HAL open science

blocs équilibres d'une suite aléatoire de variables statistiques

Galaye Dia

To cite this version:

Galaye Dia. blocs équilibres d'une suite aléatoire de variables statistiques. Annales de l'ISUP, 1987, XXXII (1-2), pp.19-44. hal-03685051

HAL Id: hal-03685051

https://hal.science/hal-03685051v1

Submitted on 1 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Pub. Inst. Stat. Univ.
XXXII, fasc. 1-2, 1987, 19 à 44

BLOCS EQUILIBRES D'UNE SUITE ALEATOIRE DE VARIABLES STATISTIQUES

par

Galaye DIA

L.S.T.A Université P. et M. Curie - Paris VI

0 - INTRODUCTION

L'objet de cet article est l'étude des blocs équilibrés de variables statistiques associées à une superposition de processus ponctuels. Dans le cas de l'échantillon, GEFFROY [3] établit des conditions nécessaires et suffisantes de convergence vers 0 en probabilité de la largeur des blocs. Nous nous proposons d'étendre ces résultats dans le cas des processus ponctuels.

I - NOTATIONS ET DEFINITIONS

On considère sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ n processus ponctuels indépendants $f_i^{\bullet}$ $i = 1,\dots,n$ à valeurs dans R_+ et de même loi qu'un processus $f_o^{\bullet}$.

Pour tout borélien A de R_+ si l'on pose $\lambda(A) = P(N(f_o,A) > 0)$ où $N(f_o^{\bullet},A)$ désigne l'effectif aléatoire de $f_o^{\bullet}$ sur A, on appelle support de la répartition ponctuelle aléatoire ou processus ponctuel $f_o^{\bullet}$ l'ensemble

$$S = \{x, x \in R_+, \ \forall A \text{ ouvert}, x \in A, \lambda(A) > 0\}.$$

On suppose que $S = R_+$ et que l'effectif aléatoire de $f_o^{\bullet}$ sur R_+ est fini presque sûrement i.e. $N(f_o^{\bullet},R_+) < +\infty$ p.s.

Considérons la superposition $f_{(n)}^{\bullet}$ des n processus $f_i^{\bullet}$, $i = 1 = 1,\ldots,n$ dont on désignera par m son effectif aléatoire sur R_+ i.e.

$$f_{(n)}^{\bullet} = \sum_{i=1}^{n} f_i^{\bullet} \qquad m = \sum_{i=1}^{n} N(f_i^{\bullet},R_+)$$

Lorsque $m \geq 1$ désignons par $X_1^{(n)},\ldots,X_m^{(n)}$ les points du processus $f_{(n)}^{\bullet}$ ordonnés suivant l'ordre naturel dans R_+.

Si $m = 0$ on pose $X_o^{(n)} = 0$.

Ainsi on a

$$0 \leq X_1^{(n)} \leq \ldots \leq X_m^{(n)}.$$

Désignons par $\mathcal{B}$ l'ensemble des boréliens de R_+.

Pour tout $x \in R_+$ posons $\mu(x) = E(N(f_o^{\bullet},[0,x[))$ où le symbole E désigne l'espérance mathématique.

L'application $E(N(f_o^{\bullet},\cdot))$ de $\mathcal{B}$ dans R_+ étant une mesure, la fonction $\mu(\cdot)$ est non décroissante et continue à gauche sur R_+.

Posons $\|\mu\| = E(N(f_o^{\bullet},R_+))$ qu'on suppose fini et prolongeons $\mu(\cdot)$ sur R en posant $\mu(x) = 0$ si $x \leq 0$.

La fonction $F(\cdot)$ définie sur R par

$$(\forall x \in R),\ F(x) = \frac{\mu(x)}{\|\mu\|}$$

est alors une fonction de répartition.

Appelons H_1 et H_2 les hypothèses suivantes :

$$H_1 : (\forall h \in R_+^*),\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - F(x+h)}{1 - F(x)} = 0$$

$$H_2 : \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - F(x)}{P(N(f_o^\bullet,[x,+\infty[) > 0)} = \frac{1}{\|\mu\|}$$

Ces deux hypothèses sont respectivement équivalentes aux suivantes :

$$H_1' : (\forall h \in R_+^*),\ \lim_{x\to+\infty} \frac{E(N(f_o^\bullet,[x+h,+\infty[))}{E(N(f_o^\bullet,[x,+\infty[))} = 0$$

$$H_2' : \lim_{x\to+\infty} \frac{E(N(f_o^\bullet,[x,+\infty[))}{P(N(f_o^\bullet,[x,+\infty[) > 0)} = 1.$$

On vérifie aisément que cette dernière hypothèse H_2' est vérifiée lorsque $f_o^\bullet$ est le processus ponctuel d'effectif total égal à 1 associé à une v.a. X. Elle est aussi vérifiée lorsque $f_o^\bullet$ est un processsus de Poisson.

Si $m \geq 2$, on appelle bloc de la suite $X_1^{(n)},\dots,X_m^{(n)}$ tout intervalle de la forme $(X_i^{(n)},X_j^{(n)})$. Les blocs de la forme $(X_i^{(n)},X_{i+1}^{(n)})$ sont appelés mailles.

Afin d'étudier ces notions nous supposons que les v.s. $X_1^{(n)},\dots,X_m^{(n)}$ $(m \geq 2)$ sont presque sûrement distinctes c'est-à-dire : si $m = m_o$, $m_o \geq 2$ on a :

$$H_3 : \quad \forall(i,j),\ (i \leq m_o),\ (j \leq m_o),\ (i \neq j),\ P(X_i^{(n)} \neq X_j^{(n)}/\Omega_{m_o}) = 1.$$

Nous pourrons alors écrire :

$$0 < X_1^{(n)} < \dots < X_{m_o}^{(n)}.$$

Pour tout $\alpha \in N^*$ considérons les v.a. ainsi définies

$$Y_n^\alpha = \begin{cases} X_{m-\alpha+1}^{(n)} & \text{si } m \geq \alpha \\ 0 & \text{si } m < \alpha . \end{cases}$$

D'après la propriété H_3 on a, si $m = m_o$, $m_o \geq 2$

$$Y_n^1 > \ldots > Y_n^{m_o} > 0.$$

Réordonnons ces v.a. On a :

$$0 < Y_{n,1} < \ldots < Y_{n,m_o} .$$

Soit K un entier arbitrairement choisi tel que $2 \leq K \leq m_o$. On peut partager l'intervalle $]0, Y_{n,m_o}]$ en K blocs de la forme $]Y_{n,R(j-1)}, Y_{n,R(j)}]$ $j = 1,\ldots,K$ avec $Y_{n,R(0)} = 0$ et $Y_{n,R(K)} = Y_{n,m_o}$ de telle manière que chac de ces blocs contienne $[\frac{m_o}{K}]$ ou $[\frac{m_o}{K}] + 1$ points de $(X_1^{(n)},\ldots,X_{m_o}^{(n)})$.

Posons $V_{nj} = Y_{n,R(j)} - Y_{n,R(j-1)}$ $j = 1,\ldots,K$,

$$V_n = \sup_{1 \leq j \leq K} V_{nj} ,$$

$$\nu = [\frac{m_o}{K}] ,$$

comme $m \to +\infty$ p.s. lorsque $n \to +\infty$, on peut considérer que K peut prendre toutes valeurs de N^* et dépend fonctionnellement de m ainsi que R.

