HAL
open science

Schémas HHT-alpha et prédicteurs-correcteurs pour le contact dynamique avec méthode de Nitsche

Hao Huang, Franz Chouly, Guillaume Drouet, Nicolas Pignet

To cite this version:

Hao Huang, Franz Chouly, Guillaume Drouet, Nicolas Pignet. Schémas HHT-alpha et prédicteurs-correcteurs pour le contact dynamique avec méthode de Nitsche. CSMA 2022 : 15ème Colloque National en Calcul des Structures, Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF], May 2022, Giens, France. hal-03683159

HAL Id: hal-03683159

https://hal.science/hal-03683159

Submitted on 31 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2022
15ème Colloque National en Calcul des Structures
16-20 Mai 2022, Presqu'île de Giens (Var)

Schémas HHT-alpha et prédicteurs-correcteurs pour le contact dynamique avec méthode de Nitsche

H. Huang[1,2], F. Chouly[2,3,4], G. Drouet[1], N. Pignet[1]

[1] *ERMES, EDF Lab, {hao.huang,guillaume.drouet,nicolas.pignet}@edf.fr,*
[2] *IMB, Université de Bourgogne, franz.chouly@u-bourgogne.fr,*
[3] *CMM, Universidad de Chile & CNRS,* [4] *CI^{2}MA, Universidad de Concepción.*

Résumé — Dans ce travail nous sommes intéressés par le problème de contact unilatéral en dynamique et sans frottement. Nous nous concentrons sur l'évolution en temps de l'impact d'un corps élastique linéaire sur un obstacle rigide, et avons souhaité en particulier étudier comment combiner des schémas en temps comme HHT et prédicteur-correcteur avec un traitement du contact via Nitsche, ce qui n'a jamais été effectué auparavant. Nous présenterons aussi quelques résultats numériques en faisant attention au comportement numérique : stabilité du schéma, conservation ou non de l'énergie et oscillations parasites.
Mots clés — problème de contact, méthode de Nitsche, éléments finis, dynamique.

1 Introduction

L'un des outils principaux de la simulation numérique pour la mécanique des solides est la méthode des éléments finis. Dans l'industrie, les problèmes de contact jouent un rôle très important, et beaucoup de méthodes traditionnelles ne peuvent pas fournir des solutions acceptables : elles sont trop influencées par des oscillations parasites ou ne permettent pas de conserver l'énergie. Une des difficultés rencontrées est que ce type de problème possède une condition aux limites non-linéaire par rapport au champ de déplacement. Les méthodes existantes pour discrétiser les conditions de Signorini associées au contact sont la pénalisation, les méthodes mixtes/mortar, la méthode de Nitsche ou encore le lagrangien augmenté. Une amélioration sur la précision et la robustesse numérique pour ces simulations est toujours espérée par l'industrie et les chercheurs.

De nombreux schémas numériques combinant différentes discrétisations en temps et en espace ont été proposés, et on pourra se référer, par exemple, à [10, 13] pour un état de l'art et des comparaisons, ou, plus récemment à [9] pour des schémas explicites en temps. Ces dernières années, la méthode de Nitsche a été proposée pour le problème de contact dynamique, d'abord pour les cas sans frottement avec schéma implicite [5, 6]. Ensuite, des travaux sur schéma explicite [7], pour les cas avec frottement [2, 3, 4], et puis des études théoriques et numériques de quelques schémas IMEX [1] ont été initiés.

Dans ce résumé, nous nous concentrons sur l'évolution en temps de l'impact d'un corps élastique linéaire sur un obstacle rigide, et avons souhaité en particulier étudier comment combiner des schémas en temps comme HHT et prédicteur-correcteur avec un traitement du contact via la méthode de Nitsche, ce qui n'a jamais été effectué auparavant. Nous présentons quelques résultats sur la simulation avec un cas-test 2D utilisant différents schémas numériques et allons tester leurs comportements. Nous nous intéressons particulièrement à l'influence des paramètres numériques, aux oscillations parasites associées à la surface de contact due à la discontinuité en temps et à la conservation ou non de l'énergie totale pour le schéma en temps.

