HAL open science

Note sur les logiques paraconsistantes et une variante de calcul C n

Daniel Parrochia

To cite this version:

Daniel Parrochia. Note sur les logiques paraconsistantes et une variante de calcul C n. 2022. hal-03679451

HAL Id: hal-03679451

https://hal.science/hal-03679451v1

Preprint submitted on 26 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Note sur les logiques paraconsistantes et une variante de calcul C_n

Daniel Parrochia

Université de Lyon (France)

À Jean-Pierre Ginisti.

Abstract. Nous rappelons l'essentiel de l'histoire des logiques paraconsistantes et présentons les premiers calculs élaborés par Newton da Costa dans les années 1970. Dans un deuxième temps, nous proposons une variante de logique paraconsistante (fondée sur la base des calculs C_n de da Costa, avec une sémantique trivalente légèrement modifiée). In fine, nous discutons l'interprétation philosophique des logiques paraconsistantes de Gilles-Gaston Granger.

Key words. Histoire des logiques paraconsistantes, Newton da Costa, calculs C_n, Jean-Yves Béziau.

1 Introduction

Nous commencerons par quelques remarques de vocabulaire. Nous adoptons dans ce travail la terminologie utilisée dans la présentation de A. I. Arruda (voir [Arruda 80]).

Etant donné un langage L et F l'ensemble de ses formules bien formées, tout sous-ensemble non-vide de F est un *système propositionnel* de F. On dit alors qu'un tel système propositionnel S est trivial (ou supracomplet) si $S = F$. Dans le cas contraire, S sera dit non-trivial (ou non supracomplet).

Dans le premier cas, toute formule de F est une thèse du système. Cela revient à dire que, dans le système, "tout est vrai" – ce qui ôte à la notion de vérité (et à l'opposition traditionnelle du vrai et du faux) toute espèce de valeur. Cela signifie encore qu'à

partir d'une thèse du système, on peut déduire n'importe quoi et, nommément, des énoncés contradictoires.

Dans le second cas, on peut montrer que certaines formules de F ne sont pas des thèses de S. Cette terminologie est rendue nécessaire pour une raison très simple : c'est que l'adjonction à un système non-trivial d'une formule supplémentaire qui n'est pas une thèse de ce système peut le rendre trivial. Le cas le plus évident est l'adjonction, au calcul des propositions classique, d'une formule du type $(p \wedge \neg p)$.

"Pour citer une fantaisie burlesque qui revient souvent dans ces sujets, écrivait naguère Quine, qu'arriverait-il si quelqu'un rejetait la loi de non-contradiction et acceptait comme vrais à la fois un énoncé pris au hasard et sa négation ? On répond en général que cela nullifierait tout le savoir. Une conjonction quelconque de la forme $p \wedge \neg p$ implique logiquement tout énoncé que ce soit" (voir [Quine 69], 120-121).

Tout le problème des logiques paraconsistantes est précisément d'éviter cette "trivialisation à grande échelle" dont parle Quine, sans pour autant renoncer à déduire, dans le cadre d'un système logique bien défini, des propositions pourtant contradictoires.

Des systèmes triviaux à grande échelle sont dits inconsistants. Toutefois, les notions de consistance ou d'inconsistance peuvent être prises dans un sens large et ne désignent pas uniquement, dans ce cas-là, la consistance ou l'inconsistance par rapport à l'opération de négation traditionnelle (respectivement nommées non-contradiction et contradiction).

Soit $*$ un opérateur unaire, défini sur l'ensemble F des formules d'un langage L, et tel que, si A est une formule de L, ${}^*A$ est aussi une formule de L. On dit qu'un système S est $*$-inconsistant si et seulement si il y a au moins une formule A de S telle que A et $*A$ appartiennent à S. Dans le cas contraire, S est dit $*$-consistant.

On dit qu'un système propositionnel S est une théorie s'il a une logique sous-jacente L. Cela signifie que S est fermé pour les règles de la logique L. Toutes les propriétés de S ($*$-consistance, trivialité, etc...) s'appliquent naturellement à la théorie T. Dans la suite, l'opérateur $*$ sera toujours la négation.

Définition 1.1. On dira qu'une logique L est paraconsistante si elle est la logique sous-jacente de théories à la fois inconsistantes et non-triviales.

On notera cependant que dire d'une théorie qu'elle est inconsistante ne signifie pas que, nécessairement, la formule du principe de non-contradiction $\neg(A \wedge \neg A)$ y soit fausse, mais seulement qu'elle *peut* l'être. On peut encore fixer, avec Arruda, les

définitions des notions de paradoxes et d'antinomies :

Définition 1.2. On appellera *paradoxe formel* dans une théorie T la dérivation dans T (ou la preuve métalogique qu'une telle dérivation est possible) de deux théorèmes de la forme $A \wedge \neg A$, où $\neg$ est le symbole de la négation.

Les théories étant identifiées aux ensembles de formules bien formées qui les composent, un théorème de T est simplement l'un de ses éléments.

Définition 1.3. Une antinomie formelle dans une théorie T sera la preuve métalogique que T est triviale.

Le propre des logiques paraconsistantes est de faire en sorte que des paradoxes – qui sont aussi des antinomies dans la logique classique – n'en soient plus et ne rendent plus le système trivial, c'est-à-dire, sans aucun intérêt logique ou métalogique. Comme beaucoup d'antinomies sont des contradictions, la démarche des logiques paraconsistantes revient à admettre qu'*il y a des contradictions vraies et qui ne peuvent être éliminées.*

2 Une brève histoire des logiques paraconsistantes

Jan Łukasiewicz (1878-1956) et Nicolaï Alexandrovich Vasil'èv (1880-1940) sont les deux précurseurs des logiques paraconsistantes au début du XXe siècle. Il revient, en particulier, à Jan Łukasiewicz d'avoir montré que le principe de non-contradiction, très discuté dès l'Antiquité, tolérait certaines dérogations ou, du moins, n'apparaissait pas démontrable, au sein même de la philosophie d'Aristote, lequel le tenait néanmoins comme "la plus ferme de toutes les croyances" (voir [Aristote 53], Γ 6, 1011b, 13-14). Comme le remarque Gilles-Gaston Granger, ce principe "est énoncé par Aristote, mais avec l'indication qu'il ne saurait lui-même servir de prémisse"(voir [Granger 76], 92). Il s'agit d'une règle, non pas en un sens formaliste mais qui exprime "la fidélité aux conditions de la connaissance de l'être" (voir [Granger 76], 92) [1]. Ainsi, ce principe se trouve-t-il être indépendant du principe du syllogisme. Aristote l'écrit explicitement : "Le principe suivant lequel il est impossible d'affirmer et de nier en même temps un prédicat d'un sujet n'est posé par aucune démonstration, à moins qu'il ne faille démontrer aussi la conclusion sous cette forme" (voir

1. L'auteur renvoie également à *Métaphysique* Γ, 1005 b, 19 sq, où Aristote associe au principe de non-contradiction la proposition : "il est impossible que le même attribut appartienne et n'appartienne pas en même temps au même sujet et sous le même rapport", et à *Métaphysique* Γ, 1005 b, 30 : "il est impossible pour le même esprit de concevoir, en même temps, que la chose est et n'est pas".

[Aristote 96], I, 11, 77a, 10-22). Cette restriction n'infirme d'ailleurs pas la thèse, mais la démontre. Le syllogisme visé par Aristote est du type suivant :

(a) L'homme est animal et non non-animal ;

(b) Callias est homme ;

(c) Callias est animal et non non-animal.

Or le philosophe fait remarquer qu'on ne change rien à la conclusion en ajoutant au moyen (homme) et au mineur (Callias) leur négation correspondante, remplaçant ainsi (b) par :

(b') Callias et non-Callias est homme et aussi non-homme.

et (a) par :

(a') L'homme et aussi le non-homme est animal et non-animal [2].

Łukasiewicz en tire la conclusion : "si un syllogisme reste valide alors que le principe de non-contradiction ne l'est plus, alors, le principe du syllogisme (et en fait, le *dictum de omni et nullo*) est indépendant du principe de non-contradiction"(voir [Łukasiewicz 71], 503-504) [3]. Il faut donc se résoudre à considérer le principe de non-contradiction comme un postulat :

1) Il n'est pas une évidence logique (l'évidence n'est pas un critère) et n'a rien d'universel (les Mégariques, dans l'antiquité, Hegel, au XIXe siècle, le rejetteront).

2) Il n'est pas une évidence psychologique (l'organisation psychique est parfois source de propositions fausses et on peut toujours s'interroger sur la validité d'une loi déterminée par l'organisation psychique humaine).

3) On ne peut le prouver sur la base de la définition des jugements ou de la négation.

