



STRUCTURE SPECTRALE DANS LES FIBRÉS D'ÉTAT

Jean Louis Jonot

► To cite this version:

Jean Louis Jonot. STRUCTURE SPECTRALE DANS LES FIBRÉS D'ÉTAT. 2022. hal-03680298v4

HAL Id: hal-03680298

<https://hal.science/hal-03680298v4>

Preprint submitted on 13 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NoDerivatives 4.0 International License

STRUCTURE SPECTRALE DANS LES FIBRÉS D'ÉTAT

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. On décrit les fibrés de Fredholm et on étend les résultats de l'homologie et de la cohomologie de la fibre au fibré. D'autres résultats sont développés sur l'axiomatisation d'un système quantique, l'opérateur d'évolution est l'opérateur de Dirac.

Une représentation spectrale d'une structure spinorielle $(\mathcal{W}, \zeta, J)$ est la donnée d'une extension de cette structure à un fibré d'état de base $\mathcal{W}$. On définit les chaînes de Clifford à partir du dual du fibré tangent complexifié, la limite inductive de cette chaîne définit un fibré $\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})$, dit fibré de Clifford à l'infini. Pour un fibré hermitien ζ de base $\mathcal{W}$, on construit les chaînes de fibrés $\text{End}_n(\zeta)$ de limite inductive $\mathfrak{End}(\zeta)$. L'idée suivante est de montrer l'existence d'un fibré hermitien ζ pour lequel $\mathfrak{End}(\zeta)$ est isomorphe à $\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})$. Si $\dim(\mathcal{W}) = 2m$ et $\Gamma(\zeta)$ implémente une équivalence de Morita entre $C(\mathcal{W})$ et $\text{Cl}(\mathcal{W})$, le théorème de Serre-Swan donne l'isomorphisme entre les fibrés $\text{End}(\zeta)$ et $\text{Cl}(\mathcal{W})$. Cet isomorphisme s'étend à l'infini entre $\mathfrak{End}(\zeta)$ et $\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})$, l'extension de l'action de Clifford et de l'opérateur J à l'infini permettent de construire l'opérateur de Dirac

$$\mathfrak{D} = -i \left(\widehat{\mathfrak{r}} \circ \nabla_{\infty}^{\zeta} \right)$$

où ∇_{∞}^{ζ} est la connexion à l'infini obtenue de la connexion de Levi-Civita complexifiée et de la structure spin.

1. FIBRÉ DE FREDHOLM

Un fibré d'état $\mathfrak{F}$ est un fibré hilbertien de base une variété paracompacte connexe $\mathcal{W}$ de dimension finie et de fibre un espace de Hilbert séparable H . Soit $\mathfrak{F}_{\mathcal{O}}$ un fibré de fibre l'espace des opérateurs non nécessairement bornés de H , noté $\mathcal{O}(H)$, de base $\mathcal{W}$. Le fibré $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ est le sous-fibré de $\mathfrak{F}_{\mathcal{O}}$ dont la fibre est formée des opérateurs bornés de H et $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}$ est le sous-fibré de $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ dont la fibre est formée des opérateurs compacts de H , c'est-à-dire, de fibre $\mathfrak{S}^{\infty}(H)$ qui est l'idéal des opérateurs compacts de H . L'espace $\mathcal{O}(H)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel topologique pour laquelle l'inclusion de $\mathcal{B}(H)$ dans $\mathcal{O}(H)$, muni de sa structure d'espace de Banach, soit continue. On peut décrire le fibré $\mathfrak{F}_{\mathcal{O}}$ par automorphismes intérieurs. Si $\phi_{W,V}(w)$ est une application de transition en $w \in W \cap V$, les applications

$$\phi_{W,V}(w) : H \longrightarrow H$$

sont bornées et vérifient les conditions

$$\phi_{W,V}(w) = \mathbf{1}_H, \phi_{W,V}(w) = \phi_{V,W}(w)^{-1}$$

Date: 13/05/2022.

2020 Mathematics Subject Classification. 28A05, 28A33, 40A05, 40A10, 42A20, 47L20, 47L60.

Key words and phrases. Algèbre de Clifford, Opérateur de Dirac, Fibré d'état, Connexion spinorielle, Fibré de Fredholm, Espaces de Lebesgue-Schatten-Maçaev.

et la condition de cocycle, si $w \in W \cap V \cap U$

$$\phi_{W,V}(w) = \phi_{W,U}(w) \circ \phi_{U,V}(w).$$

Les applications de transition de $\mathfrak{F}_{\mathcal{O}}$ associées sont définies par

$$\Phi_{W,V}(w) : \mathcal{O}(H) \longrightarrow \mathcal{O}(H), \Phi_{W,V}(w)(u) = \phi_{W,V}(w) \circ u \circ \phi_{W,V}(w)^{-1}.$$

On peut construire, à partir de ces applications de transition le fibré $\mathfrak{F}_{\mathcal{O}}$, qui est unique à isomorphisme près, et les sous-fibrés $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ et $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}$. Pour une algèbre $\mathcal{A}$ non commutative de dimension $\dim \mathcal{A} \leq +\infty$, un fibré $\mathcal{F}$ de base $\mathcal{W}$ et de fibre $\mathcal{A}$ est un fibré dont les applications de transition en $w \in W \cap V$ sont des isomorphismes de l'algèbre $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{C}^*$ -algèbre les applications de transition sont des $*$ -isomorphismes de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ est un $*$ -fibré.

Remark 1. Si le fibré complexe $\mathfrak{F}$ est de dimension finie alors

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{B}} = \text{End}(\mathfrak{F}).$$

Une représentation d'un fibré $\mathcal{F}$ dans $\mathfrak{F}$ est la donnée d'un morphisme de fibrés ρ de $\mathcal{F}$ dans $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$

$$\rho : \mathcal{F} \longrightarrow \mathfrak{F}_{\mathcal{B}}, \rho(w) : E_w(\mathcal{F}) \longrightarrow E_w(\mathfrak{F}_{\mathcal{B}})$$

tel que pour tout $w \in \mathcal{W}$, $\rho(w)$ est une représentation isométrique de $E_w(\mathcal{F})$ dans $E_w(\mathfrak{F})$. La représentation est compacte si $\rho(w)$ est à valeurs dans $E_w(\mathfrak{F}_{\mathcal{K}})$, $\forall w \in \mathcal{W}$. Pour toute section locale s de $\mathcal{F}$, on note s_ρ la section locale de $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ définie par

$$s_\rho(w) = \rho(w)(s(w)), \forall w \in \text{dom}(s).$$

Lemma 1. Les $*$ -fibrés ont une représentation isométrique dans un fibré d'état $\mathfrak{F}$.

Proof. Soit $\tau \in \mathfrak{E}(\mathcal{A})$ un état de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire, une forme $\mathbb{C}$ -linéaire positive de norme 1,

$$\mathcal{N}_\tau = \{u \in \mathcal{A} : \tau(u^*u) = 0\} \quad (1.1)$$

est un idéal gauche de $\mathcal{A}$. L'espace $\widehat{\mathcal{A}/\mathcal{N}_\tau}$ est la complétion de $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\tau$ formé des éléments $\overline{u} = u + \mathcal{N}_\tau$ muni du produit scalaire

$$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = \tau(u^*v).$$

$H_\tau = \widehat{\mathcal{A}/\mathcal{N}_\tau}$ est un espace de Hilbert, soit χ_τ l' $*$ -homomorphisme de la $\mathbb{C}^*$ -algèbre $\mathcal{A}$ qui associe $u \in \mathcal{A}$ l'opérateur borné $\chi_\tau(u)$ de H_τ

$$u \in \mathcal{A} \longrightarrow \chi_\tau(u) : \overline{v} \longrightarrow \overline{uv}, \chi_\tau(u) \in \mathcal{B}(H_\tau), \quad (1.2)$$

est la représentation **GNS** de l'état τ . Si $\xi_\tau = 1_{\mathcal{A}} + \mathcal{N}_\tau = \overline{1_{\mathcal{A}}}$ alors

$$\langle \xi_\tau, \chi_\tau(u) \xi_\tau \rangle = \tau(u).$$

χ_τ est une représentation de $\mathcal{A}$ dans l'espace de Hilbert H_τ . χ_τ est une représentation cyclique car elle vérifie

$$\chi_\tau(\mathcal{A}) \xi_\tau = \widehat{\mathcal{A}/\mathcal{N}_\tau},$$

χ_τ est irréductible si τ est un état pur de $\mathcal{A}$, $\tau \in \mathfrak{P}(\mathcal{A})$. On a

$$\|\chi_\tau(u)\|_{H_\tau} \leq \|u\|$$

et pour tout $u \in \mathcal{A}$ il existe $\tau_u \in \mathfrak{E}(\mathcal{A})$ tel que

$$\|\chi_{\tau_u}(u)\|_{H_\tau} = \|u\|.$$

La somme direct

$$\chi = \oplus_{u \in \mathcal{A}} \chi_{\tau_u} : \mathcal{A} \longrightarrow \oplus_{u \in \mathcal{A}} \mathcal{B}(H_{\tau_u}) \subset \mathcal{B}(H), \quad H = \oplus_{u \in \mathcal{A}} H_{\tau_u}$$

est une représentation isométrique de $\mathcal{A}$ dans H . Si on prend une carte de trivialisation du fibré $\mathcal{F}$ et du fibré d'état $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ de fibre $\mathcal{B}(H)$,

$$\phi_W : \pi_{\mathcal{F}}^{-1}(W) \longrightarrow W \times \mathcal{A},$$

$$\varphi_W : \pi_{\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}}^{-1}(W) \longrightarrow W \times \mathcal{B}(H),$$

les applications de transition en w sont définies par

$$\phi_{V,W}(w) = \phi_V^{-1}(w) \circ \phi_W(w) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \text{ et}$$

$$\varphi_{V,W}(w) = \varphi_V^{-1}(w) \circ \varphi_W(w) : \mathcal{B}(H) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$$

permettent de construire une représentation du fibré $\mathcal{F}$ dans un fibré d'état $\mathfrak{F}$ de fibre H , en posant

$$\rho(u) = \rho_W(u), \quad w = \pi_{\mathcal{F}}(u) \in W$$

où

$$\rho_W(\overline{(w, a)}) = \overline{(w, \varphi_W^{-1}(w) \circ \chi \circ \phi_W(w)(a))}.$$

Vérifions que

$$\rho_W(\overline{(w, a)}) = \rho_V(\overline{(w, a)}) \quad \text{si } w \in W \cap V,$$

on a

$$\begin{aligned} \overline{(w, a)} &= \overline{(w, \phi_{W,V}(w)(a))} \\ \rho_W(\overline{(w, a)}) &= \rho_W(\overline{(w, \phi_{W,V}(w)(a))}) \\ &= \overline{(w, \varphi_W^{-1}(w) \circ \chi \circ \phi_V(w)(a))} \\ &= \overline{(w, \varphi_{V,W}(w)(\varphi_W^{-1}(w) \circ \chi \circ \phi_V(w)(a))}) \\ &= \rho_V(\overline{(w, a)}), \end{aligned}$$

ρ ne dépend pas de la carte de trivialisation choisie. ρ_W est continue sur $\pi_{\mathcal{F}}^{-1}(W)$ donc ρ est continue et $\rho(w)$ est une représentation isométrique de $E_w(\mathcal{F})$ dans $E_w(\mathfrak{F})$, 8.2. $\square$

Definition 1. Une observable de Dirac de $\mathfrak{F}$ est une section globale du fibré $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ qui est autoadjointe

$$\mathcal{D}(w) = \mathcal{D}(w)^* \quad \text{pour tout } w \in \mathcal{W},$$

le fibré $\mathcal{F}$ est un fibré de Fredholm impair s'il existe une observable de Dirac $\mathcal{D}$ et une représentation ρ dans un fibré d'état $\mathfrak{F}$ telles que pour toute section locale de $\mathcal{F}$, $s_{\rho}(\mathcal{D}^2 - \mathbf{1})$ et $[\mathcal{D}, s_{\rho}]$ sont des sections locales du fibré $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}$.

Theorem 1. Modulo la relation d'équivalence définie dans la théorie de Kasparov, on peut toujours se ramener au cas où $\mathcal{D}^2 = \mathbf{1}$.

Proof. Pour une preuve on peut consulter [4]. $\square$

On rappelle, également, que le fibré $\mathcal{F}$ est localement p -sommable, respectivement localement $p_{\pm}$ -sommable, si pour toute section locale s de $\mathcal{F}$, $[\mathcal{D}, s_{\rho}]$ est une section locale de $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^p$, respectivement $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^{p_{\pm}}$. Les fibrés

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^p \text{ et } \mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^{p_{\pm}} \quad (1.3)$$

sont les fibrés de base $\mathcal{W}$ de fibre $\mathfrak{S}^p(H)$, respectivement $\mathfrak{S}^{p_{\pm}}(H)$, qui sont les classes de Schatten [10].

Definition 2. Si $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}$ est muni d'une $\mathbb{Z}_2$ -graduation ϵ

$$\epsilon^2 = \mathbf{1}_{\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}},$$

c'est-à-dire, d'une section globale ϵ de $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ vérifiant

$$\epsilon(w)^2 = \mathbf{1}_{E_w(\mathfrak{F}_{\mathcal{B}})}$$

pour laquelle

$$[\epsilon, s_{\rho}] = \mathbf{0}_{\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}}, \forall s \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathcal{F}) \text{ et } \{\epsilon, \mathcal{D}\} = \mathbf{0}_{\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}},$$

on dit que le fibré $\mathcal{F}$ est un fibré de Fredholm pair. Les sections locales s_{ρ} commutent avec ϵ et $\mathcal{D}$ anti-commute avec ϵ . On note $(\mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathcal{D})$ le module de Fredholm associé au fibré de Fredholm $\mathcal{F}$.

2. LES ESPACES DE LEBESGUE-SCHATTEN-MAÇAEV $L^p(\mathcal{F}, \nu)$, $L^{p_{\pm}}(\mathcal{F}, \nu)$, $L_o^{p+}(\mathcal{F}, \nu)$

Dans cette section, on suppose que la base $\mathcal{W}$ du fibré $\mathcal{F}$ est munie d'une mesure de Lebesgue ν . Les résultats donnés sur les espaces de Lebesgue-Schatten sont des conséquences liées aux propriétés des fibres définies par les idéaux de Schatten-Maçaev. On rappelle que les idéaux de Schatten sont définis par les espaces, avec les notations précédentes,

$$\mathfrak{S}^p(H) = \left\{ T \in \mathcal{K} : \sum_0^{+\infty} \mu_n(|T|^p) < +\infty \right\}$$

où $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, la sommation est indexée par ordre décroissant de la suite $\{\mu_n(|T|)\}$. On note

$$\|T\|_p = \left(\sum_0^{+\infty} \mu_n(|T|^p) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_0^{+\infty} \mu_n(|T|)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

la norme de Schatten, pour cette norme l'espace est un espace de Banach et un espace de Hilbert pour $p = 2$. On a l'inégalité de Hölder de la forme

$$\|ST\|_1 \leq \|S\|_p \|T\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ avec } p, q \in [1, +\infty[.$$

Pour $p \in [1, +\infty]$, les espaces

$$\mathfrak{S}^{p-}(H) = \left\{ T \in \mathcal{K} : \sum_0^{+\infty} (n+1)^{\frac{1}{p}-1} \mu_n(|T|) < +\infty \right\}$$

sont des idéaux bilatères pour lesquels on a les inclusions suivantes, $q < p$

$$\mathfrak{S}^q(H) \subset \mathfrak{S}^{p-}(H) \subset \mathfrak{S}^p(H)$$

et l'égalité

$$\mathfrak{S}^{1-}(H) = \mathfrak{S}^1(H).$$

L'égalité

$$\|T\|_{p_-} = \sum_0^{+\infty} (n+1)^{\frac{1}{p}-1} \mu_n(|T|)$$

définit une norme, l'espace $\mathfrak{S}^{p-}(H)$ muni de cette norme est un espace de Banach, dont la boule unité est faiblement compacte. Les idéaux $\mathfrak{S}_0^{p+}(H)$ et $\mathfrak{S}^{p+}(H)$, pour $p \in [1, +\infty[$, sont

$$\mathfrak{S}^{p+}(H) = \left\{ T \in \mathcal{K} : \sigma_N(T) = O\left(\sum_0^N (n+1)^{-\frac{1}{p}}\right) \right\}$$

où

$$\sigma_N(T) = \sum_0^N \mu_n(|T|),$$

et pour $p = +\infty$, l'espace $\mathfrak{S}^{+\infty+}(H)$ est l'espace des opérateurs bornés $\mathcal{B}(H)$ muni de la norme standard. Si $p < q$ on a les inclusions suivantes

$$\mathfrak{S}^p(H) \subset \mathfrak{S}^{p+}(H) \subset \mathfrak{S}^q(H),$$

pour $p = 1$

$$\mathfrak{S}^{1+}(H) = \{T \in \mathcal{K} : \sigma_N(T) = O(\log(N))\}$$

et si $p \in]1, +\infty[$

$$\mathfrak{S}^{p+}(H) = \left\{ T \in \mathcal{K} : \mu_n(T) = O\left(n^{-\frac{1}{p}}\right) \right\}.$$

On munit ces espaces de la norme

$$\|T\|_{p_+} = \sup_N \left\{ \sigma_N(T) \left(\sum_0^N (n+1)^{-\frac{1}{p}} \right)^{-1} \right\},$$

$\mathfrak{S}^{p+}(H)$ muni de cette norme est un espace de Banach.