II - RESULTATS PRELIMINAIRES

Afin d'étudier les blocs de la suite nous introduisons de nouvelles variables aléatoires que nous allons définir et étudier.

Quel que soit $\omega \in \Omega$, désignons par $\tilde{N}(\omega)$ le nombre d'indices i pour lesquels $\tilde{N}(f_i^\omega, [0,+\infty[)$ est supérieur ou égal à 1 ;

$$\tilde{N}(\omega) = \mathrm{Card}\{i, N(f_i^\omega, [0,+\infty[) \geq 1,\ i = 1,\dots,n\}.$$

$\tilde{N}$ est une v.a. qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $p = P(N(f_0^\bullet, [0,+\infty[) \geq 1)$.

Lorsque $N(f_i^\omega, [0,+\infty[) \geq 1$, choisissons le point du nuage correspondant le plus à droite que nous allons désigner par $\tilde{X}_i(\omega)$. Pour alléger les notations, nous allons supposer que c'est pour les $\tilde{N}$ premiers indices i qu'on a $N(f_i^\bullet, 0,+\infty) \geq 1$. Par ce procédé nous formons ainsi un échantillon de taille aléatoire $(\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_{\tilde{N}})$ formé de variables statistiques, lorsque $\tilde{N} \geq 1$. L'échantillon est réduit à (0) si $\tilde{N} = 0$.

Sachant que $\tilde{N} = k$, déterminons la loi du k-uple $(\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_k)$.

$$P(\tilde{X}_1 < x_1,\dots,\tilde{X}_k < x_k \,/\, \tilde{N} = k) = \frac{P(\tilde{X}_1 < x_1,\dots,\tilde{X}_k < x_k, \tilde{N} = k)}{P(\tilde{N} = k)}$$

$$= \frac{C_n^k\, P(N(f_i^\bullet, [x_i,+\infty[) = 0, N(f_i^\bullet, [0,+\infty[) \geq 1, i = 1,\dots,k, N(f_i^\bullet, [0,+\infty[) = 0, i = k+1,\dots,n)}{C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}}$$

En utilisant l'indépendance des $f_i^\bullet$, $i = 1,\dots,n$ on obtient :

$$P(\tilde{X}_1 < x_1,\dots,\tilde{X}_k < x_k / \tilde{N} = k) = \frac{\prod_{i=1}^{k} P(N(f_i, [x_i,+\infty]) = 0, N(f_i^\bullet, [0,+\infty[) \geq 1)}{p^k}.$$

Il en résulte que sous la condition $\tilde{N} = k$, la loi du k-uple $(\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_k)$ est la loi d'un échantillon de taille k d'une variable aléatoire $\tilde{X}$ de fonction de répartition $\tilde{F}$ définie par

$$\tilde{F}(x) = P(\tilde{X} < x) = \frac{P(N(f_0^\bullet, [x,+\infty[) = 0, N(f_0^\bullet, [0,+\infty[) \geq 1)}{p}.$$

Posons $F^{\#}(x) = P(N(f_o^{\bullet},[x,+\infty[) = 0)$.

En utilisant la formule de Bayes on a :

$$\text{(E)} \quad F^{\#}(x) = \tilde{F}(x)p + (1-p).$$

Considérons l'échantillon ordonné $(\tilde{X}_{(1)},\ldots,\tilde{X}_{(\tilde{N})})$ déduit de $(\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_{\tilde{N}})$ et définissons la v.a. $\tilde{Y}_n^{\alpha}$ de la façon suivante :

$$\tilde{Y}_n^{\alpha} = \begin{cases} \tilde{X}_{(\tilde{N}-\alpha+1)} & \text{si } \tilde{N} \geq \alpha \\ 0 & \text{si } \tilde{N} < \alpha \end{cases}$$

où α est un entier supérieur ou égal à 1.

<u>*Lemme 1.II*</u> *: Si a_n est une suite certaine non décroissante telle que a_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} P(N(f_o^{\bullet},[a_n,+\infty[) = 0) = 1.$$

<u>Preuve</u> : Considérons l'événement $\{N(f_o^{\bullet},[a_n,+\infty[) \geq 1\}$. Lorsque n varie on obtient une suite décroissante d'événements. Soit

$$A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{N(f_o^{\bullet},[a_n,+\infty[) \geq 1\}$$

et soit $\omega \in A$; on a $N(f_o^{\omega},[a_n,+\infty[) \geq 1$ pour tout n, d'où $N(f_o^{\omega},R_+) = +\infty$; donc $\omega \in \Omega_o$ défini par $\Omega_o = \{\omega | N(f_o^{\omega},R_+) = +\infty\}$. Il en résulte que $A \subset \Omega_o$. Comme $P(\Omega_o) = 0$ par hypothèse, on a $P(A) = 0$. C.Q.F.D.

Il résulte de ce lemme que :

$$\lim_{x\to+\infty} P(N(f_o^{\bullet},[x,+\infty[) = 0) = 1$$

et que $F^{\#}$ est une fonction de répartition.

Déterminons la loi de $\tilde{Y}_n^{\alpha}$.

Proposition 1.II : Soient $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \ldots \leq X_{n,n}$ *les statitisques d'ordre d'un échantillon d'une v.a.* X *de fonction de répartition* $F^{\#}$. $\tilde{Y}_n^{\alpha}$ *a la même loi que* $X_{n-\alpha+1,n}$ *i.e.*

$$P(\tilde{Y}_n^{\alpha} < x) = \frac{n!}{(\alpha-1)!(n-\alpha)!}\int_{1-F^{\#}(x)}^{1} y^{\alpha-1}(1-y)^{n-\alpha}\, dy.$$

Preuve : $P(\tilde{Y}_n^{\alpha} < x) = \sum_{k=0}^{n} P(\tilde{Y}_n^{\alpha} < x \,/\, \tilde{N} = k)\, P(\tilde{N} = k)$

$$= P(\tilde{N} \leq \alpha-1) + \sum_{k=\alpha}^{n} P(\tilde{Y}_n^{\alpha} < x \,/\, \tilde{N} = k)\cdot P(\tilde{N} = k).$$

En utilisant l'expression de la loi de la statistique d'ordre $k-\alpha+1$ par la fonction béta incomplète on a :

$$P(\tilde{Y}_n^{\alpha} < x) = P(\tilde{N} \leq \alpha-1) + \sum_{k=\alpha}^{n} \frac{n!\, p^k(1-p)^{n-k}}{(k-\alpha)!(\alpha-1)!(n-k)!}\int_0^{\tilde{F}(x)} t^{k-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}\, dt$$

$$= P(\tilde{N} \leq \alpha-1) + \int_0^{\tilde{F}(x)} \left[\sum_{j=0}^{n-\alpha} \frac{n!}{j!(\alpha-1)!(n-\alpha-j)!}\, p^{\alpha+j}(1-p)^{n-\alpha-j}\, t^j(1-t)^{\alpha-1}\right] dt$$

$$= P(\tilde{N} \leq \alpha-1) + \frac{p^{\alpha} n!}{(\alpha-1)!(n-\alpha)!}\int_0^{\tilde{F}(x)} (1-t)^{\alpha-1}\,[1-p(1-t)]^{n-\alpha}\, dt$$

