



**HAL**  
open science

## Encadrements limites de lois de type Erdős-Rényi-Shepp

Jean Noel Bacro

► **To cite this version:**

Jean Noel Bacro. Encadrements limites de lois de type Erdős-Rényi-Shepp. Annales de l'ISUP, 1986, XXXI (2-3), pp.1-13. hal-03678945

**HAL Id: hal-03678945**

**<https://hal.science/hal-03678945v1>**

Submitted on 25 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Encadrements limites de lois

de type Erdős-Rényi-Shepp

par

Jean-Noël BACRO

L.S.T.A., tour 45-55

4, place Jussieu 75252 PARIS CEDEX 05

Résumé :

Soit  $X_1, X_2, \dots$  suite de variables aléatoires i.i.d. ; on pose  $S_0 = 0$ ,  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Pour  $K(i) = [u(i) + d \log(\log(i))]$ ,  $d \in ]-\infty, +\infty[$ ,  $u(i) = c \log(i)$  ou  $[c \log(i)]$ ,  $c > 0$ , on s'intéresse à la statistique de Shepp,  $T(n, K(n)) = T_n = \sup_{1 \leq i \leq n} (S_{i+K(i)} - S_i)$ . Pour tout  $\alpha$  appartenant à un certain intervalle, nous montrons que l'expression  $(T_n - \alpha K(n)) / \log(\log(n))$  a pour limite supérieure presque sûre (p.s.)  $(\frac{1}{2} - \frac{d}{c}) \frac{1}{t^*}$ , pour limite inférieure p.s. et pour limite en probabilité  $-(\frac{1}{2} + \frac{d}{c}) \frac{1}{t^*}$ , où  $t^*$  est un nombre ne dépendant que de  $\alpha$  et de la distribution de  $X_1$ .

Mots clés : lois d'Erdős - Rényi ; statistique de Shepp ; grande déviation.

1) Introduction et résultats -

Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, telles que :

(A1)  $E(X_1) = 0$  ; (A2)  $X_1$  non dégénérée, i.e.  $P(X_1 = x) < 1$  pour tout  $x$  ;

(A3)  $t_0 = \text{Sup}\{ t : \phi(t) = E(e^{tX_1}) < \infty \} > 0$ .

Soit  $K(i)$ ,  $i=1, 2, \dots$  une suite d'entiers positifs. On pose  $S_0 = 0$ ,

$S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $T_n = \sup_{1 \leq i \leq n} (S_{i+K(i)} - S_i)$ .

En 1964, Shepp [8] a montré le résultat suivant :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{K(n)} = \alpha$  p.s., lorsque  $K(n) = [c \log(n)]$ ,  $c$  et  $\alpha$  étant liés par l'identité  $\frac{1}{e^c} = \inf_{t \in (0, t_0)} \{\phi(t)e^{-\alpha t}\}$ , avec  $\alpha \in (0, A)$ , où  $A = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}$

Ce résultat est à rapprocher de celui d'Erdős-Rényi (1970), où l'on considère la statistique  $U_n = \sup_{0 \leq i \leq n-K(n)} (S_{i+K(n)} - S_i)$ .

Récemment Deheuvels-Devroye (1983-1985) et Deheuvels-Devroye-Lynch (1986) ont obtenu les résultats suivants ; considérant  $\alpha$  et  $c = c(\alpha)$  comme précédemment défini :

**Théorème A :** (D.D.L. (1986))

Soit  $t^* = t^*(\alpha) \in (0, t_0)$  unique solution de l'équation  $\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \alpha$ .

Alors,

- (i)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (T_n - \alpha K(n)) / \log(\log(n)) = (1/2t^*)$  p.s. ;
- (ii)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (T_n - \alpha K(n)) / \log(\log(n)) = - (1/2t^*)$  p.s. ;
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n - \alpha K(n)) / \log(\log(n)) = - (1/2t^*)$  en probabilité.

Dans les assertions (i), (ii) (iii),  $U_n$  peut remplacer  $T_n$ .

**Remarque:** Soit  $c_0 = 1 / \int_0^{t_0} t m'(t) dt$ , où  $m(t) = \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}$ .