L'espace $\mathfrak{S}_0^{p+}(H)$ est l'idéal bilatère qui est l'adhérence pour la norme $\|\cdot\|_{p_+}$ de l'idéal des opérateurs de rang fini de $\mathfrak{S}^{p+}(H)$, ces espaces sont caractérisés en remplaçant o par O . Pour $p, q \in [1, +\infty]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\mathfrak{S}^{q-}(H)$ est le dual de $\mathfrak{S}_0^{p+}(H)$ et $\mathfrak{S}^{p+}(H)$ est le dual $\mathfrak{S}^{q-}(H)$ par l'accouplement défini par la trace $\text{Trace}(ST)$. Pour une preuve de tous ces résultats, on peut consulter [3], [18]. Pour une section $s \in \Gamma(\mathfrak{F}_{\mathcal{K}})$, on pose

$$|s|(w) = \text{Trace}(|s(w)|) = \sum_0^{+\infty} \mu_n(|s(w)|) \leq +\infty \text{ et } \mu_n(s)(w) = \mu_n(|s(w)|) \quad (2.1)$$

où $\mu_n(|s(w)|)$ est la $n^{\text{ième}}$ valeur propre de $|s(w)|$ rangée par ordre décroissant. Chaque sous-espace de dimension finie n décompose le fibré d'état $\mathfrak{F}$ en une somme orthogonale

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_E \oplus \mathfrak{F}_{E^\perp}$$

où $\mathfrak{F}_E$ et $\mathfrak{F}_{E^\perp}$ sont les fibrés de fibre respective E et $E^\perp$. On a une décomposition du fibré $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}$ de la forme

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{K}} = \mathfrak{F}_{E, \mathcal{K}} \oplus \mathfrak{F}_{E^\perp, \mathcal{K}},$$

on pose

$$T = T|_E \oplus T|_{E^\perp}.$$

Chaque section $s \in \Gamma(\mathfrak{F}_K)$ se décompose en une somme de deux sections

$$s = s_E + s_{E^\perp}, \quad s_E(w) \in E_w(\mathfrak{F}_{E,K}) \quad \text{et} \quad s_{E^\perp}(w) \in E_w(\mathfrak{F}_{E^\perp,K}), \quad (2.2)$$

avec les notations de 2.1 et 2.2, on a le théorème suivant,

Theorem 2. *Pour toute section t et s de $\mathfrak{F}_K$*

$$1) \mu_n(t) = \inf \{ \|t_{E^\perp}\| : E \text{ sous-espace de } H \text{ de dimension } n \},$$

$$2) \mu_n(t) = \|t - \mathfrak{R}_n\|$$

où $\mathfrak{R}_n$ est le sous-espace de $\Gamma(\mathfrak{F}_B)$ formé des sections r vérifiant

$$\sup \{ \dim(\text{Im } r(w)) : \forall w \in \mathcal{W} \} \leq n,$$

$$3) |\mu_n(t) - \mu_n(s)| \leq \|t - s\|, \quad (2.3)$$

$$4) \mu_{n+m}(t+s) \leq \mu_n(t) + \mu_m(s), \quad (2.4)$$

$$5) \mu_{n+m}(ts) \leq \mu_n(t) \mu_m(s), \quad (2.5)$$

$$6) \sigma_N(t) = \sum_0^N \mu_n(t) = \sup \{ \text{Trace}(|sp|) : p \in \mathfrak{P}_N \}$$

où $\mathfrak{P}_N$ est l'espace des sections p de $\mathfrak{F}_K$ telles que $p(w)$ est un projecteur orthogonal sur un sous-espace de dimension N pour tout $w \in \mathcal{W}$. On a l'estimation suivante

$$7) \sigma_N(ts) \leq \sum_0^N \mu_n(t) \mu_n(s).$$

Proof. Les résultats sont démontrés sur chaque fibre dans [4]. En utilisant les notations précédentes, on peut étendre ces résultats sur l'espace des sections. $\square$

Le fibré $\mathfrak{F}_{K^o}^{p+}$ est le fibré de base $\mathcal{W}$ de fibre $\mathfrak{S}_o^{p+}(H)$, $\mathfrak{F}_K^p$ et $\mathfrak{F}_K^{p\pm}$ sont les fibrés définis précédemment. Ces fibrés sont des fibrés de Banach pour les normes respectives. Les résultats sur les fibres s'étendent aux fibrés comme suit,

Theorem 3. *On a les inclusions*

$$\mathfrak{F}_K^q \subset \mathfrak{F}_K^{p-} \subset \mathfrak{F}_K^p, \quad q < p$$

$$\mathfrak{F}_K^q \subset \mathfrak{F}_K^{q+} \subset \mathfrak{F}_K^p, \quad q < p.$$

Les fibrés $\mathfrak{F}_K^{1-}$ et $\mathfrak{F}_K^1$ sont les mêmes, $\mathfrak{F}_K^{\infty+}$ s'identifie au fibré $\mathfrak{F}_B$.

Proof. Les inclusions sur les fibres impliquent les inclusions sur les fibrés. $\square$

Theorem 4. *On a les isomorphismes de fibrés*

$$\mathfrak{F}_K^{p-} \approx (\mathfrak{F}_{K^o}^{p+})^* \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}_K^{p+} \approx (\mathfrak{F}_K^{q-})^*.$$

Proof. La dualité est obtenue sur les fibres, elle s'étend aux fibrés. $\square$

Les espaces de Lebesgue-Schatten $L^p(\mathfrak{F}, \nu)$ sont les espaces, complétés si nécessaire, des espaces suivants

$$\left\{ s \in \Gamma(\mathfrak{F}_K^p) : \int_{\mathcal{W}} |s^p| d\nu < +\infty \right\}.$$

La norme sur $L^p(\mathfrak{F}, \nu)$ est définie par

$$\|s\|_{L^p} = \left(\int_{\mathcal{W}} |s^p| d\nu \right)^{\frac{1}{p}},$$

l'inégalité de Hölder, pour deux sections $s \in L^p(\mathfrak{F}, \nu)$ et $t \in L^q(\mathfrak{F}, \nu)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ est donnée par

$$\|st\|_{L^1} \leq \|s\|_{L^p} \|t\|_{L^q}.$$

Definition 3. *L'intégrale de Lebesgue-Schatten d'une section $s \in L^1(\mathfrak{F}, \nu)$ est*

$$\int_{\mathcal{W}} s d\nu = \int_{\mathcal{W}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n(s(w)) \right) d\nu(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{W}} \mu_n(s(w)) d\nu(w)$$

où $\mu_n(s(w))$ est la $n^{\text{ième}}$ valeur propre de $s(w)$ rangée par ordre décroissant de la suite $\{\mu_n(|s(w)|)\}$.

Remark 2. *Si on fait l'hypothèse d'une mesure finie alors les espaces*

$$\left\{ s \in \Gamma(\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^p) : \int_{\mathcal{W}} |s^p| d\nu < +\infty \right\}$$

sont complets.

Les espaces de Lebesgue-Maçaeu $L^{p\pm}(\mathfrak{F}, \nu)$ et $L_o^{p+}(\mathfrak{F}, \nu)$ sont les espaces, complétés si nécessaire, des espaces

$$\left\{ s \in \Gamma(\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^{p+}) : \sup_N \left(\left(\sum_0^N (n+1)^{-\frac{1}{p}} \right)^{-1} \int_{\mathcal{W}} \sigma_N(s) d\nu \right) < +\infty \right\},$$

la norme sur $L^{p+}(\mathfrak{F}, \nu)$ est donnée par

$$\|s\|_{L^{p+}} = \sup_N \left(\left(\sum_0^N (n+1)^{-\frac{1}{p}} \right)^{-1} \int_{\mathcal{W}} \sigma_N(s) d\nu \right).$$

L'espace de Lebesgue-Maçaeu $L^{p-}(\mathfrak{F}, \nu)$ est défini par le complété de

$$\left\{ s \in \Gamma(\mathfrak{F}_{\mathcal{K}o}^p) : \sum_0^{+\infty} (n+1)^{\frac{1}{p}-1} \int_{\mathcal{W}} \mu_n(|s|) d\nu < +\infty \right\},$$

la norme sur $L^{p-}(\mathfrak{F}, \nu)$ est donnée par

$$\|s\|_{L^{p-}} = \sum_0^{+\infty} (n+1)^{\frac{1}{p}-1} \int_{\mathcal{W}} \mu_n(|s|) d\nu = \int_{\mathcal{W}} \left(\sum_0^{+\infty} (n+1)^{\frac{1}{p}-1} \mu_n(|s|) \right) d\nu.$$

L'espace $L_o^{p+}(\mathfrak{F}, \nu)$ est le complété dans $L^{p+}(\mathfrak{F}, \nu)$

$$\{s \in \Gamma(\mathfrak{F}_{\mathcal{K}o}^{p+}) : \|s\|_{L^{p+}} < +\infty\}.$$

Theorem 5. *On a les inclusions*

$$L^q(\mathfrak{F}, \nu) \subset L^{p-}(\mathfrak{F}, \nu) \subset L^p(\mathfrak{F}, \nu), \quad q < p$$

$$L^q(\mathfrak{F}, \nu) \subset L^{q+}(\mathfrak{F}, \nu) \subset L^p(\mathfrak{F}, \nu), \quad q < p.$$

Si $p, q \in [1, +\infty]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $L^{q-}(\mathfrak{F}, \nu)$ est le dual de $L_o^{p+}(\mathfrak{F}, \nu)$ et $L^{p+}(\mathfrak{F}, \nu)$ est le dual $L^{q-}(\mathfrak{F}, \nu)$ pour la dualité définie par l'accouplement des sections s et t par $\text{Trace}(st)$.

3. HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE DES FIBRÉS DE FREDHOLM

On suit le plan proposé par Higson et Rodsphon dans [9] et [16]. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative sur $\mathbb{C}$, non nécessairement unitaire et $\mathcal{F}$ un fibré de fibre $\mathcal{A}$ muni d'une représentation ρ de $\mathcal{F}$ dans le fibré d'état $\mathfrak{F}$. L'algèbre des sections de $\mathcal{F}$ est une algèbre unitaire si $\mathcal{A}$ est une algèbre unitaire. La théorie de Kasparov permet de travailler sur des modules de Fredholm pour lesquels l'observable de Dirac $\mathcal{D}$ associée vérifie $\mathcal{D}^2 = \mathbf{1}$. Soit un module de Fredholm pair sur $\mathcal{F}$ et ε la $\mathbb{Z}_2$ graduation sur le fibré d'état $\mathfrak{F}$, la section autoadjointe ε de $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ vérifie $\varepsilon^2 = \mathbf{1}$ et

$$[\varepsilon, s_\rho] = \mathbf{0}, \forall s \in \Gamma(\mathcal{F}) \text{ et } \{\varepsilon, \mathcal{D}\} = \mathbf{0},$$

le fibré d'état $\mathfrak{F}$ se décompose en une somme directe de fibré

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_+ \oplus \mathfrak{F}_-$$

telle que

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathfrak{F}_+} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_{\mathfrak{F}_-} \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{D}$ s'écrit

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\mathfrak{F}_+} & T^* \\ T & \mathbf{0}_{\mathfrak{F}_-} \end{pmatrix}, s_\rho = \rho(s) = \begin{pmatrix} \rho_+(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho_-(s) \end{pmatrix} \text{ avec } \rho = \rho_+ \oplus \rho_-,$$

T est le morphisme de fibré

$$T : \mathfrak{F}_- \longrightarrow \mathfrak{F}_+, T = \mathcal{D} |_{\mathfrak{F}_-}$$

et T^* est le morphisme dual

$$T^* : \mathfrak{F}_+ \longrightarrow \mathfrak{F}_-, T^* = \mathcal{D} |_{\mathfrak{F}_+}.$$

Notation 1. On note

$$s_\rho = s_{\rho_+} + s_{\rho_-}, s_{\rho_\pm} = \rho_\pm(s).$$

Si s est une section de $\mathcal{F}$ idempotente ($s^2 = s$) la section

$$s_{\rho_-} \mathcal{D} s_{\rho_+} : s_{\rho_+} \mathfrak{F}_+ \longrightarrow s_{\rho_-} \mathfrak{F}_-$$

est une section de Fredholm, c'est-à-dire, $\forall w \in \mathcal{W}$

$$s_{\rho_-} \mathcal{D} s_{\rho_+}(w) : E_w(s_{\rho_+} \mathfrak{F}_+) \longrightarrow E_w(s_{\rho_-} \mathfrak{F}_-)$$

est un opérateur de Fredholm car

$$s_{\rho_+} \mathcal{D} s_{\rho_-} : s_{\rho_-} \mathfrak{F}_- \longrightarrow s_{\rho_+} \mathfrak{F}_+$$

est la section inverse modulo les sections de $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}$.

Definition 4. Un module de Fredholm sur $\mathcal{F}$ est finiment sommable si il existe $d \geq 0$ tel que pour tout entier $n \geq d$ et toutes les sections $s^j \in \Gamma(\mathcal{F})$,

$$\mathfrak{s} = [\mathcal{D}, s_\rho^0] [\mathcal{D}, s_\rho^1] \cdots [\mathcal{D}, s_\rho^n]$$

est une section d'opérateurs de classe trace, c'est-à-dire, une section de $\mathfrak{s} \in \mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ telle que

$$\mathfrak{s}(w) : E_w(\mathfrak{F}) \longrightarrow E_w(\mathfrak{F})$$

est un opérateur de classe trace de $E_w(\mathfrak{F})$ pour tout $w \in \mathcal{W}$, [18] et [15].

On construit, pour les fibrés de fibre une algèbre associative, la notion d'homologie de cohomologie de Hochschild sur ces fibrés.

Definition 5. Une fonctionnelle $(p+1)$ -linéaire

$$\phi : \Gamma(\mathcal{F})^{p+1} \longrightarrow \mathfrak{a}, \mathfrak{a} = C(\mathcal{W}, \mathbb{C})$$

est un cycle si

$$\phi(s^0, s^1, \dots, s^p) = (-1)^p \phi(s^p, s^0, \dots, s^{p-1}) \quad (3.1)$$

pour toutes les sections $s^j \in \Gamma(\mathcal{F})$.

Le cobord d'une $(p+1)$ -fonctionnelle linéaire ϕ est défini, classiquement, par

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}\phi(s^0, s^1, \dots, s^{p+1}) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \phi(s^0, \dots, s^j s^{j+1}, \dots, s^{p+1}) \\ &\quad + (-1)^{p+1} \phi(s^{p+1} s^0, s^1, \dots, s^p). \end{aligned}$$

Definition 6. Une $(p+1)$ -fonctionnelle linéaire ϕ est un p -cocycle si $\mathfrak{b}\phi = 0$.

De $\mathfrak{b}^2 = 0$, on peut définir le $p^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de Hochschild comme le quotient des p -cocycles par les p -cycles qui sont des bords. Pour les sections d'opérateurs de classe trace sur le fibré $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^1$, on définit la Trace comme suit. Sur un ouvert de trivialisatation W , on pose

$$\mathbf{Tr} : W \times \mathfrak{S}^1(H) \longrightarrow \mathbb{C}, (w, u) \longrightarrow \text{Tr}(u)$$

où $\text{Tr}(u)$ désigne la trace de l'opérateur u et

$$\text{Trace} : \pi^{-1}(W) \longrightarrow \mathbb{C}, \text{Trace} = \mathbf{Tr} \circ \phi_W$$

où ϕ_W est l'isomorphisme de trivialisatation

$$\phi_W : \pi^{-1}(W) \longrightarrow W \times \mathfrak{S}^1(H).$$

La fonctionnelle Trace s'étend à une fonctionnelle sur l'espace total de $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}^1$ indépendante du choix des cartes ϕ_W . La classe de Schatten $\mathfrak{S}^1(H)$ a une structure d'espace de Banach, pour la norme $\|u\|_1 = \text{Tr}(|u|)$, pour laquelle la fonctionnelle Trace est continue.

Lemma 2. Soit $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^1$ le fibré de fibre $\mathfrak{S}^1(H)$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$, alors pour toute section $s \in \Gamma(\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^1)$ l'application

$$w \in \mathcal{W} \longrightarrow \text{Trace}(s(w)) \in \mathbb{C} \quad (3.2)$$

est continue et de classe C^∞ dans le sens de Banach si s est de classe C^∞ comme application de $\mathcal{W}$ dans la variété de Banach $E(\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^1)$.