2. Arruda – comme Łukasiewicz, d'ailleurs – semble oublier d'effectuer aussi ce changement (voir [Arruda 80], 7).

3. G.-G. Granger (dans [Granger 98], 144-146), après avoir relu le passage d'Aristote, conteste l'interprétation qu'en donne Łukasiewicz : selon lui, "Aristote veut simplement donner un exemple de démonstration dans laquelle l'universalité de la majeure étant explicitée sous forme de non-contradiction – affirmation de la propriété et négation de sa non-possession –, la particularité d'une proposition est alors exprimée par la possession *ou* la non-possession d'une propriété. Il ne veut nullement montrer, comme l'interprète Łukasiewicz, que le principe de non-contradiction serait en ce cas violé" ([Granger 98], 146). Mais Łukasiewicz ne dit pas que le principe de non-contradiction est violé, il montre que la conclusion du syllogisme reste inchangée si on ajoute au moyen et au mineur leur négation correspondante.

À supposer que la négation signifie la fausseté de l'affirmation, le principe de non-contradiction ne peut être déduit de là.

Selon Łukasiewicz, en outre, la notion de "multiplication logique" n'est pas contenue dans la définition de la négation ou de la fausseté et c'est au contraire cette notion qui confère au principe de non-contradiction son empreinte spécifique. Qu'on choisisse une autre définition de la fausseté (par exemple, l'idée que les propositions fausses ne correspondent à rien d'objectif) et il en ira de même. On ne saurait éviter que, dans certains cas, A soit et ne soit pas B au même instant. Le principe de non-contradiction ne peut être dérivé de la définition du faux.

À peu près à la même époque que Łukasiewicz (1910-1911), le logicien russe Vasil'èv tenta d'élaborer une logique universelle non-aristotélicienne, dans laquelle il distinguait une partie (un ensemble de lois de la pensée sans lesquelles la logique perdrait tout caractère logique) et une partie ontologique (la base ontologique de la logique), où les lois sont des fonctions des propriétés des objets connus. Parmi ces lois, Vasil'èv rejetait :

a) le principe du tiers-exclu (supposant l'existence de jugements affirmatifs, négatifs et indifférents), amenant ainsi une logique imaginaire, avec un principe du quart-exclu, qu'il généraliserait plus tard en principe du (n+1^e) exclu ;

b) le principe de non-contradiction. Ce dernier était cependant pris sous sa forme kantienne ("nul objet ne peut avoir de prédicat qui le contredit")) et se trouvait ainsi distingué de la loi de non-auto-contradiction : "un seul et même jugement ne peut être en même temps vrai et faux". Cette dernière proposition qui, selon Vasil'èv, relève de la métalogique, était, elle maintenue.

Dans l'esprit de ces logiciens, il était clair que le rejet du principe de non-contradiction était analogue au rejet, en géométrie, du 5e postulat d'Euclide. Il appelait la création de nouvelles logiques, comparables aux géométries non-classiques de Riemann ou Lobatchevski. Il fallut cependant attendre le milieu du XXe siècle pour que ces possibilités commencent d'être exploitées.

3 Le travail de Stanislaw Jaśkowski

Dans un article précurseur écrit en Polonais et publié à Torun (Pologne) en 1948, le logicien Stanislaw Jaśkowski (1906-1965) justifiait la construction de logiques paraconsistantes par les arguments historiques, logiques et épistémologiques suivants :

a) Des exemples de raisonnements convaincants menant à des conclusions contradictoires ont amené, dès l'Antiquité, nombre d'auteurs à discuter le principe de non-contradiction ;

b) Les récentes antinomies ensemblistes (paradoxes de Burali-Forti, Russell, Richard, etc.) telles qu'elles sont habituellement éliminées (théorie des types) amènent à distinguer plusieurs langages hiérarchisés, d'où une distinction entre la logique et le langage naturel qui rend plus difficile une synthèse de notre connaissance ;

c) La formulation moderne du principe de non-contradiction (deux propositions contradictoires ne peuvent être vraies au même moment dans le même langage) amène une restriction dans l'usage de la raison que, ni la vie quotidienne, ni même la science ne sont en mesure de respecter. Il arrive notamment, à cette dernière, de traverser des périodes où nul théoricien n'est en mesure d'expliquer *tous* les résultats des expériences dans *une* théorie homogène et consistante. La pluralité des hypothèses, les fictions heuristiques, caractéristiques de la science moderne, réclament que l'inconsistance elle-même soit pensée théoriquement. Au fond il s'agit, dès cette époque, de penser l'hétérogène, d'inscrire même l'hétérogène au cœur des raisonnements.

Dans son article de 1948, traduit et publié en langue anglaise en 1969, Jaskowski (voir [Jaśkowski 69]) part du problème fondamental, primitivement soulevé par Popper et dont Quine s'était fait l'écho : deux thèses contradictoires trivialisent un système et le rendent . Comment éviter cette conséquence sans supprimer la contradiction ? Il est d'abord facile de voir pourquoi le calcul classique ne peut tolérer la contradiction : Jaśkowski en fournit la démonstration évidente de la façon suivante. Il appelle "loi de supracomplétude» la tautologie :

$$(L) \qquad p \supset (\neg p \supset q).$$

Soit alors un système contradictoire S et deux thèses, t et $\neg t$. On peut y déduire alors n'importe quelle autre thèse, comme le prouve aisément le raisonnement suivant.

(1) t ;

(2) $\neg t$;

(3) $t \supset (\neg t \supset b)$ $\qquad (L), p/t, q/b$;

(4) $\neg t \supset b$ $\qquad$ (1), (3), mod. pon. ;

(5) b (2), (4), mod. pon.

La tâche est donc de trouver des systèmes qui ne soient pas supracomplets quoique contradictoires (autrement dit, il faut que L y soit fausse). Ces systèmes devront cependant être assez riches pour permettre une inférence pratique. Enfin, ils devront avoir une justification intuitive (quoique ce dernier point, Jaśkowski le reconnait, soit difficile à apprécier).

Il existait à l'époque trois solutions connues, auxquelles Jaśkowski ajouta ses propres propositions, construites sur une variation de la logique modale, baptisée pour l'occasion "logique discursive". Ces trois solutions étaient les suivantes :

1°) La première était le système de Kolmogorov, calcul des propositions fondé sur les quatre axiomes de la logique positive de Hilbert (K1-K4), et comprenant en outre l'axiome K5, introduit par Kolmogorov lui-même :

K1 $p \supset (q \supset p)$;

K2 $(p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)$;

K3 $(p \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r))$;

K4 $(q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)$;

K5 $(p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p)$.

On peut montrer, que, dans un tel système, L ne peut être prouvée. En effet, les axiomes de Kolmogorov satisfont la matrice de Łukasiewicz suivante :

$\supset$	1	0	$\neg$
*1	1	0	1
0	1	1	1

où 1 est la valeur désignée. L ne satisfait pas cette matrice, prenant la valeur 0 à la ligne où $p = 1, \neg p = 1$ et $q = 0$. Evidemment, ce qu'on note sous le signe $\neg$, et qui fait office de "négation", est en réalité un foncteur d'un nouveau genre, appelé "verum", dont la fonction est de transformer toutes les valeurs en la valeur désignée 1.

Le problème, avec un tel système, est qu'on peut déduire des axiomes posés une formule proche de L, dans laquelle la variable q est remplacée par sa "négation".

$$(L') \qquad p \supset (\neg p \supset \neg q).$$

Il est facile de voir, en effet, que L' n'est autre que K1, avec une contraposition sur le deuxième membre. Considérons alors les conséquences d'une telle situation. Supposons que le système de Kolmogorov soit appliqué à une théorie contradictoire où t et $\neg t$ sont des thèses et b une formule quelconque, douée de sens. Alors, le raisonnement suivant peut être mené :

(1) t ;

(2) $\neg t$;

(3) $t \supset (\neg t \supset \neg b)$ (L), p/t, q/b ;

(4) $\neg t \supset \neg b$ (1), (3), mod. pon. ;

(5) $\neg b$ (2), (4), mod. pon.

Il en résulte que toute formule douée de sens et commençant par le symbole de la négation peut y être obtenue comme thèse. On est là dans une situation proche de la supracomplétude que l'on voulait justement éviter. D'où l'intérêt relativement limité du système de Kolmogorov pour penser la contradiction.

2°) La seconde solution, sur laquelle Jaśkowski passe plus rapidement est le système d'implication stricte de Lewis et Langford (voir [Jaśkowski 69], 147). Ces logiciens, introduisant des modalités dans l'analyse des propositions, distinguent l'implication stricte de l'implication matérielle usuelle, et interprètent la formule "p implique strictement q" comme signifiant "Il n'est pas possible que l'on ait à la fois p et $\neg q$". Si "$\supset$" est interprété comme le symbole de l'implication stricte, alors, L n'est pas un théorème. Toutefois, Jaśkowski observe que l'ensemble des thèses où figure l'implication stricte et où ne figure pas, en même temps, l'implication matérielle est très limité, Lewis et Langford utilisant souvent les deux implications dans le même théorème. Or L reste évidemment valide pour l'implication matérielle. On se trouve donc une nouvelle fois devant un système sans grande portée pratique.

