence stricte ainsi définie, et  $\sqsubseteq$  la préférence large qui lui est associée ( $\sqsubseteq$  est une relation de préordre total sur  $\Delta_0(\alpha)$ ).

**DEFINITION 4.1** : une règle de décision  $\delta$  sera dite minimax (de minimums maximums) au seuil  $\alpha$  si  $\delta$  appartient à  $\Delta_0(\alpha)$  et si pour tout  $\delta'$  de  $\Delta_0(\alpha)$ , on a  $\delta' \sqsubseteq \delta$ .

L'interprétation de cette propriété est la suivante : si  $\delta$  est minimax, elle maximise le minimum de l'information sur tout  $\Theta$ ,  $m^1(\delta) = \sup_{\delta' \in \Delta_0(\alpha)} m^1(\delta')$  ;

puis parmi les règles  $\delta'$  de  $\Delta_0(\alpha)$  vérifiant  $m^1(\delta') = m^1(\delta)$ ,  $\delta$  est une de celles maximisant le deuxième, par ordre croissant, des minimums d'information sur les  $\Theta_i$ ,  $m^2(\delta) = \sup_{\delta' \in \Delta_0(\alpha), m^1(\delta') = m^1(\delta)} m^2(\delta')$  ; plus généralement, pour tout  $i$  ( $2 \leq i \leq k$ ),  $\delta$  vérifie

$m^i(\delta) = \sup_{\delta' \in \Delta_0(\alpha), (\forall j < i) m^j(\delta') = m^j(\delta)} m^i(\delta')$ .

b) Théorème d'existence de règles minimax

THEOREME 4.1 : si  $\Delta_0(\alpha)$  n'est pas vide, il existe des règles de décision minimax au seuil  $\alpha$ .

Démonstration : soit  $h$  l'application de  $[0,1]^k$  dans lui-même qui à toute suite  $(y_i)_{1 \leq i \leq k}$  associe la suite croissante qu'on en déduit par permutation sur les indices. Soit  $B = \overline{h(\vec{m}(\Delta_0(\alpha)))}$  ; comme  $h$  est une application continue du compact  $[0,1]^k$  dans lui-même, on a aussi  $B = \overline{h[\vec{m}(\Delta_0(\alpha))]}$ . Soit  $(b^1, b^2, \dots, b^k)$  le plus grand élément de  $B$  pour l'ordre lexicographique. Pour qu'une règle de décision  $\delta$  soit minimax au seuil  $\alpha$ , il faut et il suffit que  $(m^1(\delta), m^2(\delta), \dots, m^k(\delta)) = (b^1, b^2, \dots, b^k)$ .

Dans  $\vec{m}(\Delta_0(\alpha))$  il existe évidemment au moins un élément ayant  $(b^1, b^2, \dots, b^k)$  pour image par  $h$ . Soit  $(b_i)_{1 \leq i \leq k} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$  un tel élément ; comme il appartient à  $\vec{m}(\Delta_0(\alpha))$ , il existe une suite  $(\delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\Delta_0(\alpha)$  telle que  $(\vec{m}(\delta^n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(b_i)_{1 \leq i \leq k}$  ;  $\Delta_0(\alpha)$  étant compact (voir 4.a)), il existe une sous suite  $(\delta'^n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $\delta^{(0)}$  de  $\Delta_0(\alpha)$  et vérifiant encore  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{m}(\delta'^n) = (b_i)_{1 \leq i \leq k}$ .

Or (voir 3.b))  $I(\vartheta, \delta)$  est continue en tant qu'application de  $\Delta_0$  dans  $[0,1]^0$  ; donc pour tout  $\vartheta$ ,  $I(\vartheta, \delta'^n)$  converge vers  $I(\vartheta, \delta^{(0)})$  et on a, pour tout  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ),  $b_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\vartheta \in \Theta_i} I(\vartheta, \delta'^n) \leq \inf_{\vartheta \in \Theta_i} \lim_{n \rightarrow +\infty} I(\vartheta, \delta'^n) = \inf_{\vartheta \in \Theta_i} I(\vartheta, \delta^{(0)}) = m_i(\delta^{(0)})$ .

On en déduit, pour tout  $i$ ,  $m^i(\delta^{(0)}) \geq b^i$  ; autrement dit  $h(\vec{m}(\delta^{(0)}))$  domine  $(b^1, b^2, \dots, b^k)$  pour l'ordre produit et donc, à fortiori, pour l'ordre lexicographique. Il en résulte, par définition de  $(b^1, b^2, \dots, b^k)$  que  $h(\vec{m}(\delta^{(0)})) = (b^1, b^2, \dots, b^k)$  ;  $\delta^{(0)}$  est donc une règle de décision minimax au seuil  $\alpha$ . ■

## 5. UN THEOREME D'UNICITE DES REGLES MINIMAX

Deux règles de décision  $\delta$  et  $\delta'$  seront dites équivalentes si et seulement si, pour tout  $\vartheta$ , elles sont  $P_\vartheta$  presque sûrement égales (en tant qu'application de

$\overline{\mathbb{R}}$  dans  $[0,1]^{P(D)}$  (voir 2.)), autrement dit, puisque  $D$  est fini, si et seulement si on a, pour toute décision  $d$  et pour tout  $\vartheta$ , égalité  $P_\vartheta$  presque sûre des fonctions de test  $\delta_d$  et  $\delta'_d$ .