En utilisant les résultats de Connes [6], on en déduit les théorèmes suivants,

Theorem 6. Soit $(\mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathcal{D})$ un module de Fredholm impair sur $\mathcal{F}$ finiment sommable et $n = 2k + 1$ un entier impair pour lequel la section

$$[\mathcal{D}, s_\rho^0] [\mathcal{D}, s_\rho^1] \cdots [\mathcal{D}, s_\rho^n]$$

est une section d'opérateurs classe trace pour toutes sections $s^j \in \Gamma(\mathcal{F})$ alors la formule

$$\phi(s^0, s^1, \dots, s^n) = \frac{1}{2} \text{Trace}(\mathcal{D} [\mathcal{D}, s_\rho^0] [\mathcal{D}, s_\rho^1] \cdots [\mathcal{D}, s_\rho^n])$$

définie un cycle n -cocycle sur $\mathcal{F}$ dans le sens de la définition 3.1. Si s est une section inversible, notée s^{-1} de $\Gamma(\mathcal{F})$ alors

$$\phi(s, s^{-1}, \dots, s, s^{-1}) = (-1)^{k+1} 2^{2k+1} \text{Index}(Ps_\rho P : P\mathfrak{F} \longrightarrow P\mathfrak{F}) \quad (3.3)$$

où P est la section de $\mathfrak{F}$ définie par

$$P = \frac{1}{2} (\mathcal{D} + \mathbf{1}_{\mathfrak{F}}),$$

et $\phi(s, s^{-1}, \dots, s, s^{-1})$ est un cycle n -cocycle constant sur $\mathcal{W}$.

Dans le cas pair on a le résultat suivant,

Theorem 7. Soit $(\mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathcal{D})$ un module de Fredholm pair sur $\mathcal{F}$ finiment sommable et $n = 2k$ un entier pair pour lequel la section

$$[\mathcal{D}, s_{\rho}^0] [\mathcal{D}, s_{\rho}^1] \cdots [\mathcal{D}, s_{\rho}^n]$$

est une section d'opérateurs classe trace pour toutes sections $s^j \in \Gamma(\mathcal{F})$ alors la formule

$$\phi(s^0, s^1, \dots, s^n) = \frac{1}{2} \text{Trace}(\varepsilon \mathcal{D} [\mathcal{D}, s_{\rho}^0] [\mathcal{D}, s_{\rho}^1] \cdots [\mathcal{D}, s_{\rho}^n])$$

définie un cycle n -cocycle sur $\mathcal{F}$. Si s est une section idempotente de $\mathcal{F}$ alors

$$\phi(s, s, \dots, s) = (-1)^k \text{Index}(s_{\rho} \mathcal{D} s_{\rho}) \quad (3.4)$$

où $s_{\rho} \mathcal{D} s_{\rho}$ est l'homomorphisme

$$s_{\rho} \mathcal{D} s_{\rho} : s_{\rho}(\mathfrak{F}^+) \longrightarrow s_{\rho}(\mathfrak{F}^-),$$

$\phi(s, s, \dots, s)$ est cycle n -cocycle constant du $\mathcal{W}$.

Proof. Les applications

$$\phi(s^0, s^1, \dots, s^n) : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{C},$$

sont des cycles n -cocycliques par les théorèmes de Connes [6] et le lemme 3.2. Avec les hypothèses données dans les deux théorèmes, dans le cas impair, la section

$$P = \frac{1}{2} (\mathcal{D} + \mathbf{1}_{\mathfrak{F}})$$

vérifie

$$P^2 = P,$$

si la section $s \in \Gamma(\mathcal{F})$ est inversible, $s(w)$ est inversible pour tout $w \in \mathcal{W}$, alors $P(w) \rho(s)(w) P(w)$ est inversible à opérateur compact près, le théorème Atkinson implique

$$P(w) \rho(s)(w) P(w) : P(w) E_w(\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}) \longrightarrow P(w) E_w(\mathfrak{F}_{\mathcal{B}})$$

est un opérateur de Fredholm et l'équation 3.3 a un sens sur chaque fibres par les théorèmes de Connes. Dans le cas pair, l'opérateur

$$\rho(s)(w) \mathcal{D}(w) \rho(s)(w) : \rho(s)(w) (E_w(\mathfrak{F}^+)) \longrightarrow \rho(s)(w) (E_w(\mathfrak{F}^-))$$

est un opérateur de Fredholm pour tout $w \in \mathcal{W}$ si s est une section idempotente de $\mathcal{F}$, l'équation 3.4 est bien définie. Les équations 3.3 et 3.4 impliquent que les applications

$$\phi(s, s^{-1}, \dots, s, s^{-1}) : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{C}$$

et

$$\phi(s, s, \dots, s) : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{C}$$

sont des fonctions continues par 3.2 et donc constantes sur la variété connexe $\mathcal{W}$ comme applications discrètes. $\square$

Pour finir cette section, on introduit les $(\mathfrak{b}, \mathfrak{B})$ -bimodules pour définir les fonctionnelles de Chern des fibrés de Fredholm à fibre unifère. Les hypothèses et définitions sont celles données précédemment avec $\mathcal{A}$ unifère. Soit $C^p(\mathcal{F})$ l'espace des applications $(p+1)$ -linéaires de $\Gamma(\mathcal{F})^{p+1}$ à valeurs dans $\mathfrak{a} = C(\mathcal{W}, \mathbb{C})$ telles que

$$\phi(s^0, s^1, \dots, s^n) = \mathbf{0}$$

si il existe j tel que $s^j = \mathbf{1}$. Comme précédemment on définit les opérateurs

$$\mathfrak{b} : C^p(\mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{F}) \text{ et } \mathfrak{B} : C^{p+1}(\mathcal{F}) \longrightarrow C^p(\mathcal{F})$$

définis par

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}\phi(s^0, s^1, \dots, s^{p+1}) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \phi(s^0, \dots, s^j s^{j+1}, \dots, s^{p+1}) \\ &\quad + (-1)^{p+1} \phi(s^{p+1} s^0, s^1, \dots, s^p). \end{aligned}$$

et

$$\mathfrak{B}\phi(s^0, s^1, \dots, s^p) = \sum_{j=0}^p (-1)^{pj} \phi(\mathbf{1}, s^j, s^{j+1}, \dots, s^p, s^0, \dots, s^{j-1}).$$

Les relations

$$\mathfrak{b}^2 = \mathbf{0}, \mathfrak{B}^2 = \mathbf{0} \text{ et } \mathfrak{b}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} = \mathbf{0},$$

permettent de définir un double complexe associés aux espaces $C^p(\mathcal{F})$. On peut définir un $(\mathfrak{B}, \mathfrak{b})$ -bicomplexe en homologie et un $(\mathfrak{B}, \mathfrak{b})$ -bicomplexe en cohomologie comme le dual de celui défini en homologie. On a la définition suivante,

Definition 7. *La cohomologie cyclique périodique de $\mathcal{F}$ est la cohomologie du complexe dual (continu par rapport à la filtration) au 2-complexe périodique donnant l'homologie cyclique.*

On a les théorèmes suivants,

Theorem 8. *Soit $(\mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathcal{D})$ un module de Fredholm impair associé au fibré $\mathcal{F}$ et n un entier impair pour lequel la section*

$$[\mathcal{D}, s_\rho^0] [\mathcal{D}, s_\rho^1] \cdots [\mathcal{D}, s_\rho^n]$$

est une section d'opérateurs classe trace pour toutes sections $s^j \in \Gamma(\mathcal{F})$ alors la formule

$$\text{ch}_n^{\mathcal{D}}(s^0, s^1, \dots, s^n) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{2 \cdot n!} \text{Trace}(\mathcal{D} [\mathcal{D}, s_\rho^0] [\mathcal{D}, s_\rho^1] \cdots [\mathcal{D}, s_\rho^n]) \quad (3.5)$$

défini un cycle n -cocycle sur $\mathcal{F}$ dont la classe de cohomologie cyclique est indépendante de n .

Proof. Soit

$$\phi_{n+1}(s^0, s^1, \dots, s^{n+1}) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 2)}{(n+2)!} \text{Trace}(s_\rho^0 \mathcal{D} [\mathcal{D}, s_\rho^1] \cdots [\mathcal{D}, s_\rho^{n+1}])$$

sur chaque fibre on a

$$\mathfrak{b}\phi_{n+1} = -\text{ch}_{n+2}^{\mathcal{D}} \text{ et } \mathfrak{B}\phi_{n+1} = \text{ch}_n^{\mathcal{D}}$$

et

$$\text{ch}_n^{\mathcal{D}} - \text{ch}_{n+2}^{\mathcal{D}}$$

est un $(\mathfrak{b}, \mathfrak{B})$ -cobord sur chaque fibre. □

Remark 3. Avec les notations de Connes, dans le cas impair,

$$\text{ch}_{2k+1}^{\mathcal{D}}(s^0, s^1, \dots, s^{2k+1}) = -\frac{1}{2^{2k+1}.k!} \text{Trace}(s_{\rho}^0 [\mathcal{D}, s_{\rho}^1] [\mathcal{D}, s_{\rho}^2] \cdots [\mathcal{D}, s_{\rho}^{2k+1}]).$$

Theorem 9. Soit $(\mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathcal{D})$ un module de Fredholm pair associé au fibré $\mathcal{F}$ et n un entier pair pour lequel la section

$$[\mathcal{D}, s_{\rho}^0] [\mathcal{D}, s_{\rho}^1] \cdots [\mathcal{D}, s_{\rho}^n]$$

est une section d'opérateurs classe trace pour toutes sections $s^j \in \Gamma(\mathcal{F})$ alors la formule

$$\text{ch}_n^{\mathcal{D}}(s^0, s^1, \dots, s^n) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{2.n!} \text{Trace}(\varepsilon \mathcal{D} [\mathcal{D}, s_{\rho}^0] [\mathcal{D}, s_{\rho}^1] \cdots [\mathcal{D}, s_{\rho}^n]) \quad (3.6)$$

défini un cycle n -cocycle sur $\mathcal{F}$ dont la classe de cohomologie cyclique est indépendante de n .

Proof. Les démonstrations des deux théorèmes sont identiques, il suffit de vérifier que, pour tout $w \in \mathcal{W}$

$$\text{ch}_n^{\mathcal{D}}(s^0(w), s^1(w), \dots, s^n(w))$$

est un cycle n -cocycle sur l'anneau $E_w(\mathcal{F})$ dont la classe de cohomologie cyclique de $\text{ch}_n^{\mathcal{D}}(s^0(w), s^1(w), \dots, s^n(w))$ ne dépend pas de n , la démonstration est analogue dans le cas impair. Les fonctions $\text{ch}_n^{\mathcal{D}}$ sont continues par 3.2. $\square$

Remark 4. Avec les notations de Connes, dans le cas pair,

$$\text{ch}_{2k}^{\mathcal{D}}(s^0, s^1, \dots, s^{2k-1}) = \frac{k!}{(2k)!} \text{Trace}(\varepsilon s_{\rho}^0 \mathcal{D} [\mathcal{D}, s_{\rho}^1] [\mathcal{D}, s_{\rho}^2] \cdots [\mathcal{D}, s_{\rho}^{2k-1}]).$$

Definition 8. Le $(\mathfrak{B}, \mathfrak{b})$ -cocycle $\text{ch}^{\mathcal{D}}$ associé à 3.5 et 3.6 définit la fonctionnelle cyclique de Chern-Connes associée au module de Fredholm $(\mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathcal{D})$.

Remark 5. En utilisant les résultats de 3.3 dans le cas impair, si s est une section inversible ($ss^{-1} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}}$ si la fibre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$ est unitaire),

$$\text{ch}_n^{\mathcal{D}}(s, s^{-1}, s, s^{-1}, \dots, s^{-1})$$

est discrète, c'est une constante qui ne dépend pas de n . Dans le cas pair en utilisant 3.4, si s est une section idempotente ($s^2 = s$) alors

$$\text{ch}_n^{\mathcal{D}}(s, s, s, s, \dots, s)$$

est discrète, c'est une constante indépendante de n .

4. MÉTRIQUE SPECTRALE ET TRANSFORMATION DE WICK

On se fixe un fibré $\mathcal{F}$, de fibre une algèbre involutive $\mathcal{A}$, de base une variété connexe $\mathcal{W}$ et $(\mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathcal{D})$ un module de Fredholm, 1-sommable, associé au fibré $\mathcal{F}$. Dans ce qui suit, le fibré ξ est le fibré tangent associé à $\mathcal{W}$, ξ^* le fibré dual. On note $\xi_{\mathbb{C}}$ et $\xi_{\mathbb{C}}^*$ leurs complexifiés. Soit γ un morphisme du fibré $\xi_{\mathbb{C}}^*$ dans le fibré $\mathcal{F}$

$$\gamma(w) : E_w(\xi_{\mathbb{C}}^*) \longrightarrow E_w(\mathcal{F}), \quad w \in \mathcal{W},$$

à chaque section locale $d \in \Gamma_{\text{loc}}(\xi_{\mathbb{C}}^*)$, on définit la section locale $\gamma^d \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathcal{F})$

$$\gamma^d(w) = \gamma(w)(d(w)) \in E_w(\mathcal{F}),$$

et on pose, comme précédemment,

$$\gamma_\rho^d \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}), \gamma_\rho^d(w) = \rho(w)(\gamma^d(w)) \in E_w(\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}),$$

qui est une section locale du fibré $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ où ρ est une représentation fidèle de $\mathcal{F}$ dans $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$. Pour un repère local $\{\partial_\mu\}$ sur $W \subset \mathcal{W}$, on note $\{d^\nu\}$ la base duale

$$d^\nu(\partial_\mu) = \delta_\mu^\nu$$

et $\gamma^\nu = \gamma_\rho^{d^\nu}$.

Definition 9. *Le morphisme $\rho \circ \gamma$ du fibré $\xi_{\mathbb{C}}^*$ dans $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ est une représentation de $\xi_{\mathbb{C}}^*$ dans $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$. Une section de Dirac γ , associée à l'observable $\mathcal{D}$, est un morphisme γ du fibré $\xi_{\mathbb{C}}^*$ dans le fibré $\mathcal{F}$ vérifiant*

$$[\mathcal{D}, \gamma_\rho^d] \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^1), \forall d \in \Gamma_{\text{loc}}(\xi_{\mathbb{C}}^*).$$

Le tenseur

$$\gamma^{\nu\mu} = \text{Trace}([\mathcal{D}, \gamma^\nu][\mathcal{D}, \gamma^\mu])$$

est un tenseur symétrique qui est bien défini pour toute section de Dirac γ associée à $\mathcal{D}$, où Trace est la section trace sur $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^1$ donnée par, si $s \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^1)$

$$\text{Trace}(s)(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(s(w)),$$

avec $\{\mu_n(s(w))\}$ est la famille des valeurs propres de $s(w) \in E_w(\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^1)$, comptées avec leur ordre de multiplicité et indexées par ordre décroissant de la suite $\{\mu_n(|s(w)|)\}$ [4]. On peut encore écrire

$$\text{Trace}(s)(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle s(w)(e_n(w)), e_n(w) \rangle_{E_w(\mathfrak{F})}$$

où $\{e_n\}$ est une section locale de bases hilbertiennes sur chaque fibre. Si s est une section d'opérateurs classe trace, cette définition est indépendante de la section hilbertienne $\{e_n\}$.

L'involution sur l'algèbre $\mathcal{A}$ induit sur chaque fibre de $\mathcal{F}$ une involution, notée $*$. Le morphisme γ du fibré $\xi_{\mathbb{C}}^*$ dans le fibré $\mathcal{F}$ est autoadjoint si

$$(\gamma(w)(u))^* = \gamma(w)(u), \forall u \in E_w(\xi_{\mathbb{C}}^*) \text{ et } \forall w \in \mathcal{W},$$

on pose $\gamma^* = \gamma$.

Lemma 3. *Si γ est autoadjoint, le tenseur $\gamma^{\nu\mu}$ est réel.*

Proof. On a

$$\begin{aligned} \overline{\gamma^{\nu\mu}} &= \text{Trace}([\mathcal{D}, \gamma^\mu]^* [\mathcal{D}, \gamma^\nu]^*) = \text{Trace}([\mathcal{D}, (\gamma^\mu)^*] [\mathcal{D}, (\gamma^\nu)^*]) \\ &= \text{Trace}([\mathcal{D}, \gamma^\mu] [\mathcal{D}, \gamma^\nu]) = \gamma^{\nu\mu}, \end{aligned}$$

car $\mathcal{D}$ est une section autoadjointe de $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$, ρ est un $*$ -monomorphisme de $\mathcal{F}$ dans $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ et l'hypothèse $\gamma^* = \gamma$ impliquent que γ^ν et γ^μ sont des sections locales autoadjointes. $\square$

Definition 10. On dit qu'un tenseur $\varsigma^{\nu\mu}$ est un tenseur métrique si il est réel, symétrique

$$\varsigma^{\nu\mu} \in \mathbb{R}, \varsigma^{\nu\mu} = \varsigma^{\mu\nu}$$

et inversible, il existe un tenseur $\varsigma_{\nu\tau}$ vérifiant

$$\varsigma_{\nu\tau}\varsigma^{\tau\mu} = \delta_\nu^\mu, \forall \nu, \mu.$$

Theorem 10. Si le tenseur $\gamma^{\nu\mu}$ est un tenseur métrique, il définit une métrique locale sur W , notée g , vérifiant

$$g(\partial_\nu, \partial_\mu) = \gamma_{\nu\mu} \text{ avec } \gamma_{\nu\tau}\gamma^{\tau\mu} = \delta_\nu^\mu$$

qui est indépendante du repère local $\{\partial_\mu\}$.