3°) Plus riche aurait pu être la suggestion de Łukasiewicz d'utiliser des matrices plurivalentes pour construire des systèmes contradictoires (et nous verrons ultérieurement Da Costa et Asenjo en tirer parti). La loi L, en effet, n'est pas valide dans l'interprétation de l'implication et de la négation que donne la matrice de Slupecki suivante :

$\supset$	1	2	3	$\neg$
*1	1	2	3	2
*2	1	2	3	3
3	1	1	1	1

dans laquelle 1 et 2 sont les valeurs désignées. Malheureusement une formule proche de L, là encore, est démontrable. Il s'agit de :

$$L" \qquad p \supset (\neg p \supset (\neg\neg p \supset q)),$$

d'où résulte la supracomplétude du système dès que celui-ci comprend le triplet de thèses contradictoires $t, \neg t, \neg\neg t$:

(1) t ;

(2) $\neg t$;

(3) $\neg\neg t$;

(4) $t \supset (\neg t \supset (\neg\neg t \supset b))$ (L), p/t, q/b ;

(5) $\neg t \supset (\neg\neg t \supset b)$ (1), (4), mod.pon.) ;

(6) $\neg\neg t \supset b$ (2), (5), mod. pon.) ;

(7) b (3), (6), mod. pon.).

Sans doute le système admet-il certaines thèses qui ne figurent pas dans le calcul des propositions classiques (voir [Jaśkowski 69], 147). Mais la supracomplétude ou la trivialité, facilement réalisable, lui ôte tout intérêt réel.

À la différence de ce que feront plus tard Asenjo ou Da Costa, Jaśkowski ne cherche pas d'autres matrices de l'implication ou de la négation qui, tout en restant trivalentes, seraient plus intéressantes. Il introduit, à partir du calcul des propositions modales M2 (système S5 de Lewis et Langford), une interprétation de M2 nommée "logique discursive", dans la mesure où elle paraît pouvoir formaliser des situations susceptibles d'intervenir dans des débats ou des discours : par exemple, des thèses contradictoires, avancées par plusieurs participants, et pourtant réunies dans un même système ; ou encore, les opinions d'une même personne mises ensemble, alors que cette personne n'est pas sûre que les termes apparaissant dans ses différentes thèses n'aient pas des sens légèrement différents les uns des autres. Dans un tel système, toute assertion ne peut s'admettre qu'avec certaines réserves. Une thèse

t ne pourra donc jamais signifier autre chose qu'une pure possibilité : le jugement qu'un individu a pu soutenir, les termes qu'un autre semble avoir employés avec tel sens, etc. Jaskowski note cela : Pos(t) (voir [Jaśkowski 69], 149), avec :

$$\text{Pos } t = \neg\text{Nec } \neg t,$$

autrement dit : "il est possible que t" = : "il n'est pas nécessaire que non t".

Dès lors, il est évident qu'un tel système discursif ne peut reposer sur une logique bivalente ordinaire. On voit facilement, en particulier, que la règle de modus ponens n'est plus valide. De "s'il est possible que p, alors q" et de "il est possible que p, on ne peut pas déduire "il est possible que q". Tout le problème est alors de choisir un foncteur qui joue le même rôle que l'implication dans le calcul standard des propositions. Lewis définissait une "implication stricte". Jaśkowski, quant à lui, introduit une "implication discursive", où le foncteur d'implication (Cd en notation polonaise) est interprété de la façon suivante :

$$\text{Cd } pq = \text{Pos } p \Rightarrow q,$$

qu'on traduira par : "p implique discursivement q", ou encore, "s'il est possible que p, alors q" (au sens de l'implication discursive)

De même, une "équivalence discursive" sera introduite par la formule :

$$\text{Ed } pq = \text{Pos } p \supset q \wedge \text{Pos } q \supset \text{Pos } p.$$

L'introduction de ces nouveaux foncteurs amène la constitution d'un système D2 tel que toute thèse de D2 est formée de variables propositionnelles et des foncteurs Cd, Ed, ainsi que de la disjonction, de la conjonction et de la négation ordinaires. D'autre part, toute thèse de D2 précédée de "Pos" devient un théorème de M2. Trois théorèmes méthodologiques permettent alors de passer du calcul classique des propositions (noté L2) au calcul D2 et vice-versa.

Notons respectivement "$\Rightarrow$" et "$\Leftrightarrow$" l'implication et l'équivalence discursives, précédemment écrites respectivement Cd et Ed en notation polonaise. Sans décrire intégralement le système D2 ni même retranscrire ses principaux théorèmes, nous pouvons tout de même faire deux observations :

a) Le système construit est tel que les lois considérées de supracomplétude n'y sont pas des thèses. On a, en particulier :

(non D2) (L) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$;

(non D2) (L') $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$;

(non D2) $(L")$ $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow (\neg\neg p \Rightarrow q))$.

b) Non seulement le système rejette certaines formules sur la base desquelles des antinomies pourraient alors entraîner la supracomplétude, mais encore, il permet de déduire ces mêmes antinomies en évitant cette dernière. Considérons ainsi les formules :

(D2) 14 $(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$;

(D2) 15 $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$;

(D2) 16 $(\neg p \Leftrightarrow p) \Rightarrow p$;

(D2) 17 $(p \Leftrightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$.

Et, d'autre part, l'antinomie dite "du menteur" :

b (Ce jugement est faux).

On a naturellement deux thèses :

(1) Si b est vraie, b n'est pas vraie ;

(2) Si b n'est pas vraie, b est vraie.

Et ces deux thèses peuvent être remplacées par une seule :

(3) b est vraie si et seulement si b n'est pas vraie.

Si l'implication et l'équivalence sont interprétées comme dans (1)-(3), alors, on peut faire le raisonnement suivant :

Considérons la thèse (3), formalisée par :

(3) $b \Leftrightarrow \neg b$.

Il vient :

(4) b D2 16, p/B, (3), mod. pon.

(5) $\neg b$ D2 17, p/B, (3), mod. pon.

L'auteur semble donc arriver à ses fins : le système permet de déduire comme thèses des énoncés contradictoires, apparemment sans aboutir à la supra-complétude, les procédures qui y conduisent ordinairement faisant défaut. Comme l'observe avec prudence Jaśkowski, "ces remarques ne prouvent pas qu'il existe un système qui ne soit pas supercomplet et tel que la proposition b puisse y être formulée. Si une telle preuve pouvait être donné, un tel système formalisé aurait à être défini, mais c'est une autre tâche" (voir [Jaśkowski 69], 156).

Ce fut le travail de Da Costa et de son école de la mener à bien.

4 Les calculs C_n et NF1 de N. da Costa

Le mathématicien brésilien Newton Da Costa a développé, depuis le milieux des années 1960, des recherches sur les logiques paraconsistantes (en général contradictoires), qui ont abouti à la construction d'un calcul propositionnel C_1, généralisé ensuite à toute une hiérarchie de calculs du même type (les calculs C_n pour $1 \leq n \leq \omega$) et à l'élaboration conjointe d'un calcul des prédicats (resp. des prédicats avec égalité), C_{n^*}, (resp. $C_n^=$), lui-même généralisé à C_ω^*, (resp. $C_\omega^=$). Ces calculs satisfont aux conditions suivantes :

1) En eux, le principe de non-contradiction $\neg(A \wedge \neg A)$ ne doit pas être un schéma valide ;

2) De deux formules contradictoires, il ne sera pas, en général, possible de déduire une formule arbitraire b[4] ;

3) Il doit être simple d'étendre $C_n(1 \leq n \leq \omega)$, aux calculs des prédicats (avec ou sans égalité) du premier ordre ;

4) C_n doit contenir la plupart des schémas et des règles de C_0 (C_0 étant le calcul classique des propositions) (voir [Da Costa 74]).

A partir de là, Da Costa a constitué une théorie paradoxale des ensembles (système NF1), très utile pour déduire les antinomies bien connues.

Commençons par décrire le calcul le plus simple (C_1) où A sera une abréviation pour $\neg(A \wedge \neg A)$. On a les axiomes suivants :

4. On évite ainsi le fameux "principe d'explosion", énoncé en latin *ex falso quodlibet* ou encore *ex contradictione sequitur quodlibet* (d'une contradiction, on peut déduire ce qu'on veut), aussi nommé "principe de Pseudo-Scotus".

(1) $A \supset (B \supset A)$;

(2) $(A \supset B) \supset (A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$;

(3) $A, \frac{A \supset B}{B}$;

(4) $A \wedge B \supset A$;

(5) $A \wedge B \supset B$;

(6) $A \supset (B \supset A \wedge B)$;

(7) $A \supset A \vee B$;

(8) $B \supset A \vee B$;

(9) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$;

(10) $A \vee \neg A$;

(11) $\neg\neg A \supset A$;

(12) $B^\circ \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$;

(13) $A^\circ \wedge B^\circ \supset (A \wedge B)^\circ$;

(14) $A^\circ \wedge B^\circ \supset (A \vee B)^\circ$;

(15) $A^\circ \wedge B^\circ \supset (A \supset B)^\circ$.

NB. On notera : $A^\circ = \neg(A \wedge \neg A)$.