D.-D.-L. (1986) ont prouvé que pour tout  $\alpha \in (0, A)$ ,  $e^{-\frac{1}{c}} = \phi(t^*)e^{-t^*\alpha}$ , où  $t^*$  unique solution de l'équation  $m(t) = \alpha$ ,  $c \in (c_0, \infty)$  ; de plus, pour tout  $c \in (c_0, \infty)$ , il existe un unique  $\alpha \in (0, A)$  tel que  $c = c(\alpha)$ .

Nous prouvons alors que les résultats du théorème A ne peuvent être améliorés, par l'intermédiaire du théorème suivant :

**Théorème B :**

Pour tout  $\alpha \in (0, A)$ , ou d'une manière équivalente, pour tout  $c \in (c_0, \infty)$  si l'on a :

$K(i) = [u(i) + d \log \log(i)]$ ,  $d \in ]-\infty, +\infty [$ , et  $u(i) = c \log(i)$ , ou

$u(i) = [c \log(i)]$ , alors :

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n^{-\alpha K(n)}}{\log \log(n)} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{d}{c}\right) \frac{1}{t^*} \text{ en probabilité ;}$$

$$(ii) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n^{-\alpha K(n)}}{\log \log(n)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{d}{c}\right) \frac{1}{t^*} \text{ p.s. ;}$$

$$(iii) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n^{-\alpha K(n)}}{\log \log(n)} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{d}{c}\right) \frac{1}{t^*} \text{ p.s.}$$

Les assertions (i),(ii),(iii) restent vraies si l'on remplace  $T_n$  par

$U_n = \sup_{0 < i \leq n - K(n)} (S_{i+K(n)} - S_i)$ , statistique d'Erdős-Rényi.

## II. Démonstration du théorème.

Nous procédons comme suit : dans un premier temps (partie a) nous montrons que le théorème est vérifié par  $K(n) = [c \log(n) + d \log \log(n)]$  puis nous étendons le résultat au cas  $K(n) = [[c \log(n)] + d \log \log(n)]$  (partie b).

a) Cas où  $K(n) = [c \log(n) + d \log \log(n)]$ ,  $d \in ]-\infty, +\infty [$

La base des démonstrations est un théorème de Pétrov (1965), sur les grandes déviations.

Théorème 1 : (Pétrov (1965))

$$P(S_n > n \alpha) \sim \frac{\Psi(t^*)}{\sqrt{n}} \exp(n(\log(\phi(t^*)) - t^* \alpha)),$$

uniformément en tout  $\alpha \in (\epsilon, \min(A - \epsilon, \frac{1}{\epsilon}))$ , où  $\epsilon > 0$  est arbitraire, et  $\Psi(t^*) > 0$  est un nombre ne dépendant que de  $t^*$  et de la distribution de  $X_1$ .

Pour un choix explicite de  $\Psi(t^*)$ , voir [7].

Corollaire 1 : (Deheuvels - Devroye (1983))

Soit  $\alpha \in (0, A)$ , et  $(y_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres telle que  $ny_n^2 \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors uniformément sur toute suite  $(z_n)_n$  telle que  $|z_n| \leq |y_n|$ , on a :

$$P(S_n > n(\alpha + z_n)) \sim \frac{\Psi(t^*)}{\sqrt{n}} \exp(-\frac{n}{c}) \exp(-nz_n t^*)$$

Une démonstration directe de ce lemme peut être consultée dans [4].

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2 :

Pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , tout  $\alpha \in (0, A)$ , on a :

$$D < n P(S_{K(n)} > \alpha K(n) + (\varepsilon \pm \frac{1}{2} - \frac{d}{c}) \frac{\log(K(n))}{t^*}) < e^{\frac{1}{c} D},$$

$$\text{où } D = \frac{\Psi(t^*)c^{\frac{d}{c}} + o(1)}{K(n)(\varepsilon \pm \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}.$$

Preuve :

Par définition de  $K(\cdot)$ , on a :  $(1)e^{\frac{K(n)}{c}} \leq n (\log(n))^{\frac{d}{c}} \leq e^{\frac{K(n)+1}{c}}$

Appliquant le corollaire 1, on a :

$$P(S_{K(n)} \geq \alpha K(n) + (\varepsilon \pm \frac{1}{2} - \frac{d}{c}) \frac{\log(K(n))}{t^*}) \sim \Psi(t^*) e^{-\frac{K(n)}{c}} K(n)^{-(\varepsilon \pm \frac{1}{2} - \frac{d}{c}) - \frac{1}{2}}$$

Remarquant que  $K(n)^{-\frac{d}{c}} = c^{-\frac{d}{c}} (\log(n))^{-\frac{d}{c}} (1+o(1))$ , on a directement le résultat cherché en utilisant les inégalités (1).