Proof. Soit W^1 et W^2 deux cartes en $w \in W$. On note $\{\partial_\nu^j\}$ une base locale de sections sur la carte W^j . Sur $W^1 \cap W^2$ les sections locales ∂_ν^2 s'écrivent dans la base de sections locales $\{\partial_\nu^1\}$

$$\partial_\nu^2 = a_\nu^\mu \partial_\mu^1.$$

On note d_j^ν la 1-forme duale locale de ∂_ν^j alors

$$d_2^\nu = b_\tau^\nu d_1^\tau, B = A^{-1}$$

avec $A = (a_\nu^\mu)$ et $B = (b_\tau^\nu)$ sont des matrices à coefficients réels. Les tenseurs métriques associés, pour $j = 1, 2$, sont notés

$$\gamma_j^{\nu\mu} = \text{Trace}(\gamma_j^\nu \gamma_j^\mu), \gamma_j^\nu = [\mathcal{D}, \gamma_j^\nu] \text{ et } \gamma_j^\mu = [\mathcal{D}, \gamma_j^\mu]$$

on a

$$\begin{aligned} (\gamma_2^\nu)_\rho &= b_\tau^\nu (\gamma_1^\tau)_\rho \text{ et } (\gamma_2^\mu)_\rho = b_\sigma^\mu (\gamma_1^\sigma)_\rho, \\ (\gamma_2^\nu)_\rho (\gamma_2^\mu)_\rho &= b_\tau^\nu b_\sigma^\mu (\gamma_1^\tau)_\rho (\gamma_1^\sigma)_\rho, \end{aligned}$$

donc,

$$\gamma_2^{\nu\mu} = b_\tau^\nu b_\sigma^\mu \gamma_1^{\tau\sigma}.$$

Le tenseur métrique est réel, on peut choisir la section locales de bases $\{\partial_\nu^1\}$ pour laquelle $\mathcal{G}_1$ est réelle où $\mathcal{G}_j$ est la matrice $(\mathcal{G}_j)^\sigma_\tau = \gamma_j^{\tau\sigma}$, l'équation précédente s'écrit

$$\mathcal{G}_2 = B \times \mathcal{G}_1 \times ({}^\tau B)$$

on en déduit que $\mathcal{G}_2$ est réelle et si $\mathcal{M}_j = \mathcal{G}_j^{-1}$, on a

$$\mathcal{M}_2 = ({}^\tau A) \mathcal{M}_1 A.$$

Les matrices $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont des matrices réelles et congruentes, les métriques qu'elles définissent sont les mêmes. $\square$

Definition 11. La section de Dirac γ est métrisable si le tenseur $\gamma^{\nu\mu}$ est métrisable. Pour une section de Dirac γ métrisable, la métrique g associée est la métrique spectrale associée à γ .

Dans les définitions précédentes, si on remplace $\mathfrak{F}_\mathcal{K}^1$ par $\mathfrak{F}_\mathcal{K}^{1+}$, on peut définir une métrique spectrale sur W en utilisant la trace de Dixmier [7]. On dit que la section de Dirac γ est d'indice 1_+ . On peut généraliser la notion de section de Dirac d'indice p ou $p_\pm$.

A partir d'une section de Dirac γ , on peut définir une métrique spectrale en prenant pour tenseur

$$\kappa^{\nu\mu} = \text{Trace}([\mathcal{D}, \gamma^\nu]([\mathcal{D}, \gamma^\mu])^*)$$

si ce tenseur est métrique, la métrique définie par

$$h(\partial_\nu, \partial_\mu) = \kappa_{\nu\mu}, \text{ où } \kappa_{\nu\tau} \kappa^{\tau\mu} = \delta_\nu^\mu,$$

est une métrique riemannienne locale sur W que l'on peut étendre en une métrique riemannienne sur $\mathcal{W}$. Il suffit de choisir une section locale de bases $\{\partial_\nu\}$ pour laquelle la section locale des matrices $(\kappa^{\nu\mu})$ sont diagonales. La diagonale est formée de fonctions

$$\kappa^{\nu\nu} = \text{Trace}([\mathcal{D}, \gamma^\nu]([\mathcal{D}, \gamma^\nu])^*) = \text{Trace}(|[\mathcal{D}, \gamma^\nu]|^2) > 0,$$

qui sont strictement positives.

On se fixe une section de Dirac γ , associée à l'observable $\mathcal{D}$, qui est métrisable. Cette section définit une métrique locale pseudo-riemannienne g . Peut-on construire une métrique riemannienne h par transformation de la section de Dirac γ ? Les transformations de Wick permettent cette construction. On se fixe une section de bases locales $\{\partial_\nu\}$ sur $W \subset \mathcal{W}$ pour laquelle le tenseur

$$\gamma^{\nu\mu} = \begin{cases} \epsilon^\nu & \text{si } \nu = \mu \\ 0 & \text{si } \nu \neq \mu \end{cases},$$

où ϵ^ν est la fonction locale constante qui ne peut prendre que la valeur -1 ou 1 . On définit la section locale $\tilde{\gamma}$ par

$$\tilde{\gamma}^\nu = \begin{cases} \gamma^\nu & \text{si } \epsilon^\nu = 1 \\ \pm i \gamma^\nu & \text{si } \epsilon^\nu = -1 \end{cases}. \quad (4.1)$$

La transformation

$$\begin{aligned} \varkappa : \Gamma_{\text{loc}}(\xi_{\mathbb{C}}^*) &\longrightarrow \Gamma_{\text{loc}}(\xi_{\mathbb{C}}^*), \quad \varkappa(d) = \tilde{\lambda}_\nu d^\nu \\ \tilde{\lambda}_\nu &= \begin{cases} \lambda_\nu & \text{si } \epsilon^\nu = 1 \\ \pm i \lambda_\nu & \text{si } \epsilon^\nu = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

est la transformation de Wick qui induit par dualité une transformation sur les champs complexes par rotation d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$ sur les champs ∂_ν pour lesquels $\epsilon^\nu = -1$ et l'équation 4.1 permet de définir 2^p sections locales $\tilde{\gamma}$ sur W par

$$\tilde{\gamma}(w) : E_w(\xi_{\mathbb{C}}^*) \longrightarrow E_w(\mathcal{F}), \quad \tilde{\gamma}(w)(\lambda_\nu d^\nu(w)) = \tilde{\lambda}_\nu \gamma(w)(d^\nu(w)),$$

qui sont des sections métrisables où (p, q) est la signature de la métrique g (dans cette situation on a p signes $-$ et $q = \dim(\mathcal{W}) - p$ signes $+$). Si les rotations d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$ des champs locaux ∂_ν se font sur tous les champs à l'exception d'un champ $\partial = \partial_\nu$, on définit une métrique de Lorentz locale dont le champ local ∂ est un champ chronologique défini dans [12].

5. OPÉRATEUR D'ÉVOLUTION SUR UN FIBRÉ D'ÉTAT $\mathfrak{F}$

On rappelle qu'une connexion de Koszul ∇ , sur un fibré d'état $\mathfrak{F}$ complexe, est la donnée d'une application $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\nabla : \Gamma(\mathfrak{F}) \longrightarrow \Gamma(\xi_{\mathbb{C}}^* \otimes \mathfrak{F}),$$

vérifiant la relation de Leibniz

$$\nabla(\varphi s) = d\varphi \otimes s + \varphi \nabla(s), \quad \varphi \in C^\infty(\mathcal{W}).$$

Remark 6. Pour un fibré d'état $\mathfrak{F}$, $\Gamma(\mathfrak{F})$ est le $C^\infty(\mathcal{W})$ -module des C^∞ -sections de $\mathfrak{F}$.

Pour un morphisme de fibré

$$\gamma : \xi_{\mathbb{C}}^* \otimes \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}, \gamma(w) : E_w(\xi_{\mathbb{C}}^* \otimes \mathfrak{F}) \longrightarrow E_w(\mathfrak{F})$$

on définit pour chaque section locale $d \in \Gamma_{\text{loc}}(\xi_{\mathbb{C}}^*)$, la section locale γ^d de $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ par

$$\gamma^d(w) : E_w(\mathfrak{F}) \longrightarrow E_w(\mathfrak{F}),$$

$$\gamma^d(w)(u) = \gamma(w)(d(w) \otimes u), \forall w \in \text{dom}(d) \text{ et } \forall u \in E_w(\mathfrak{F}).$$

Definition 12. Le morphisme de fibré γ est à trace si $\gamma^d \in \Gamma(\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^1)$, $\forall d \in \Gamma(\xi_{\mathbb{C}}^*)$ et γ est dit à trace pour l'observable $\mathcal{D}$ si $[\mathcal{D}, \gamma^d] \in \Gamma(\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}^1)$, $\forall d \in \Gamma(\xi_{\mathbb{C}}^*)$.

Le morphisme de fibré γ permet de construire un opérateur sur les sections des fibrés en posant,

$$\hat{\gamma} : \Gamma(\xi_{\mathbb{C}}^* \otimes \mathfrak{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{F}), \hat{\gamma}(t)(w) = \gamma(w)(t(w)), \forall w \in \mathcal{W}, \forall t \in \Gamma(\xi_{\mathbb{C}}^* \otimes \mathfrak{F}).$$

Remark 7. Sauf mention contraire, tous les opérateurs définis sur chaque fibre sont bornés pour les structures hilbertiennes. Les sections sont C^∞ dans le sens habituel.

L'opérateur

$$\nabla_\gamma : \Gamma(\mathfrak{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{F})$$

défini par

$$\nabla_\gamma(s)(w) = \hat{\gamma}(\nabla(s))(w), \forall w \in \mathcal{W}, \forall s \in \Gamma(\mathfrak{F}). \quad (5.1)$$

est l'opérateur d'évolution du fibré d'état $\mathfrak{F}$ associé à la paire (∇, γ) .

Soit W une carte de l'univers $\mathcal{W}$ sur laquelle les fibrés $\xi_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{F}$ sont trivialisables, $\{\partial_\mu\}$ une section locale de bases sur W et $\{d^\nu\}$ la section duale. Il existe une section locale sur W de bases, notée $\{e_n\}$, que l'on peut toujours supposer hilbertiennes en la transformant par le procédé d'orthomalisation de Gram-Schmidt. Toute section locale $s \in \Gamma(\mathfrak{F})$ s'écrit $s = s^n e_n$ avec la convention d'Einstein étendue aux sommes hilbertiennes. Si les sommes partielles convergent sur chaque fibre, on a

$$\begin{aligned} \nabla s &= ds^n \otimes e_n + s^n \nabla e_n \\ &= ds^n \otimes e_n + s^n \Gamma_{n\nu}^p d^\nu \otimes e_p \end{aligned}$$

dans les sections locales de bases. La connexion s'écrit,

$$\nabla e_n = \Gamma_{n\nu}^p d^\nu \otimes e_p$$

avec des C^∞ fonctions $\Gamma_{n\nu}^p$ définies sur W à valeurs complexes, $\Gamma_{n\nu}^p$ sont les symboles de Christoffel associés à la connexion ∇ et $ds^n = \partial_\nu s^n d^\nu$,

$$\begin{aligned} \nabla s &= \partial_\nu s^n d^\nu \otimes e_n + s^n \Gamma_{n\nu}^p d^\nu \otimes e_p \\ &= (\partial_\nu s^n + s^n \Gamma_{n\nu}^p) d^\nu \otimes e_p. \end{aligned}$$

Avec les notations précédentes on peut écrire, sous l'hypothèse de convergence des sommes partielles sur chaque fibre,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(d^\nu \otimes e_p) &= \gamma_p^{\nu q} e_q, \\ \nabla_\gamma(s) &= (\partial_\nu s^p + s^n \Gamma_{n\nu}^p) \hat{\gamma}(d^\nu \otimes e_p) \\ \nabla_\gamma(s) &= \gamma_p^{\nu q} (\partial_\nu s^p + s^n \Gamma_{n\nu}^p) e_q. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Definition 13. Un opérateur d'évolution associé à la paire (∇, γ) est localement compact si il existe une section locale de bases hilbertiennes formées de vecteurs propres de ∇_γ .

Theorem 11. *Si les sommes hilbertiennes sont définies et ∇_γ est localement compacte on a*

$$\Gamma_{m\nu}^p \gamma_p^{\nu q} = \mu_q (\nabla_\gamma) \delta_m^q$$

pour une section locale de bases hilbertiennes propres, où $\mu_q (\nabla_\gamma)$ est la fonction propre de ∇_γ associée à la section propre e_q .

Proof. Si ∇_γ est un opérateur localement compact, pour la section locale de bases hilbertiennes propres $\{e_m\}$, on a

$$\nabla_\gamma (e_m) = \Gamma_{m\nu}^p \gamma_p^{\nu q} e_q = \mu_m (\nabla_\gamma) e_m = \mu_q (\nabla_\gamma) \delta_m^q e_q$$

où $\mu_q (\nabla_\gamma) (w)$ est la valeur propre associée à $e_q (w)$. $\square$

6. MESURE SPECTRALE ASSOCIÉE À UNE OBSERVABLE DE DIRAC $\mathcal{D}$

Soit $\mathcal{D}$ une observable de Dirac sur le fibré d'état $\mathfrak{F}$ telle que l'application

$$w \rightarrow \mathcal{D}(w)$$

soit C^∞ dans le sens suivant, pour toute section $s \in \Gamma(\mathfrak{F})$, l'application

$$w \rightarrow \mathcal{D}(w)(s(w))$$

est une C^∞ -section de $\mathfrak{F}$. Les fonctions $\lambda : W \subset \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe une section s , non nulle sur W , vérifiant

$$\mathcal{D}(w)(s(w)) = \lambda(w) s(w), \forall w \in W$$

sont les fonctions propres de $\mathcal{D}$ sur W et la section s est une section propre de $\mathcal{D}$ sur W . On généralise cette définition en posant,

Definition 14. *Un opérateur*

$$\mathfrak{t} : \Gamma(\mathfrak{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{F})$$

a pour fonction propre locale λ , sur $W \subset \mathcal{W}$, si il existe une section locale s non nulle telle que

$$\mathfrak{t}(s)(w) = \mathfrak{t}(w)(s(w)) = \lambda(w) s(w), \forall w \in W$$

une telle section s est une section propre de $\mathfrak{t}$ associée à la fonction propre λ qui s'écrit

$$\mathfrak{t}(s) = \lambda s.$$

Le théorème de Von Neumann permet d'associer à $\mathcal{D}(w)$, une mesure spectrale

$$P_{\mathcal{D}(w)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(E_w(\mathfrak{F})),$$

à chaque borélien B de $\mathbb{R}$ on associe un projecteur $P_{\mathcal{D}(w)}(B)$ de l'espace de Hilbert $E_w(\mathfrak{F})$. Pour chaque couple $(s, t) \in \Gamma(\mathfrak{F})^2$ et chaque $w \in \mathcal{W}$, la mesure complexe $\nu_{(s(w), t(w))}$ sur les boréliens de $\mathbb{R}$ est définie par

$$\nu_{(s(w), t(w))}(B) = \langle P_{\mathcal{D}(w)}(B)(s(w)) | t(w) \rangle_{E_w(\mathfrak{F})}$$

sur chaque fibre $E_w(\mathfrak{F})$, le produit hermitien sur $E_w(\mathfrak{F})$ est induit par le produit hermitien de H . On en déduit, pour chaque $w \in \mathcal{W}$ et chaque $s \in \Gamma(\mathfrak{F})$, l'existence d'une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}$ définie par

$$\nu_{s(w)}(B) = \langle P_{\mathcal{D}(w)}(B)(s(w)) | s(w) \rangle_{E_w(\mathfrak{F})}.$$

En particulier, pour $s \in \Gamma(\mathfrak{F})$, on définit une section ν_s sur le fibré $\mathcal{B}(\mathcal{W})$ dont la fibre est formée des mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$ et l'espace de base est $\mathcal{W}$. Si la

section s est normalisée pour tout w , c'est-à-dire, $\|s(w)\|_{E_w(\mathfrak{F})} = 1$, $\nu_{s(w)}$ est une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$, notée $P_{s,\mathcal{D}}$ avec $P_{s,\mathcal{D}}(w) = \nu_{s(w)}$. En utilisant la décomposition de Paul Levy, ν_s s'écrit comme une somme de mesures

$$\nu_s = \nu_s^{ac} + \nu_s^p + \nu_s^{sc},$$

où ν_s^{ac} est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ν_s^p est une somme de mesures de Dirac et ν_s^{sc} est une mesure singulièrement continue. Pour cette mesure ν_s^{sc} , la fonction de répartition est une fonction continue et la mesure n'est chargée que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Si

$$\nu_s = \nu_s^p$$

on dit que s a un spectre discret et si

$$\nu_s = \nu_s^{ac},$$

on dit que s a un spectre continu. Dans l'hypothèse où

$$\nu_s = \nu_s^{sc},$$

le spectre de s est dit singulier. L'évolution du spectre de s en fonction de l'événement w donne l'évolution globale du spectre.