2 Problème de contact et discrétisation avec la méthode de Nitsche

Soit un corps solide déformable occupant le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $(d \in \{2,3\})$. $\partial\Omega := \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_C$ le bord de Ω, où les conditions de Dirichlet, de Neumann et de Signorini s'appliquent respectivement sur Γ_D, Γ_N et Γ_C. Nous cherchons le champ de déplacement $\mathbf{u} : \Omega \times [0,T] \mapsto \mathbb{R}^d$ tel que les équations (1) soient satisfaites :

$$
\begin{aligned}
\rho\ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) - \mathbf{f} = \mathbf{0}, &\quad \text{dans } \Omega, \quad \text{(i)}\\
\sigma(\mathbf{u}) = \mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}), &\quad \text{dans } \Omega, \quad \text{(ii)}\\
\mathbf{u} = \mathbf{0}, &\quad \text{sur } \Gamma_D, \quad \text{(iii)}\\
\sigma(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{f}_N, &\quad \text{sur } \Gamma_N, \quad \text{(iv)}\\
u_n \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0, \quad u_n\sigma_n(\mathbf{u}) = 0, &\quad \text{sur } \Gamma_C, \quad \text{(v)}\\
\mathbf{u}(\cdot,0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(\cdot,0) = \dot{\mathbf{u}}_0, &\quad \text{dans } \Omega. \quad \text{(vi)}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Les équations (i) - (iv) décrivent le problème d'élasticité linéaire où ρ est la masse volumique et $\mathcal{A}$ est le tenseur d'élasticité. L'équation (v) est la condition de Signorini, où $u_n = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$, $\sigma_n(\mathbf{u}) = (\sigma(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}$ sont respectivement le déplacement normal et la pression de contact sur Γ_C. Les conditions initiales à l'instant $t = 0$ sont données par l'équation (vi). Introduisons aussi

$$
\begin{aligned}
a(\mathbf{u},\mathbf{v}) &:= \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})\, \mathrm{d}\Omega,\\
l(\mathbf{v}) &:= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f}_N\cdot\mathbf{v}\, \mathrm{d}\Gamma.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Soit V^h l'espace d'éléments finis de Lagrange de degré 1 basé sur une triangulation $\mathcal{T}^h$ du domaine Ω. Nous allons définir la formulation faible discrète de la méthode Nitsche-FEM. Introduisons l'opérateur discret linéaire :

$$
P^n_{\theta,\gamma_N} : \begin{array}{ccc} V^h & \to & L^2(\Gamma_C) \\ \mathbf{v}^h & \mapsto & \theta\sigma_n(\mathbf{v}^h) - \gamma_N v^h_n \end{array},
\tag{3}
$$

où $\theta \in \{-1, 0, 1\}$ est le paramètre pour sélectionner la variante (anti-symétrique, non-symétrique, symétrique) de la méthode de Nitsche et γ_N une fonction positive qui ne dépend pas de v, donnée par :

$$
\gamma_{N|T\cap\Gamma_C} = \frac{\gamma_0}{h_T},
\tag{4}
$$

pour chaque triangle T intersecté avec Γ_C, où h_T est le diamètre du triangle T et γ_0 une constante positive (paramètre de Nitsche). Et nous avons donc la méthode Nitsche-FEM :

$$
\begin{aligned}
&\text{Trouver } \mathbf{u}^h : [0,T] \to V^h \text{ t.q.}\\
&\int_\Omega \rho\ddot{\mathbf{u}}^h\cdot\mathbf{v}^h\, \mathrm{d}\Omega + a_{\theta,\gamma_N}(\mathbf{u}^h,\mathbf{v}^h) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N}[P^n_{1,\gamma_N}(\mathbf{u}^h)]_{\mathbb{R}^-} P^n_{\theta,\gamma_N}(\mathbf{v}^h)\, \mathrm{d}\Gamma = l(\mathbf{v}^h),\ \forall \mathbf{v}^h \in V^h,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

où $a_{\theta,\gamma_N}(\mathbf{u}^h,\mathbf{v}^h) = a(\mathbf{u}^h,\mathbf{v}^h) - \int_{\Gamma_C} \frac{\theta}{\gamma_N}\sigma_n(u^h)\sigma_n(v^h)\mathrm{d}\Gamma$. La notation $[\cdot]_{\mathbb{R}^-}$ désigne la projection sur la demi-droite formée par les réels négatifs. Pour $\theta = 1$, cette méthode est symétrique. De plus, dans le cas statique (ou $\rho = 0$), elle est convergente pour un γ_0 suffisamment grand ; mais dans le cas dynamique, en pratique le seuil de ce paramètre peut-être influencé par le choix du schéma et Δt [5]. Mais pour $\theta = -1$ qui nous donne une méthode anti-symétrique, l'algorithme deviendrait plus robuste et nous pouvons utiliser même un γ_0 proche de zéro. Dans la suite de ce résumé, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous allons définir l'opérateur de masse $\mathbf{M} : V^h \to V^h$ et l'opérateur non-linéaire $\mathbf{B} : V^h \to V^h$, au sens de l'intégration :