Pour la démonstration proprement dites du théorème B, on utilise la suite croissante d'entiers  $(n_j)_{j \geq 0}$ , définie par  $n_j = \inf\{n : [c \log(n) + d \log \log(n)] \geq j\}$ ; il est clair que pour tout  $n$  tel que  $n_j \leq n < n_{j+1}$ ,  $K(n) = j$ .

Lemme 1 :

$$(i) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n - \alpha K(n)}{\log(K(n))} \leq (\frac{1}{2} - \frac{d}{c}) \frac{1}{t^*} \quad \text{p.s.};$$

$$(ii) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0, \quad P(\frac{T_n - \alpha K(n)}{\log(K(n))} \leq -(\frac{1}{2} + \frac{d}{c}) \frac{1}{t^*} + \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1;$$

$$(iii) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n - \alpha K(n)}{\log(K(n))} \leq -(\frac{1}{2} + \frac{d}{c}) \frac{1}{t^*} \quad \text{p.s.}$$

Preuve :

Pour  $n_j \leq n < n_{j+1}$ , on a  $T_n - T_{n_{j+1}-1} = \sup_{0 < i \leq j} \Lambda_i$ , où  $\Lambda_i = \sup_{n_{i-1} \leq l < n_{i+1}} (S_{1+K(l)})$

(i) On montre que pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $P(\Lambda_j > \alpha_j + (\frac{1}{2} + \epsilon - \frac{d}{c}) \frac{\log(j)}{t^*} \text{ i.o.}) = 0$

et l'on en déduit le résultat cherché.

$$P(\Lambda_j > \alpha_j + (\frac{1}{2} + \epsilon - \frac{d}{c}) \frac{\log(j)}{t^*}) \leq (n_{j+1} - n_j) (\psi(t^*) + o(1)) e^{-\frac{j}{t^*} - (\epsilon+1) + \frac{d}{c}}$$

par application du corollaire 1. Or  $n_{j+1} - n_j \leq e^{\frac{j+2}{c}} (\frac{j}{c})^{-\frac{d}{c}} (1+o(1))$ , d'où, pour tout

$$\epsilon > 0, P(\Lambda_j > \alpha_j + (\frac{1}{2} + \epsilon - \frac{d}{c}) \frac{\log(j)}{t^*}) \leq O(j^{-(1+\epsilon)})$$

terme d'une série sommable en  $j$ . Le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure.

(ii) On pose  $\Theta_j = T_{n_{j+1}-1}$ ; l'assertion (i) permet d'affirmer que, pour tout

$$\epsilon > 0, P(\Theta_j > \alpha_j + (\frac{1}{2} + \epsilon - \frac{d}{c}) \frac{\log(j)}{t^*}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

par suite changeant  $j$  en  $(j - [j^{\frac{\epsilon}{2}}])$ ,

$$P(\Theta_{j - [j^{\epsilon/2}]} > \alpha_j + (-\frac{1}{2} + \epsilon - \frac{d}{c}) \frac{\log(j)}{t^*}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

De plus, posant  $\lambda_j = \alpha_j + (-\frac{1}{2} + \epsilon - \frac{d}{c}) \frac{\log(j)}{t^*}$ ,

$$P(\sup_{j - [j^{\epsilon/2}] < i < j} \Lambda_i > \lambda_j) \leq \sum_{j - [j^{\epsilon/2}] < i < j} P(\Lambda_i > \lambda_i) \leq \sum_{j - [j^{\epsilon/2}] < i < j} O(i^{-\epsilon}) = O(j^{-\epsilon/2}),$$

par le corollaire 2.

Posant  $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{t^*}$ , on a le résultat cherché.

(iii) la démonstration est basée sur le fait que pour toute suite d'évènements

$A_n$  tel que  $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , alors  $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$ ; posant

$$A_n = \{T_n \leq \alpha K(n) + (-\frac{1}{2} + \epsilon - \frac{d}{c}) \frac{\log K(n)}{t^*}\}$$

où  $\epsilon > 0$  arbitraire, on a, via (ii),  $P(A_n) \rightarrow 1$ , d'où la conclusion du lemme 1.