7. QUANTIFICATION DU FIBRÉ D'ÉTAT $\mathfrak{F}$ PAR LES OBSERVABLES DE DIRAC

L'axiomatisation de la quantification du fibré $\mathfrak{F}$ par les observables de Dirac est décrite par la liste des axiomes suivants,

Axiom 1. *L'état d'un système physique $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{W}$ est défini par une section s du fibré d'état $\mathfrak{F}$.*

Axiom 2. *A tout phénomène physique $\mathfrak{P}$ est associé une observable de Dirac $\mathcal{D}$.*

Axiom 3. *Quelque soit la section s décrivant le système physique $\mathfrak{P}$, les seules mesures possibles en l'événement w sont les valeurs propres de $\mathcal{D}(w)$.*

Axiom 4. *Si s représente l'état normalisé du système, la probabilité de trouver la valeur $\lambda(w)$ dans le borélien $\Delta(w)$ de la fonction propre λ lors d'une mesure sur $\mathfrak{P}$ en w est*

$$P_{s,\mathcal{D}}(\Delta)(w) = P_{s(w),\Phi(w)}(\Delta(w))$$

avec $\Delta(w) =]\lambda_1(w), \lambda_2(w)]$ si le spectre de s est continu. Si le spectre est discret, cette probabilité est

$$P_{s,\mathcal{D}}(\lambda)(w) = P_{s(w),\Phi(w)}(\lambda(w)).$$

Axiom 5. *L'état du système immédiatement, après une mesure ayant donnée en w la valeur $\lambda(w)$ de la fonction propre λ , est donné par la section*

$$\mathfrak{s} = \frac{P_{E_\lambda}(s)}{\|P_{E_\lambda}(s)\|},$$

où

$$P_{E_\lambda}(s)(w) = P_{E_{\lambda(w)}}(s(w))$$

et $P_{E_{\lambda(w)}}$ est le projecteur sur le sous-espace propre $E_{\lambda(w)}$ associé à la valeur propre $\lambda(w)$ de $\mathcal{D}(w)$.

Axiom 6. *Si dans une carte W de $w_0 \in \mathcal{W}$, le système n'est soumis à aucune mesure, l'état s est une solution de l'équation d'évolution donnée par*

$$\nabla_\gamma(s) = -i\lambda s, \quad (7.1)$$

où ∇_γ est l'opérateur d'évolution du fibré d'état $\mathfrak{F}$ défini en 5.1. En particulier, si s est une section non nulle sur W , $-i\lambda$ est une fonction propre de l'opérateur ∇_γ .

Remark 8. *Si on fait l'hypothèse que la section de Dirac γ est métrisable et que la métrique spectrale associée est lorentzienne, avec T pour champ chronologique local associé décrit dans [12] et [11], alors l'équation 7.1 est une généralisation de l'équation de Schrödinger au fibré d'état $\mathfrak{F}$.*

Dans ce qui suit, en dimension finie, on justifie l'équation d'évolution donnée en 7.1. On construit la métrique de Minkowski de signature $(-, +, +, +)$ sur $\mathcal{W} = \mathbb{R}^4$ à partir d'un $\mathcal{D}$ -morphisme de Dirac, dit de Dirac-Pauli, sur le complexifié du fibré tangent

$$\xi = (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4, \text{pr}_1, \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4),$$

le complexifié s'écrit

$$\xi_{\mathbb{C}} = (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^4, \text{pr}_1, \mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4).$$

Dans cette situation le fibré d'état est le fibré hermitien $\mathfrak{F} = \xi_{\mathbb{C}}$ avec $H = \mathbb{C}^4$. On note $\{e_\nu : \nu = 0, 1, 2, 3\}$, les champs constants

$$e_\nu(w) = e_\nu = (\delta_\nu^0, \delta_\nu^1, \delta_\nu^2, \delta_\nu^3),$$

$\{d^\mu : \mu = 0, 1, 2, 3\}$ est la base duale. Il suffit donc pour construire la section χ , permettant de retrouver la métrique de Minkowski, de définir les opérateurs χ^μ de $\mathbb{C}^4$ par leurs matrices dans la base canonique. Ces matrices sont données par les matrices de Dirac, pour un $\mathcal{D}$ -morphisme de Dirac χ , elles doivent vérifier

$$[\mathcal{D}, \chi^\nu] = \frac{1}{2}\gamma^\nu \text{ avec } \nu = 0, 1, 2, 3$$

où $\{\gamma^\nu\}$ sont les matrices de Dirac. Pour une observable $\mathcal{D}$, on peut supposer que $\mathcal{D}^2 = \mathbf{1}$, l'hypothèse $[\mathcal{D}, \chi^\nu] = \frac{1}{2}\gamma^\nu$ implique que

$$\{\mathcal{D}, \gamma^\nu\} = 0,$$

la section d'opérateurs $\mathcal{D}$ dont les matrices dans la section de bases locales est la matrice de Dirac γ^5

$$\mathcal{D} = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

$\mathcal{D}$ vérifie les conditions demandées. Cet section d'opérateurs $\mathcal{D}$ est autoadjointe, c'est une observable de Dirac sur le fibré $\mathfrak{F}$ et on a

$$\left[\mathcal{D}, \frac{1}{4}\gamma^5\gamma^\nu\right] = \frac{1}{2}\gamma^\nu, \forall \nu = 0, 1, 2, 3.$$

On peut prendre pour section χ la section pour laquelle

$$\chi^\nu = \frac{1}{4}\gamma^5\gamma^\nu,$$

pour ces opérateurs

$$\chi^{00} = \text{Tr}([\mathcal{D}, \chi^0][\mathcal{D}, \chi^0]) = 1, \chi^{\nu\nu} = \text{Tr}([\mathcal{D}, \chi^\nu][\mathcal{D}, \chi^\nu]) = -1 \text{ pour } \nu = 1, 2, 3$$

et

$$\chi^{\mu\nu} = \text{Tr}([\mathcal{D}, \chi^\nu][\mathcal{D}, \chi^\mu]) = 0 \text{ si } \mu \neq \nu,$$

le tenseur $\chi^{\mu\nu}$ est inversible réel et vérifie

$$\chi_{00} = -1, \chi_{\nu\nu} = 1 \text{ pour } \nu = 1, 2, 3$$

$$\chi_{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mu \neq \nu.$$

L'opérateur d'évolution ∇_χ , donné dans l'équation définie en 7.1, s'écrit dans la section de base constante en utilisant l'équation 5.2

$$\nabla_\chi(\psi) = \chi_p^{\nu q} (\partial_\nu \psi^p + \psi^n \Gamma_{n\nu}^p) e_q$$

avec $\Gamma_{n\nu}^p = 0$,

$$\nabla_\chi(\psi) = \chi_p^{\nu q} \partial_\nu \psi^p e_q = \chi_p^{\nu q} \partial_\nu \psi^p e_q = \chi^\nu \partial_\nu \psi, \psi = \psi^p e_p,$$

si on note

$$\mathfrak{L} = \gamma^\nu \partial_\nu$$

l'opérateur de Dirac, l'opérateur d'évolution est

$$\nabla_\chi = \frac{1}{4} \mathcal{D} \mathfrak{L}$$

avec $\mathcal{D}$ est la section constante définie par γ^5 . Pour une représentation classique de la métrique

$$\chi^\nu = \frac{1}{2} \gamma^\nu, \nabla_\chi = \frac{1}{2} \mathfrak{L}$$

et la métrique de Minkowski est donnée par l'inverse du tenseur métrique

$$\chi^{\nu\mu} = \text{Trace}(\chi^\nu \chi^\mu),$$

l'équation de Dirac s'écrit

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\psi &= -im\psi \\ \nabla_\chi \psi &= -i \frac{m}{2} \psi = -i\lambda\psi \end{aligned}$$

la fonction propre est constante et est égale à $-i \frac{m}{2}$. De façon analogue, on peut représenter les sections de Dirac à l'aide des matrices "gamma", cette approche permet de construire les sections de Weyl et de Majorana sur le complexifié $\xi_{\mathbb{C}}$ du fibré tangent. Je laisse le soin au lecteur, de décrire pour ces sections, l'observable $\mathcal{D}$ associée à la représentation spectrale de la métrique de Minkowski sur $\mathbb{R}^4$.

8. STRUCTURE DE CLIFFORD DANS LES FIBRÉS D'ÉTAT

Soit ζ un fibré vectoriel de dimension finie de base une variété paracompacte $\mathcal{W}$ et ζ^* son dual. Si V désigne la fibre de ζ , les applications de transition du fibré ζ sont données par

$$w \in W_\alpha \cap W_\beta \longrightarrow \phi_{\alpha\beta}(w) \in \text{Gl}(V),$$

les applications de transition du fibré dual ζ^* sont

$$w \in W_\alpha \cap W_\beta \longrightarrow \text{tr} \phi_{\alpha\beta}(w) \in \text{Gl}(V^*),$$

$$d \in V^* \longrightarrow \text{tr} \phi_{\alpha\beta}(w)(d)(v) = d \circ \phi_{\alpha\beta}(w)(v), \forall v \in V$$

$\text{tr} \phi_{\alpha\beta}(w)$ est la transposée de $\phi_{\alpha\beta}(w)$. Cette application s'étend au complexifié de ζ^* . On munit V d'une forme quadratique non dégénérée Q , de signature (p, q) si ζ est un fibré réel et d'une forme quadratique non dégénérée notée encore Q dans le cas complexe. Le fibré de Clifford $\text{Cl}(\zeta, Q)$ est le fibré de fibre $\text{Cl}(V, Q)$, dont les applications de transition sont définies par extension à $\text{Cl}(V, Q)$ de l'isomorphisme $\phi_{\alpha\beta}(w)$ de V en un isomorphisme de l'algèbre $\text{Cl}(V, Q)$, en posant

$$\tau_{\alpha\beta}(w) : \text{Cl}(V, Q) \longrightarrow \text{Cl}(V, Q) \text{ est } \mathbb{K}\text{-linéaire, } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

vérifiant

$$\tau_{\alpha\beta}(w)(v_1 v_2 \cdots v_k) = \phi_{\alpha\beta}(w)(v_1) \phi_{\alpha\beta}(w)(v_2) \cdots \phi_{\alpha\beta}(w)(v_k) \quad \forall v_i \in V, \quad (8.1)$$

ces applications de transition ne dépendent que du choix de $\phi_{\alpha\beta}(w)$ et la restriction $\tau_{\alpha\beta}(w)$ au groupe de Lie des éléments inversibles $\text{Inv}(V, Q)$ de $\text{Cl}(V, Q)$,

$$\sigma_{\alpha\beta}(w) = \tau_{\alpha\beta}(w)|_{\text{Inv}(V, Q)} : \text{Inv}(V, Q) \longrightarrow \text{Inv}(V, Q) \quad (8.2)$$

est un difféomorphisme de groupe de classe C^∞ si $\phi_{\alpha\beta}(w)$ sont de classe C^∞ . On peut définir le fibré $\text{Cl}(\zeta, Q)$ d'applications de transition $\tau_{\alpha\beta}(w)$ qui est un C^* -fibré réel, respectivement complexe, si ζ est un fibré vectoriel réel, respectivement complexe. Tout sous-groupe fermé G de $\text{Inv}(V, Q)$ est un groupe de Lie pour lequel la restriction de $\sigma_{\alpha\beta}(w)$ à G est un difféomorphisme de groupe de classe C^∞ de G dans $\text{Inv}(V, Q)$. Si $\sigma_{\alpha\beta}(w)$ vérifie $\sigma_{\alpha\beta}(w)(G) \subset G$, on note $\kappa_{\alpha\beta}(w)$ le difféomorphisme de groupe de Lie

$$\kappa_{\alpha\beta}(w) = \sigma_{\alpha\beta}(w)|_G : G \longrightarrow G,$$

le fibré $\text{Cl}_G(\zeta, Q)$ est le fibré de Lie de fibre G dont les applications de transition sont $\kappa_{\alpha\beta}(w)$ et le fibré $\text{Cl}_{\mathfrak{g}}(\zeta, Q)$ est le fibré d'algèbre de Lie, de fibre $\mathfrak{g} = T_1 G$ dont les applications de transition sont

$$\chi_{\alpha\beta}(w) = T_1 \kappa_{\alpha\beta}(w) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},$$

ce fibré est un fibré vectoriel dont la fibre est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ associée au groupe de Lie G .

Dans le cas complexe on écrit $\text{Cl}(\zeta)$ sans préciser la forme quadratique Q choisie car les fibrés $\text{Cl}(\zeta, Q)$ sont isomorphes. Si on ne précise pas si le fibré ζ est réel ou complexe, on note $\text{Cl}(\zeta, Q)$ pour désigner le fibré de Clifford réel ou complexe associé à Q . Sur un espace vectoriel réel V muni d'une forme quadratique non dégénérée, on associe la représentation complexe, d'espace complexe

$$V \otimes \mathbb{C} = V + iV$$

et de forme bilinéaire non dégénérée, notée encore g ,

$$g(u_0 + iv_0, u_1 + iv_1) = g(u_0, u_1) - g(v_0, v_1) + i(g(u_0, v_1) + g(v_0, u_1))$$

où dans le second membre g désigne la forme polaire associée à Q . L'algèbre $\text{Cl}(V, Q)$ est une algèbre de Clifford réelle, le complexifié de l'algèbre de Clifford est noté $\text{Cl}(V)$. Les fibrés associés sont notés $\text{Cl}(\zeta, Q)$ et $\text{Cl}(\zeta)$. L'involution est définie sur chaque fibre $E_w(\text{Cl}(\zeta))$ de $\text{Cl}(\zeta)$ par

$$(\lambda v_1 \cdots v_k)^* = \bar{\lambda} v_k \cdots v_1, \quad v_i \in E_w(\text{Cl}(\zeta))$$

et est étendue par linéarité sur $E_w(\text{Cl}(\zeta))$, on peut ainsi définir s^* pour $s \in \Gamma(\text{Cl}(\zeta))$ par

$$s^*(w) = s(w)^*, \quad \forall w \in \mathcal{W}.$$

Pour toute algèbre de Clifford $\text{Cl}(V, Q)$, on définit une $\mathbb{Z}_2$ -graduation en décomposant en somme directe

$$\text{Cl}(V, Q) = \text{Cl}^+(V, Q) \oplus \text{Cl}^-(V, Q), \quad (8.3)$$

où $\text{Cl}^+(V, Q)$ est le sous-espace vectoriel engendré par les produits en nombre pair d'éléments de V et $\text{Cl}^-(V, Q)$ est le sous-espace vectoriel engendré par les produits en nombre impair d'éléments de V . La $\mathbb{Z}_2$ -graduation χ est définie par

$$\chi(v) = \pm v \text{ si } v \in \text{Cl}^\pm(V, Q), \quad (8.4)$$

cette définition s'étend au fibré de Clifford $\text{Cl}(\zeta, Q)$ en posant

$$\chi(w)(v) = \pm v \text{ si } v \in E_w(\text{Cl}(\zeta, Q))^\pm,$$

le fibré $\text{Cl}(\zeta, Q)$ se décompose en tant que fibré vectoriel réel, en une somme de Whitney

$$\text{Cl}(\zeta, Q) = \text{Cl}^+(\zeta, Q) \oplus \text{Cl}^-(\zeta, Q),$$

la $\mathbb{Z}_2$ -graduation χ dans le cas réel ou complexe pour une section s du fibré de Clifford est donnée par

$$\chi(s)(w) = \chi(w)(s(w)), \forall w \in \mathcal{W}.$$

Remark 9. Les C^* -algèbres réelles $\text{Cl}(V, Q)$ sont des algèbres normées complètes vérifiant

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|, \|a^*a\| = \|a\|^2$$

et

$$\mathbf{1} + a^*a \text{ est inversible,}$$

dans le cas complexe la dernière condition est une conséquence de la définition.