Les règles de déduction sont celles du calcul classique des propositions qu'on obtient d'ailleurs à partir de C_1 en ajoutant le principe de non-contradiction. Un certain nombre de schémas ne sont pas valides dans C_1. Par exemple (voir[Da Costa 74], 499) :

$A \supset (A \supset B), \neg A \supset (A \supset \neg B), A \supset (\neg A \supset B)[= L]$,

$A \supset (\neg A \supset \neg B)[= L'], A \wedge \neg A \supset B, A \wedge \neg A \supset \neg B$,

$(A \supset \ B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A), A\neg\neg A, (A \equiv \neg A) \supset B$,

$(A \equiv \neg A) \supset \neg B, \neg(A \wedge \neg A), (A \vee B) \wedge \neg A \supset B$,

$A \vee B \supset (\neg A \supset B), (A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A), A \equiv \neg\neg A$.

On repère parmi eux les thèses L et L' de Jaśkowski, ainsi que le principe de non-contradiction. Pour prouver ces rejets, il suffit d'employer les matrices suivantes :

$A \wedge B$ $_A{}^B$	1	2	3
1	1	1	3
2	1	1	3
3	3	3	3

$A \vee B$ $_A{}^B$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	3

$A \supset B$ $_A{}^B$	1	2	3
1	1	1	3
2	1	1	3
3	1	1	1

A	$\neg A$
1	3
2	1
3	1

où 1 et 2 sont les valeurs de vérité désignées [5].

On prouve facilement que le principe de non-contradiction $\neg(A \wedge \neg A)$ n'est pas une thèse du système, mais on remarquera au passage que la négation de ce principe (autrement dit, $(A \wedge \neg A)$ n'est pas non plus une thèse du système.

Parmi les thèses et règles de déduction valides dans C_1, on a :

$B^\circ, A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A; B^\circ, A \supset \neg B \vdash B \supset \neg A$;

$B^\circ, \neg A \supset B \vdash \neg B \supset A; B^\circ, \neg A \supset \neg B \vdash B \supset A$;

$\vdash (A \supset \neg A) \supset \neg A; \vdash (\neg A \supset A) \supset A$;

$\vdash A^\circ \supset (\neg A)^\circ$.

5. Il suit de la matrice de la négation que, si A et $\neg A$ ne peuvent être fausses ensemble (relation de "contrariété"), inversement, ces deux propositions peuvent être vraies ensemble ou, disons, avoir l'une et l'autre des valeurs désignées. Ce constat est une généralisation de celui de Priest, qui se place dans une logique LP, différente de celle de Łukasiewicz au sens où c'est la troisième valeur qui est choisie ici comme la valeur désignée. Cette situation a incité Hartley Slater (voir [Slater 95]) à la suite d'ailleurs de Priest et Routley (voir [Priest 79] ;[Priest and al. 89]), à interpréter la négation paraconsistante de C_1 comme une forme de "subcontrariété" au sens de la logique classique, car celle-ci possède précisément cette propriété. En logique classique, en effet, la relation de subcontrariété est une relation portant sur la forme de la copule et existant entre deux propositions particulières (désignées généralement par I et O) dont l'une est affirmative et l'autre négative. La polémique qui s'en est suivie (voir [Béziau 06[1]]) a conduit ce dernier à plusieurs découvertes d'importance : une nouvelle logique (la logique Z, fondée sur la théorie des mondes possibles (voir [Béziau 06[2]])), mais surtout, la mise en évidence du sens modal de la négation paraconsistante, ou, inversement, du sens paraconsistant du système S5, et enfin, à l'idée que ce qu'on appelle traditionnellement, depuis la formalisation médiévale de la logique aristotélicienne, le "carré des oppositions", aurait avantage à être remplacé par un hexagone, comme l'avait jadis proposé le logicien français Robert Blanché (voir [Béziau et al. 12] ; [Blanché 66]). D'où une série de colloques sur le sujet.

Si on note maintenant $\neg^*$ A la "négation forte" de A, avec :

$$\neg^* A =_{\text{déf}} \neg A \wedge A^\circ,$$

on peut montrer que $\neg^*$ a toutes les propriétés de la négation classique du calcul des propositions C_0, et que C_1 est consistant et finiment trivialisable, puisque toute formule du type :

$$A \wedge \neg^* A,$$

trivialise C_1 (voir [Da Costa 74], 500).

On généralise aisément le calcul précédent à $C_n (1 \leq n \leq \omega)$ en introduisant des formules du type $A^{\circ\circ\ldots\circ}$, où le symbole $\circ$ apparait m fois $(m \geq 1)$ avec les abréviations :

$$A^{\circ\circ\ldots\circ}(\text{m fois}) = A^m;$$

$$A^1 \wedge A^2 \wedge ... \wedge A^m = A^{(m)}.$$

On a, en particulier :

$$A^\circ = \neg(A \wedge \neg A).$$

D'où :

$$A^{\circ\circ} = A^2 = \neg(A^\circ \wedge \neg A^\circ) = \neg\{\neg(A \wedge \neg A) \wedge \neg[\neg(A \wedge \neg A)]\}.$$

Mais, la table de la négation est telle que :

$$\neg[\neg(A \wedge \neg A)) = A \wedge \neg A.$$

D'où :

$$A^{\circ\circ} == \neg(\neg(A \wedge \neg A) \wedge (A \wedge \neg A)).$$

On vérifie que cette formule, qui exprime l'impossibilité de penser ensemble le principe de non-contradiction et sa négation, est une thèse du système.

À partir de C_1, Da Costa construit ainsi une stratification infinie de calculs dont chacun est plus fort que celui qui le suit. C_1 peut être dit ainsi le calcul le plus fort de tous, au sens où, en lui, le degré d'intégration de la négation (et donc de tolérance des contradictions internes) est le plus faible. Si ces calculs s'appliquent à des théories, celles-ci seront de plus en plus inconsistantes, au fur et à mesure qu'on s'éloigne de C_1 pour aller vers C_ω.

Comme le montre D. Marconi, on peut encore se représenter la situation de la façon suivante : "nous dirons que le monde, en tant qu'il est décrit par un langage

auquel appartient une certaine formule A, présente une singularité de niveau n en A (selon une certaine théorie) s'il est vrai (dans cette théorie) que $A \wedge \neg^{(n)} A$" (voir [Marconi 79], 53) Par exemple, on dira que le monde présente une singularité de niveau 1 s'il est vrai que :

$$(A \wedge \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A).$$

L'expression, précise Marconi, est employée pour désigner un état de choses qui viole le principe de non-contradiction. Seulement, cela peut arriver à différents niveaux. "Nous dirons qu'une théorie ou un système logique est compatible avec une singularité de niveau inférieur ou égal à n si elle n'est pas trivialisée par $A \wedge \neg^{(n)} A$. Les hiérarchies de Da Costa sont telles que si S_n est au n-ième rang de la hiérarchie, alors, S_n est compatible avec une singularité de niveau $n-1$; S_ω est compatible avec une singularité de n'importe quel niveau"(voir [Marconi 79], 53).

Les calculs C_n permettent donc de formaliser toute situation où l'on rencontre des contradictions indépassables : dualité onde-corpuscule en physique, dilemmes psychologiques ou moraux, situations économiques, politiques ou sociales conflictuelles.

Les calculs C_n^*, (resp. $C_n^=$)$1 \ \leq n \leq \omega$, se présentent avec les mêmes axiomes que C_n, augmentés des schémas d'axiomes suivants :

(I) $\frac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)}$ (II) $\forall x A(x) \supset A(t)$

(III) $A(t) \supset \exists x A(x)$ (IV) $\frac{A(x) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$

(V) $\forall x (A(x))^{(n)} \supset (\forall x A(x))^{(n)}$;

(VI) $\forall x (A(x))^{(n)} \supset (\exists x A(x))^{(n)}$.

(VII) $A \equiv B$ est un schéma d'axiomes si A et B sont des formules congrues au sens de Kleene (voir [Kleene 71], 88) [6] ou obtenues l'une de l'autre par élimination des quantificateurs vides.

Les schémas d'axiomes de C_ω^* sont ceux de C_ω (c'est à dire les axiomes 1-11 de C_1) augmentés des axiomes ci-dessus.

Les axiomes de $\overset{=}{C}_n$ sont ceux de C_n^* augmentés des suivants :

(I$^=$) $x = x$ (II$^=$) $x = y \Rightarrow (A(x) \Rightarrow A(y))$

6. Des formules sont congrues si l'effacement des occurrences liées des variables donne la même expression.

Naturellement, les théorèmes de C_1 s'appliquent dans $C_n, C_n^=, C_n^*$.

Les calculs C_n, d'une manière générale, ont pour principale application l'examen des paradoxes ensemblistes. Examinons informellement, avec Da Costa, le paradoxe du menteur. Dans un langage intuitif $\mathcal{L}_n$, fondé sur $C_n, 0 \leq n \leq \omega$, on suppose qu'il est possible de parler de propositions comme dans le langage ordinaire. C'est dire que le langage évoqué doit être assez puissant. Soit $n = 1$ et la formulation suivante du paradoxe du menteur :

(α) "Cette proposition implique sa propre négation".