La suite des démonstrations nécessite l'emploi des deux lemmes suivants :

Lemme 2 : (Chung-Erdős (1952)).

Pour toute suite d'évènements  $A_1, \dots, A_n$ , on a :

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \geq \frac{(\sum_{i=1}^n P(A_i))^2}{\sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j)}$$

Lemme 3 : (Deheuvels-Devroye (1983)).

Pour  $1 \leq i \leq k$ , soit  $S_i = X_1 + \dots + X_i$ ,  $S'_{k-1} = X_{i+1} + \dots + X_k$  et  $S''_i = X_{k+1} + \dots + X_{k+i}$ . Alors, pour tout  $x$ , tout  $q$  et pour tout  $t \in (0, t^*)$ , on a :

$$P(S_i + S'_{k-1} > x ; S'_{k-1} + S''_i \geq x) \leq (\phi(t^*))^{k-i} e^{-t^*q} + P(S_k > x) (\phi(t))^i e^{-t(x-q)}$$

Lemme 4 :

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$P\left(\frac{T_n - \alpha K(n)}{\log(K(n))} \geq -\left(\frac{1}{2} + \frac{d}{c}\right) \frac{1}{t^*} - \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Preuve :

Pour  $n_j \leq i < n_{j+1}$ , et  $\varepsilon > 0$  arbitraire on pose :  $A_i = \{S_{i+j} - S_i \geq \lambda_j\}$ , où

$$\lambda_j = \alpha j - \left(\frac{1}{2} + \varepsilon + \frac{d}{c}\right) \frac{\log(j)}{t^*}, \text{ et } \Lambda_j = \sup_{n_j \leq i < n_{j+1}} (S_{i+j} - S_i).$$

$P(\Lambda_j \geq \lambda_j) = P\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right)$  où  $N = n_{j+1} - n_j$ . Par définition de  $(n_j)_{j \geq 0}$ ,

$$e^{\frac{1}{c}} j^{-\frac{d}{c}} c^{\frac{d}{c}} (e^{\frac{1}{c}} - 1) (1 + o(1)) \leq N \leq e^{\frac{j+2}{c}} j^{-\frac{d}{c}} c^{\frac{d}{c}} (1 + o(1)).$$

On montre, par le biais de deux conditions suffisantes, que (\*)  $P\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) \rightarrow 1$ .

ce qui, via la relation  $T_n \geq \bar{\Lambda}_j$  pour  $n \geq n_{j+1}$ , nous permettra de conclure.

Utilisant le lemme 2 et l'indépendance de  $A_i$  et  $A_1$  pour  $|i-1| \geq j$ ,

il suffit de prouver pour montrer (\*) : (i)  $NP(A_0) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$  ;

$$(ii) \sum_{\substack{|i-1| < j \\ i \neq 1 \\ 1 \leq i, 1 \leq N}} P(A_i \cap A_1) = o\left(\{NP(A_0)\}^2\right).$$

(i) est évident par application du corollaire 1.

(ii) revient à prouver que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $N \sum_{i=1}^j P(A_0 \cap A_i) = o(j^{2\varepsilon})$ .

Posant  $x = \lambda_j$  et  $q = \alpha j - \frac{1}{t^*} \log(\phi(t^*)) + \frac{2}{t^*} \log(i) - \frac{d}{ct^*} \log(j)$ , on a par

le lemme 3 ;

$$P(A_0 \cap A_i) \leq e^{-\frac{1}{c}} j^{-\frac{d}{c}} i^{-2} + P(A_0) e^{-\theta i} j^{\varepsilon + \frac{5}{2}}$$

$$\text{où } \theta = t \left( \frac{1}{t^*} \log(\phi(t^*)) - \frac{1}{t} \log(\phi(t)) \right) > 0$$

soit  $1 = \lceil j^{\varepsilon/2} \rceil$  ; on a :

$$\sum_{i=1}^j P(A_0 \cap A_i) \leq 21 P(A_0) + \sum_{i=1}^{j-1} P(A_0 \cap A_i), \text{ et par la précédente inégalité}$$

$$\sum_{i=1}^j P(A_0 \cap A_i) \leq 21NP(A_0) + e^{\frac{2}{c}} c^{\frac{d}{c}} (1+o(1)) \sum_{i \geq 1} i^{-2} + NP(A_0) j^{\frac{\varepsilon+5}{2}} \frac{e^{-\theta 1}}{1-e^{-\theta}},$$