En posant $p(1-t) = y$ on obtient :

$$P(\tilde{Y}_n^{\alpha} < x) = \frac{n!}{(\alpha-1)!(n-\alpha)!}\int_{p(1-\tilde{F}(x))}^{p} y^{\alpha-1}(1-y)^{n-\alpha}\, dy + P(\tilde{N} \leq \alpha-1)\ ;$$

mais

$$P(\tilde{N} \leq \alpha-1) = \frac{n!}{(\alpha-1)!(n-\alpha)!}\int_p^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{n-\alpha}\, dy$$

et d'après (E) $p(1-\tilde{F}(x)) = 1 - F^{\#}(x)$;

d'où il résulte que :

$$P(\tilde{Y}_n^{\alpha} < x) = \frac{n!}{(\alpha-1)!(n-\alpha)!} \int_{1-F^{\#}(x)}^{1} y^{\alpha-1}(1-y)^{n-\alpha}\, dy. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Proposition 2.II : i) Supposons H_2 et H_1 vérifiées. Alors on a :

$$(\forall h > 0) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - F^{\#}(x+h)}{1 - F^{\#}(x)} = 0.$$

ii) Si F est absolument continue alors $F^{\#}$ est absolument continue.

Preuve : i) Au voisinage de l'infini on a, d'après H_2', $1 - F^{\#}(x)$ est équivalent à $E(N(f_o^{\bullet},[x,+\infty[))$. On en déduit que :

$$\frac{1 - F^{\#}(x+h)}{1 - F^{\#}(x)} \text{ est équivalent à}$$

$$\frac{E(N(f_o^{\bullet},[x+h,+\infty[))}{E(N(f_o^{\bullet},[x,+\infty[))} \text{ qui d'après } H_1' \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty.$$

ii) Il suffit de le montrer pour $1 - F^{\#}(x) = \phi(x)$. On doit montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille $\{]c_k,d_k[\}_{k=1}^{n}$ d'intervalles disjoints de R_+ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} (d_k - c_k) < \delta \quad \text{on ait} \quad \sum_{k=1}^{n} |\phi(d_k) - \phi(c_k)| < \varepsilon.$$

$\frac{\mu(x)}{\|\mu\|}$ étant absolument continue on en déduit que $\|\mu\| - \mu(x) = E(N(f_o^{\bullet},[x,+\infty[))$ est absolument continue.

Les fonctions $\phi(x)$ et $E(N(f_o^{\bullet},[x,+\infty[))$ sont des fonctions décroissantes de x

On peut écrire :

$$E(N(f_o^{\bullet},[x,+\infty[)) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(N(f_o^{\bullet},[x,+\infty[) > j) \ ;$$

et pour tout $j = 0,1,\ldots, P(N(f_o^{\bullet},[x,+\infty[) > j)$ est une fonction décroissante de x.

$$E(N(f_o^{\bullet},[x,+\infty[)) = \phi(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} P(N(f_o^{\bullet},[x,+\infty[) > j).$$

En appliquant à $E(N(f_o^{\bullet},[x,+\infty[))$ la propriété d'absolue continuité on a

$$\sum_{k=1}^{n} |E(N(f_o^{\bullet},[d_k,+\infty[)) - E(N(f_o^{\bullet},[c_k,+\infty[))| =$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\phi(c_k) - \phi(d_k)| + \sum_{k=1}^{n} \{ \sum_{j=1}^{+\infty} [P(N(f_o^{\bullet},[c_k,+\infty[) > j) -$$

$$P(N(f_o^{\bullet},[d_k,+\infty[) > j)]\} < \varepsilon.$$

Tous les termes en sommation sont positifs, d'où :

$$\sum_{k=1}^{n} [\phi(c_k) - \phi(d_k)] = \sum_{k=1}^{n} |\phi(d_k) - \phi(c_k)| < \varepsilon \ ;$$

ce qui prouve que ϕ est absolument continue. C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> : Supposons que F soit absolument continue de densité f strictement positive pour x assez grand.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+h)}{f(x)}$ existe pour tout $h > 0$ alors l'hypothèse H_1 est équivalente à la condition suivante :

$$(\forall h > 0), \ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+h)}{f(x)} = 0.$$

Nous supposerons dans tout ce qui va suivre que F est absolument continue de densité f.

Soit alors $f^{\#}$ la densité de $F^{\#}$ et considérons l'hypothèse suivante :

H_4 : $f^{\#}(x)$ est strictement positive pour x assez grand et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{f^{\#}(x)} = \frac{1}{\|\mu\|}.$$

Proposition 3.II : Si $\frac{f(x)}{f^{\#}(x)}$ *admet une limite quand* x *tend vers* $+\infty$ *alors* H_2 *est équivalente à* H_4.

Preuve : Supposons H_4 vérifiée et soit $\varepsilon > 0$

$$(\exists x_0) \quad (\forall x > x_0) \; \frac{1}{\|\mu\|} - \varepsilon < \frac{f(x)}{f^{\#}(x)} < \frac{1}{\|\mu\|} + \varepsilon$$

d'où :

$$\frac{1}{\|\mu\|} - \varepsilon \leq \frac{1 - F(x)}{1 - F^{\#}(x)} < \frac{1}{\|\mu\|} + \varepsilon$$

ou encore $$1 - \varepsilon\|\mu\| \leq \frac{E(N(f_0^{\bullet},[x,+\infty[))}{P(N(f_0^{\bullet},[x,+\infty[) > 0)} < 1 + \varepsilon\|\mu\|$$

ε étant arbitraire on a donc H_2 vérifiée.

Réciproquement supposons H_2 et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{f^{\#}(x)} = \lambda$.

Alors $(\forall\varepsilon > 0)$ on a dès que x est assez grand $\lambda-\varepsilon < \frac{1 - F(x)}{1 - F^{\#}(x)} \leq \lambda+\varepsilon$.

Il en résulte que $\lambda\|\mu\| = 1$.

Proposition 4.II : Si le support de $f_0^{\bullet}$ *est* R_+ *alors on a :*

$$Supp\ F = R_+.$$

Preuve : Soit $[a,b[$ un intervalle ouvert dans R_+.

On a $0 < P(N(f_o^{\bullet},]a,b[) > 0) \leq E(N(f_o^{\bullet},]a,b[))$ d'où $F(b) - F(a) > 0$

donc $\text{Supp } F = R_+$. C.Q.F.D.

Ces résultats préliminaires étant établis, passons à l'étude des blocs équilibrés.

III - ETUDE DES BLOCS $V_{n,j}$

Considérons les hypothèses suivantes :

1) Le support de $F^{\#}$ est R_+

2) $F^{\#}$ est absolument continue de densité $f^{\#}$

3) $(\forall h > 0)$, $(\forall \alpha > 0)$, $(\exists x_o \in R_+)$, $(\forall x \geq x_o)$, $(\forall h' \geq h)$, $\dfrac{f^{\#}(x+h)}{f^{\#}(x)} \leq \alpha$

4) $(\forall x_o > 0)$, $\inf\limits_{0<x<x_o} f^{\#}(x) > 0$.

Posons $b_n = G^{\#-1}(\frac{1}{n})$ où $G^{\#}(x) = 1 - F^{\#}(x)$.