Il est clair que si  $\delta$  est une règle de décision minimax au seuil  $\alpha$ , il en est de même de toute règle de décision qui lui est équivalente. Inversement, sous les seules conditions définies dans l'introduction, il n'est pas possible de démontrer l'unicité à une équivalence près, d'une règle de décision minimax au seuil  $\alpha$  (cf. [8] pour un contre exemple).

En ajoutant deux conditions, couramment vérifiées comme nous le verrons au paragraphe suivant, il est cependant possible d'avoir une seule règle minimax au seuil  $\alpha$ , à une équivalence près.

a) Nous supposons d'abord la continuité de la famille  $(P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$ , c'est à dire la continuité de l'application qui, à  $\vartheta$  dans  $\Theta$ , associe la classe d'équivalence de l'espace vectoriel normé  $L_1(m)$ , correspondant à la densité  $p_\vartheta$ .

On sait (cf. par exemple [7] p. 138) qu'une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'on puisse choisir les densités  $p_\vartheta$  de telle sorte que, pour  $m$ -presque tout  $t$ , l'application  $\vartheta \rightarrow p_\vartheta(t)$  soit continue.

Il résulte évidemment de la continuité de  $(P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$  que pour toute fonction bornée de  $\overline{\mathbb{R}}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f$ , l'application  $\vartheta \rightarrow E_\vartheta(f)$  est continue (c'est la continuité de l'application associant à  $\vartheta$  la classe de  $p_\vartheta$ , dans  $L_1(m)$  muni de sa topologie faible). Cette continuité permet (cf. [8]) de démontrer le lemme suivant (il suffit même de l'avoir aux points frontières  $\{\sup_{\vartheta \in \Theta_i}\}_{1 \leq i < k}$ ).

LEMME 5.1 : Supposons la famille  $(P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$  continue ; soit  $\alpha < (1/2)$ , et soient  $\delta$  et  $\delta'$  deux règles de décision monotones au seuil  $\alpha$ .

Alors, pour tout  $i$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ), on a  $\delta_i < \delta'_{(i,i+1)}$ .

Une autre conséquence (cf. [8]) utile de la continuité de la famille  $(P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$  est donnée par le lemme 5.2.

LEMME 5.2 : Supposons la famille à rapport de vraisemblance monotone  $(P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$  continue. Soit  $\theta_0$  un intervalle de  $\Theta$ , et soit  $(a,b)$  un couple de

fonctions de test simples, vérifiant  $a \leq b$  ; distinguons alors trois cas :

(i)  $\bar{\theta}_0 \subset \theta$

(ii)  $a = 0$  et  $\sup \theta_0 \in \theta$

(iii)  $b = 1$  et  $\inf \theta_0 \in \theta$ .

On a les deux propriétés suivantes :

(1) dans tous les cas, il existe  $\vartheta_* \in \bar{\theta}_0 \cap \theta$  tel que  $E_{\vartheta_*}(b-a) = \inf_{\vartheta \in \theta_0} E_{\vartheta}(b-a)$

(2) soit  $\beta$  tel que  $0 < \beta < \inf_{\vartheta \in \theta_0} E_{\vartheta}(b-a)$  ; dans les cas (i) et (ii), il

existe une fonction de test simple,  $c$ , vérifiant  $a < c < b$ , et  $\vartheta_{**} \in \bar{\theta}_0 \cap \theta$ , tels que  $E_{\vartheta_{**}}(c-a) = \inf_{\vartheta \in \theta_0} E_{\vartheta}(c-a) = \beta$ .

De plus on peut prendre  $\vartheta_* = \vartheta_{**} = \sup \theta_0$  dans le cas (ii) et  $\vartheta_* = \inf \theta_0$  dans le cas (iii).

b) La deuxième condition supplémentaire postule que les probabilités

$P_{\vartheta} (\vartheta \in \theta)$  sont équivalentes, c'est à dire toutes absolument continues les unes par rapport aux autres ; lorsqu'il en est ainsi, si  $a$  et  $b$  sont deux fonctions de test simples telles qu'il existe  $\vartheta_0$  vérifiant  $E_{\vartheta_0}(a) = E_{\vartheta_0}(b)$ , on a  $E_{\vartheta}(a) = E_{\vartheta}(b)$  pour tout  $\vartheta$  dans  $\theta$ .