En raisonnant comme dans le cas classique (où la logique sous-jacente serait C_0 et non pas C_1), il vient :

$$\vdash \alpha \wedge \neg\alpha.$$

Mais comme $A \wedge A \supset B, \neg A \supset (A \supset B)$, etc., ne sont pas des schémas valides de C_1, on ne peut pas déduire n'importe quelle formule de cette contradiction, laquelle n'amène aucune difficulté dans $\mathcal{L}_1$. On a donc une situation analogue à celle du système de Jaśkowski. La différence apparaît dans le fait qu'on peut faire surgir ici une forme plus forte du paradoxe du menteur. Soit :

(β) "Cette proposition implique sa négation forte",

dont on déduit, comme dans le cas classique :

$$\vdash \beta \wedge \neg^*\beta.$$

Dans ce dernier cas, comme $\vdash A \wedge \neg^* A \supset B$ est une thèse de C_1, nous avons une réelle antinomie qui trivialise $\mathcal{L}_1$. Mais nous pouvons supposer que β sera alors admissible dans $\mathcal{L}_2$ qui, lui, n'admettra pas γ , forme encore plus forte du paradoxe, etc. Autrement dit, à chaque $\mathcal{L}_n, 0 \leq n \leq \omega$, correspond une certaine formulation du paradoxe du menteur qui le rend trivial, ce qui n'est pas vrai de $\mathcal{L}_\omega$. De là l'idée que, comme l'écrit Da Costa, "dans les langages de la catégorie $\mathcal{L}_n, 0 \leq n \leq \omega$, certaines limitations sur l'autoréférence doivent être imposées" (voir [Da Costa 74], 505) sans qu'on ait, pour autant, à éliminer tous les énoncés autoréférentiels.

Les systèmes NF_n ne font que traduire cette situation sur un plan plus formel, en permettant de construire toute une hiérarchie de théories des ensembles dont la logique sous-jacente est le calcul $C_n^=$, avec, pour unique symbole spécifique, le symbole d'appartenance ($\in$), et pour nouveaux axiomes l'axiome d'extensionalité et le schéma de séparation.

Le paradoxe de Russell, par exemple, qui s'écrit :

$$(\mathrm{R}_0) \qquad \exists x(x \notin x) \text{ dans } \mathrm{NF}_0,$$

devient plus généralement :

$$(\mathrm{R}_n) \qquad \exists x(x \notin x \wedge (x \in x)^n) \qquad 1 \leq n \leq \omega, \text{ dans } \mathrm{NF}_n.$$

R_n trivialisant le système NF_n ne peut être accepté que dans un système NF_m plus large ($m > n$).

Tels sont donc les principaux résultats de la logique paraconsistante de Da Costa, dont il existe des interprétations algébriques, différentes variantes ou extensions, des versions modales, et quelques systèmes duals sur lesquels il est inutile de s'attarder ici. Incontestablement, le beau travail du logicien brésilien développe et généralise les intuitions profondes de Jaśkowski, clarifiant la notion de négation comme celle de paradoxe.

5 Quelques autres systèmes paraconsistants

Nous ne dirons rien ici de calculs comme ceux d'Asenjo et Tamburino (voir [Asenjo et al. 75]), dont la généralité nous parait moindre que celle des systèmes de Da Costa, non plus que de logiques déviantes telles que la logique de l'inconsistance de N. Rescher et R. Brandom(voir [Rescher et al. 79]) ou la logique de la pertinence de Routley et Meyer (voir [Routley et al. 76]), qui sont aujourd'hui un peu passées de mode. Quelques autres contributions de moindre importance à l'étude des logiques paraconsistantes ont été également proposées par d'Ottaviano (en collaboration avec Da Costa), Sette, Thomason et Priest) – tentatives dont on trouve une recension rapide dans l'ouvrage de D. Marconi (voir [Marconi 79]). Une bibliographie plus abondante jusque dans les années 1980 se trouve à la fin de l'article d'Arruda (voir [Arruda 80]). Des références plus récentes se trouvent encore dans [Béziau et al. 07]).

Celui-ci propose, au terme de son parcours, une classification sommaire des logiques paraconsistantes, que l'on peut éventuellement retenir. Celles-ci se différencient en :

a) Faiblement paraconsistantes : la règle $A, \neg A/B$, disparaît.

b) Fortement paraconsistantes : la règle $A \wedge \neg A/B$, disparaît.

c) Paraconsistantes quant aux thèses : la formule $(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$ n'y est pas une thèse.

Des classifications plus techniques tenant compte notamment du nombre d'inconsistances d'une théorie ont été proposées par J. Grant (voir [Grant 78]), mais on est loin de posséder, à l'heure actuelle, un traitement unifié des logiques paraconsistantes. En particulier, il n'existe pas, à notre connaissance, d'interprétation algébrique générale de ces logiques, qui soit comparable à celle que Rasiowa et Sikorski ont construite pour les logiques classiques et intuitionnistes.

Hétérogénéité et contradiction : considérations philosophiques. Le but des logiques paraconsistantes, nous l'avons dit, est d'arriver à penser des théories contradictoires, autrement dit, des théories dans lesquelles il soit possible de déduire comme des thèses du système une assertion et sa négation, sans que, pour autant, le système ne s'effondre. Trois solutions apparaissent finalement possibles :

a) Une action indirecte sur un foncteur autre que la négation : Jaśkowski, d'une part, Routley et Meyer de l'autre, procèdent à une redéfinition du foncteur d'implication (implication discursive d'un côté, pertinente de l'autre). Asenjo et Tamburino définissent un mode particulier d'équivalence.

b) Une action directe sur la négation elle-même : Da Costa dialectise le concept classique de la négation qui éclate en négation faible (et donc tolérable par les systèmes) et négation forte (trivialisante).

c) Une distinction drastique entre deux zones d'assertions ou mondes possibles, lesquels, accolés ensemble, amènent des singularités paradoxales analogues à celles qui apparaissent en géométrie lors du plongement de certaines surface (ruban de Möbius, Tore de Klein, etc.) dans l'espace ordinaire.

Les deux premiers moyens sont syntaxiques. Le dernier sémantique. Deux problèmes philosophiques nous paraissent alors se poser :

1° Les constructions syntaxiques de nouveaux foncteurs (implications déviantes, négations faibles, etc.), qui amènent des logiques , peuvent revenir, comme le dit Quine, à "changer le sujet". On se borne donc à redéfinir les termes, continuant d'appeler "implication", "équivalence" ou "négation", ce qui, fondamentalement, ne l'est plus (voir [Quine 69], 124-125). Dans quelle mesure a-t-on vraiment créé des logiques à part entière ?

2°) En ce qui concerne les constructions sémantiques, la contradiction se trouve signifiée par le rassemblement de zones d'assertions (ou mondes) différentes. En ce sens,

elle est rapportée à l'hétérogénéité, qui apparaît être ici une notion plus fondamentale.

Nous sommes donc confrontés, en définitive, à un état de fait et à des choix :

- D'une part, la logique étant celle dans laquelle on peut parler non seulement du non-standard mais de tout le reste, n'apparaît pas comme une logique tout à fait comme les autres. Elle reste la base de tous nos raisonnements, et se trouve sous-jacente à toutes nos évaluations.

- D'autre part, le choix de représentation de la contradiction dépendra visiblement des applications. Selon ce qu'on vise à formaliser, sa représentation formelle pourra très fortement varier.

6 Problème de décidabilité et nouvelle forme de valuation

Le mot "vérifonctionnel", en logique, signifiait initialement "qui obéit à une table de vérité". En ce sens, la sémantique trivalente de Łukasiewicz où la variante utilisée par da Costa peuvent être jugées "vérifonctionnelles". Cependant, les logiciens ont pris l'habitude de dire qu'une négation est "vérifonctionnelle" lorsqu'elle oppose contradictoirement le vrai et le faux. En ce second sens, par conséquent, la négation paraconsistante de da Costa n'est pas vérifonctionnelle. Du coup, en en restant à une sémantique trivalente, on ne peut pas juger si le calcul est ou non décidable, ni s'il est ou non complet [7]. Ce qu'on sait de façon certaine est exprimé dans le théorème 6.1 :

Théorème 6.1. *Les systèmes $C_n, 1 \leq n \leq \omega$, ne sont pas décidables par des matrices finies.*

On prouve aussi le théorème suivant :

Théorème 6.2. *Soit A une formule de C_0 et A^* la formule obtenue à partir de A en remplaçant la négation faible $\neg$ par la négation forte $\neg^*$. Si $\vdash A$ dans C_0, alors $\vdash A^*$ dans $C_n, 1 \leq n \leq \omega$.*

7. Rappelons qu'une théorie T est *cohérente* (ou *consistante*) s'il n'existe pas de formule close ϕ telle que $\phi \in T$ et $\neg phi \in T$. Une théorie T est *complète* si, pour toute formules close $\phi, \phi \in T$ ou $\neg\phi \in T$. Enfin, une théorie T est *décidable* s'il existe un algorithme qui prend en entrée des formules closes ϕ et répond si oui ou non $\phi \in T$.