Le théorème que nous voulons établir est le suivant :

Théorème 1.III : Supposons que les hypothèses 1), 2), 3), 4) soient satisfaites. Si le nombre de blocs $K(m_o)$ est tel que :

$$K(m_o) = O(m_o) \quad et \quad \lim_{m_o \to +\infty} \frac{K(m_o)}{Log\, m_o} = +\infty$$

alors :

$$(\forall \varepsilon > 0),\ \nu(m) = O(nG^{\#}(b_n - \varepsilon)) \ (p.s.) \Rightarrow V_n \to 0 \ (p) \quad (n \to +\infty).$$

Pour établir ce théorème on va utiliser les blocs construits à partir de $(\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_{\tilde{N}})$.

Considérons les variables aléatoires $\tilde{Y}_n^{\alpha}$ préalablement définies en page 6.

La proposition 1.II et l'hypothèse 2) impliquent que les v.a. $\tilde{Y}_n^{\alpha}$ sont presque sûrement distinctes.

Soient $\tilde{K}$ un entier quelconque tel que $2 \leq \tilde{K} \leq \tilde{N}_o$ où $\tilde{N}_o$ est une valeur prise par $\tilde{N}$ supérieure ou égale à 2. On peut partager l'intervalle $]0,\tilde{Y}_{n,\tilde{N}_o}]$ en $\tilde{K}$ blocs de la forme $]\tilde{Y}_{n,R(j-1)}, \tilde{Y}_{n,R(j)}]$, $j = 1,\ldots,\tilde{K}$ avec $\tilde{Y}_{n,R(0)} = 0$ et $\tilde{Y}_{n,R(\tilde{K})} = \tilde{Y}_{n,\tilde{N}_o}$ de manière que chacun de ces blocs contienne $[\frac{\tilde{N}_o}{\tilde{K}}]$ ou $[\frac{\tilde{N}_o}{\tilde{K}}] + 1$ points de $(\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_{\tilde{N}_o})$. Posons

$$\tilde{V}_{n,j} = \tilde{Y}_{n,R(j)} - \tilde{Y}_{n,R(j-1)} \qquad j = 1,\ldots,\tilde{K}$$

$$\tilde{V}_n = \sup_{1\leq j\leq \tilde{K}} \tilde{V}_{n,j}$$

$$\tilde{\nu} = [\frac{\tilde{N}_o}{\tilde{K}}] .$$

On sait que $\tilde{N} \to +\infty$ p.s., on peut considérer que $\tilde{K}$ peut prendre toutes les valeurs de N^* et dépend, ainsi que R, fonctionnellement de $\tilde{N}$.

On va établir d'abord le théorème suivant :

Théorème 2.III : *Sous les hypothèses du théorème 1.III et en supposant que le nombre de blocs* $\tilde{K}(\tilde{N}_o)$ *soit tel que :*

$$\tilde{K}(\tilde{N}_o) = O(\tilde{N}_o) \quad \text{et} \quad \lim_{\tilde{N}_o \to +\infty} \frac{\tilde{K}(\tilde{N}_o)}{\operatorname{Log} \tilde{N}_o} = +\infty$$

alors on a :

$$\tilde{V}_n \to 0 \ (p), \ (n \to +\infty) \Longleftrightarrow \tilde{V}_{n,\tilde{K}} \to 0 \ (p), \ (n \to +\infty).$$

Supposons que $f_o^{\bullet}$ soit le processus ponctuel d'effectif total égal à 1 associé à une v.a. X. On a alors $\tilde{N} = n$ certain et Geffroy [3] a établi les lemmes 7), 8) et 9) suivants :

Lemme 7 : *On suppose que les hypothèses 1), 2), 3) sont vérifiées. Soient* $\varepsilon > 0$ *et* $\alpha \in]0,1/3[$ *et soit* $a > 0$ *tel que :*

$$(\forall x \geq a), \ (\forall h \geq \frac{\varepsilon}{4}), \ \frac{f^{\#}(x+h)}{f^{\#}(x)} \leq \alpha.$$

Choisissons $b > a$ *et une suite* $J(\tilde{N})$ *telle que* $\lim_{\tilde{N} \to +\infty} \frac{J(\tilde{N})}{K(\tilde{N})} = F^{\#}(b)$ *et que* $J(\tilde{N}) \in \{1,2,\ldots,K(\tilde{N}) - 1\}$. *On a alors* $\exists c > 0$, $\rho > 0$ *et* $\tilde{N}_o$ *tels que* $(\forall j > \tilde{N}_o)$

$$P\Big(\bigcup_{r=J(\tilde{N})}^{\tilde{K}} \tilde{V}_{n,r} > \varepsilon\Big) / \tilde{N} = j) < \frac{1}{1-2\alpha} \{P(\tilde{V}_{n,\tilde{K}} > \varepsilon / \tilde{N} = j)$$

$$+ c[\tilde{K}(j) - J(j)]e^{-\rho j}\}.$$

Lemme 8 : *Sous les hypothèses du lemme 7 et supposons l'hypothèse 4) vérifiée. Soit* $a' > b$; *il existe alors trois nombres* $\mu > 0$, $c' > 0$, $\rho' > 0$ *et un entier* $\tilde{N}_1$ *tels que pour tout* $j \geq \tilde{N}_1$ *on ait*

$$P\Big(\bigcup_{r=1}^{J(\tilde{N})-1} (\tilde{V}_{n,r} > \varepsilon\Big) / \tilde{N} = j) < \frac{a'}{\varepsilon}[\nu(j)+3](1 - \frac{\varepsilon\mu}{\nu(j)+3})^{R[J(j)]} + c'e^{-\rho' j}.$$

Lemme 9 : Pour que la fonction

$$\zeta(\tilde{N}_o) = [\tilde{\nu}(\tilde{N}_o) + 3]\,(1 - \frac{\varepsilon\mu}{\tilde{\nu}(\tilde{N}_o)+3})^{R(J(\tilde{N}_o))}$$

tende vers 0 lorsque $\tilde{N}_o \to +\infty$ $\forall\varepsilon > 0$, *il faut et il suffit que l'on ait :*

$$\lim_{\tilde{N}_o \to +\infty} \frac{\tilde{K}(\tilde{N}_o)}{\operatorname{Log} \tilde{N}_o} = +\infty \quad \text{ou encore} \quad \tilde{\nu}(\tilde{N}_o) = O(\frac{\tilde{N}_o}{\operatorname{Log} \tilde{N}_o}).$$

Preuve du théorème 2.III :

Supposons que $\tilde{V}_{n,\tilde{K}} \to 0$ (p), $(n \to +\infty)$.