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \mathbf{M}(\mathbf{v}^h)\cdot\mathbf{w}^h \mathrm{d}\Omega &= \int_\Omega \rho\mathbf{v}^h\cdot\mathbf{w}^h \mathrm{d}\Omega, \forall \mathbf{w}^h \in V^h,\\
\int_{\Gamma_C} \mathbf{B}(\mathbf{v}^h)\cdot\mathbf{w}^h \mathrm{d}\Gamma &= a_{\theta,\gamma_N}(\mathbf{v}^h,\mathbf{w}^h) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N}[P^n_{1,\gamma_N}(\mathbf{v}^h)]_{\mathbb{R}^-} P^n_{\theta,\gamma_N}(\mathbf{w}^h)\, \mathrm{d}\Gamma, \forall \mathbf{w}^h \in V^h.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Nous définissons aussi le vecteur $\mathbf{L}(t) \in V^h$ au sens de l'intégration :

$$
\int_\Omega \mathbf{L}(t)\cdot\mathbf{w}^h \mathrm{d}\Omega = l(\mathbf{w}^h), \forall \mathbf{w}^h \in V^h.
\tag{7}
$$

Ceci permet d'écrire (5) sous la forme compacte :

$$
\begin{aligned}
&\text{Trouver } \mathbf{u}^h : [0,T] \to V^h \text{ t.q.}\\
&\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^h(t) + \mathbf{B}(\mathbf{u}^h(t)) = \mathbf{L}(t),\\
&\mathbf{u}^h(0) = \mathbf{u}^h_0, \quad \dot{\mathbf{u}}^h(0) = \dot{\mathbf{u}}^h_0,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

qui est un système d'équations différentielles lipschitzien.

3 Discrétisation en temps

Dans ce travail, nous utilisons deux familles de schémas en temps : le schéma Hilber-Hughes-Taylor-α et des schémas de type prédicteur-correcteur.

3.1 Schéma Hilber-Hughes-Taylor-α (HHT-α)

Le schéma Hilber-Hughes-Taylor-α [11] est un schéma implicite inconditionnellement stable pour l'élasticité linéaire :

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } \mathbf{u}^{n+1}, \dot{\mathbf{u}}^{n+1}, \ddot{\mathbf{u}}^{n+1} \in V^h \text{ t.q.}\\
&\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^n + \tfrac{\Delta t^2}{2}((1-\tfrac{1}{2}(1+\tilde{\alpha})^2)\ddot{\mathbf{u}}^n + \tfrac{1}{2}(1+\tilde{\alpha})^2\ddot{\mathbf{u}}^{n+1}),\\
&\dot{\mathbf{u}}^{n+1} = \dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t((\tfrac{1}{2}-\tilde{\alpha})\ddot{\mathbf{u}}^n + (\tfrac{1}{2}+\tilde{\alpha})\ddot{\mathbf{u}}^{n+1}),\\
&\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} + (1+\tilde{\alpha})\mathbf{B}(\mathbf{u}^{n+1}) - \tilde{\alpha}\mathbf{B}(\mathbf{u}^n) = \mathbf{L}.
\end{aligned} \tag{9}$$

La présence du paramètre $\tilde{\alpha}$ nous donne une dissipation pour les hautes fréquences. Pour ce schéma implicite, il faut résoudre le problème non-linéaire à chaque instant t^{n+1}. On utilise pour cela une méthode de Newton semi-lisse.

Particulièrement, pour $\tilde{\alpha} = 0$, le schéma est d'ordre 2 et aussi connu comme le schéma de Crank-Nicolson. Ce schéma conserve l'énergie pour l'élasticité linéaire sans contact, mais en cas d'impact, il introduit souvent une quantité importante de l'énergie supplémentaire [6].

3.2 Schémas prédicteurs-correcteurs

Dans ce travail, nous utilisons deux schémas prédicteurs-correcteurs à un pas à partir de schéma de Newmark et schéma HHT-α.