Un des systèmes logiques paraconsistants les plus célèbres est celui connu sous le signe LP (abréviation de "Logique du Paradoxe" – en anglais «Logic of paradox»). Proposé initialement par le logicien argentin F. G. Asenjo en 1966 (voir [Asenjo 66]), ce calcul a été popularisé par Priest et al. (voir [Priest 79] ; [Priest and al. 89]). LP est probablement l'un des premiers calculs à dépasser les défauts de vérifonctionalité de la négation et l'absence de décidabilité en remplaçant la valuation fonctionnelle de la logique classique par une valuation dite "relationnelle" [8]. C'est ce que font da Costa et Alves dans [Da Costa et Al. 77], introduisant la valuation suivante : F étant un ensemble de formules bien formées de $C_n, 1 \leq n \leq \omega$, une valuation de C_n est une fonction $\theta : F \to \{0, 1\}$ telle que :

1) Si $\theta(A) = 0$, alors $\theta(\neg A) = 1$;

2) Si $\theta(\neg\neg A) = 1$, alors $\theta(A) = 1$;

3) Si $\theta(B^{(n)}) = \theta(A \supset B) = \theta(A \supset \neg B) = 1$, alors $\theta(A) = 0$;

4) $\theta(A \supset B) = 0$ si et seulement si $\theta(A) = 1$ et $\theta(B) = 0$;

5) $\theta(A \wedge B) = 1$ si et seulement si $\theta(A) = \theta(B) = 1$;

6) $\theta(A \vee B) = 1$ si et seulement si $\theta(A) = 1$ ou $\theta(B) = 1$;

7) Si $\theta(A^{(n)}) = \theta(B^{(n)}) = 1$, alors $\theta((A \supset B)^{(n)}) = \theta((A \wedge B)^{(n)})$
$= \theta((A \vee B)^{(n)}) = 1.$

On arrive donc à partir de là à la notion de modèle, à une parfaite correspondance syntaxe-sémantique, et donc, à la décidabilité.

Définition 6.1. Une valuation θ est un *modèle* d'un ensemble de formules Γ si et seulement si $\theta(A) = 1$ pour toute formule A de Γ. $\vDash A$ signifie que $\theta(A) = 1$ dans toute valuation θqui est un modè !le de Γ.

8. On introduit pour cela une relation binaire V qui fait correspondre une formule à une valeur de vérité, avec les conventions suivantes : $V(A, 1)$ signifie que A est vraie, et $V(A, 0)$, signifie que A est fausse. Une formule doit être associée au moins à une valeur de vérité 0 ou 1, mais elle peut-être aussi associée à ces deux valeurs). Les clauses sémantiques de la négation et de la disjonction sont alors définie comme suit :
$V(\neg A, 1)$ si et seulement si $V(A, 0)$;
$V(\neg A, 0)$ si seulement si $V(A, 1)$;
$V(A \vee B, 1)$ si seulement si $V(A, 1)$ ou $V(B, 1)$;
$V(A \vee B, 0)$ si seulement si $V(A, 0)$ et $V(B, 0)$;
$V(A \wedge B, 1)$ si seulement si $V(A, 1)$ et $V(B, 1)$;
$V(A \wedge B, 0)$ si seulement si $V(A, 0)$ ou $V(B, 0)$.

D'où les théorèmes suivants :

Théorème 6.3. $\Gamma \vdash A$ *si et seulement si* $\Gamma \vDash A,\ 1 \leq n \leq \omega$.

Théorème 6.4. $C_n,\ 1\ \leq n \leq \omega$, *est décidable.*

Donnons un exemple d'évaluation bivalente montrant que le schéma d'axiome suivant n'est pas valide dans C_1 :

$$F =: ((A \wedge A \wedge (A \supset B)) \supset (\neg A \supset \neg B).$$

La méthode consiste à écrire d'abord les différentes formules composantes, comme pour une table de vérité classique, puis à les évaluer ainsi que la formule générale, selon les règles définies plus haut. Ici, on a ;

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$A \supset B$	$\neg A \supset \neg B$
0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1

L'évaluation de F se fait, à partir de là, comme d'habitude, excepté qu'on se borne à évaluer la formule d'après les règles explicites précédemment exposées, de sorte qu'il suffit ici d'une ligne pour prouver la non-validité de la formule :

$((A \wedge \neg A)$	$\wedge$	$(A \supset B))$	$\supset$	$(\neg A \supset \neg B)$
1	1	1	0	0

7 Une variante des systèmes de da Costa

On fera la remarque suivante : les calculs C_n de da Costa rejettent les lois L et L'. En revanche, on peut montrer que L" est bel et bien une thèse de C_1. Posons :

$$(L") \qquad A \supset (\neg A \supset \neg(\neg\neg A \supset B))$$

en appliquant les lois du conditionnel et de la négation définies dans les matrices trivalentes de Da Costa (voir section 4), on prouve très facilement que (L") est une tautologie de C_1.

A	$\supset$	$(\neg A$	$\supset$	$(\neg\neg A$	$\supset$	$B)$
1	**1**	3	1	1	1	1
1	**1**	3	1	1	1	2
1	**1**	3	1	1	3	3
2	**1**	1	1	3	1	1
2	**1**	1	1	3	1	2
2	**1**	1	1	3	1	3
3	**1**	1	1	3	1	2
3	**1**	1	1	3	1	2
3	**1**	1	1	3	1	3

Dès lors, en supposant l'existence de trois thèses contradictoires $A, \neg A$ et $\neg\neg A$ et en faisant jouer la loi (L"), puisque $\vdash A \supset (\neg A \neg(\neg\neg A \supset B))$, on montre que le système se trivialise et permet de déduire n'importe quelle thèse B. On a :

(1) A

(2) $\neg A$

(3) $\neg\neg A$

(4) $A \supset (\neg A \neg(\neg\neg A \supset B))$ (tautologie)

(5) $\neg A \neg(\neg\neg A \supset B)$ (4), mod. pon.

(6) $\neg\neg A \supset B$ (5), mod. pon.

(7) B (6), mod. pon.

On se retrouve donc en-deça du système $D2$ de Jaskowski et dans la même situation que dans le système de Łukasiewicz étudié plus haut. Nous proposons donc le système alternatif suivant, où les matrices de la conjonction et du conditionnel sont un peu différentes des précédentes :

$A \wedge B$ $_A{}^B$	1	2	3
1	1	1	3
2	1	2	3
3	3	3	3

$A \vee B$ $_A{}^B$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	3

$A \supset B$	$_A{}^B$	1	2	3
	1	1	2	3
	2	1	3	3
	3	1	2	1

$\neg A$	A
1	3
2	1
3	1

1 et 2 restent les valeurs de vérité désignées.

Première remarque : Dans un tel système, comme la négation est la même que dans le système de da Costa, et que la conjonction est telle que $2 \wedge 1 = 1$, le principe de non-contradiction est faux, comme on peut facilement s'en apercevoir.

$\neg$	A	$\wedge$	$\neg A$
1	1	3	3
3	2	1	1
1	3	1	1

Dès lors, on a la même définition pour la négation forte :

$$\neg^* A =_{\text{déf}} \neg A \wedge A^\circ = \neg A \wedge \neg(A \wedge \neg A),$$

et toutes les formules où ne figurent que A, sa négation $\neg A$ ou A° ont même table de vérité que dans le système de da Costa.

Deuxième remarque : Dans le présent système, comme dans le système de da Costa, certaines lois essentielles du Calcul des Propositions classiques tiennent. C'est le cas, par exemple, du modus ponens. En revanche, les lois L, L' et L" ne sont pas valides. Le prix à payer pour cela est l'exclusion de certaines formules valides dans le système de da Costa. Ainsi, la formule suivante, comme on peut le voir, n'est pas valide dans notre système :

$(\neg A$	$\supset$	$A)$	$\supset$	A
3	1	1	1	1
1	2	2	3	2
1	3	3	1	3

Outre les lois L, L' et L", le système rejette les schémas suivants, qui sont non valides :

$\neg A \supset (A \supset B), \neg A \supset (A \supset \neg B), A \wedge (\neg A \supset B), A \wedge (\neg A \supset \neg B),$

$(A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset \neg A)$,

$A \supset \neg\neg A, A \equiv \neg A, A \equiv \neg\neg A$,

$(A \equiv \neg A) \supset B, (A \equiv \neg A)) \supset \neg B$,

$(A \vee B) \wedge (\neg A \supset B), (A \vee B) \supset (\neg A \supset B)$

$(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$.

En revanche, les lois suivantes sont valides :

$\vdash B^\circ \wedge (A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$,

$\vdash B^\circ \wedge (A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg A)$,

$\vdash B^\circ \wedge (\neg A \supset B) \supset (\neg B \supset A)$,

$\vdash B^\circ \wedge (\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$,

$\vdash (A \supset \neg A) \supset \neg A$;

$\vdash (\neg A)^\circ = \neg[(\neg A) \wedge \neg(\neg A)] = \neg(\neg A \wedge \neg\neg A)$,

$\vdash \neg A \wedge \neg\neg A$,

$\vdash A^\circ \supset (\neg A)^\circ$,

$\vdash A^\circ \wedge B^\circ \supset (A \wedge B)^\circ$,

$\vdash A^\circ \wedge B^\circ \supset (A \vee B)^\circ$,

$\vdash A^\circ \wedge B^\circ \supset (A \supset B)^\circ$.