PROPOSITION 5.1 : supposons la famille  $(P_{\vartheta})_{\vartheta \in \theta}$ , continue et formée de probabilités équivalentes. Alors, si  $\delta$  est une règle de décision minimax à un seuil  $\alpha$  ( $< 1/2$ ),  $m_i(\delta)$  ne dépend que de la parité de  $i$ .

Démonstration : soit  $\delta$  une procédure de décision de  $\Delta_0(\alpha)$  pour laquelle il existe  $j$  tel que  $m_j(\delta) \neq m_{j+2}(\delta)$  ; nous allons construire une règle  $\delta'$  appartenant à  $\Delta_0(\alpha)$  et strictement préférée à  $\delta$  (au sens défini en 4.a)), ce qui établira que  $\delta$  n'est pas minimax. Supposons par exemple  $m_j(\delta) > m_{j+2}(\delta)$  (la démonstration dans le cas où  $m_j(\delta) < m_{j+2}(\delta)$  est analogue).

Le principe de la construction de  $\delta'$  est schématisé par la figure 1, dans laquelle chaque fonction de test simple  $\delta'_d$  est représentée par un point frontière  $x'_d$  (ce qui est légitime lorsque les probabilités  $P_{\vartheta}$  sont diffuses), les points  $x'_d$  étant figurés tous distincts.

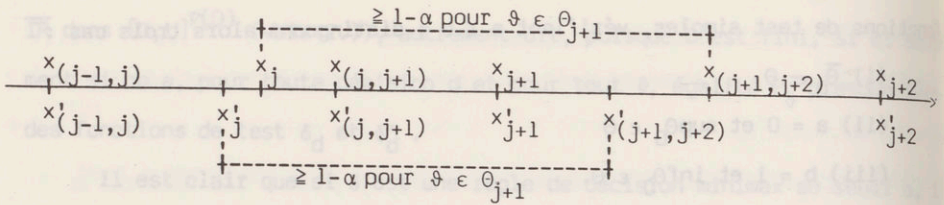


Figure 1.

Ceci revient à imposer à  $\delta'$  les conditions suivantes :

- (i)  $\delta'_d = \delta_d$  pour tout  $d$  autre que  $j$  et  $(j+1, j+2)$
- (ii)  $\delta_{(j-1, j)} \leq \delta'_j \leq \delta_j$
- (iii)  $\delta_{j+1} \leq \delta'_{(j+1, j+2)} \leq \delta_{(j+1, j+2)}$
- (iv)  $E_{\vartheta}(\delta'_{(j+1, j+2)} - \delta'_j) = 1 - R(\vartheta, \delta') \geq 1 - \alpha$  pour tout  $\vartheta$  dans  $\Theta_{j+1}$ .

Il est clair qu'une telle règle  $\delta'$  appartient à  $\Delta_0(\alpha)$ . Elle vérifie de plus  $m_j(\delta') \leq m_j(\delta)$ ,  $m_{j+2}(\delta') \geq m_{j+2}(\delta)$  et  $m_i(\delta') = m_i(\delta)$  ( $i \neq j$  et  $i \neq j+2$ ).

$\delta'$  sera strictement préférable à  $\delta$  si on peut choisir  $\delta'_j$  et  $\delta'_{(j+1, j+2)}$  de tel sorte qu'on ait :

- (v)  $m_j(\delta') > m_{j+2}(\delta)$  et  $m_{j+2}(\delta') > m_{j+2}(\delta)$ .

Construisons  $\delta'_j$  par application du lemme 5.2(2) au couple

$(a, b) = (\delta_{(j-1, j)}, \delta_j)$ , en prenant  $\Theta_0 = \Theta_j$  (ce qui est possible puisque  $j \neq k$  et que par convention  $\delta_{(0, 1)} = 1 - \emptyset$ ) et  $m_{j+2}(\delta) < \beta < m_j(\delta)$ ; l'existence de  $\vartheta_{**}$  ( $\in \bar{\Theta}_j \cap \Theta$ ) tel que  $E_{\vartheta_{**}}(\delta'_j - \delta_{(j-1, j)}) = \beta$  implique  $E_{\vartheta_{**}}(\delta_j - \delta'_j) \geq m_j(\delta) - \beta > 0$ . Les probabilités  $P_{\vartheta}$  étant équivalentes, on a pour tout  $\vartheta$  dans  $\bar{\Theta}_{j+1} \cap \Theta$  :

$E_{\vartheta}(\delta_j - \delta'_j) > 0$  et donc  $E_{\vartheta}(\delta_{(j+1, j+2)} - \delta'_j) > E_{\vartheta}(\delta_{(j+1, j+2)} - \delta_j) \geq 1 - \alpha$ ; en appliquant le lemme 5.2(1) au couple  $(\delta'_j, \delta_{(j+1, j+2)})$  et à  $\Theta_{j+1}$ , on obtient  $\inf_{\vartheta \in \Theta_{j+1}} E_{\vartheta}(\delta_{(j+1, j+2)} - \delta'_j) > 1 - \alpha$ .