$$\leq O(j^{\frac{3\varepsilon}{2}}) = o(j^{2\varepsilon}).$$

La condition (ii) est ainsi démontrée, et l'on a pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$P(T_n > \lambda_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 1$  uniformément en tout  $n$  tel que  $n_{j+1} < n < n_{j+2}$  ; cela implique

$$P(T_n > \alpha K(n) + (-\frac{1}{2} - \frac{d}{c} - 2\varepsilon) \frac{\log(K(n))}{t^*}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ pour tout } \varepsilon > 0. \text{ Le lemme 4}$$

est alors démontré.

Lemme 5 :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n - \alpha K(n)}{\log(K(n))} \geq (\frac{1}{2} - \frac{d}{c}) \frac{1}{t^*} \text{ p.s.}$$

Preuve :

Soit  $F_j = \sup_{n_j < i < n_{j+1} - j} (S_{i+j} - S_i)$ . Pour tout  $n_j < n < n_{j+1}$ , on a  $T_n > F_j$ .

On va montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $P(F_j > \alpha j + (\frac{1}{2} - \varepsilon - \frac{d}{c}) \frac{\log(j)}{t^*} \text{ i.o.}) = 1$ , ce

qui nous permettra de conclure.

La suite  $(F_j)_j$  est indépendante ; il faut et il suffit donc de prouver que

$$\sum_j P(F_j \geq \alpha j + (\frac{1}{2} - \varepsilon - \frac{d}{c}) \frac{\log(j)}{t^*}) = \sum_j P_j = \infty.$$

Soit  $A_i = \{S_{i+j} - S_i \geq x\}$ , où  $x = \alpha j + (\frac{1}{2} - \varepsilon - \frac{d}{c}) \frac{\log(j)}{t^*}$ .

$$P_j = P(\bigcup_{i=1}^N A_i), \text{ où } N = n_{j+1} - n_j - 1$$

Utilisant le lemme 2 et le corollaire 2, on a :

$$P_j \geq \frac{c_1^2 j^{-2(1-\varepsilon)}}{c_2 j^{-(i-\varepsilon)} + 2N \sum_{i=1}^j P(A_0 \cap A_i)} (1+o(1)),$$

$c_1$  et  $c_2$  constantes positives.



On montre alors qu'il existe  $c_3$ , constante positive, telle que :

$$N \sum_{l=[j^{\epsilon/2}]}^j P(A_0 \cap A_1) \leq (c_3 + o(1)) j^{-1}$$

Cela suffira, car alors :

$$N \sum_{l=1}^j P(A_0 \cap A_1) \leq (c_3 + o(1)) j^{-1} + (c_2 + o(1)) j^{-1 + \frac{3\epsilon}{2}} \sim (c_2 + o(1)) j^{-1 + \frac{3\epsilon}{2}}$$

i.e.  $P_j \geq (1 + o(1)) \frac{c_1}{2c_2} j^{-1 + \epsilon/2}$ , terme d'une série divergente en  $j$ , d'où l'assertion du lemme.

$$\text{Soit } q = \alpha j - \frac{1}{t^*} \log(\Phi(t^*)) + (1 + \frac{2}{\epsilon}) \frac{\log(1)}{t^*} - \frac{d}{ct^*} \log(j).$$

Appliquant le lemme 3, on a :

$$P(A_0 \cap A_1) \leq e^{-\frac{j}{t^*}} \frac{d}{j^{\frac{d}{c}}} (1 + 2/\epsilon) + P(A_0) j^{\frac{t^*}{\epsilon} (\epsilon + \frac{1}{2} + \frac{2}{\epsilon})} e^{-\theta 1}, \quad \theta > 0.$$

$$N \sum_{l=[j^{\epsilon/2}]}^j P(A_0 \cap A_1) \leq (e^{\frac{2}{c}} \frac{d}{c^c} + o(1)) ([j^{\frac{\epsilon}{2}}]^{\frac{2}{\epsilon}})^{-1} + (c_2 + o(1)) j^{-1 + \epsilon + \frac{t^*}{\epsilon} (\epsilon + \frac{1}{2} + \frac{2}{\epsilon})} e^{-\theta j} \\ \leq (c_3 + o(1)) j^{-1}, \quad c_3 \text{ constante positive.}$$