Parmi les axiomes, les formules suivantes sont non-valides :

$$(A \supset (B \supset (A \wedge B)).$$

On pourrait éventuellement le remplacer par :

$$\vdash (A \supset (\neg B \supset (A \wedge \neg B)).$$

D'autres axiomes sont non valides comme :

$A \supset (B \supset A), (A \wedge B) \supset A, (A \wedge B) \supset B$;

$A \supset (B \supset (A \wedge B))$;

$(A \supset B) \supset [(A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)]$.

$(A \supset C) \supset [(B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)]$.

N.B. Les schémas d'axiomes de Da Costa contenant trois variables (A, B et C) sont lourds à évaluer dans une sémantique trivalente (il faut écrire 27 lignes). Mais on peut utiliser ici avec profit la sémantique bivalente de Da Costa et Alves, avec les règles exposées plus haut. On prouve ainsi la non-validité des axiomes (2) et (9) de Da Costa dans notre système.

En revanche, les axiomes suivants restent valides :

$A \vee \neg A, \neg\neg A \supset A, A \supset (A \vee B), B \supset (A \vee B)$,

$B^\circ \supset [(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)]$.

8 Réflexion philosophique

G.-G. Granger, dans l'ouvrage intitulé *L'irrationnel*, consacre presque un chapitre entier à l'analyse de la logique paraconsistante de N. Da Costa. Ce livre, censé être écrit dans l'esprit d'un rationalisme ouvert et dynamique, entendant en principe reconnaître un rôle positif à l'irrationnel, semble surtout occupé à en critiquer l'irruption dans la science et à en limiter la portée.

Dans le cas des logiques paraconsistantes, Granger ne semble guère convaincu par les justifications évoquées par N. Da Costa. Il conteste en outre que Łukasiewicz soit un précurseur et n'accorde ce statut à Jaskowski que du bout des lèvres, manière sans doute d'isoler N. Da Costa et d'affaiblir la portée de ce type de logique.

La fin du chapitre, qui examine les applications possibles de la logique paraconsistante, est tout aussi critique : l'idée de s'en servir pour traiter les paradoxes formels et de leur trouver des solutions positives est, en particulier, mise à mal. Granger conteste – ce que Bachelard, jadis, admettait [9] – qu'on puisse réviser une théorie

9. Ce passage de *La philosophie du non* est bien connu : "Destouches répète souvent : si l'arithmétique, dans de lointains développements, se révélait contradictoire, on réformerait la raison pour effacer la contradiction, et l'on garderait intacte l'arithmétique. L'arithmétique a fait des preuves d'efficience, d'exactitude, de cohérence si nombreuses qu'on ne peut songer à abandonner son organisation. Devant une contradiction soudaine, ou plus exactement devant la nécessité soudaine d'un usage contradictoire de l'arithmétique se poserait le problème d'une non-arithmétique, d'une panarithmétique, c'est-à-dire d'un prolongement dialectique des intuitions du nombre qui permettrait d'englober la doctrine classique et la doctrine nouvelle (voir [Bachelard 66], 145).

en changeant la raison, c'est-à-dire, plus précisément, en modifiant les règles et les axiomes du raisonnement.

On sait que les audaces de Bachelard coïncident avec une époque de grandes transformations de la science, en particulier celles apportées par la mécanique quantique, sans doute une des inspirations aussi de N. Da Costa. Mais Granger conteste, justement, ce rapprochement : "Un tel changement de perspective concernant le processus même de connaissance a bien été déjà proposé en mécanique quantique. Mais l'analogie est trompeuse. Ce que propose la logique quantique, c'est en réalité une théorie fondamentale de l'*objet physique quantique* plutôt qu'un mode radicalement nouveau d'enchaîner les propositions, qui n'en est que la conséquence apparente. Au contraire, la logique paraconsistante est bien une *logique*, une théorie du raisonnement, ou, si l'on préfère, de *l'objet en général* et non pas, fût-ce à un niveau très abstrait, de telle *espèce d'objet*" (voir [Granger 98], 168).

La distinction faite par Granger, à notre avis, est spécieuse. Bachelard voyait au contraire un lien patent entre les logiques non-aristotéliciennes, la physique non-newtonienne et la mécanique non-maxwellienne. Chaque fois, une négation, qui avait en même temps le sens d'une généralisation, ouvrait la raison à une surraison. Il s'attendait tellement à cet abandon des principes de la science et de la rationalité classiques qu'il avait été presque déçu, face au problème posé, dans les années 1920, par le rayonnement β, quand les physiciens avaient refuser d'adopter la théorie BKS de Bohr, Kramers et Slater, remettant en question le principe de conservation de l'énergie (voir [Parrochia 05]) [10].

Granger, ici, s'avère donc être plutôt le défenseur d'une raison très classique : dans la suite du texte, il se borne à tolérer l'existence des logiques paraconsistantes à titre de simple "outil de manipulation des propositions d'une théorie" (voir [Granger 98], 168), susceptible de "domestiquer" l'irrationnel, soit à l'intérieur d'un domaine abstrait comme celui de la théorie des ensembles, soit dans les formes de la pensée commune. Mais la possibilité d'étudier les propriétés d'ensembles pathologiques (style ensemble de Russell), tout comme celle de vérifier la non contradiction du système classique par la non trivialité du système paraconsistant surjacent semblent à Granger assez peu convaincante : "Il est permis de douter – écrit-il – au moins jus-

10. La continuité du spectre du rayonnement β, qui s'opposait à la discontinuité des autres, semblait suggérer, soit que l'énergie n'était pas conservée, soit que les émissions de plusieurs particules se superposaient. C'est cette seconde explication qui a finalement été retenue. À l'époque, Pauli avait plaidé, contre Bohr, pour le maintien du principe de conservation de l'énergie et l'introduction d'une nouvelle particule, le neutrino, qui n'a d'ailleurs cessé de poser des problèmes depuis. Il avait eu gain de cause.

qu'à plus ample informé, de la fécondité mathématique de la nouvelle théorie" (voir [Granger 98], 169-170). Du côté de la pensée commune, ou de la recherche scientifique en train de se faire, la parconsistance pourrait avoir pour effet de modéliser des raisonnements provisoires ou de servir de garde-fou contre l'application de schémas interdits (comme le raisonnement par l'absurde ou l'implication $A \supset \neg\neg A$ à propos de vérités seulement pragmatiques (quasi-vérités et non vérités à part entière). Finalement, c'est surtout dans le domaine des croyances que Granger voit le principal intérêt de la logique paraconsistante. Le principal exemple qu'il en donne laisse cependant un malaise :la formalisation par Da Costa, Bueno et Frenchj (voir [Da Costa et Al. 98]) de la pensée d'une ethnie soudanaise (les Zande ou Azande), telle que rapportée par E. Evans-Pritchard (voir [Evans-Pritchard 37]). Considérons les propositions suivantes :

1. Les sorciers, et eux seuls, possèdent une "substance sorcière".

2. La "substance sorcière" s'hérite en ligne de même sexe.

3. Le clan Zande est agnatique[11].

4. L'homme x, du clan Zande, est un sorcier.

5. Tout homme du clan Zande est un sorcier.

Il semble que les Zandes acceptent les propositions 1 à 4, mais refusent la proposition 5 qui, normalement, d'après les lois de la logique classique, en découlerait. Da Costa et ses co-auteurs en ont donc conclu qu'une logique paraconsistante devait être sous-jacente à la pensée des Zandes, laquelle admettrait des propositions contradictoires sans pour autant se trivialiser. "Mais les documents ethnologiques sur lesquels repose la formulation des cinq énoncés précédents, objecte Granger, est assez incertaine" (voir [Granger 98], 174) et il est possible que la logique Zande soit plus près du "vague" que de la paraconsistance (il semble que la "substance sorcière" se transmette surtout aux proches). Tout en reconnaissant que "l'idée d'une organisation paraconsistante de la pensée "naturelle" dans son rapport à des environnements culturels divers demeure intéressante et assez vraisemblablement féconde" (voir [Granger 98], 174), Granger ne cesse de restreindre la portée d'une telle logique, signalant par exemple en note que ses applications dans certains domaines, comme, par exemple la médecine, sont "assez peu convaincantes". Au moment même où il la récuse, il n'en remarque pas moins un point où la logique paraconsistante sert la pensée classique : ainsi, dans le cas où deux médecins, en désaccord sur le diagnostic de cancer d'un patient, s'accordent pour conclure que, s'il a vraiment un

11. Autrement dit, la filiation se fait par les mâles.

cancer, il mourra dans les trois mois, il note, avec les auteurs, que la présence d'une contradiction ne permet pas de déduire dans C_1 une conséquence qui serait invalide en logique classique (voir [Granger 98], 174 ; [Da Costa et Al. 95]). Ainsi, pas question de conclure que, si le patient n'a pas de cancer, il ne mourra pas dans les trois mois ! Autrement dit, l'introduction de la paraconsistance ne trouve grâce auprès de Granger que si elle sert les intérêts de la raison classique. C'est évidemment une interprétation très restrictive de cette logique [12].