On peut alors construire  $\delta'_{(j+1, j+2)}$  par une nouvelle application du lemme 5.2(2), cette fois en prenant,  $(a, b) = (\delta'_j, \delta_{(j+1, j+2)})$ ,  $\Theta_0 = \Theta_{j+1}$  et  $\beta'$  tel que  $1 - \alpha \leq \beta' < \inf_{\vartheta \in \Theta_{j+1}} E_{\vartheta}(\delta_{(j+1, j+2)} - \delta'_j)$ ; la condition (iv) est évidemment vérifiée. Pour obtenir la condition (iii), on démontre l'inégalité  $\delta_{j+1} < \delta'_{(j+1, j+2)}$ , en utilisant le lemme 5.1 et la règle de décision obtenue

en remplaçant  $\delta'_{(j+1, j+2)}$  par  $\sup\{\delta'_{j+1}, \delta'_{(j+1, j+2)}\}$ .

Il ne reste plus qu'à prouver que  $\delta'$  vérifie la condition (v).

Il résulte de la construction même de  $\delta'_j$ , qu'on a bien  $m_j(\delta') = \beta > m_{j+2}(\delta)$ .

D'autre part, par construction de  $\delta'_{(j+1, j+2)}$ , il existe  $\vartheta_{**}$  dans  $\bar{\Theta}_{j+1} \cap \Theta$

tel que  $E_{\vartheta_{**}}(\delta'_{(j+1, j+2)} - \delta'_j) = \beta'$ ; on a alors

$$E_{\vartheta_{**}}(\delta_{(j+1, j+2)} - \delta'_{(j+1, j+2)}) \geq \inf_{\vartheta \in \Theta_{j+1}} E_{\vartheta}(\delta_{(j+1, j+2)} - \delta'_j) - \beta' > 0.$$

Les probabilités  $P_{\vartheta}$  étant équivalentes, il en résulte que, pour tout  $\vartheta$ ,

$$E_{\vartheta}(\delta_{(j+1, j+2)} - \delta'_{(j+1, j+2)}) > 0; \text{ en particulier, pour le point } \vartheta_* \text{ de } \bar{\Theta}_{j+2} \cap \Theta$$

(dont l'existence est, une fois de plus, assurée par le lemme 5.2(1)) qui vé-

rifie  $m_{j+2}(\delta') = E_{\vartheta_*}(\delta_{j+2} - \delta'_{(j+1, j+2)})$ ; ce qui implique

$$m_{j+2}(\delta') = E_{\vartheta_*}(\delta_{j+2} - \delta'_{(j+1, j+2)}) + E_{\vartheta_*}(\delta_{(j+1, j+2)} - \delta'_{(j+1, j+2)}) > m_{j+2}(\delta).$$

On a ainsi construit une règle  $\delta'$  vérifiant les conditions (i) à (v). ■

c) Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème d'unicité

pour les règles minimax.

THEOREME 5.1 : supposons la famille à rapport de vraisemblance monotone

$(P_{\vartheta})_{\vartheta \in \Theta}$ , continue et formée de probabilités équivalentes. Soit  $\alpha < 1/2$ .

Si  $\Delta_0(\alpha)$  est non vide, il existe, au seuil  $\alpha$ , une règle de décision minimax,

unique à une équivalence près.

Démonstration : nous montrerons d'abord que les règles de décision  $\delta$ , minimax au seuil  $\alpha$ , ont toutes le même vecteur  $\vec{m}(\delta)$ , et ensuite que  $\vec{m}(\delta)$  détermine  $\delta$ , minimax, à une équivalence près.

(1) Il résulte de la définition des règles minimax qu'à deux de ces règles,  $\delta$  et  $\delta'$ , est associée la même suite réordonnée croissante :

$(m^i(\delta))_{1 \leq i \leq k} = (m^i(\delta'))_{1 \leq i \leq k}$ . Alors d'après la proposition 5.1, si les suites

$(m_i(\delta))_{1 \leq i \leq k}$  et  $(m_i(\delta'))_{1 \leq i \leq k}$  sont distinctes, on a nécessairement, pour

tout  $i$  ( $1 \leq i < k$ ) :  $m_i(\delta) = m_{i+1}(\delta')$ ,  $m_i(\delta') = m_{i+1}(\delta)$  et  $m_i(\delta) \neq m_{i+1}(\delta)$ .

Nous allons démontrer que cela est impossible en construisant, sous ses conditions,

une règle  $\delta''$  de  $\Delta_0(\alpha)$ , qui améliorerait strictement à la fois  $\delta$  et  $\delta'$ .