Pour un fibré ζ réel ou complexe les chaînes de Clifford sont définies comme suit. Si la fibre V de ζ est munie d'une forme quadratique non dégénérée Q , la fibre de $\text{Cl}(\zeta, Q)$ est $\text{Cl}(V, Q)$ qui est munie d'une forme quadratique non dégénérée, notée $\tilde{Q}$. Pour une base orthogonale $\{e_i\}$ de V vérifiant

$$Q(e_i) = 1 \text{ si } i \leq p \text{ et } Q(e_i) = -1 \text{ si } i > p,$$

la base de $\text{Cl}(V, Q)$

$$\{e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$$

est une base orthogonale pour $\tilde{Q}$ vérifiant

$$\tilde{Q}(e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k}) = \prod_{j=1}^k Q(e_{i_j}) = \pm 1,$$

le produit vide représente l'unité $\mathbf{1}$ de l'algèbre $\text{Cl}(V, Q)$. On munit V de la norme

$$|e_i|_V = |Q(e_i)|, \{e_i\} \text{ est une base orthonormée}$$

alors

$$|e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k}|_{\text{Cl}(V, Q)} = 1$$

et $\{e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k}\}$ est une base orthonormée pour $\tilde{Q}$. L'inclusion

$$\text{in} : V \longrightarrow \text{Cl}(V, Q)$$

est une isométrie. On pose par itération

$$\text{Cl}_0(V, Q) = V, \text{Cl}_1(V, Q) = \text{Cl}(V, Q), \text{Cl}_2(V, Q) = \text{Cl}(\text{Cl}_1(V, Q), \tilde{Q}),$$

si Q_n est la forme quadratique induite par Q sur $\text{Cl}_n(V, Q)$, in_n est l'inclusion de $\text{Cl}_n(V, Q)$ dans $\text{Cl}_{n+1}(V, Q)$ et $\mathfrak{e}_n$ est la base induite par $\mathfrak{e}_0 = e = \{e_i\}$ avec $\mathfrak{e}_1 = \tilde{\mathfrak{e}}_0 = \{e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k}\}$ et $\mathfrak{e}_{n+1} = \tilde{\mathfrak{e}}_n$ alors in_n est une isométrie pour les normes $|\bullet|_{\text{Cl}_n(V, Q)}$ et $|\bullet|_{\text{Cl}_{n+1}(V, Q)}$. La limite inductive pour la famille

$$\{\text{Cl}_n(V, Q), \text{in}_k^l\}, \text{in}_k^l = \text{in}_{l-1} \circ \cdots \circ \text{in}_k : \text{Cl}_k(V, Q) \longrightarrow \text{Cl}_l(V, Q)$$

est notée $\text{Cl}_\infty(V, Q)$. A isomorphisme près cette limite ne dépend pas du choix des bases $\mathbf{e}_0$ vérifiant $Q(e_i) = \pm 1$. Si V est un espace vectoriel complexe, on définit le produit hermitien sur V par

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_j^i$$

$$\langle e_{i_1} \cdots e_{i_k}, e_{j_1} \cdots e_{j_l} \rangle = \delta_{j_1 \cdots j_l}^{i_1 \cdots i_k}$$

et $\mathfrak{e}_\infty$ la limite inductive $\{\mathfrak{e}_n, \text{in}_k^l\}$, si $u \in \text{Cl}_\infty(V, Q)$ alors u s'écrit comme une somme finie $u = u^i \mathbf{e}_i$ avec $\mathbf{e}_i \in \mathfrak{e}_\infty$, dans le cas réel la norme de u est

$$|u|_\infty = \sum (u^i)^2$$

et dans le complexe le produit hermitien est

$$\langle u, v \rangle_\infty = \sum \overline{u^i} v^i.$$

Le complété de $\text{Cl}_\infty(V, Q)$ pour la norme $|\bullet|_\infty$ est un espace de Banach pour lequel $\mathfrak{e}_\infty$ est une base de Schauder, dans le cas complexe $\text{Cl}_\infty(V, Q)$ est un espace de Hilbert pour lequel $\mathfrak{e}_\infty$ est une base hilbertienne.

Definition 15. $\mathfrak{Cl}(V, Q)$ est la complétion de $\text{Cl}_\infty(V, Q)$ pour les normes définies précédemment.

Remark 10. A isométrie près, $\mathfrak{Cl}(V, Q)$ est indépendante de $\mathbf{e}_0$.

Lemma 4. $\mathfrak{Cl}(V, Q)$ est une C^* -algèbre réelle si V est un espace vectoriel réel, complexe si V est un espace vectoriel complexe.

Proof. L'application produit

$$\text{Cl}_n(V, Q) \times \text{Cl}_n(V, Q) \longrightarrow \text{Cl}_\infty(V, Q), (u, v) \longrightarrow uv$$

est uniformément continue, donc

$$\text{Cl}_\infty(V, Q) \times \text{Cl}_\infty(V, Q) \longrightarrow \text{Cl}_\infty(V, Q), (u, v) \longrightarrow uv$$

est uniformément continue et se prolonge de manière unique à $\mathfrak{Cl}(V, Q)$. □

Si $\phi_{\alpha\beta}$ sont les application du fibré ζ , les applications de transition du fibré $\text{Cl}(\zeta, Q)$ sont définies en 8.1, on note $\tau_{\alpha\beta} = \widetilde{\phi_{\alpha\beta}}$, cette construction s'étend au fibré $\text{Cl}(\text{Cl}(\zeta, Q), \widetilde{Q})$ de fibre $\text{Cl}(\text{Cl}(V, Q), \widetilde{Q})$ et ayant pour applications de transitions $\widetilde{\phi_{\alpha\beta}}$. Ce procédé permet de construire une suite de fibrés en posant

$$\text{Cl}_0(\zeta, Q) = \zeta, \text{Cl}_1(\zeta, Q) = \text{Cl}(\zeta, Q), \text{Cl}_2(\zeta, Q) = \text{Cl}(\text{Cl}(\zeta, Q), \widetilde{Q}),$$

$$\text{Cl}_3(\zeta, Q) = \text{Cl}(\text{Cl}(\zeta, Q), \widetilde{Q}), \dots$$

et par itération, on construit $\text{Cl}_n(\zeta, Q)$. La chaîne de Clifford définie un système inductif, si in_k est l'inclusion naturelle

$$\text{in}_n : \text{Cl}_n(\zeta, Q) \longrightarrow \text{Cl}_{n+1}(\zeta, Q),$$

la famille

$$\{\text{Cl}_n(\zeta, Q), \text{in}_m^n\}, \text{in}_m^n = \text{in}_{m-1} \circ \cdots \circ \text{in}_n : \text{Cl}_n(\zeta, Q) \longrightarrow \text{Cl}_m(\zeta, Q),$$

est un système inductif de limite $\text{Cl}_\infty(\zeta, Q)$ dont les applications de transtion sont définies par

$$\tau_{\alpha\beta, \infty} |_{\text{Cl}_n(\zeta, Q)} = \tau_{\alpha\beta, n}$$

où $\tau_{\alpha\beta,n}$ sont les applications de transition de $\text{Cl}_n(\zeta, Q)$ définies par itération en posant

$$\tau_{\alpha\beta,0} = \phi_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha\beta,1} = \widetilde{\phi_{\alpha\beta}}, \tau_{\alpha\beta,n+1} = \widetilde{\tau_{\alpha\beta,n}}$$

les applications $\tau_{\alpha\beta,\infty}$ sont continues sur $\text{Cl}_\infty(V, Q)$ par construction pour la norme $|\bullet|_\infty$ et uniformément continues. On pose $\mathfrak{t}_{\alpha\beta}$ les applications de transition définies par

$$\mathfrak{t}_{\alpha\beta}(w), w \in W_\alpha \cap W_\beta$$

où $\mathfrak{t}_{\alpha\beta}(w)$ est l'unique extension de $\tau_{\alpha\beta,\infty}$ à $\mathfrak{Cl}(V, Q)$.

Definition 16. $\mathfrak{Cl}(\zeta, Q)$ est le fibré de fibre $\mathfrak{Cl}(V, Q)$ et d'applications de transition $\{\mathfrak{t}_{\alpha\beta}(w)\}$.

Theorem 12. $\mathfrak{Cl}(\zeta, Q)$ est un C^* -fibré réel si ζ est un fibré vectoriel réel et un C^* -fibré complexe si ζ est un fibré vectoriel complexe.

On prend pour fibré ζ le fibré tangent ξ sur $\mathcal{W}$ et $\xi_{\mathbb{C}}^* = \xi^* \otimes \mathbb{C}$ le complexifié du dual du fibré tangent. Le fibré de Clifford en dimension infinie sur $\mathcal{W}$ associé est noté

$$\mathfrak{Cl}(\mathcal{W}) = \mathfrak{Cl}(\xi_{\mathbb{C}}^*),$$

et on pose

$$\text{Cl}(\mathcal{W}) = \text{Cl}_1(\xi_{\mathbb{C}}^*) = \text{Cl}(\xi_{\mathbb{C}}^*),$$

par 8.2, on peut construire une représentation isométrique ρ de $\text{Cl}(\mathcal{W})$ dans un fibré d'état $\mathfrak{F}$

$$\rho : \mathfrak{Cl}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathfrak{F}_{\mathcal{B}}, \quad (8.5)$$

la restriction ρ à $\text{Cl}(\mathcal{W})$ est une représentation de Clifford dans un fibré d'état $\mathfrak{F}$. Soit Q une forme quadratique de signature (p, q) sur la fibre V d'un fibré ζ . On se fixe une base orthogonale $\{e_j\}$ telle que

$$Q(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq j \leq p \\ -1 & \text{si } p+1 \leq j \leq \dim(V) \end{cases} \quad (8.6)$$

et on pose

$$V_+ = \text{Vect}\{e_j : Q(e_j) = 1\} = \bigoplus_{j=1}^p \mathbb{R}e_j \text{ et } V_- = \text{Vect}\{e_j : Q(e_j) = -1\} = \bigoplus_{j=p+1}^{\dim(V)} \mathbb{R}e_j,$$

V est la somme orthogonale de V_+ et V_- de signature (p, q)

$$V = V_+ \oplus V_-,$$

et il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\text{Cl}(V, Q) \simeq \text{Cl}(V_+, Q_+) \hat{\otimes} \text{Cl}(V_-, Q_-), \quad (8.7)$$

cette somme est orthogonale pour la forme quadratique Q , $Q_+ = Q|_{V_+}$ est une forme quadratique définie positive sur V_+ et $Q_- = Q|_{V_-}$ est une forme définie négative sur V_- . On peut consulter [1] pour une preuve de 8.7.

Remark 11. Si

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ et } B = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} B_m$$

sont deux algèbres unifères, sur $\mathbb{K}$, $\mathbb{Z}_2$ -graduées alors $A \hat{\otimes} B$ est l'algèbre graduée

$$A \hat{\otimes} B = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} (A \hat{\otimes} B)_k, \quad (A \hat{\otimes} B)_k = \bigoplus_{n+m \equiv k[2]} A_n \otimes B_m$$

muni du produit

$$(a \otimes b_m) \cdot (a_n \otimes b) = (-1)^{nm} (aa_n) \otimes (b_m b), \quad a_n \in A_n \text{ et } b_m \in B_m. \quad (8.8)$$

L'isomorphisme est décrit par Θ , si on pose

$$\begin{aligned} \theta : V &\longrightarrow \text{Cl}(V_+, Q_+) \hat{\otimes} \text{Cl}(V_-, Q_-), \\ \theta(v) &= v_+ \otimes \mathbf{1}_{\text{Cl}(V_-, Q_-)} + \mathbf{1}_{\text{Cl}(V_+, Q_+)} \otimes v_- \\ \theta(v)^2 &= Q(v) \mathbf{1}_{\text{Cl}(V, Q)} \end{aligned}$$

l'extension de θ à $\text{Cl}(V, Q)$, notée Θ , est l'isomorphisme défini en 8.7.

La chiralité est définie si $\{e_i\}$ est une base orthonormée de $V \otimes \mathbb{C}$ est

$$\gamma = i^{\lfloor \frac{\dim V}{2} \rfloor} e_1 \cdots e_{\dim V},$$

on a donc pour définition locale de la chiralité sur le fibré $\text{Cl}(W)$,

Definition 17. La chiralité en $w \in W$ est donnée par une section locale de $\text{Cl}(W)$

$$\gamma = i^{\lfloor \frac{\dim(W)}{2} \rfloor} e_1 \cdots e_{\dim(W)} \in \Gamma_W(\text{Cl}(W))$$

où $\{e_j\}$ est une section locale de bases orthormées dans une carte W .

On peut définir une notion de chiralité sur $\text{Cl}(V, Q)$ en prenant le produit des chiralités de $Q_+ \otimes \mathbb{C}$ sur $V_+ \otimes \mathbb{C}$ et $Q_- \otimes \mathbb{C}$ sur $V_- \otimes \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} \gamma_+ &= i^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} e_1 \cdots e_p, \quad \gamma_- \\ &= i^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} e_{p+1} e_{p+2} \cdots e_{\dim(W)} = i^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + \lfloor \frac{q}{2} \rfloor} e_1 e_2 \cdots e_{\dim(W)} \end{aligned} \quad (8.9)$$

où $\{e_i\}$ est défini en 8.6.

Lemma 5. Sur le fibré $\text{Cl}(W)$

$$\gamma^* \gamma = (-1)^q \mathbf{1}_W \text{ et } \gamma^2 = \mathbf{1}_W$$

où $\mathbf{1}_W$ est la section unitaire définie sur W et

$$\mathbf{1}_W(w) = \mathbf{1}_{E_w(\text{Cl}(W))}.$$

Proof. On a

$$e_j \cdot e_j = \mathbf{1}_W \text{ et } e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i,$$

donc

$$\begin{aligned} \gamma^* &= (-i)^{\dim(W)} e_{\dim(W)} \cdots e_1 \\ \gamma^* \gamma &= e_{\dim(W)} \cdots e_1 e_1 \cdots e_{\dim(W)} = \mathbf{1}_W \\ \gamma^2 &= \gamma \gamma = (-1)^{\dim(W)} e_1 \cdots e_{\dim(W)} e_1 \cdots e_{\dim(W)} \\ &= \mathbf{1}_W. \end{aligned}$$

□

Remark 12. Dans l'univers de Minkowski la chiralité définies en 8.9 pour la forme quadratique de signature $(1, 3)$ donne

$$\gamma = i^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{3}{2} \rfloor} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma_5.$$

Pour une métrique riemannienne g , la section des bases locales $\{e_j\}$ sont orthonormées pour g . Modulo l'orientation, la chiralité ne dépend pas de cette section locale. Si n est pair

$$\gamma s \gamma = \chi(s) \text{ si } s \in \Gamma(\text{Cl}(W))$$

et lorsque n est impair

$$\gamma s \gamma = s.$$

Definition 18. Une section de formes quadratiques Q du fibré vectoriel réel ζ est de classe C^∞ si, pour toute section $s \in \Gamma^\infty(\zeta)$, l'application

$$w \in \mathcal{W} \longrightarrow Q(w)(s(w)) \in \mathbb{R}$$

est de classe C^∞ .

Remark 13. Pour une telle section Q , la signature de $Q(w)$ est indépendante de $w \in \mathcal{W}$. Cette signature, notée (p, q) , vérifie $\dim(V) = p + q$. La continuité suffit pour obtenir l'invariance de la signature de Q . Si on se fixe une forme quadratique Q sur la fibre V de ζ on peut construire une section de formes quadratiques, notée encore Q , de classe C^∞ et de même signature. La réciproque est-elle vraie? La condition nécessaire et suffisante est que l'ensemble des applications de transition du fibré ζ soit contenu dans $O(V, Q)$. Si le groupe G engendré par les applications de transition est localement compact, un candidat possible est obtenu en se fixant une forme quadratique $\mathfrak{q}$ de V de signature (p, q) , une mesure de Haar $d\lambda$ sur G et en posant

$$Q(v) = \int_G \mathfrak{q}_\tau(v) d\lambda(\tau), \quad \mathfrak{q}_\tau(v) = \mathfrak{q}(\tau(v)),$$

dans le cas G compact, cette forme quadratique Q répond à la question.

Cette section Q permet de décomposer le fibré ζ en une somme de Whitney de deux sous-fibrés ζ_+ et ζ_- ,

$$\zeta = \zeta_+ \oplus \zeta_-$$

cette décomposition est unique à isométrie près. On peut décomposer le fibré $\text{Cl}(\zeta, Q)$ à partir de la forme quadratique $\tilde{Q}$ et par récurrence sur tous les fibrés $\text{Cl}_n(\zeta, Q)$ on a

$$\text{Cl}_n(\zeta, Q) = \text{Cl}_n(\zeta, Q)_+ \oplus \text{Cl}_n(\zeta, Q)_-,$$

si les limites inductives de $\{\text{Cl}_n(\zeta, Q)_+\}$, $\{\text{Cl}_n(\zeta, Q)_-\}$ sont notées $\mathfrak{Cl}(\zeta, Q)_+$, $\mathfrak{Cl}(\zeta, Q)_-$ alors $\mathfrak{Cl}(\zeta, Q)$ est la somme de Whitney

$$\mathfrak{Cl}(\zeta, Q) = \mathfrak{Cl}(\zeta, Q)_+ \oplus \mathfrak{Cl}(\zeta, Q)_-.$$

9. STRUCTURE SPIN

Dans ce qui suit $\dim(V) \geq 3$. On se fixe une forme quadratique non dégénérée Q sur la fibre V d'un fibré vectoriel ζ , de base $\mathcal{W}$ et de dimension finie. $\text{Inv}(V, Q)$ désigne le groupe de Lie formé des éléments inversibles de $\text{Cl}(V, Q)$. On définit le groupe spinoriel par

$$\text{Spin}(V, Q) = \{u \in \text{Cl}^+(V, Q) \cap \text{Inv}(V, Q) : Q(u) = 1, uVu^{-1} = V\},$$

si V est un espace vectoriel réel munit d'une forme quadratique Q de signature (p, q) , on pose

$$\text{Spin}(V, Q) = \text{Spin}(p, q).$$

Remark 14. Les groupes $\text{Spin}(p, q)$ et $\text{Spin}(q, p)$ sont isomorphes. On note

$$\text{Spin}(p, 0) \simeq \text{Spin}(0, p) = \text{Spin}(p).$$

Le groupe $\text{Spin}(p, q)$ est un groupe de Lie simplement connexe, connexe, d'algèbre de Lie

$$\mathfrak{spin}(p, q) = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq p+q} \mathbb{R} e_i e_j$$

si

$$V_+ = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \mathbb{R} e_i \text{ et } V_- = \bigoplus_{p+1 \leq i \leq p+q} \mathbb{R} e_i,$$