Lemme 6 :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n - \alpha K(n)}{\log(K(n))} \geq -\left(\frac{1}{2} + \frac{d}{c}\right) \frac{1}{t^*} \text{ p.s.}$$

Preuve :

Pour  $n_j < n < n_{j+1}$ , on a  $T_n \geq T_{n_j}$ . On montre que, pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(T_{n_j} < \alpha j - \left(\frac{1}{2} + \epsilon + \frac{d}{c}\right) \frac{\log(j)}{t^*}) < \infty, \text{ et l'on conclut via le lemme de Borel-Cantelli.}$$

$$\text{Soit } Q_1 = \sup_{\substack{2lj \leq i < (2l+1)j \\ i \in J_j}} (S_{i+K(i)} - S_i), \text{ où } J_j = \{n \in \mathbb{N} : n = r [j^{\epsilon/4}]\},$$

$r \in \{1, 2, \dots\}$ ; soit  $L$  le plus grand entier tel que  $(2L + 1)j - 1 \leq n_j - j$ .

On a  $L = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n_j + j - 1}{j} - 1 \right) \right] \sim \frac{n_j}{2j}$ . Pour tout  $M$  tel que  $0 < M < L$ ,

on a :  $T_{n_j} \geq \sup_{M < l < L} Q_1$ . La suite  $(Q_1)_1$  est indépendante. On choisit  $M = o(L)$

tel que, pour tout  $i \in \{2Mj, \dots, (2L+1)j\}$ , on ait  $j - \frac{\log(j)o(1)}{t^*} \leq K(i) \leq j$ , où

les termes en "o(1)" sont uniformes en  $i$  quand  $j$  tend vers  $\infty$ . Soit

$$\lambda_j = \alpha_j - \left( \frac{1}{2} + \varepsilon + \frac{d}{c} \right) \frac{\log(j)}{t^*}; \quad P(T_{n_j} < \lambda_j) \leq \prod_{l=M}^L P(Q_1 < \lambda_j) \leq \exp\left(-\sum_{l=M}^L P(Q_1 \geq \lambda_j)\right).$$

On a, par une inégalité de type Bonferroni :

$$P(Q_1 \geq \lambda_j) \geq \sum_{i \in I_1} P(S_{K(i)} \geq \lambda_j) - \sum_{\substack{r \neq s \\ (r,s) \in I_1^2}} P(S_{r+K(r)} - S_r \geq \lambda_j; S_{s+K(s)} - S_s \geq \lambda_j)$$

où  $I_1 = J_j \cap \{2\{1j, \dots, (2L+1)j-1\}\}$ .

Par le corollaire 1, on a uniformément en tout  $i \in I_1$ , pour  $j$  assez

grand :

$$P(S_{K(i)} \geq \lambda_j) \geq (\psi(t^*) + o(1)) e^{-\frac{j}{c} \frac{3\varepsilon}{j} + \frac{d}{c}},$$

d'où :

$$(*) P(S_{K(i)} \geq \lambda_j) \geq \frac{(e^{1/c \psi(t^*) + o(1)})}{e^{\frac{j}{c} \frac{3\varepsilon}{j} + \frac{d}{c}}} \geq (1 + o(1)) P(S_j \geq \alpha_j - \left( \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{d}{c} \right) \frac{\log(j)}{t^*})$$

par le corollaire 2.

$$\begin{aligned} \text{Montrons alors que } & \sum_{\substack{r \neq s \\ (r,s) \in I_1^2}} P(S_{r+K(r)} - S_r \geq \lambda_j; S_{s+K(s)} - S_s \geq \lambda_j) = \\ & = o\left(\sum_{i \in I_1} P(S_{K(i)} \geq \lambda_j)\right) \end{aligned}$$

ou encore, compte tenu de (\*), que :

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{N-1} P(S_j \geq \alpha_j - \left( \frac{1}{2} + \frac{d}{c} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\log(j)}{t^*}) & ; S_{j+r \lfloor j^{\varepsilon/4} \rfloor} - S_{r \lfloor j^{\varepsilon/4} \rfloor} > \alpha_j - \left( \frac{1}{2} + \frac{d}{c} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\log(j)}{t^*} = \\ & = o\left(NP(S_j \geq \alpha_j - \left( \frac{1}{2} + \frac{d}{c} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\log(j)}{t^*})\right), \text{ avec} \end{aligned}$$

$N = \text{nombre d'indice } i \in I_1; N \sim j^{1-\varepsilon/4}$  quand  $j \rightarrow \infty$ .