Les conclusions de Granger à la fin de son article, peuvent alors se résumer comme suit :

1. La paraconsistance comme recours à l'irrationnel permet – selon son créateur, N. Da Costa – de "donner forme à des procédures de pensée incomplètement ou imparfaitement soumises aux règles de la logique ordinaire, mais dont on ne saurait pourtant nier ni l'existence ni la relative fécondité" ;

2. Les procédures ainsi codifiées doivent être considérées comme provisoires, quoiqu'elles puissent peut-être servir de schème formel à une description empirique de certains *faits* de connaissance, ce qui relève de la psychologie cognitive.

3. La pensée qui codifie cette logique est faiblement contradictoire et l'introduction de l'irrationnel qu'elle opère est donc limitée.

4. En ce sens, l'exigence de non-trivialité (que Granger rapproche de la réfutabilité popperienne) confirme plutôt la nature incontournable de la rationalité (sous entendu : ordinaire ou même classique).

L'auteur termine sur Wittgenstein qui oscille entre une dénégation totale de la réalité des contradictions et leur réduction aux règles d'un "nouveau jeu", pas forcément intéressant et qui, de toute façon, ne saurait justifier l'élaboration d'une logique particulière dédiée.

Au bilan, il ne semble pas que Granger ait perçu tout l'intérêt des logiques paraconsistantes, et notamment celui de permettre, dans le domaine mathématique, la formulation de théories très difficiles à justifier sans faire appel à ces systèmes, comme, par exemple, une théorie des ensembles circulaires à la manière de Finsler (voir [Finsler 26] ; [Finsler 63] et, pour une présentation et un commentaire, [Booth-Ziegler 96]) ou d'Aczel (voir [Aczel 88]), ou encore, une théorie générale des

12. C'est un point de vue tout différent que défendent, par exemple, Walter A. Carnielli and João Marcos qui estiment que non seulement on ne peut raisonner sans contradiction mais que, de plus, l'existence de contradictions est créative du point de vue de la pensée pure (voir [Carnielli et al. 00]).

classifications où l'on puisse parler de classes de classes ou de classifications de classifications (voir [Parrochia 13]). Pour toutes ces raisons, nous pensons que la logique paraconsistante a d'autres intérêts que la formulation de contradictions provisoires ou de raisonnements soi-disant "primitifs" ou "pré-rationnels" (dont la dénomination même nous paraît renvoyer à une époque de l'ethnologie aujourd'hui révolue).

Références

[Aczel 88] Aczel, P., *Non well founded sets*, Center for study of Language and information, Stanford, 1988.

[Aristote 53] Aristote, *Métaphysique*, tr. fr. J. Tricot, Vrin, Paris, 1953.

[Aristote 96] Aristote, *Organon, tome 4 : Les Seconds analytiques*, tr. fr. J. Tricot, Vrin, Paris, 1996.

[Arruda 80] Arruda, A. I., "A survey of paraconsistent logic", in Arruda, A.I I., Chuaqui, N. Da Costa, N. C. A., *Mathematical logic in latin America*, North Holland, Amsterdam, 1980.

[Asenjo 66] Asenjo, F. G., "A Calculus for Antinomies", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 16, 1,103-105, 1966.

[Asenjo et al. 75] Asenjo, F. G., "Logic of Antinomies", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 16, 1, 17-44, 1975.

[Bachelard 66] Bachelard, G., *La philosophie du non* (1940), rééd. P.U.F., Paris, 1966.

[Béziau 06[1]] Béziau,J.-Y., "Paraconsistent logic! (A reply to Salter)", *Sorites* 17, 17-26, 2006.

[Béziau 06[2]] Béziau, J.-Y., "The paraconsistent logic Z – a possible solution to Jaskowski's problem", *Logic and Logical Philosophy*, Volume 15, 99-111, 2006.

[Béziau et al. 07] Bézieau, J.-Y., Carnielli, W., Gabbay D., *Handbook of Paraconsistency*, College publications, London, 2007.

[Béziau et al. 12] Béziau, J. Y., "The new rising of the square of opposition", in Bésiau, J. Y. and Jacquette, D., *Around and Beyond the square of opposition*, 3-19, Birkäuser, Basel, 2012.

[Blanché 66] Blanché, R., *Les structures intellectuelles, essai sur l'organisation systématique des concepts* , Vrin, Paris, 1966.

[Booth-Ziegler 96] Booth, D., Ziegler, R., *Finsler Set Theory : Platonism and Circularity, translation of Paul Finsler's papers on set theory with introductory comments*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1996.

[Carnielli et al. 00] Carnielli W. A. and Marcos J., "Ex Contradictione Non Sequitur Quodlibet", *Proceedings of the II Annual Conference on Reasoning and Logic*, 89-109, held in Bucharest, RO, July 2000.

[Da Costa 74] Da Costa, N. C. A., "On the theory of inconsistent formal systems", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XV, 3, 443-454, 1974.

[Da Costa et Al. 77] Da Costa, N. C. A., Alves H., "A semantical analysis of the calculi C_n", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XVIII, 621-630, 1977.

[Da Costa et Al. 95] Da Costa, N. C. A., Béziau, J.-Y., Bueno, O. A. S., "Aspects of Paraconsistent Logic", *Logic Journal of the IGPL* 3 (4), 597-614, 1995.

[Da Costa, N. C. A.] *Logiques classiques et non classiques, essai sur les fondements de la logique*, tr. fr. J.-Y. Béziau, Masson, Paris, 1997.

[Da Costa et Al. 98] Da Costa, N. C. A., Bueno, O. A. B., and French, S., "Is There a Zande Logic ?" *History and Philosophy of Logic* 19, 41-54, 1998.

[Evans-Pritchard 37] Evans-Pritchard, E., *Witchcraft, Oracles and Magic among the Azande*, Oxford University Press, Oxford, 1937, rééd. 1996.

[Finsler 26] Finsler, P., "Über die Grundlagen der Mengenlehre. I : Die Mengen und ihre Axiome", *Math. Z.*, 25, 683-713, 1926.

[Finsler 63] Finsler, P., "Totalendliche Mengen", *Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 108, 141-152, 1963.

[Granger 76] Granger, G.-G., *La théorie aristotélicienne de la science*, Aubien-Montaigne, Paris, 1976.

[Granger 98] Granger, G.-G., *L'irrationnel*, O. Jacob, Paris, 1998.

[Grant 78] Grant J., "Classification for inconsistent theories", *Notre dame Journal of Formal logic*, XIX, 435-44, 1978

[Jaśkowski 69] Jaśkowski, S., "Propositional Calculus for contradictory deductive system", *Studia Logica*, XXIV, 143-157, 1969.

[Kleene 71] Kleene, S. C., *Logique mathématique*, tr. fr. A. Colin, Paris, 1971.

[Łukasiewicz 71] Łukasiewicz, J., "On the principle of contradiction in Aristotle", *Review of Metaphysics*, XXIV, 3, 485-509, 1971.

[Marconi 79] Marconi, D., *La Formalizzatione della dialettica, Hegel, Marx e la logica contaporanea*, Rosenberg et Sellier, Turin, 1979.

[Parrochia 05] Parrochia, D., «Rationnel, irrationnel, surrationnel en physique quantique à l'époque de Bachelard», in R. Damien, B. Hufschmitt (éd.) *Bachelard : Confiance raisonnée et défiance rationnelle*, Presses de l'Université de Franche-Comté, Besançon, 2006.

[Parrochia 13] Parrochia, D., Neuville, P., *Towards a general theory of classifications*, Birkäuser, Bâle, 2013.

[Popper] Popper K., "What is dialectic ?", *Mind*, vol. 49, No 196, , 403-426, 1940 ; rééd. in *Conjectures and Refutations, The growth of scientific knowledge*, 312-335, Routledge, London, 1963.

[Priest 79] Priest, G., "The Logic of Paradox", *J. Phi. Log.*, 8, 219-241, 1979.

[Priest and al. 89] Priest, G., Routley, R. and Norman, J., (eds.), *Paraconsistent Logic : Essays on the Inconsistent*, Philosophia Verlag, Münich, 1989.

[Quine 69] , Quine, W. V. O, *Philosophie de la Logique*, Aubier-Montaigne, Paris, 1969.

[Rescher et al. 79] Rescher, N., Brandom, *The logic of inconsistency*, Basil Blackwell, Oxford, 1979.

[Routley et al. 76] Routley R., Meyer, R. K., "Dialectical logic, classical logic and the consistency of the world", *Studies in Soviet Thought*, 16, 1-25, 1976.

[Slater 95] Slater, B. H., "Paraconsistent logics", *J. Philos. Log.*, 24, 451-454, 1995.