$\delta$  et  $\delta'$  jouant des rôles symétriques nous pouvons toujours supposer  $m_1(\delta) > m_2(\delta)$ . Ces deux règles étant de seuil  $\alpha$ , strictement inférieur à  $1/2$ , il résulte du lemme 5.1 que, pour tout  $i$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ),  $\delta_i < \delta'_{(i,i+1)}$  et  $\delta'_i < \delta_{(i,i+1)}$ . On a donc  $\delta'_{i-1} < \delta_{(i-1,i)} \leq \delta_i < \delta'_{(i,i+1)} \leq \delta'_{i+1} < \delta_{(i+1,i+2)}$ , dès que ces  $\delta_d$  et  $\delta'_d$  existent ; on obtient alors bien une règle de décision monotone au seuil  $\alpha$  en posant :

$$\left| \begin{array}{l} \delta''_d = \delta_d \text{ si } d = (i-1,i) \text{ ou } d = i, \text{ avec } i \text{ impair} \\ \delta''_d = \delta'_d \text{ si } d = (i-1,i) \text{ ou } d = i, \text{ avec } i \text{ pair.} \end{array} \right.$$

Cette règle vérifie pour tout  $i$ ,  $m_i(\delta'') = m_1(\delta) = \sup\{m_i(\delta), m_i(\delta')\}$  ; elle est donc bien strictement préférée à  $\delta$  et  $\delta'$ .

(2) D'après ce qui précède, toutes les règles de décision  $\delta$ , minimax au seuil  $\alpha$ , définissent le même vecteur  $\vec{m}(\delta)$  ; notons ce vecteur  $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ .

Soit deux règles  $\delta$  et  $\delta'$ , minimax au seuil  $\alpha$  ; nous allons démontrer, par récurrence sur l'ensemble totalement ordonné

$D_0 = \{(0,1), 1, (1,2), 2, \dots, (k-1,k), k\} = \{(0,1)\} \cup D$ , que les fonctions de test simples  $\delta_d$  et  $\delta'_d$  sont  $P_g$ -presque sûrement égales, pour tout  $d$  et tout  $\vartheta$ .

La propriété est triviale pour  $d = (0,1)$ , car par convention  $\delta_{(0,1)} = \delta'_{(0,1)} = 1$ .

Supposons la propriété démontrée pour tout  $d \leq (i-1,i)$  ; on a alors, pour

tout  $\vartheta$ ,  $\delta'_{(i-1,i)} = \delta_{(i-1,i)}$  ( $P_g$ -p.s.).

$\delta$  et  $\delta'$  jouant des rôles symétriques nous pouvons toujours supposer  $\delta_i \leq \delta'_i$ .

D'après le lemme 5.2(1), il existe  $\vartheta_*$  dans  $\bar{0}_i \cap \Theta$  tel que

$$E_{\vartheta_*}(\delta'_i - \delta'_{(i-1,i)}) = \inf_{\vartheta \in \Theta_i} E_{\vartheta}(\delta'_i - \delta'_{(i-1,i)}) ; \text{ on a alors}$$

$m_i = E_{\vartheta_*}(\delta'_i - \delta'_{(i-1,i)}) = E_{\vartheta_*}(\delta'_i - \delta_{(i-1,i)}) \geq E_{\vartheta_*}(\delta_i - \delta_{(i-1,i)}) \geq m_i$  d'où  $E_{\vartheta_*}(\delta'_i - \delta_{(i-1,i)}) = E_{\vartheta_*}(\delta_i - \delta_{(i-1,i)})$  et donc  $\delta'_i = \delta_i$  ( $P_{\vartheta_*}$ -p.s.) ; les probabilités  $P_g$  étant équivalentes, on a aussi  $\delta'_i = \delta_i$  ( $P_g$ -p.s.) quel que soit  $\vartheta$ .

Il faut maintenant établir que  $\delta'_{(i,i+1)} = \delta_{(i,i+1)}$  ( $P_g$ -p.s.).  $\delta$  et  $\delta'$  jouant des rôles symétriques nous pouvons supposer  $\delta_{(i,i+1)} \leq \delta'_{(i,i+1)}$ . Introduisons la règle de décision monotone,  $\delta''$ , définie par :  $\delta''_d = \delta_d$  si  $d \leq (i,i+1)$  et  $\delta''_d = \delta'_d$  si  $d \geq i+1$  (voir figure 2, avec les mêmes conventions

que pour la figure 1, et en représentant comme confondus les points correspondant à  $\delta_d$  et  $\delta'_d$ , lorsque  $\delta_d = \delta'_d$  ( $P_{\vartheta}$ -p.s.).

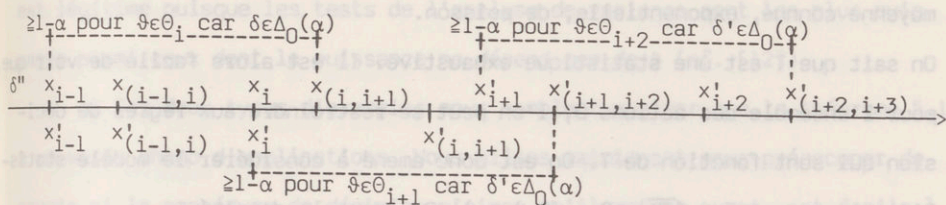


Figure 2.