Cela revient à montrer que :

$$\sum_{r=0}^{N-1} P(S_j \geq x; S_{j+r \lfloor j^{\varepsilon/4} \rfloor} - S_{r \lfloor j^{\varepsilon/4} \rfloor} \geq x) = o\left(j^{\frac{\varepsilon+d}{c}} e^{-\frac{j}{c}}\right), \text{ où } x = \alpha_j - \left( \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{d}{c} \right) \frac{\log(j)}{t^*}.$$

Appliquant le lemme 3, avec  $q = \alpha j - \frac{m}{t^*} \log(\phi(t^*)) + \frac{4}{t^*} \log(m) - \frac{d}{ct^*} \log(j)$

$m = r[j^{\epsilon/4}]$ , on a :

$$P(S_{j^{\epsilon/4}} > x ; S_{j+r[j^{\epsilon/4}]} - S_{r[j^{\epsilon/4}]} > x) \leq (1+o(1)) e^{-\frac{j}{c} \{ r^{-4} j^{-(\epsilon-\frac{d}{c})} + (L_1+o(1)) j^{5+\frac{\epsilon}{2}+\frac{d}{c}} \}}$$

avec  $\theta > 0$ ,  $L_1 = \psi(t^*) c^{d/c} e^{1/c}$ .

Sommant sur  $r$ , on obtient :

$$\sum_{r=0}^{N-1} P(S_{j^{\epsilon/4}} > x ; S_{j+r[j^{\epsilon/4}]} - S_{r[j^{\epsilon/4}]} > x) \leq (1+o(1)) e^{-\frac{j}{c} \{ 0(j^{-(\epsilon-\frac{d}{c})}) + \frac{L_1 j^{5+\frac{\epsilon}{2}+\frac{d}{c}} e^{-\theta N[j^{\epsilon/4}]} }{1-e^{-\theta[j^{\epsilon/4}]}} \}}$$

C'est-à-dire,

$$\sum_{r=0}^{N-1} P(S_{j^{\epsilon/4}} > x ; S_{j+r[j^{\epsilon/4}]} - S_{r[j^{\epsilon/4}]} > x) = o(j^{\frac{\epsilon+d}{c}} e^{-\frac{j}{c}}).$$

On en déduit :

$$P(T_{n_j} < \lambda_j) \leq \exp\{-(L-M)(1+o(1)) P(Q_0 \geq \lambda_j)\}, \text{ d'où}$$

$$P(T_{n_j} < \lambda_j) \leq \exp\left\{-\left(\frac{c^{d/c} \psi(t^*)}{2} + o(1)\right) j^{\epsilon/4}\right\}, \text{ car } L - M = L(1+o(1)).$$

On a une majoration par un terme de série convergente en  $j$ , d'où la conclusion du lemme 6.

b) Cas où  $u(i) = [c \log(i)]$ .

Reprenant les mêmes schémas de démonstration, on montre que les lemmes 1,4,5 et 6 restent vrais si l'on a

$$K(n) = [[c \log(n)] + d \log \log(n)], \quad d \in ]-\infty, +\infty[.$$

L'idée directrice est la suivante : on se ramène au cas où la fonction

$K(\cdot)$  est constante sur des intervalles  $I_j$ , sur lesquels un corollaire de même type que le corollaire 2 s'applique de "manière satisfaisante".

Soit  $k_j = \inf \{k / [c \log(k)] = j\}$  ; posant  $I_j = [k_j, k_{j+1}[$ , on a pour tout  $k \in I_j$ ,  $[c \log(k)] = j$ .

Soit  $K_j^+ = \sup \{K(k_j) ; K(k_{j+1}-1)\}$  ;  $K_j^- = \inf \{K(k_j) ; K(k_{j+1}-1)\}$ .

Lemme 7 :

Sur  $I_j \cup I_{j+1}$ , la fonction  $K(\cdot)$  est telle que sa restriction à  $I_j$  ou à  $I_{j+1}$  est constante. En d'autres termes, il est impossible d'avoir  $K_j^+ = K_j^- + 1$  et  $K_{j+1}^+ = K_{j+1}^- + 1$ .