Calculons $P(\tilde{V}_n > \varepsilon)$. Soit $\tilde{N}_2 = \max(\tilde{N}_o, \tilde{N}_1)$; $\tilde{N}_o$ et $\tilde{N}_1$ définies aux lemmes 7

$$(1) \qquad P(\tilde{V}_n > \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\tilde{N}_2-1} P(\tilde{V}_n > \varepsilon / \tilde{N} = j)P(\tilde{N} = j) + \sum_{j=\tilde{N}_2}^{n} P(\tilde{V}_n > \varepsilon/\tilde{N} = j)P(\tilde{N} = j).$$

On a :

$$P(\tilde{V}_n > \varepsilon / \tilde{N} = j) \leq P(\bigcup_{r=1}^{J(\tilde{N})-1} (\tilde{V}_{n,r} > \varepsilon)/\tilde{N} = j) + P(\bigcup_{r=J(\tilde{N})}^{\tilde{K}} (\tilde{V}_{n,r} > \varepsilon)/\tilde{N} = j)$$

Si $j \geq \tilde{N}_2$ les lemmes 7 et 8 entraînent ;

$$P(\tilde{V}_n > \varepsilon/\tilde{N} = j) \leq \frac{1}{1-2\alpha} \{P(\tilde{V}_{n,\tilde{K}} > \varepsilon/\tilde{N} = j) + c[\tilde{K}(j) - J(j)]\, e^{-\rho j}\}$$

$$+ \frac{a'}{\varepsilon} [\nu(j) + 3](1 - \frac{\varepsilon\mu}{\nu(j)+3})R(J(j)) + c'\, e^{-\rho j}.$$

En utilisant ces inégalités (1) devient :

$$(2)\qquad P(\tilde{V}_n > \varepsilon) \leq \sum_{j=0}^{\tilde{N}_2-1} P(\tilde{V}_n > \varepsilon/\tilde{N} = j)\, P(\tilde{N} = j) +$$

$$\frac{1}{1-2\alpha} \sum_{j=\tilde{N}_2}^{n} P(\tilde{V}_{n,\tilde{K}} > \varepsilon/\, \tilde{N} = j)\, P(\tilde{N} = j) +$$

$$\frac{1}{1-2\alpha} \sum_{j=\tilde{N}_2}^{n} c[\tilde{K}(j) - J(j)]e^{-\rho j}\, P(\tilde{N} = j) +$$

$$\frac{a'}{\varepsilon} \sum_{j=\tilde{N}_2}^{n} [\nu(j)+3](1 - \frac{\varepsilon\mu}{\nu(j)+3})^{R(J(j))}\, P(\tilde{N} = j) + c' \sum_{j=\tilde{N}_2}^{n} e^{-\rho j}\, P(\tilde{N} = j).$$

La première somme figurant dans le second membre de (2) est majorée par $\sum_{j=0}^{\tilde{N}_2-1} P(\tilde{N}=j)$, donc tend vers 0 si $n \to +\infty$.

La deuxième somme est majorée par $\frac{1}{1-2\alpha} P(\tilde{V}_{n,\tilde{K}} > \varepsilon)$ et tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ par hypothèse.

Considérons la somme $\frac{1}{1-2\alpha} \sum_{j=\tilde{N}_2}^{n} c[\tilde{K}(j) - J(j)]\, e^{-\rho j}\, P(\tilde{N} = j)$.

$$\frac{1}{1-2\alpha} \sum_{j=\tilde{N}_2}^{n} c[\tilde{K}(j) - J(j)]\, e^{-\rho j}\, P(\tilde{N} = j) \leq \frac{c}{1-2\alpha} \sum_{j=\tilde{N}_2}^{n} j\, e^{-\rho j}\, P(\tilde{N} = j)$$

$$(3)\qquad \leq \frac{c}{1-2\alpha} \sum_{k=0}^{n-\tilde{N}_2} \frac{n!\,(p\, e^{-\rho})^{\tilde{N}_2+k}}{(\tilde{N}_2+k-1)!\,(n-\tilde{N}_2-k)!} (1 - p)^{n-\tilde{N}_2-k}$$

$$\leq \frac{c\, n(n-1)\ldots(n-\tilde{N}_2+1)(p\, e^{-\rho})^{\tilde{N}_2}}{1-2\alpha} \sum_{k=0}^{n-\tilde{N}_2} \frac{(n-\tilde{N}_2)!(p\, e^{-\rho})^k (1-p)^{n-\tilde{N}_2-k}}{(\tilde{N}_2+k-1)!\,(n-\tilde{N}_2-k)!}$$

$$\leq \frac{c\, n(n-1)\ldots(n-\tilde{N}_2+1)(p\, e^{-\rho})^{\tilde{N}_2}}{1-2\alpha} \sum_{k=0}^{n-\tilde{N}_2} \frac{(n-\tilde{N}_2)!\,(p\, e^{-\rho})^k (1-p)^{n-\tilde{N}_2-k}}{k!\,(n-\tilde{N}_2-k)!}$$

Cette dernière expression est égale à u_n définie par

$$u_n = c\, n(n-1)\dots(n-\tilde{N}_2+1)(p\, e^{-\rho})^{\tilde{N}_2}\, [p\, e^{-\rho}+1-p]^{n-\tilde{N}_2}/(1-2\alpha).$$

La série de terme générale u_n est convergente d'où $u_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$; ce qui montre que la troisième somme figurant dans (2) tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

De même $c' \sum_{j=\tilde{N}_2}^{n} e^{-\rho j}\, P(\tilde{N}=j) = c' \sum_{j=\tilde{N}_2}^{n} \frac{n!(p\, e^{-\rho})^j}{j!(n-j)!}(1-p)^{n-j}$

$$(4) \qquad = c' \sum_{k=0}^{n-\tilde{N}_2} \frac{n!}{(\tilde{N}_2+k)!(n-k-\tilde{N}_2)!}(p\, e^{-\rho})^{\tilde{N}_2+k}(1-p)^{n-\tilde{N}_2-k}$$

$$\leq c'\, n(n-1)\dots(n-\tilde{N}_2+1)(p\, e^{-\rho})^{\tilde{N}_2}\, [p\, e^{-\rho}+1-p]^{n-\tilde{N}_2}$$

expression qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Pour montrer la convergence vers 0 de la quatrième somme dans (2) on utilisera le lemme 9 ci-dessus.

Soit $\varepsilon' > 0$. $\exists \tilde{N}_3'$ tel que $\forall j > \tilde{N}_3'$ on ait $\zeta(j) < \varepsilon'$.

Soit $\tilde{N}_3 = \max(\tilde{N}_2, \tilde{N}_3')$. On a

$$(5) \qquad \sum_{j=\tilde{N}_2}^{n} \zeta(j)\, P(\tilde{N}=j) = \sum_{j=\tilde{N}_2}^{\tilde{N}_3} \zeta(j)\, P(\tilde{N}=j) + \sum_{j=\tilde{N}_3+1}^{n} \zeta(j)\, P(\tilde{N}=j).$$

Considérons la première somme du second membre de (5); elle est majorée par $\sum_{j=\tilde{N}_2}^{\tilde{N}_3} j\, P(\tilde{N}=j)$ et

$$\sum_{j=\tilde{N}_2}^{\tilde{N}_3} j\, P(\tilde{N}=j) = \sum_{j=\tilde{N}_2}^{\tilde{N}_3} \frac{n!}{(j-1)!\,(n-j)!}\, p^j (1-p)^{n-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{\tilde{N}_3-\tilde{N}_2} \frac{n!\; p^{\tilde{N}_2+k}(1-p)^{n-\tilde{N}_2-k}}{(\tilde{N}_2-1+k)!\,(n-\tilde{N}_2-k)!}$$

$$= n(n-1)\ldots(\tilde{N}_3-\tilde{N}_2+1)p^{\tilde{N}_2}(1-p)^{n-\tilde{N}_3}.$$

$$\sum_{k=0}^{\tilde{N}_3-\tilde{N}_2} \frac{(\tilde{N}_3-\tilde{N}_2)!\; p^k(1-p)^{\tilde{N}_3-\tilde{N}_2-k}}{(\tilde{N}_2-1+k)!\,(n-\tilde{N}_2-k)!}$$

$$\leq n(n-1)\ldots(\tilde{N}_3-\tilde{N}_2+1)p^{\tilde{N}_2}(1-p)^{n-\tilde{N}_3} \sum_{k=0}^{\tilde{N}_3-\tilde{N}_2} \frac{(\tilde{N}_3-\tilde{N}_2)!\,p^k(1-p)^{\tilde{N}_3-\tilde{N}_2-k}}{k!\,(\tilde{N}_3-\tilde{N}_2)!}$$