$\delta$  et  $\delta'$  étant dans  $\Delta_0(\alpha)$ , par définition de  $\delta''$ , on a  $R(\vartheta, \delta'') \leq \alpha$  pour  $\vartheta$  n'appartenant pas à  $\Theta_{i+1}$ ; mais comme  $\delta_i = \delta'_i$  ( $P_{\vartheta}$ -p.s.), on a pour tout  $\vartheta$  dans  $\Theta_{i+1}$  :  $R(\vartheta, \delta'') = 1 - E_{\vartheta}(\delta'_{(i+1,i+2)} - \delta_i) = 1 - E_{\vartheta}(\delta'_{(i+1,i+2)} - \delta'_i) = R(\vartheta, \delta') \leq \alpha$ .  $\delta''$  appartient donc bien à  $\Delta_0(\alpha)$ .

D'autre part, par construction, on a  $m_{i+1}(\delta'') \geq m_{i+1}(\delta') = m_{i+1}$  et, pour tout  $j$  différent de  $i+1$ ,  $m_j(\delta'') = m_j$ .

$\delta''$  est donc minimax au seuil  $\alpha$ , puisque  $\delta$  et  $\delta'$  le sont; on a alors

$m_{i+1}(\delta'') = m_{i+1}$ . D'après le lemme 5.2(1), il existe  $\vartheta'_*$  dans  $\bar{\Theta}_{i+1} \cap \Theta$  tel que

$$E_{\vartheta'_*}(\delta'_{i+1} - \delta_{(i,i+1)}) = \inf_{\vartheta \in \Theta_{i+1}} E_{\vartheta}(\delta'_{i+1} - \delta_{(i,i+1)}); \text{ et donc}$$

$$m_{i+1} = E_{\vartheta'_*}(\delta'_{i+1} - \delta_{(i,i+1)}) \geq E_{\vartheta'_*}(\delta'_{i+1} - \delta'_{(i,i+1)}) \geq m_{i+1}; \text{ d'où}$$

$$E_{\vartheta'_*}(\delta'_{i+1} - \delta_{(i,i+1)}) = E_{\vartheta'_*}(\delta'_{i+1} - \delta'_{(i,i+1)}); \text{ ce qui implique}$$

$\delta'_{(i,i+1)} = \delta_{(i,i+1)}$  ( $P_{\vartheta'_*}$ -p.s.); les probabilités  $P_{\vartheta}$  étant équivalentes, on a aussi  $\delta'_{(i,i+1)} = \delta_{(i,i+1)}$  ( $P_{\vartheta}$ -p.s.) pour tout  $\vartheta$ . ■

## 6. APPLICATIONS

Avant de nous intéresser au calcul explicite de la règle de décision minimax, nous allons donner quelques cas de figure conduisant à un modèle statistique du type de celui qui a été traité.

a) Considérons un modèle statistique exponentiel à paramètre réel :

$(\Omega, A, (Q_{\vartheta})_{\vartheta \in \Theta})$ ,  $Q_{\vartheta}$  de densité  $q_{\vartheta}(\omega) = C(\vartheta) \exp[f(\vartheta) T(\omega)]$  par rapport à une mesure  $\mu$ ;  $\Theta$  étant un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f(\cdot)$  croissante.

Le chercheur travaille sur un tel modèle lorsqu'il réalise un  $n$  échantillon d'une loi de l'un des types suivants : binomiale, normale de variance ou de moyenne connue, exponentielle, de poisson.

On sait que  $T$  est une statistique exhaustive. Il est alors facile de voir que pour l'ensemble des actions  $D$ , l'on peut se restreindre aux règles de décision qui sont fonction de  $T$ . On est donc amené à considérer le modèle statistique image par  $T$  :  $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, (P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ .  $P_\vartheta$  admet la densité  $p_\vartheta(t) = C(\vartheta) \exp[f(\vartheta) t]$  par rapport à la mesure  $m$ , image de  $\mu$  par  $T$ . Ce modèle fait partie de ceux envisagés dans le paragraphe 2. Si de plus  $f(\cdot)$  est continue, ce qui est le cas des exemples donnés, les conditions du théorème 5.1 sont vérifiées.

b) Un très grand nombre de tests statistiques sont basés sur une statistique réelle  $T$  dont la famille des lois images  $(P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$  ( $\Theta \subset \mathbb{R}$ ) est exactement ou asymptotiquement une famille de probabilités à rapport de vraisemblance monotone.

Karlin et Rubin [3] montrent par exemple que les familles de probabilités :  $(\text{Student}_{\ell, \vartheta})_{\vartheta \in \mathbb{R}}$ ,  $(\text{Fisher}_{\ell, n, \vartheta})_{\vartheta \in \mathbb{R}^+}$ ,  $(\text{khi-deux}_{\ell, \vartheta})_{\vartheta \in \mathbb{R}^+}$ , à paramètre de non centralité  $\vartheta$ , sont à rapport de vraisemblance monotone. Elles vérifient même les conditions du théorème 5.1.