$\mathfrak{spin}(p, q)$ est la somme directe des sous-espaces vectoriels $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{spin}(p, q) = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$$

définis par

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{spin}(p, q) \cap \text{Cl}^-(V_+, Q) \text{Cl}^-(V_-, Q)$$

et

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{spin}(p, q) \cap \text{Cl}^+(V_+, Q) \text{Cl}^+(V_-, Q),$$

on a

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{spin}(p) \oplus \mathfrak{spin}(q) = \left(\bigoplus_{1 \leq i < j \leq p} \mathbb{R} e_i e_j \right) \oplus \left(\bigoplus_{p+1 \leq k < l \leq p+q} \mathbb{R} e_k e_l \right)$$

et

$$\mathfrak{p} = \bigoplus_{1 \leq i \leq p < j \leq p+q} \mathbb{R} e_i e_j.$$

L'algèbre

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \mathbb{R} e_i e_{i+1}$$

est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{spin}(p, q)$, on en déduit le théorème de décomposition d'Iwasawa de $\text{Spin}(p, q)$ sous la forme

$$\text{Spin}(p, q) = \mathcal{K} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{N}$$

avec

$$\mathcal{K} = \text{Spin}(p) \times \text{Spin}(q)$$

$$\mathcal{A} = \left\{ \prod_{j=1}^p (\text{ch}(t_j) + \text{sh}(t_j) e_j e_{j+p}) : t_j \in \mathbb{R} \text{ et } 1 \leq j \leq p \right\}$$

et

$$\mathcal{N} = \left\{ 1 + \sum_{1 \leq i < j \leq p} a^{ij} X_{ij} + \sum_{1 \leq i < j \leq p} b^{ij} Y_{ij} + \sum_{\substack{2p < j < p+q \\ 1 \leq i \leq p}} c^{ij} Z_{ij} : a^{ij}, b^{ij} \text{ et } c^{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

les éléments X_{ij} , Y_{ij} et Z_{ij} sont définis par

$$X_{ij} = e_i e_j + e_j e_{i+p} - e_i e_{j+p} + e_{i+p} e_{j+p}, \quad 1 \leq i < j \leq p,$$

$$Y_{ij} = e_i e_j + e_j e_{i+p} + e_i e_{j+p} - e_{i+p} e_{j+p}, \quad 1 \leq i < j \leq p,$$

et

$$Z_{ij} = e_i e_j - e_{i+p} e_j, \quad 1 \leq i \leq p \text{ et } 2p < j < p+q,$$

on peut consulter [2]. L'algèbre de Lie $\mathfrak{spin}(p, q)$ se décompose en somme directe

$$\mathfrak{spin}(p, q) = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

où

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Phi_+} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{spin}(p, q) : [H, X] = \alpha(H) X \text{ pour } H \in \mathfrak{a}\}$$

et

$$\Phi_+ = \{\alpha \in \Phi : \alpha(H) > 0\} \text{ avec } H = \sum_{1 \leq j \leq p} (p-j+1) e_j e_{j+p}.$$

Les fibrés spinoriels, associés aux fibres $\text{Spin}(V, Q)$ et $\mathfrak{spin}(V, Q)$, sont définis à partir du fibré de Clifford. Pour tous sous groupes fermés G de $\text{Inv}(V, Q)$, les fibrés $\text{Cl}_G(\zeta)$ et $\text{Cl}_{\mathfrak{g}}(\zeta)$ sont, respectivement, les fibrés de Lie et les fibrés d'algèbre de Lie.

Remark 15. Si les applications de transition $\phi_{\alpha\beta}(w) \in \text{O}(V, Q)$ alors avec les notations 8.2,

$$\sigma_{\alpha\beta}(w)(\text{Spin}(V, Q)) \subset \text{Spin}(V, Q)$$

pour toutes les applications de transition $\tau_{\alpha\beta}(w)$ de $\text{Cl}(\zeta, Q)$.

Definition 19. Un G -spineur, respectivement un $\mathfrak{g}$ -spineur sur un ouvert W de $\mathcal{W}$, est une section de $\Gamma_W^\infty(\text{Cl}_G(\zeta))$, respectivement $\Gamma_W^\infty(\text{Cl}_{\mathfrak{g}}(\zeta))$. Les $\text{Spin}(V, Q)$ -spineurs sur ζ sont les spineurs de ζ .

Les $\text{Spin}(V)$ -spineurs du fibré complexe ζ sont les spineurs, dans le sens classique, d'un fibré ς isomorphe au fibré $\text{Cl}_{\text{Spin}(V)}(\zeta^*)$.

10. ACTION DE CLIFFORD

Dans ce qui suit,

$$\text{Spin}^c(\mathcal{W}), \text{Spin}(\mathcal{W}) \text{ et } \text{SO}(\mathcal{W})$$

sont les fibrés respectivement, si $\xi^* \otimes \mathbb{C}$ est le complexifié du dual du fibré tangent,

$$\text{Cl}_{\text{Spin}^c(V)}(\xi^* \otimes \mathbb{C}), \text{Cl}_{\text{Spin}(V)}(\xi^* \otimes \mathbb{C}) \text{ et } \text{Cl}_{\text{SO}(V)}(\xi^* \otimes \mathbb{C})$$

pour une forme quadratique définie positive Q sur V où $\text{Spin}^c(V)$ est le sous-groupe de $\text{Inv}(\text{Cl}(V^* \otimes \mathbb{C}))$ engendré par les produits pairs d'éléments

$$u = \lambda v, v \in V \text{ avec } Q(v) = 1 \text{ et } \lambda \in \mathbb{U}(1),$$

$\text{SO}(V)$ est le produit en nombre pair d'éléments $v \in V$ et $\text{Spin}(V)$ peut être vu comme le noyau de ς

$$\varsigma : \text{Spin}^c(V) \longrightarrow \mathbb{U}(1), \varsigma(v_1 \cdots v_{2k}) = v_{2k} \cdots v_1 v_1 \cdots v_{2k}, v \in \text{Spin}^c(V).$$

Definition 20. Soit ζ un fibré vectoriel complexe et c un morphisme de C^* -fibrés

$$c : \text{Cl}(\mathcal{W}) \longrightarrow \text{End}(\zeta),$$

l'action de Clifford à gauche associée à c est définie par

$$(s, \mathfrak{s}) \longrightarrow s \cdot \mathfrak{s}, s \cdot \mathfrak{s}(w) = c(s(w))(\mathfrak{s}(w)),$$

pour tout $s \in \Gamma(\text{Cl}(\mathcal{W}))$ et $\mathfrak{s} \in \Gamma(\zeta)$. L'action est continue si

$$s \cdot \mathfrak{s} \in \Gamma(\zeta), \forall s \in \Gamma(\text{Cl}(\mathcal{W})) \text{ et } \forall \mathfrak{s} \in \Gamma(\zeta).$$

Lemma 6. Si l'action de Clifford est continue alors $\Gamma(\zeta)$ a une structure de $(\Gamma(\text{Cl}(\mathcal{W})), C(\mathcal{W}))$ -bimodule.

Remark 16. Toutes les actions de Clifford, sauf mention contraire, sont supposées continues.

En utilisant 8.5, si $\zeta = \mathfrak{F}$ est un fibré d'état, on remplace $\text{End}(\mathfrak{F})$ par le fibré $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ dans la définition. Le C^* -fibré $\text{Cl}(\mathcal{W})$ est isométriquement représentable dans le fibré d'état $\mathfrak{F}$. Si ρ désigne cette représentation, ρ est continue si

$$w \in \mathcal{W} \longrightarrow \rho(s(w))(\mathfrak{s}(w))$$

est une section continue de $\mathfrak{F}$ pour tout $s \in \Gamma(\text{Cl}(\mathcal{W}))$ et $\mathfrak{s} \in \Gamma(\mathfrak{F})$. L'espace des sections continues de $\mathfrak{F}$ a une structure $(\Gamma(\text{Cl}(\mathcal{W})), C(\mathcal{W}))$ -bimodule. La continuité et la notion de différentiabilité en dimension infinie sont données dans le sens de Banach.

Definition 21. *Un module de Clifford sur $\mathcal{W}$ est la donnée d'un $C(\mathcal{W})$ -module $\Gamma(\zeta)$ des sections continues d'un fibré vectoriel complexe ζ de base $\mathcal{W}$ et d'un morphisme $C(\mathcal{W})$ -linéaire*

$$\mathfrak{c} : \Gamma(\text{Cl}(\mathcal{W})) \longrightarrow \Gamma(\zeta),$$

un module de Clifford sur $\mathcal{W}$ est un $(\Gamma(\text{Cl}(\mathcal{W})), C(\mathcal{W}))$ -bimodule de sections continues d'un fibré vectoriel complexe ζ de base $\mathcal{W}$.

Remark 17. *Avec les notations précédentes, $\mathfrak{c}(s) = c \circ s$.*

L'action de Clifford est irréductible si les seuls sous-espaces invariants de $E_w(\zeta)$, sous l'action de Clifford sur chaque fibre

$$c(w) : E_w(\text{Cl}(\mathcal{W})) \longrightarrow E_w(\text{End}(\zeta)),$$

sont $\{0_{E_w(\mathcal{F})}\}$ et $E_w(\zeta)$ pour tout $w \in \mathcal{W}$. L'action est fidèle si

$$\text{Ker}(c(w)) = \{0_{E_w(\text{Cl}(\mathcal{W}))}\}, \forall w \in \mathcal{W}.$$

De

$$\text{Cl}(V) \simeq \mathcal{M}_{2^m}(\mathbb{C}) \text{ si } \dim_{\mathbb{R}} V = 2n$$

$$\text{Cl}(V) \simeq \mathcal{M}_{2^m}(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_{2^m}(\mathbb{C}) \text{ si } \dim_{\mathbb{R}} V = 2n + 1,$$

on en déduit que pour $\dim(\mathcal{W}) = 2m$ toutes les actions irréductibles de $\text{Cl}(\mathcal{W})$ sont de dimension 2^m et pour $\dim(\mathcal{W}) = 2m + 1$, il y a 2 représentations irréductibles non équivalentes de dimension 2^m [14]. En dimension finie, sous les hypothèses

$$\dim(\zeta) \neq 2^n \text{ si } \dim(\mathcal{W}) = 2m$$

et

$$\dim(\zeta) \neq 2^{n+1} \text{ si } \dim(\mathcal{W}) = 2m + 1$$

le fibré ζ s'écrit comme la somme de Whitney

$$\zeta = \zeta^0 \oplus \zeta^1$$

de sous-fibrés invariants sous l'action de Clifford, c'est-à-dire,

$$s \cdot \mathfrak{s} \in \Gamma(\zeta^\alpha) \text{ si } s \in \Gamma(\text{Cl}(\mathcal{W})) \text{ et } \mathfrak{s} \in \Gamma(\zeta^\alpha), \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1,$$

quand l'action de Clifford est irréductible $\Gamma(\zeta)$ est un module de Clifford irréductible.

Remark 18. *Dans [14], l'action de Clifford est la donnée d'un espace vectoriel complexe V sur lequel agissent chacune des algèbres $\text{Cl}(E_w(\xi^* \otimes \mathbb{C}))$,*

$$c = c(w) : \text{Cl}(E_w(\xi^* \otimes \mathbb{C})) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V),$$

ce qui est équivalent à définir un morphisme du fibré $\text{Cl}(\mathcal{W})$ dans le fibré $\text{End}(\zeta)$ où ζ est le fibré trivial de fibre V , de base $\mathcal{W}$ et d'espace total $\mathcal{W} \times V$. Si ce morphisme

est continu alors l'action est continue, on rappelle que le morphisme c est continue si pour toute section continue s de $\text{Cl}(\mathcal{W})$, la section

$$c(s)(w) = c(w)(s(w))$$

est une section continue de $\text{End}(\zeta)$.

Comment étendre l'action de Clifford c à $\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})$? Supposons que cette action soit définie sur $\text{Cl}_n(\mathcal{W})$, on la note

$$c_n : \text{Cl}_n(\mathcal{W}) \longrightarrow \text{End}_n(\zeta)$$

les éléments de $\text{Cl}_{n+1}(\mathcal{W})$ sont des combinaisons linéaires finies de produit fini d'éléments de $\text{Cl}_n(\mathcal{W})$. On pose

$$\begin{aligned} c_{n+1} : \text{Cl}_{n+1}(\mathcal{W}) &\longrightarrow \text{End}_{n+1}(\zeta), \\ c_{n+1}(v_1 \cdots v_k) &= \tilde{c}_n(v_1) \circ \cdots \circ \tilde{c}_n(v_k), \quad v_i \in \text{Cl}_n(\mathcal{W}) \\ \tilde{c}_n(v) &= \text{in}_n(c_n(v)), \quad \forall v \in \text{Cl}_n(\mathcal{W}) \end{aligned}$$

où in_n est défini en ?? et on prolonge par linéarité. On peut construire l'action de Clifford

$$c_\infty : \text{Cl}_\infty(\mathcal{W}) \longrightarrow \text{End}_\infty(\zeta), \quad c_\infty(v) = c_n(v) \text{ si } v \in \text{Cl}_n(\mathcal{W}),$$

et remarquer que c_∞ est continue. Pour définition de l'action de Clifford à l'infini

$$\mathfrak{c} : \mathfrak{Cl}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathfrak{End}(\zeta) \quad (10.1)$$

on prend l'extension continue de c_∞ où $\mathfrak{End}(\zeta)$ est défini en ?. On a un autre procédé d'extension définie en 11.5, qui permet de définir une extension de l'opérateur de Dirac à l'algèbre de Clifford à l'infini 11.4.

Lemma 7. *Si l'action de Clifford sur ζ est continue son action de Clifford à l'infini est continue. Si cette action est de classe C^p , $p \in \mathbb{N}$, alors l'action à l'infini est de classe C^p dans le sens de Banach.*

Proof. Une action est de classe C^p si $s \in \Gamma^p(\text{Cl}(\mathcal{W}))$ et $\mathfrak{s} \in \Gamma^p(\zeta)$ alors $s \cdot \mathfrak{s} \in \Gamma^p(\zeta)$. La limite inductive permet de conclure. $\square$

Sauf mention contraire, les fibrés considérés sont complexes. On rappelle que deux C^* -algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont Morita-équivalentes si il existe un $\mathcal{A}$ -module à droite plein $\mathcal{M}$ tel que $\overline{\mathcal{B}_\mathcal{A}(\mathcal{M})}$ est isomorphe à $\mathcal{B}$ où $\mathcal{B}_\mathcal{A}(\mathcal{M})$ est la fermeture dans l'ensemble des opérateurs bornés de $\mathcal{M}$ de l'algèbre des opérateurs de $\mathcal{A}$ -rang fini $\mathcal{B}_\mathcal{A}(\mathcal{M})$, $\mathcal{B}_\mathcal{A}(\mathcal{M})$ est l'algèbre des opérateurs

$$\mathfrak{x}_{r,s} : t \longrightarrow \mathfrak{x}_{r,s}(t) = r(s \mid t) \text{ avec } r, s, t \in \mathcal{M},$$

pour la norme $\|\mathfrak{x}_{r,s}\| = \sup \{\|r(s \mid t)\| : \|t\| = 1\}$ et $\|t\| = \sqrt{\|(t \mid t)\|}$. Le $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{M}$ est plein lorsqu'il est muni d'une forme $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ définie positive, $\mathcal{A}$ -linéaire à droite, antisymétrique $(u \mid v) = (v \mid u)^*$ telle que

$$(\mathcal{M} \mid \mathcal{M}) = \mathcal{A}.$$

Lemma 8. *Si $\mathcal{M}$ implémente une équivalence de Morita entre deux C^* -algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ alors $\mathcal{M}$ est de type projectif fini comme $\mathcal{A}$ -module.*

On a le théorème de Serre-Swan, pour la preuve du théorème on peut consulter [8].