(6) $$\leq n(n-1)(\tilde{N}_3-\tilde{N}_2+1)p^{\tilde{N}_2}(1-p)^{n-\tilde{N}_3}.$$

La série dont le terme générale est l'expression dans (6) est convergente

d'où $\sum_{j=\tilde{N}_2}^{\tilde{N}_3} \zeta(j)\, P(\tilde{N}=j)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Et pour la seconde somme dans (5) on a :

$$\sum_{j=\tilde{N}_3}^{n} \zeta(j)\, P(\tilde{N}=j) \leq \varepsilon' \sum_{j=\tilde{N}_3}^{n} P(\tilde{N}=j) \leq \varepsilon',$$

d'où $\forall \varepsilon' > 0$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=\tilde{N}_2}^{n} \zeta(j)\, P(\tilde{N}=j) \leq \varepsilon'.$$

Ce qui prouve que $\forall\varepsilon > 0 \quad P(\tilde{V}_n > \varepsilon)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Si $\tilde{V}_n \to 0$ (p), $(n \to +\infty)$ alors on a évidemment $\tilde{V}_{n,\tilde{K}} \to 0$ (p), $(n \to +\infty)$.

C.Q.F.D.

Supposons 1) et 2) vérifiées et l'hypothèse suivante :

v) $f^{\#}(x) > 0 \quad \forall x > 0$ et $(\forall h > 0) \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f^{\#}(x+h)}{f^{\#}(x)} = 0.$

<u>Théorème 3.III</u> : Pour que $\tilde{V}_{n,\tilde{K}}$ tende vers 0 en probabilité lorsque $n \to +\infty$ il faut et il suffit que

$$(I) \qquad (\forall\varepsilon > 0) \qquad \tilde{\nu} = O(n\, G^{\#}(b_n - \varepsilon)) \quad p.s.$$

Désignons par $\tilde{N}_n(\varepsilon)$ le nombre de points de l'échantillon $(\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_{\tilde{N}})$ dont l'abcisse est supérieure à $b_n - \varepsilon$.

<u>Lemme 1.III</u> : $N_n(\varepsilon)$ étant précédemment défini on a :

$$(\forall\varepsilon > 0) \qquad \lim_{n\to+\infty} P(\tilde{N}_n(\varepsilon) > \tilde{\nu}) = 1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} P(\tilde{V}_{n,\tilde{K}} < \varepsilon) = 1.$$

<u>Preuve</u> : a) Déterminons d'abord la loi de $\tilde{N}_n(\varepsilon)$

$$(1) \qquad P(\tilde{N}_n(\varepsilon) = k) = \sum_{\ell=k}^{n} P(\tilde{N}_n(\varepsilon) = k/\tilde{N}=\ell)\, P(\tilde{N}=\ell).$$

La loi de $\tilde{N}_n(\varepsilon)$ conditionnée par $\tilde{N}$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(n,\bar{p})$ où $\bar{p} = P(\tilde{X} > b_n - \varepsilon)$ d'où

$$(2) \qquad P(\tilde{N}_n(\varepsilon) = k) = \sum_{\ell=k}^{n} C_\ell^k\, \bar{p}^k (1-\bar{p})^{\ell-k}\, C_n^\ell\, p^\ell (1-p)^{n-\ell}.$$

En posant $\ell - k = j$ on a :

(3) $$P(\tilde{N}_n(\varepsilon)=k) = \frac{n!\bar{p}^k}{k!(n-k)!} p^k \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} ([1-\bar{p}]p)^j (1-p)^{n-k-j}$$

$$= \frac{n!\ (\bar{p}\ p)^k}{k!(n-k)!} [1 - p + (1-\bar{p})p]^{n-k}.$$

La relation $F^{\#} = p\,\tilde{F} + (1-p)$ (page 6) nous permet alors d'écrire

(4) $$P(\tilde{N}_n(\varepsilon) = k) = C_n^k (1 - F^{\#}(b_n - \varepsilon))^k\ (F^{\#}(b_n - \varepsilon))^{n-k}$$

d'où $\tilde{N}_n(\varepsilon)$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, G^{\#}(b_n - \varepsilon))$.

b) $$P(\tilde{V}_{n,\tilde{K}} < \varepsilon) = P(\tilde{V}_{n,\tilde{K}} < \varepsilon,\ b_n - \varepsilon \leq \tilde{X}_{(\tilde{N})} \leq b_n + \varepsilon)$$

(5) $$+ P(\tilde{V}_{n,\tilde{K}} < \varepsilon,\ |\tilde{X}_{(\tilde{N})} - b_n| > \varepsilon).$$

En utilisant la stabilité en probabilité de $\tilde{X}_{(\tilde{N})}$ on a :

(6) $$\lim_{n\to+\infty} P(\tilde{V}_{n,\tilde{K}} < \varepsilon\ ,\ b_n - \varepsilon \leq \tilde{X}_{(\tilde{N})} \leq b_n + \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} P(\tilde{V}_{n,\tilde{K}} < \varepsilon, b_n - \varepsilon \leq \tilde{X}_{(\tilde{N})})$$

et (6') $$\lim_{n\to+\infty} P(\tilde{V}_{n,\tilde{K}} < \varepsilon,\ |\tilde{X}_{(\tilde{N})} - b_n| > \varepsilon) = 0.$$

Mais on peut écrire :

$$P(\tilde{V}_{n,\tilde{K}} < \varepsilon, b_n - \varepsilon \leq X_{(\tilde{N})}) = P(\tilde{X}_{(\tilde{N})} - \varepsilon < \tilde{X}_{(\tilde{N}-\tilde{\nu})} < \tilde{X}_{(\tilde{N})} + \varepsilon, b_n - \varepsilon < \tilde{X}_{(\tilde{N})})$$

$$= P(\tilde{X}_{(\tilde{N})} - \varepsilon < \tilde{X}_{(\tilde{N}-\tilde{\nu})},\ b_n - \varepsilon < \tilde{X}_{(\tilde{N})})$$

(7) $$= P(b_n - 2\varepsilon < \tilde{X}_{(\tilde{N}-\tilde{\nu})},\ b_n - \varepsilon < \tilde{X}_{(\tilde{N})}).$$

En tenant compte des égalités 6), 6') et de la stabilité de $\tilde{X}_{(\tilde{N})}$ on a donc d'après 5)

$$\lim_{n\to+\infty} P(\tilde{V}_{n,\tilde{K}} < \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} P(b_n - 2\varepsilon < \tilde{X}_{(\tilde{N}-\tilde{\nu})})$$

et l'événement $\{b_n - 2\varepsilon < \tilde{X}_{(\tilde{N}-\tilde{\nu})}\}$ est égal à l'événement $\{\tilde{N}_n(2\varepsilon) > \tilde{\nu}\}$, ε étant arbitraire on a le résultat désiré.