La statistique  $T$  fournit alors un modèle statistique image, sur lequel on peut appliquer les résultats précédents à une partition d'intervalles des valeurs du paramètre  $\vartheta$ .

Il en est ainsi des tests d'analyse de variance, puisqu'ils sont basés sur des statistiques engendrant une famille du type :  $(\text{Fisher}_{\ell, n, \vartheta})_{\vartheta \in \mathbb{R}^+}$ . A une division par l'écart-type  $\sigma$  près,  $\vartheta$  est le paramètre dont on teste la nullité. Par exemple dans une analyse de variance classique à deux facteurs,  $\vartheta$  est égal à  $\sqrt{\sum \vartheta_{ij}^2} / \sigma$  pour le test sur l'additivité des facteurs, et égal à  $\sqrt{\sum \alpha_i^2} / \sigma$  pour le test sur la nullité des effets additifs du premier facteur. Le chercheur peut ainsi prendre en compte des hypothèses moins strictes que la

nullité de  $\vartheta$ .

Le fait de construire nos procédures de décision à partir de la statistique  $T$  est légitime puisque les tests de l'analyse de variance sont les plus puissants parmi ceux dont la puissance ne dépend que de  $\vartheta$  (cf. [12]).

c) Ces deux types d'exemples nous semblent montrer que le théorème 5.1 a un vaste champ d'applications. Nous allons maintenant nous préoccuper de savoir si la procédure de décision minimax qu'il met en avant, est facile à expliciter.

Lorsque  $k = 2$ , une règle de décision  $\delta$  minimax au seuil  $\alpha$  ( $\alpha < 1/2$ ) est définie par  $\delta_1$  et  $\delta_{(1,2)}$  tels que  $E_{\vartheta_1}(\delta_1) = E_{\vartheta_1}(1 - \delta_{(1,2)}) = \alpha$  avec

$$\vartheta_1 = \sup\theta_1 = \inf\theta_2. \text{ On a bien sûr } m_1(\delta) = m_2(\delta) = \alpha.$$

Les fonctions de test  $\delta_1$  et  $(1 - \delta_{(1,2)})$  définissent des tests uniformément plus puissants de  $\theta_2$  contre  $\theta_1$  et de  $\theta_1$  contre  $\theta_2$ . Les deux hypothèses  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont ainsi traitées de façon symétrique.

Lorsque  $k = 3$  et  $\alpha < 1/2$ ,  $\Delta_0(\alpha)$  peut être vide ; il ne l'est pas si

$\vartheta_1 = \sup\theta_1 = \inf\theta_2$  et  $\vartheta_2 = \sup\theta_2 = \inf\theta_3$  sont suffisamment éloignés. En effet d'après le lemme 4.1 on doit pouvoir trouver  $a_1$  dans  $E$  tel que :

$$E_{\vartheta_1}(a_1) \geq 1 - \alpha \text{ et } E_{\vartheta_2}(1 - a_1) \geq 1 - \alpha.$$

Appelons  $b$  le plus petit élément de  $E$  tel que  $E_{\vartheta_1}(b) = 1 - \alpha$  et  $c$  le plus grand élément de  $E$  tel que  $E_{\vartheta_2}(1 - c) = 1 - \alpha$ .

Si  $\Delta_0(\alpha)$  non vide on a,  $b \leq a_1 \leq c$  et la règle  $\delta'$  définie par  $\delta'_1 = 1_\varnothing$ ,

$\delta'_{(1,2)} = b$ ,  $\delta'_2 = c$  et  $\delta'_{(2,3)} = 1_{\overline{\mathbb{R}}}$ , appartient à  $\Delta_0(\alpha)$  ; alors, d'après le lemme 5.1 et le choix de  $b$  et  $c$ , on a pour toute règle  $\delta$  dans  $\Delta_0(\alpha)$  :

$$\delta_1 < b \leq \delta_{(1,2)} \leq \delta_2 \leq c < \delta_{(2,3)}.$$

Sous les conditions du théorème 5.1, on peut donc définir une règle de décision minimax au seuil  $\alpha < 1/2$  (unique à une équivalence près), en posant

$\delta_{(1,2)} = b$ ,  $\delta_2 = c$ , et en cherchant  $\delta_1$  et  $\delta_{(2,3)}$  tels que :

$$(1) \inf_{\vartheta \in \Theta_2} E_{\vartheta}(\delta_{(2,3)} - \delta_1) \geq 1 - \alpha$$

(2)  $E_{\vartheta_1}(\delta_1) = E_{\vartheta_2}(1 - \delta_{(2,3)})$  maximum.