Theorem 13. *Avec les mêmes hypothèses que précédemment, si $\mathcal{A} = C(\mathcal{W})$ alors $\mathcal{M} = \Gamma(\zeta)$ où ζ est un fibré vectoriel complexe sur $\mathcal{W}$. Si $\mathcal{B} = \Gamma(\text{Cl}(\mathcal{W}))$ alors les fibrés $\text{End}(\zeta)$ et $\text{Cl}(\mathcal{W})$ sont isomorphes.*

Un J -fibré ζ de dimension $\leq +\infty$ est un fibré hermitien si $\dim(\zeta) < +\infty$, et un fibré d'état si $\dim(\zeta) = +\infty$, muni d'un isomorphisme de fibré, antilinéaire

$$J : \zeta \longrightarrow \zeta$$

continu dans le sens suivant, si

$$J \circ s(w) = J(w)(s(w)),$$

alors $J \circ s \in \Gamma(\zeta)$ pour $s \in \Gamma(\zeta)$ et vérifiant

$$J(w)(uz) = J(w)(u)\bar{z}, J(w)(au) = \chi(a)J(w)(u)$$

$$\langle J(w)(u) | J(w)(v) \rangle_{E_w(\zeta)} = \langle u | v \rangle_{E_w(\zeta)}.$$

Si on suppose l'existence d'un isomorphisme antilinéaire $\mathbf{J}$ de $\Gamma(\zeta)$,

$$\mathbf{J} : \Gamma(\zeta) \longrightarrow \Gamma(\zeta)$$

vérifiant si $s, t \in \Gamma^p(\zeta)$, $a \in \Gamma(\text{Cl}(\mathcal{W}))$ et $\varphi \in C(\mathcal{W})$ alors

$$\mathbf{J}(s\varphi) = \mathbf{J}(s)\bar{\varphi}, \mathbf{J}(as) = \chi(a)\mathbf{J}(s) \quad (10.2)$$

et

$$(\mathbf{J}(s) | \mathbf{J}(t)) = (s | t), \quad (10.3)$$

$\Gamma(\zeta)$ est une $\mathbf{J}$ -algèbre. Un J -fibré ζ définit une structure de $\mathbf{J}$ -algèbre sur $\Gamma(\zeta)$ avec

$$\mathbf{J}(s)(w) = J(w)(s(w)), w \in \mathcal{W}.$$

Un fibré de Morita ζ d'indice $n \geq 1$, respectivement d'indice $n = +\infty$, est un fibré hilbertien de base $\mathcal{W}$ pour lequel, $\Gamma(\zeta)$ est une J -algèbre, et il existe un $*$ -isomorphisme entre les fibrés $\text{Cl}_n(\mathcal{W})$ et $\text{End}(\zeta)$, respectivement entre $\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})$ et $\zeta_{\mathcal{B}}$. Si ce fibré est muni d'une action de Clifford continue et irréductible c vérifiant

$$(u | c(w)(a)(v))_{E_w(\zeta)} = (c(w)(a^*)u | v)_{E_w(\zeta)}$$

pour $a \in E_w(\text{Cl}(\mathcal{W}))$, $u, v \in E_w(\zeta)$, $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathcal{W}$, c'est-à-dire, $\forall \alpha \in \Gamma(\text{Cl}(\mathcal{W}))$ et $\forall s, t \in \Gamma(\zeta)$ on a

$$(s | c(\alpha)(t)) = (c(\alpha)^\dagger(s) | t) \quad (10.4)$$

où $c(\alpha)^\dagger = c(\alpha^*)$, on dit que ζ est un fibré spinoriel.

Definition 22. *Une représentation spinorielle, d'une variété $\mathcal{W}$ orientée, est la donnée d'un fibré spinoriel de base $\mathcal{W}$.*

Si $n = +\infty$, la représentation spinorielle est une représentation spinorielle définie sur un fibré d'état. Une structure de spin, sur une variété $\mathcal{W}$ orientée de dimension paire, est la donnée d'un bimodule $\Gamma(\zeta)$ garantissant l'équivalence de Morita entre $C(\mathcal{W})$ et $\Gamma(\text{Cl}(\mathcal{W}))$ et d'un isomorphisme J vérifiant 10.2, 10.3 et 10.4. Une structure de spin définit une représentation spinorielle sur $\mathcal{W}$ d'indice 1.

On s'intéresse au cas particulier suivant. On se fixe un fibré d'état $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{W}$ et une représentation isométrique compacte de $\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})$ dans $\mathfrak{F}$

$$\rho : \mathfrak{Cl}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathfrak{F}_{\mathcal{K}},$$

si l'action de Clifford associée à ρ est continue, on peut définir l'indice dimensionnel d'une section $s \in \Gamma(\mathfrak{Cl}(\mathcal{W}))$ par

$$\text{indice}(s)(w) = \inf \left\{ p \in \mathbb{R}^{+*} : \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(|\rho(w)(s(w))|)^p < +\infty \right\}$$

où $\rho(w)(s(w))$ est un opérateur compact de $E_w(\mathfrak{F})$. Si $\text{indice}(s)(w)$ est un pôle d'ordre fini ou infini de

$$z \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(\rho(w)(s(w)))^z$$

ayant pour décomposition

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(w) (z - \text{indice}(s)(w))^k$$

la régularisée de la trace de $s(w)$ est la valeur $a_0(w)$, le contre-terme est

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{a_{-k}(w)}{(z - \text{indice}(s)(w))^k},$$

pour les régularisations de trace on peut consulter [10].

Remark 19. *Pourquoi définir l'indice dimensionnelle d'une section s , la raison qui justifie cette construction est donnée par la renormalisation dimensionnelle de 't Hooft et M. Veltman, la trace définie l'intégrale à renormaliser et l'indice dimensionnel donne la variation dimensionnelle $\dim(\mathcal{W}) + \epsilon$, on peut consulter [13].*

L'espace $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{Cl}(\mathcal{W}))$ est l'espace des sections de $\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})$ pour lesquelles

$$\inf(\text{indice}(s)(w)) \geq \epsilon$$

où $\epsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

Proposition 1. $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{Cl}(\mathcal{W}))$ est sous-algèbre de $\Gamma(\mathfrak{Cl}(\mathcal{W}))$.

Proof. Pour une preuve on peut utiliser 2.3, 2.4 et 2.5. □

11. OPÉRATEUR DE DIRAC DANS UN FIBRÉ D'ÉTAT

Le but de ce paragraphe est de décrire l'opérateur d'évolution 7.1 par l'opérateur de Dirac défini par une représentation spinorielle. On se fixe une connexion ∇ sur un fibré vectoriel ζ

$$\nabla : \Gamma^\infty(\zeta) \longrightarrow \Gamma^\infty(\zeta) \otimes \Omega^1(\mathcal{W})$$

∇ est une application linéaire vérifiant la règle de Leibniz

$$\nabla(s\varphi) = \nabla(s)\varphi + s \otimes d\varphi$$

où $\varphi \in C^\infty(\mathcal{W})$, $s \in \Gamma^\infty(\zeta)$ et $\Omega^1(\mathcal{W})$ est l'espace des 1-formes.

Sur une carte de trivialisations W de $\mathcal{W}$ des fibrés ζ et ξ^* , si $\{s_\alpha\}$ et $\{d^\beta\}$ sont des sections de bases locales de ζ et ξ^* alors

$$\nabla s_\tau = \Gamma_{\tau\beta}^\alpha s_\alpha \otimes d^\beta, \Gamma_{\tau\beta}^\alpha \in C^\infty(W)$$

si $s = s_\tau \varphi^\tau$

$$\nabla s = (d + \Gamma) s$$

où

$$ds = s_\alpha \otimes d\varphi^\alpha \text{ et } \Gamma s = \varphi^\tau \Gamma_{\tau\beta}^\alpha s_\alpha \otimes d^\beta.$$

Si $\zeta = \xi$ est le fibré tangent, on se fixe une métrique pseudo-riemannienne sur $\mathcal{W}$, notée g . Soit ∇ la connexion de Levi-Civita, de torsion nulle et compatible avec g ,

$$g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = \mathcal{L}_Z g(X, Y) \quad \text{où } X, Y \text{ et } Z \in \chi(\mathcal{W}) = \Gamma^\infty(\xi) \quad (11.1)$$

et $\mathcal{L}_Z g(X, Y)$ est la dérivée de Lie de $g(X, Y)$ le long de Z .

Remark 20. *Par abus de langage, on note 11.1 par*

$$g(\nabla X, Y) + g(X, \nabla Y) = d(g(X, Y)).$$

On définit la connexion de Levi-Civita sur ξ , par identification de $g(X, \cdot)$ à $\varpi = X^b$. La connexion de Levi-Civita s'écrit sur ξ^*

$$\nabla_\varpi Y = d(\varpi(Y)) - \varpi(\nabla Y),$$

localement

$$\nabla \varpi = (d - \tilde{\Gamma}) \varpi$$

où

$$d\varpi = d^\beta \otimes d\varphi_\beta \text{ et } \tilde{\Gamma}\varpi = -\varphi_\beta \Gamma_{\alpha\tau}^\beta d^\alpha \otimes d^\tau.$$

Si $X \in \Gamma(\xi)$ et ∇ est une connexion sur le fibré vectoriel ζ alors on peut étendre la connexion à $\text{Cl}(\zeta, Q)$ pour toute section lisse Q de formes quadratiques en posant $\tilde{\nabla}_X(st) = \tilde{\nabla}_X(s)t + s\tilde{\nabla}_X(t)$, $\forall s, t \in \Gamma(\text{Cl}(\zeta, Q))$ et $\tilde{\nabla}_X(s) = \nabla(s)$ si $s \in \Gamma(\zeta)$.

Lemma 9. *$\tilde{\nabla}$ est une connexion sur le fibré vectoriel $\text{Cl}(\zeta, Q)$.*

Proof. On a pour $s = s_1 \cdots s_k$ avec $s_j \in \Gamma(\zeta)$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(s\varphi) &= \tilde{\nabla}_X(s_1 \cdots s_{k-1}) s_k \varphi + s_1 \cdots s_{k-1} \nabla_X(s\varphi) \\ &= \tilde{\nabla}_X(s_1 \cdots s_{k-1}) s_k \varphi + s_1 \cdots s_{k-1} (s_k d\varphi(X) + \nabla_X(s)\varphi) \\ &= \left(\tilde{\nabla}_X(s_1 \cdots s_{k-1}) s_k + s_1 \cdots s_{k-1} \nabla_X(s) \right) \varphi + s_1 \cdots s_k d\varphi(X) \\ &= \tilde{\nabla}_X(s) \varphi + s d\varphi(X). \end{aligned}$$

□

On peut étendre une connexion ∇ , définie sur un fibré vectoriel de dimension finie ζ , en une connexion $\tilde{\nabla}$ définie sur $\text{Cl}(\zeta, Q)$. Par ce procédé, on peut construire pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une connexion notée ∇_n avec

$$\nabla_0 = \nabla, \nabla_1 = \tilde{\nabla}, \nabla_2 = \tilde{\tilde{\nabla}}, \dots, \nabla_{n+1} = \tilde{\nabla}_n, \dots$$

cette suite de connexion permet de construire une connexion à l'infini, notée $\nabla_{\text{Cl}_\infty(\zeta, Q)}$, en posant

$$\nabla_\infty|_{\Gamma(\text{Cl}_n(\zeta, Q))} = \nabla_n, (\nabla_\infty)_X s = (\nabla_n)_X s \text{ si } s \in \Gamma(\text{Cl}_n(\zeta, Q)). \quad (11.2)$$

Pour une métrique pseudo-riemannienne g , on note ∇ la connexion de Levi-Civita. Cette connexion a une extension sur $\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})$, notée $\nabla_{\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})}$, comme extension continue de $\nabla_{\text{Cl}_\infty(\mathcal{W})}$. Si $(\mathcal{W}, \zeta, J)$ est une représentation spinorielle d'indice 1, il existe une unique connexion spinorielle sur ζ , notée ∇^ζ , vérifiant

$$\left(\nabla_X^\zeta s \mid t \right) + \left(s \mid \nabla_X^\zeta t \right) = \mathcal{L}_X(s \mid t)$$

commutant avec J ,

$$J\nabla_X^\zeta = \nabla_X^\zeta J$$

et telle que

$$\nabla_X^\zeta (c(s)(t)) = c(\tilde{\nabla}_X s)(t) + c(s)(\nabla_X^\zeta t), \forall X \in \Omega^1(\mathcal{W}).$$

L'action de l'algèbre de Clifford peut s'écrire comme une application

$$\widehat{c} : \Gamma^\infty(\zeta) \otimes \Gamma^\infty(\text{Cl}(\mathcal{W})) \longrightarrow \Gamma^\infty(\zeta), \widehat{c}(s \otimes v) = c(v)(s), \quad (11.3)$$

avec cette représentation on a la définition suivante,

Definition 23. *L'opérateur de Dirac $\mathcal{D}$ d'une variété à spin $(\mathcal{W}, \zeta, J)$ est l'opérateur de $\Gamma^\infty(\zeta)$ défini par*

$$\mathcal{D} = -i(\widehat{c} \circ \nabla^\zeta).$$

Theorem 14. *$\mathcal{D}$ est l'opérateur de Dirac de la théorie quantique des champs.*

Proof. Pour une preuve on peut consulter [14]. $\square$

Les constructions précédentes permettent de définir l'opérateur de Dirac à l'infini en posant

$$\mathfrak{D} = -i(\widehat{\mathfrak{c}} \circ \nabla_\infty^\zeta) \quad (11.4)$$

où l'extension continue de ∇_∞^ζ est encore notée ∇_∞^ζ et $\mathfrak{c}$ est l'extension de c de $\text{Cl}(\mathcal{W})$ à $\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})$ à valeurs dans $\text{End}(\zeta)$ définie par

$$\mathfrak{c} : \mathfrak{Cl}(\mathcal{W}) \longrightarrow \text{End}(\zeta), \quad (11.5)$$

$\mathfrak{c}$ est l'extension continue de

$$c_\infty : \text{Cl}_\infty(\mathcal{W}) \longrightarrow \text{End}(\zeta),$$

$$c_\infty|_{\text{Cl}_n(\mathcal{W})} = c_n$$

c_n est obtenu par itération en posant

$$\widetilde{c} : \text{Cl}_2(\mathcal{W}) \longrightarrow \text{End}(\zeta), \widetilde{c}(v_1 \cdots v_k) = c(v_1) \circ c(v_2) \cdots \circ c(v_k)$$

où $v_i \in \text{Cl}_1(\mathcal{W}) = \text{Cl}(\mathcal{W})$ et par itération on pose

$$c_{n+1} = \widetilde{c}_n \text{ et } c_1 = c.$$

L'opérateur $\widehat{\mathfrak{c}}$ est défini par

$$\widehat{\mathfrak{c}} : \Gamma^\infty(\zeta) \otimes \Gamma^\infty(\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})) \longrightarrow \Gamma^\infty(\zeta), \widehat{\mathfrak{c}}(s \otimes v) = \mathfrak{c}(v)(s).$$

12. CONCLUSION

Dans une première partie on s'est intéressé aux représentations isométriques des fibrés de Fredholm dans un fibré d'état. Les espaces de Lebesgue-Schatten-Maçaev sont décrits à partir des espaces de Schatten. L'homologie et la cohomologie des fibrés de Fredholm sont étudiées à partir de l'homologie et la cohomologie sur chaque fibre. La notion de métrique spectrale, transformation de Wick et la quantification du fibré d'état $\mathfrak{F}$ par les observables de Dirac donnent une description de l'évolution d'un système physique quantifié. Les constructions spinorielles définies en dimension finie peuvent s'étendre à l'infini. On donne un sens à l'opérateur de Dirac sur les fibrés d'état. Peut-on, à partir de ces extensions à l'infini, donner une représentation non commutative du modèle standard sur un fibré d'état? Beaucoup de questions restent ouvertes. La suite de ce travail consiste à écrire le modèle standard de la physique sur les fibrés d'état. Même si ce document est incomplet, dans l'approfondissement de certains résultats, il a le mérite de proposer aux lecteurs une représentation spinorielle sur les fibrés d'état. Les extensions des opérateurs

de Dirac à l'infini donnent des outils pour l'étude des fibrés d'état à partir de leur base.

REFERENCES

- [1] Atiyah M. F., Bott R. et Shapiro A. , "Clifford modules" Topology, vol. 3, 1964, p. 3-38
 - [2] Ben Ammar M., "Décomposition d'Iwasawa du groupe spinoriel" Riv. Mat. Univ. Parma (4) 17 (1991).
 - [3] Connes, A., "Brisure de symétrie spontanée et géométrie du point de vue spectral", Séminaire N. Bourbaki, 1995-1996, exp. n^o816, p. 313-349.
 - [4] Connes, A., "Non commutative geometry", Academic Press (1994).
 - [5] Connes, A., "Analyse et géométrie", <https://www.college-de-france.fr>
 - [6] Connes, A., "Non-commutative differential geometry", Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 62 (1985).
 - [7] Dixmier, J., "Existence de traces non normales", C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B262 (1966).
 - [8] Gracia-Bondia J. M. , Varilly J. C., Figueroa H. , "Elements of noncommutative geometry", Birkhauser (2001).
 - [9] Higson, N., "The Residue Index Theorem of Connes and Moscovici", Surveys in Noncommutative Geometry, Clay Mathematics Proceedings (Volume 6).
 - [10] Jonot, J.L., "Régularisation des traces divergentes, Extension de la notion de trace". hal v4(2021).
 - [11] Jonot, J.L., "Modélisation géométrique et quantique en physique", hal v5 (2015).
 - [12] Jonot, J.L., "Chronologies dans l'univers", hal (2021)
 - [13] Jonot, J.L., "Sur quelques méthodes de régularisation des intégrales divergentes, application à la renormalisation", 2016. hal-01281271.
 - [14] Martinetti, P., "Distance en géométrie non commutative", Thèse(2001)
 - [15] Robert, D., "Sur les traces d'opérateurs (de Grothendieck à Lidskii)", SMF – Gazette – 141, juillet 2014.
 - [16] Rodsphon, R., "Extension, cohomologie cyclique et théorie de l'indice", Thèse de Doctorat 2014.
 - [17] Sakai, S., "C*-algebras and W*-algebras", Springer-Verlag (1971).
 - [18] Simon, B., "Trace ideals and their applications", volume 35 of London Mathematical Society. Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1979
 - [19] 't Hooft, G. and Veltman, M., "Regularization and renormalization of gauge fields". Nucl. Phys. B44: 189-213, 1972, in Current Contents Vol. 15, No. 16 (1984) 16.
 - [20] Takesaki, M., "Theory of operator algebras", Springer-Verlag (1979)
- Email address:* `jean-louis.jonot@ac-versailles.fr` ou `j.jonot@gmail.com`