Preuve du théorème 3.III : On a $n\,G^{\#}(b_n - \varepsilon) = E(\tilde{N}_n(\varepsilon))$ et la stabilité en probabilité de $\tilde{X}_{(\tilde{N})}$ implique que $E(\tilde{N}_n(\varepsilon)) \to +\infty$, $n \to +\infty$.

Supposons que $\tilde{V}_{n,\tilde{K}}$ tende vers 0 en probabilité.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$(7') \qquad P\{n\,G^{\#}(b_n - \varepsilon) - [n\,G^{\#}(b_n - \varepsilon)]^{3/4} < \tilde{N}_n(\varepsilon) < n\,G^{\#}(b_n - \varepsilon) + [n\,G^{\#}(b_n - \varepsilon)]^{3/4}\} > 1 - [n\,G^{\#}(b_n - \varepsilon)]^{-1/2}$$

et comme $\lim P(\tilde{N}_n(\varepsilon) > \tilde{\nu}) = 1$ on a, pour tout $\eta > 0$ et dès que n est assez grand,

$$1 - \eta \leq P(\tilde{N}_n(\varepsilon) > \tilde{\nu}) \leq P(\tilde{N}_n(\varepsilon) > \tilde{\nu}, \tilde{N}_n(\varepsilon) < n\,G^{\#}(b_n - \varepsilon)(1 + [n\,G^{\#}(b_n - \varepsilon)]^{-1/4})) + [n\,G^{\#}(b_n - \varepsilon)]^{-1/2} ;$$

d'où pour tout $\eta > 0$ et dès que n est assez grand

$$1 - \eta \leq P(\tilde{\nu} < nG^{\#}(b_n - \varepsilon)(1 + (n\,G^{\#}(b_n - \varepsilon))^{-1/4})) + [n\,G^{\#}(b_n - \varepsilon)]^{-1/2} ;$$

ce qui implique donc que l'on a :

$$\tilde{\nu} \underset{(p)}{<<} n\,G^{\#}(b_n - \varepsilon)[1 + (G^{\#}(b_n - \varepsilon))^{-1/4}] .$$

Considérons l'événement :

$$E_n = \{\tilde{\nu} < n\,G^{\#}(b_n - \varepsilon)[1 + (n\,G^{\#}(b_n - \varepsilon))^{-1/4}]\}.$$

Si $\omega \in E_n$ on a $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\tilde{\nu}(\omega)}{n\, G^{\#}(b_n-\varepsilon)} \leq 1$ et si de plus on choisit ε' dans $]0,\varepsilon[$ on a :

$$(8) \qquad \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\tilde{\nu}(\omega)}{n\, G^{\#}(b_n-\varepsilon)} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left\{ \frac{\tilde{\nu}(\omega)}{n\, G^{\#}(b_n-\varepsilon')} \cdot \frac{G^{\#}(b_n-\varepsilon')}{G^{\#}(b_n-\varepsilon)} \right\} = 0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\tilde{\nu}(\omega)}{n\, G^{\#}(b_n-\varepsilon)} = 0$; d'où il résulte que :

$$E_n \subset \{\lim_{n\to+\infty} \frac{\tilde{\nu}}{n\, G^{\#}(b_n-\varepsilon)} = 0\}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} P(E_n) = 1$, on a $P(\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\tilde{\nu}}{n\, G^{\#}(b_n-\varepsilon)} = 0) = 1$ ce qui prouve (I).

Réciproquement si (I) est réalisé, soit $\eta > 0$ arbitraire. On a pour n assez grand

$$1 - \eta < P(\tilde{\nu} < \varepsilon' n\, G^{\#}(b_n - \varepsilon)) \quad \text{avec} \quad 0 < \varepsilon' < \frac{1}{2} ;$$

mais

$$P(\tilde{\nu} < \varepsilon' n\, G^{\#}(b_n-\varepsilon)) \leq P(\tilde{\nu} < \varepsilon' n\, G^{\#}(b_n-\varepsilon), n\, G^{\#}(b_n-\varepsilon)[1-(n\, G^{\#}(b_n-\varepsilon))^{-1/4}] < \tilde{N}_n(\varepsilon))$$

$$+ \{n\, G^{\#}(b_n-\varepsilon)\}^{-1/2}$$

$$\leq P(\tilde{\nu} \quad [1 - (n\, G^{\#}(b_n - \varepsilon))^{-1/4}] < \varepsilon' \tilde{N}_n(\varepsilon)) + \{n\, G^{\#}(b_n - \varepsilon)\}^{-1/2} ;$$

d'où :

$$\forall \eta > 0 \qquad 1 - \eta \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} P(\tilde{\nu}[1 - (n\, G^{\#}(b_n - \varepsilon))^{-1/4}] < \varepsilon' \tilde{N}_n(\varepsilon)) ;$$

cette inégalité entraîne nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\tilde{\nu} < \tilde{N}_n(\varepsilon)) = 1$ ce qui d'après le lemme 1 est équivalent à $\tilde{V}_{n,\tilde{K}}$ tend vers 0 en probabilité.

Pour démontrer le théorème 1.III on introduit les notations et les définitions suivantes :

$$B_{n,R(j-1)} =]Y_{n,R(j-1)}, Y_{n,R(j)}] \ , \quad j = 1,\dots,K$$

$$\tilde{B}_{n,\tilde{R}(j-1)} =]\tilde{Y}_{n,\tilde{R}(j-1)}, \tilde{Y}_{n,\tilde{R}(j)}] \ , \ j = 1,\dots,\tilde{K}$$

on pose $B_{n,R(j-1)} = B_{n,R(K-1)}$ pour tout $j \geq K$ de même $\tilde{B}_{n,\tilde{R}(j-1)} = \tilde{B}_{n,\tilde{R}(\tilde{K}-1)}$ pour tout $j \geq \tilde{K}$.

Pour tout $j \geq 1$ définissons $\tilde{Y}_{n,\tilde{R}(\ell-1)}$ par

$$\tilde{Y}_{n,\tilde{R}(\ell-1)} = \operatorname*{Sup}_{0\leq i\leq \tilde{K}} \{\tilde{Y}_{n,\tilde{R}(i)} \mid \tilde{Y}_{n,\tilde{R}(i)} \leq Y_{n,R(j-1)}\}$$

et pour $\tilde{K} \geq [\frac{2\|\mu\|}{p}] + 1$ (p.s.) soit l'événement

$$A_{n,j} = \{B_{n,R(j-1)} \subset \bigcup_{s=0}^{[\frac{2\|\mu\|}{p}]+1} \tilde{B}_{n,\tilde{R}(\ell-1+s)}\} .$$

<u>*Lemme 2.III*</u> *: Si l'on choisit K égal à $\tilde{K}$ on a alors :*

$$\tilde{\nu}(\tilde{N}) = \nu(m)(1 + O_s(1)) \frac{p}{\|\mu\|}$$

où $O_s(1)$ tend presque sûrement vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

<u>Preuve</u> : D'après la loi forte des grands nombres on a $\frac{\tilde{N}}{n} \to p$ (p.s.) et $\frac{m}{n} \to \|\mu\|$ (p.s.) lorsque $n \to +\infty$ d'où il résulte que $\frac{\tilde{N}}{m} = \frac{\tilde{N}}{n}\frac{n}{m} \to \frac{p}{\|\mu\|}$ (p.s) lorsque $n \to +\infty$ ou encore

$$\tilde{N} = \frac{p}{\|\mu\|} m(1 + O_s(1))$$ et d'après la définition de $\tilde{\nu}(\tilde{N})$ et $\nu(m)$ on a bien le résultat annoncé.