Le premier s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\dot{\mathbf{u}}}^{n+1} = \dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^n, && \text{(i)}\\
&\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \tilde{\dot{\mathbf{u}}}^{n+1}, && \text{(ii)}\\
&\tilde{\ddot{\mathbf{u}}}^{n+1} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{L} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}), && \text{(iii)}\\
&\dot{\mathbf{u}}^{n+1} = \dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t((1-\tilde{\gamma})\ddot{\mathbf{u}}^n + \tilde{\gamma}\tilde{\ddot{\mathbf{u}}}^{n+1}) && \text{(iv)}\\
&\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^n + \tfrac{\Delta t^2}{2}((1-2\tilde{\beta})\ddot{\mathbf{u}}^n + 2\tilde{\beta}\tilde{\ddot{\mathbf{u}}}^{n+1}), && \text{(v)}\\
&\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{L} - \mathbf{B}\mathbf{u}^{n+1}). && \text{(vi)}
\end{aligned} \tag{10}$$

À chaque instant t, il s'agit de calculer d'abord les prédicteurs $\tilde{\dot{\mathbf{u}}}^{n+1}$, $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ et $\tilde{\ddot{\mathbf{u}}}^{n+1}$, et puis de corriger leurs valeurs. Un grand avantage de ce schéma est que nous n'avons plus besoin de résoudre le système non-linéaire dans l'équation (9).

Nous avons aussi testé une autre moyen de calculer l'accélération à chaque instant, en utilisant le paramètre $\tilde{\alpha}$ (et nous pouvons prendre par exemple $\tilde{\beta} = \frac{1}{4}(1+\tilde{\alpha})^2, \tilde{\gamma} = \frac{1}{2} + \tilde{\alpha}$ comme HHT-α). Il suffit de remplacer les équations (10) (iii) et (vi) par :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\ddot{\mathbf{u}}}^{n+1} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{L} + \tilde{\alpha}\mathbf{B}\mathbf{u}^n - (1+\tilde{\alpha})\mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}),\\
&\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{L} + \tilde{\alpha}\mathbf{B}\mathbf{u}^n - (1+\tilde{\alpha})\mathbf{B}\mathbf{u}^{n+1}).
\end{aligned} \tag{11}$$

4 Résultats numériques

Les simulations numériques sont réalisées via le logiciel éléments finis open source GetFEM [14] avec l'interface Python.

4.1 Description du cas test

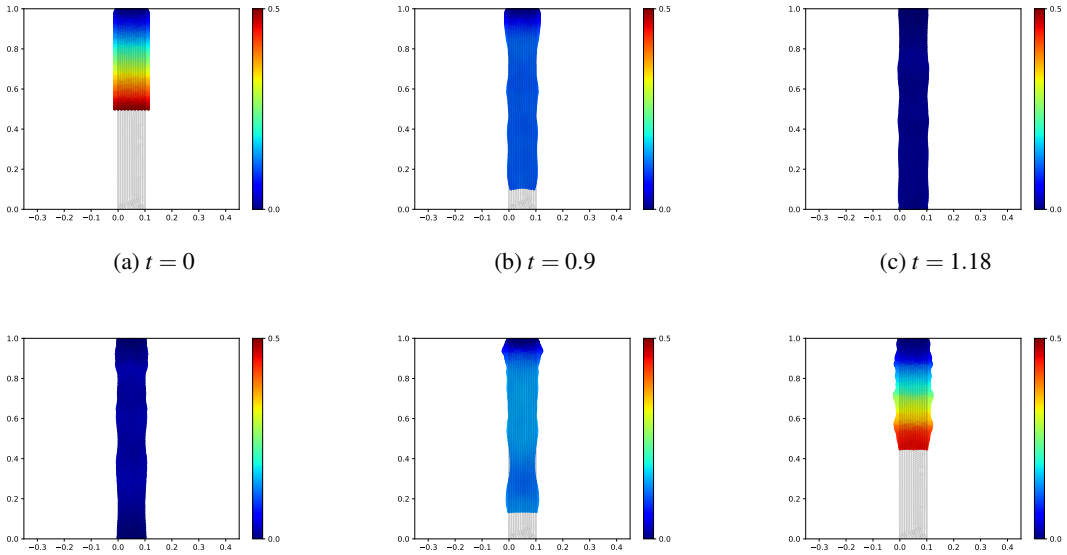
Ce cas-test a été introduit dans [8] comme un problème 1D : considérons une barre élastique de longueur 1, encastrée en haut et libre en bas, compressée initialement à mi-hauteur et l'obstacle se place à $x = 0$.