Ce qui rend difficile le calcul de  $\delta_1$  et  $\delta_{(2,3)}$ , c'est la vérification de la première condition.

Cette difficulté disparaîtrait si le minimum se réalisait à l'une des bornes. C'est à dire, si le  $\vartheta_*$  du lemme 5.2 était toujours égal à  $\inf\theta_0$  ou  $\sup\theta_0$ . Ceci peut se démontrer (cf. [8]) avec la condition supplémentaire : pour tout triplet  $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$  d'éléments de  $\theta$  et tout triplet  $(t_1, t_2, t_3)$  d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}$ , vérifiant  $\vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq \vartheta_3$  et  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ , on a  $\det(p_{\vartheta_i}(t_j))_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} \geq 0$ . Cette condition est très souvent vérifiée (cf. [3]), elle l'est en particulier pour les exemples d'application considérés.

L'existence et la construction d'une règle de décision minimax au seuil  $\alpha < 1/2$  ne dépendent alors que des  $(k-1)$  probabilités  $\{P_{\vartheta_i}\}$  avec  $\vartheta_i = \sup\theta_i$  pour  $i$  appartenant à  $\{1, \dots, k-1\}$ . Très souvent, des algorithmes de calcul des fonctions de répartition  $F_{\vartheta_i}$  des  $P_{\vartheta_i}$  existent déjà. Barra [1] en donne pour les lois de khi-deux et Fisher non centrés.

Un seuil  $\alpha$  étant donné, il est alors possible (cf. [8]), à partir du lemme 4.1, de voir si  $\Delta_0(\alpha)$  est vide ou non.

Lorsque  $\Delta_0(\alpha) = \emptyset$ , le chercheur doit, soit augmenter  $\alpha$  ce qui revient à accepter une information moins fiable, soit regrouper des  $\theta_i$  donc chercher une information plus grossière. Ces solutions n'étant pas toujours possibles, il est préférable d'essayer de calculer avant l'expérience une taille minimum d'échantillon qui permette d'avoir  $\Delta_0(\alpha)$  non vide, pour un seuil  $\alpha$  choisi par rapport au contexte de recherche. La taille d'échantillon influe sur les calculs par l'intermédiaire de la distribution de la statistique  $T$  (voir les exemples 6.a) et 6.b)). Ainsi en analyse de variance elle change le deuxième degré de liberté de la distribution de Fisher.

Lorsque  $\Delta_0(\alpha)$  n'est pas vide le calcul d'une suite  $(\delta_d)_{d \in D - \{k\}}$ , définissant une règle minimax au seuil  $\alpha$ , unique à une équivalence près, peut se faire

à partir de deux algorithmes de calcul (cf. [8]). Comme le montre la construction de la règle  $\delta''$ , dans la partie (1) de la démonstration du théorème 5.1, il est possible de définir les  $\delta_{(i-1,i)}$  et  $\delta_i$  d'abord pour  $i$  impair, ensuite pour  $i$  pair.

Nous pensons ainsi avoir montré qu'il est possible, dans un grand nombre de cas classiques, d'utiliser les procédures de décision que nous avons construites.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARRA J.R., Notions fondamentales de statistique mathématique, Paris, Dunod, 1971.
- [2] BROWN L.D., COHEN A. and STRAWDERMAN W.E., "A complete class theorem for strict monotone likelihood ratio with applications", Ann. Statist., 4 (1976), 712-722.
- [3] KARLIN S., "Decision theory of Polya type distributions. Case of two actions I", Proc. Third Berkeley Symp. Prob. Statist., 1 (1955), 115-128.
- [4] KARLIN S. and RUBIN H., "The theory of decision procedures for distributions with monotone likelihood ratio", Ann. Math. Statist., 27 (1956), 272-299.
- [5] KARLIN S. and RUBIN H., "Polya type distributions IV. Some principles of selecting a single procedure from a complete class", Ann. Math. Statist., 29 (1958), 1-21.
- [6] LEHMANN E.L., Testing statistical hypotheses, New York, Wiley, 1959.
- [7] MONFORT A., Cours de probabilités, Paris, Economica, 1980.
- [8] MOREL G., Procédures de décision a choix multiples et non incompatibles, Rouen, Université de Rouen E.R.A. C.N.R.S. 900, Document de travail n° 5, 1984.
- [9] MOREL G., Intervalles de confiance sur une classe ordonnée d'intervalles, Rouen, Université de Rouen U.A. C.N.R.S. 759, Document de travail à paraître.
- [10] NEYMAN J. and PEARSON E.S., "The testing of statistical hypotheses in relation to probability a priori", Proc. Camb. Phil. Soc., 29 (1933).
- [11] REUHLIN M., "Epreuves d'hypothèses nulles et inférence fiduciaire en psychologie", Journal de Psychologie, 3 (1977), 277-292.
- [12] SHEFFE H., The analysis of variance, New York, Wiley, 1959.

Reçu en Mars 1986