Lemme 3.III : En conservant la condition sur K du lemme 1 on a

$$(\forall j) \quad j \geq 1 \qquad P(\overline{A}_{n,j} \ \ i.o) = 0.$$

Preuve : Soit $\varepsilon' = \frac{1}{2}$ et soit $\eta > 0$ quelconque. D'après le lemme précédent il existe un rang n_o à partir duquel les événements $\{1-\varepsilon' < \frac{\tilde{\nu}}{p\frac{\nu}{\|\mu\|}} < 1+\varepsilon'\}$ sont simultanément réalisés avec une probabilité supérieure à $1-\eta$; c'est-à dire en posant :

$$T'_n = \{\frac{1}{2} < \frac{\tilde{\nu}}{\nu}\frac{\|\mu\|}{p} < \frac{3}{2}\} \quad \text{on a} \quad P(\bigcap_{n=n_o}^{+\infty} T'_n) > 1 - \eta .$$

Comme $\tilde{\nu} \leq \nu$ on a $T'_n \subset \{\frac{p}{2\|\mu\|}\nu < \tilde{\nu} < \nu\} = T_n$ (on sait que $p \leq \|\mu\|$).

Pour tout n l'événement T_n implique $A_{n,j}$ d'où $P(\bigcap_{n=n_o}^{+\infty} A_{n,j}) > 1 - \eta$;

on déduit donc que $\lim_{n\to+\infty} P(\bigcap_{\alpha=n}^{+\infty} A_{\alpha,j}) = 1.$

Lemme 4.III : Sous l'hypothèse du lemme précédent on a :

$(\forall\varepsilon > 0)$, $(\forall\eta > 0)$, $(\forall j \geq 1)$,

$$P(V_{n,j} > \varepsilon) \leq \sum_{s=0}^{[\frac{2\|\mu\|}{p}]+1} P(\tilde{V}_{n,\ell+s} > \frac{\varepsilon}{[\frac{2\|\mu\|}{p}]+2}) + \eta$$

dès que n est suffisamment grand.

Preuve : De la décomposition $(V_{n,j} > \varepsilon) = (V_{n,j} > \varepsilon) \cap T \cup (V_{n,j} > \varepsilon) \cap \overline{T}$ on a, pour n suffisamment grand

(1) $\quad P(V_{n,j} > \varepsilon) \leq P((V_{n,j} > \varepsilon) \cap T_n) + \eta.$

D'après le lemme 3 on a :

$$P((V_{n,j} > \varepsilon) \cap T_n) \leq P((V_{n,j} > \varepsilon) \cap A_{n,j})$$

et

$$(2) \qquad P((V_{n,j} > \varepsilon) \cap A_{n,j}) \leq \sum_{s=0}^{[\frac{2\|\mu\|}{p}]+1} P(\tilde{V}_{n,\ell+s} > \frac{\varepsilon}{[\frac{2\|\mu\|}{p}]+2})$$

(1) et (2) entraînent le résultat annoncé.

<u>*Lemme 5.III*</u> *: On conserve l'hypothèse du lemme précédent. On a* $(\forall\varepsilon > 0)$,

$$(\forall\eta > 0) \qquad P(V_n > \varepsilon) \leq P(\tilde{V}_n > \varepsilon/[\frac{2\|\mu\|}{p}]+2) + \eta$$

dès que n *est suffisamment grand.*

<u>Preuve</u> : Comme précédemment en utilisant la décomposition de Ω en T_n et $\overline{T}_n$. On a, pour n assez grand

$$(1) \qquad P(V_n > \varepsilon) \leq P((V_n > \varepsilon) \cap T_n) + \eta \ ;$$

on a aussi presque sûrement

$$(\forall j \geq 1), \{(V_{n,j} > \varepsilon) \cap T_n\} \subset \{(([\frac{2\|\mu\|}{p}]+2)\ \tilde{V}_n > \varepsilon) \cap T_n\} \ ,$$

$$(2) \qquad \{\sup_j V_{n,j} > \varepsilon\} \cap T_n \subset \{(([\frac{2\|\mu\|}{p}]+2)\tilde{V}_n > \varepsilon) \cap T_n\} \qquad \text{(p.s.)}$$

d'où il résulte que :

$$(3) \qquad P((V_n > \varepsilon) \cap T_n) \leq P(([\frac{2\|\mu\|}{p}]+2)\ \tilde{V}_n > \varepsilon)).$$

(1) et (3) entraînent le résultat désiré.

Démontrons le théorème 1.III.

Considérons K vérifiant les conditions du théorème ; $K = \tilde{K}$. L'égalité

(II) $\tilde{N} = \frac{p}{\|\mu\|} m(1 + O_s(1))$ implique

i) $\tilde{\nu}(\tilde{N}_o) \to +\infty$ lorsque $\tilde{N}_o \to +\infty$, avec $\tilde{\nu}(\tilde{N}) = [\frac{\tilde{N}}{K}]$

ii) $\lim\limits_{\tilde{N}_o \to +\infty} \frac{K(\tilde{N}_o)}{\text{Log } \tilde{N}_o} = +\infty$

c'est-à-dire que K satisfait les hypothèses du théorème 1.III.

De même si $\nu(m) = O(n\, G^{\#}(b_n - \varepsilon))$ p.s., (II) implique

$\nu(\tilde{N}) = O(n\, G^{\#}(b_n - \varepsilon))$ p.s.

D'après les théorèmes 3 et 2, on en déduit donc que $\tilde{V}_n \to 0$ (p) lorsque $n \to +\infty$.

En utilisant le lemme 5 on a alors :

$(\forall \varepsilon > 0)$, $(\forall \eta > 0)$ $\lim\limits_{n \to +\infty} P(V_n > \varepsilon) \leq \eta$ ce qui prouve que $V_n \to 0$ (p) lorsque $n \to +\infty$. C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] DAVID, H.A. : Order Statistics, 2nd ed. Wiley and Sons 1981.

[2] GEFFROY, J. : Contribution à la théorie des valeurs extrêmes. Thèse d'Etat Uiniversité de Paris 1958, Série A, n° 3267, n° d'ordre 4139.

[3] GEFFROY, J. : Sur la convergence uniforme en probabilité vers zéro d'une famille de blocs équilibrés. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, Vol. 26 fasc. 1, 1981, p. 31-70.

[4] GNEDENKO, B.V. : Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. Ann. Math. Vol. 44, 1943, p. 423-453.

[5] HEWITT, E. and STROMBERG, K. : Real and Abstract Analysis. Springer Verlag Berlin-Heidelberg 1965.

Reçu en Avril 1986