Dans ce travail, nous allons prolonger ce cas de test vers un modèle 2D (les équations (1) avec $d = 2$, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{f}_N = \mathbf{0}$), et la largeur de la barre est $\frac{1}{10}$ fois sa longueur. Nous avons pris un déplacement

initial $\mathbf{u}^0$ pour avoir une barre comprimée vers le haut (voir Fig. 1a). La vitesse initiale est nulle $\dot{\mathbf{u}}^0 = 0$ et l'accélération initiale calculée via $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^0 + \mathbf{B}(\mathbf{u}^0) = \mathbf{L}$. Nous avons pris le module d'Young $E = \frac{2}{3}$ et coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$ (donc coefficients de Lamé correspondants $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu = \frac{1}{4}$). Les paramètres de méthode de Nitsche sont $\theta = 1$ et $\gamma_0 = 10$. Pour chaque schéma numérique, trois maillages sont utilisés dont les diamètres de triangulations h sont respectivement 0.01, 0.02 et 0.05. Nous affichons dans les figures suivantes le déplacement normal, la vitesse normale et la pression de contact du point au milieux de Γ_C, et l'énergie totale.

4.2 Résultats

Globalement l'évolution de mouvement de la barre est montrée Fig. 1. Dans la simulation de cet exemple, nous avons $h = 0.02, \Delta t = 0.001$ et le schéma utilisé est le schéma de Crank-Nicolson.



(a) $t = 0$ (b) $t = 0.9$ (c) $t = 1.18$

(d) $t = 2.36$ (e) $t = 2.64$ (f) $t = 3.54$

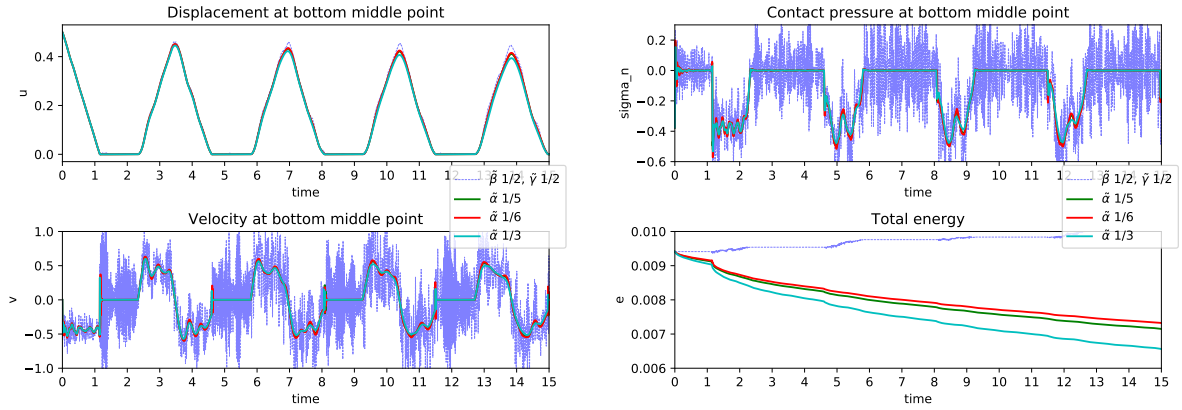
FIGURE 1 – Les champs de déplacement le long « la première période », schéma de Crank-Nicolson. Le code couleur dénote l'intensité du champ de déplacement.

4.2.1 Schéma HHT-α

Dans cette section, nous avons les résultats Fig. 2, 3 et 4. Une durée de $T = 15$ nous permet d'arriver jusqu'au début de 5ème impact. Le pas en temps utilisé Δt est $\frac{h}{20}$. Nous mettons dans les figures le résultat de schéma de Newmark standard ($\tilde{\beta} = 0.5, \tilde{\gamma} = 0.5$) comme une référence. En utilisant un schéma de Newmark dissipatif (quand $\tilde{\gamma} > 0.5$), il est aussi possible de diminuer l'oscillation parasite. Le paramètre $\tilde{\alpha}$ qui contrôle la dissipation d'énergie en haute fréquence peut nous améliorer légèrement le comportement de dissipation de l'énergie par rapport aux θ-schéma et schéma de Newmark, mais ils donnent en fait les résultats de même type.

4.3 Schémas prédicteurs-correcteurs

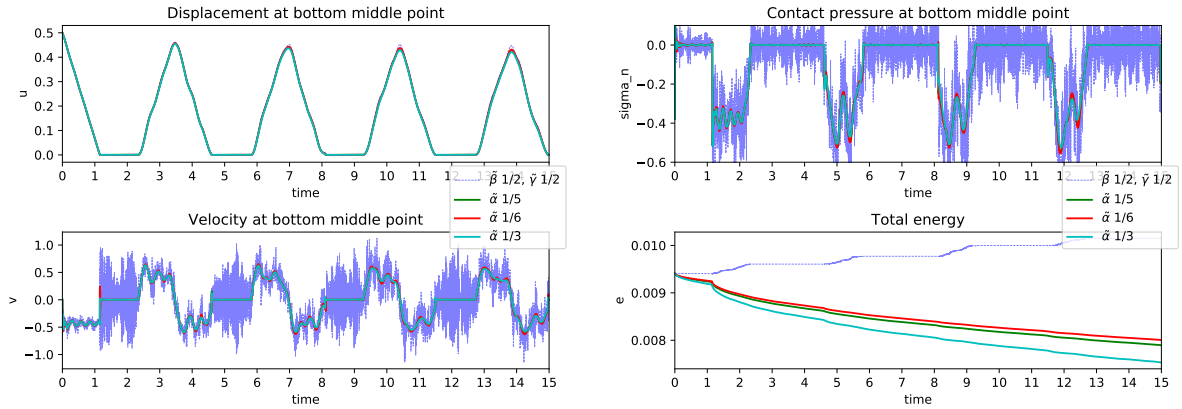
Fig. 5, 6 et 7, nous avons les résultats numériques avec les schémas prédicteurs-correcteurs. Dans ces figures, les lignes marquées avec les paramètres $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\gamma}$ sont via le schéma (10), et les lignes avec le paramètre $\tilde{\alpha}$ sont issues du schéma (11). Le pas de temps utilisé Δt est $\frac{h}{100}$ (donc 5 fois plus petit que celui du schéma HHT). Un même pas en temps que celui utilisé pour le schéma HHT peut aussi nous donner des résultats convergeant sur un court intervalle de temps, mais deviendra instable après environ 4 ou 5 impacts.



(a) Le déplacement et la vitesse

(b) La pression de contact et l'énergie

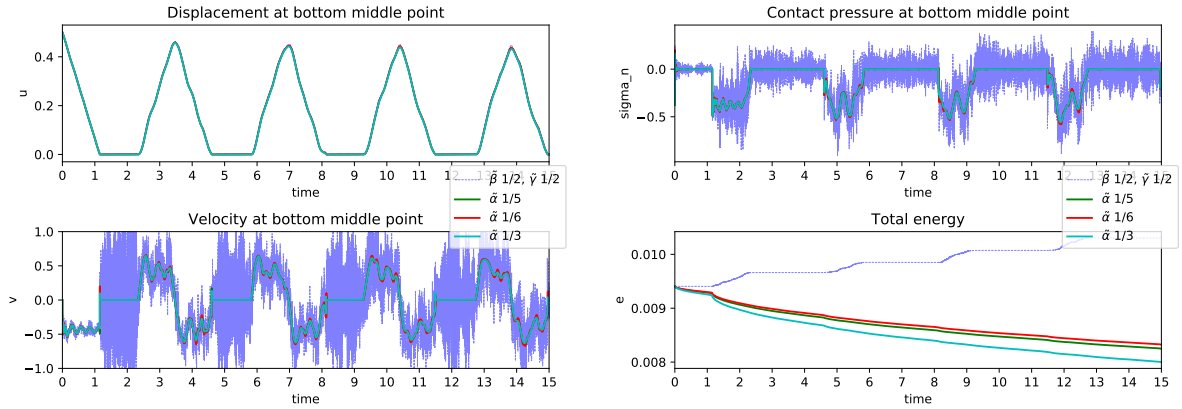
FIGURE 2 – Le schéma de HHT-α, $h = 0.05, \Delta t = 0.0025, \gamma_0 = 10$.



(a) Le déplacement et la vitesse

(b) La pression de contact et l'énergie

FIGURE 3 – Le schéma de HHT-α, $h = 0.02, \Delta t = 0.001, \gamma_0 = 10$.

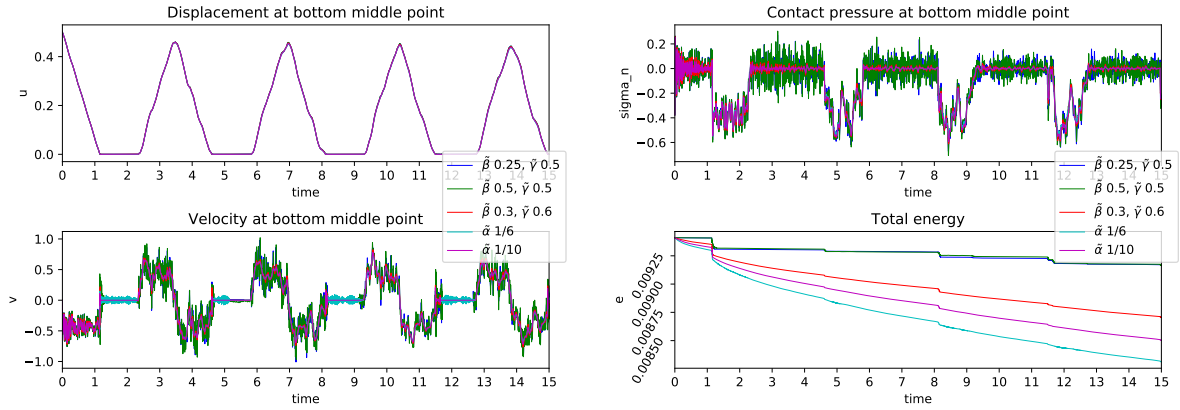


(a) Le déplacement et la vitesse

(b) La pression de contact et l'énergie

FIGURE 4 – Le schéma de HHT-α, $h = 0.01, \Delta t = 0.0005, \gamma_0 = 10$.

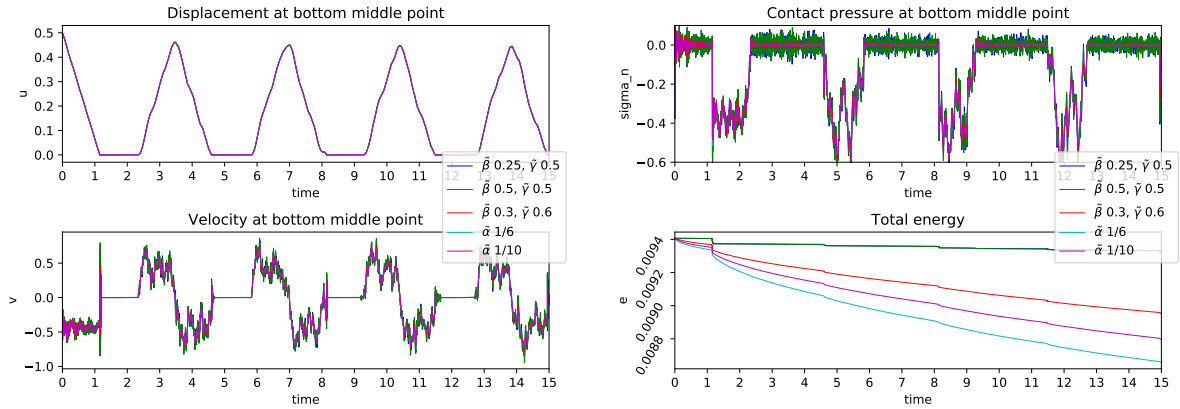
Dans ces figures, nous pouvons voir la conservation de l'énergie pour le cas $\tilde{\beta} = 0.25, \tilde{\gamma} = 0.5$ quand la barre n'entre pas en contact avec l'obstacle (en fait ce schéma est équivalent au schéma de Crank-Nicolson s'il n'y pas de contact). L'énergie totale diminue fortement au début de chaque impact.



(a) Le déplacement et la vitesse

(b) La pression de contact et l'énergie

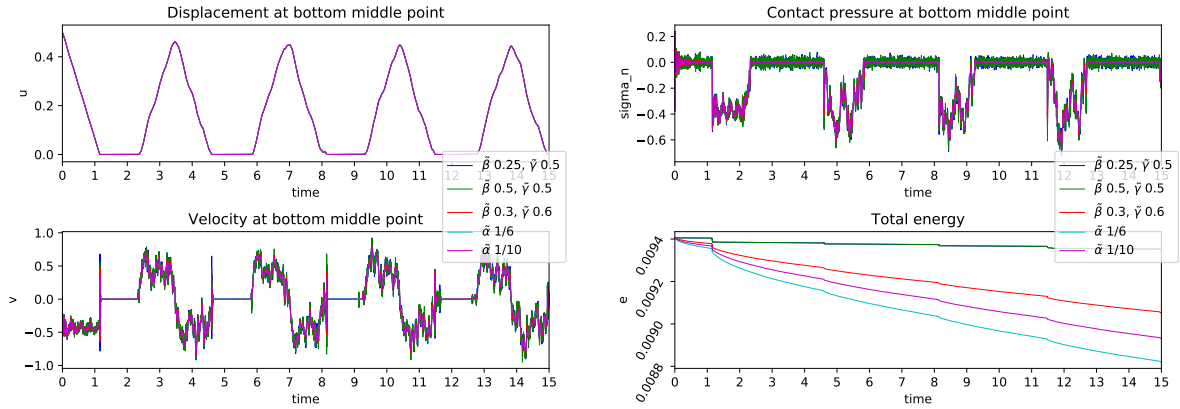
FIGURE 5 – Schémas prédicteurs-correcteurs, $h = 0.05, \Delta t = 0.0025, \gamma_0 = 10$.



(a) Le déplacement et la vitesse

(b) La pression de contact et l'énergie

FIGURE 6 – Schémas prédicteurs-correcteurs, $h = 0.02, \Delta t = 0.0025, \gamma_0 = 10$.



(a) Le déplacement et la vitesse

(b) La pression de contact et l'énergie

FIGURE 7 – Schémas prédicteurs-correcteurs, $h = 0.01, \Delta t = 0.0025, \gamma_0 = 10$.

5 Conclusion

Nous avons testé quelques schémas numériques (le schéma HHT-α, des schémas prédicteurs-correcteurs) pour le contact dynamique avec la méthode de Nitsche. Par la suite, plusieurs pistes sont envisagées, *e.g.*, la comparaison avec des méthodes de Lagrangien augmenté et de la pénalisation, la re-

formulation des schémas prédicteurs-correcteurs multi-pas ou α-généralisé, ainsi que des expériences numériques sur d'autres cas tests, académiques et industriels.

Ce résumé est le travail initial de la thèse [12] qui répond au besoin accru de l'industrie en codes de calcul performants et précis pour la dynamique non-régulière comme le problème de contact avec ou sans frottement.

Références

[1] É. Bretin and Y. Renard, *Stable IMEX schemes for a Nitsche-based approximation of elastodynamic contact problems. Selective mass scaling interpretation*, The SMAI journal of computational mathematics, 6 (2020), pp. 159–185.

[2] F. Chouly, M. Fabre, P. Hild, R. Mlika, J. Pousin, and Y. Renard, *An overview of recent results on Nitsche's method for contact problems*, Geometrically unfitted finite element methods and applications, (2017), pp. 93–141.

[3] F. Chouly, P. Hild, V. Lleras, and Y. Renard, *Nitsche-based finite element method for contact with Coulomb friction*, in European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, Springer, 2017, pp. 839–847.

[4] ——, *Nitsche method for contact with Coulomb friction : existence results for the static and dynamic finite element formulations*. https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02938032, Sept. 2020. working paper or preprint.

[5] F. Chouly, P. Hild, and Y. Renard, *A Nitsche finite element method for dynamic contact : 1. Space semi-discretization and time-marching schemes*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 49 (2015), pp. 481–502.

[6] ——, *A Nitsche finite element method for dynamic contact : 2. Stability of the schemes and numerical experiments*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 49 (2015), pp. 503–528.

[7] F. Chouly and Y. Renard, *Explicit Verlet time-integration for a Nitsche-based approximation of elastodynamic contact problems*, Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences, 5 (2018), pp. 1–38.

[8] F. Dabaghi, A. Petrov, J. Pousin, and Y. Renard, *A robust finite element redistribution approach for elastodynamic contact problems*, Applied Numerical Mathematics, 103 (2016), pp. 48–71.

[9] J. Di Stasio, D. Dureisseix, G. Georges, A. Gravouil, and T. Homolle, *An explicit time-integrator with singular mass for non-smooth dynamics*, Computational Mechanics, (2021), pp. 1–16.

[10] D. Doyen, A. Ern, and S. Piperno, *Time-integration schemes for the finite element dynamic Signorini problem*, SIAM Journal on Scientific Computing, 33 (2011), pp. 223–249.

[11] H. M. Hilber, T. J. Hughes, and R. L. Taylor, *Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics*, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 5 (1977), pp. 283–292.

[12] H. Huang, *Développement de schémas numériques pour la dynamique non-régulière*, PhD thesis, Université de Bourgogne, en préparation.

[13] R. Krause and M. Walloth, *Presentation and comparison of selected algorithms for dynamic contact based on the Newmark scheme*, Applied Numerical Mathematics, 62 (2012), pp. 1393–1410.

[14] Y. Renard and K. Poulios, *GetFEM : Automated FE modeling of multiphysics problems based on a generic weak form language*, ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 47 (2020), pp. 1–31.