Preuve :

Soit  $V(x) = d \log \log(x)$  et  $U(x) = c \log(x)$ . Si  $x_j$  est tel que  $U(x_j) = j$  alors  $k_{j-1} \leq x_j \leq k_j$ .  $V(x_{j+1}) - V(x_j) + 0$  car  $(V_0 U^{-1})' + 0$ .

Comme  $\frac{x_j}{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 1$ ,  $V(k_{j+1}-1) - V(k_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

Le raisonnement est alors le suivant : Soit  $A_j = \{\Lambda_j \geq \lambda_j\}$ , où  $\Lambda_j = \sup_{i \in I_j} (S_{i+K(i)} - S_i)$ .

Comme  $K(n) \sim [c \log(n)]$ , (1)  $\Lambda_{j_1}$  et  $\Lambda_{j_2}$  sont indépendants si  $|j_1 - j_2| \geq 2$ . On pose  $\Lambda_j^- = \sup_{i \in I_j} (S_{i+K_j^-} - S_i)$ ,  $\Lambda_j^+ = \sup_{i \in I_j} (S_{i+K_j^+} - S_i)$ , et  $A_j^+$ ,  $A_j^-$  évènements associés.

On a  $\Lambda_j \leq \text{Max}(\Lambda_j^+, \Lambda_j^-)$  et "au moins une fois sur deux",  $\Lambda_j^+ = \Lambda_j^-$  (lemme 7).

Lemme 8 :

(i) Si  $\sum_j P(A_j^+) + \sum_j P(A_j^-) < \infty$ ,  $\limsup_{j \rightarrow \infty} A_j = \emptyset$  p.s.,

(ii) Si  $\sum_j \inf \{P(A_{4j}^-) ; P(A_{4j+1}^-)\} = \infty$ ,  $\limsup_{j \rightarrow \infty} A_j = \Omega$  p.s.

Preuve :

- (i) évident par le lemme de Borel-Cantelli.  
 (ii) La suite  $(A_{4j}^-, A_{4j+1}^-)$  est indépendante via (1). Par ailleurs, il existe une application déterministe qui fixe  $A_{4j}$  ou  $A_{4j+1}$  à être  $A_{4j}^-$  ou  $A_{4j+1}^-$ ; ainsi  $P(A_{4j} \cup A_{4j+1}) \geq \inf \{ P(A_{4j}^-), P(A_{4j+1}^-) \}$  et l'on conclut par le lemme de Borel-Cantelli.

Lemme 9 :

Pour tout  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , on a :

$$D \leq n P(S_{K(n)} \geq \alpha K(n) + (\epsilon \pm \frac{1}{2} - \frac{d}{c}) \frac{\log(K(n))}{t^*}) \leq e^{\frac{1}{c}} D$$

où

$$D = \frac{M\psi(t^*)c^{\frac{d}{c}} + o(1)}{K(n)^{(\epsilon \pm \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}}, \text{ avec } M \text{ constante}$$

telle que  $e^{-\frac{1}{c}} \leq M \leq 1$ .

Preuve :

Il suffit d'appliquer le corollaire 1, et de remarquer que  $e^{-\frac{K(n)}{c}} \sim M e^{-\frac{[c \log(n)]}{c}} \frac{d}{c} K(n)^{-\frac{d}{c}}$ , et  $e^{\frac{[c \log(n)]}{c}} \leq n \leq e^{\frac{[c \log(n)]+1}{c}}$

Reprenant les mêmes schémas de démonstration qu'en partie a), on peut obtenir, grâce au lemme 9, les mêmes types d'évaluation de probabilité, qui ne sont pas modifiés si l'on remplace  $j$  par  $j+1$ ; on choisit donc de faire les calculs pour  $K_j^-$ , et ensuite on fait l'évaluation pour  $K_{j+1}^-$ . La nature des séries mises en évidence n'est pas modifiée si l'on prend un terme sur quatre (soit  $4j$ , soit  $4j+1$ ), puisque du côté divergent on minore par des séries de Riemann. Nous pouvons donc transposer sans difficulté aucune les démonstrations de la partie a).

Démonstration du théorème B.

Il suffit de combiner les résultats des lemmes 1(ii) et 4, 1(i) et 5, 1(iii) et 6, ainsi que leurs extensions faites en b), pour obtenir les assertions (i), (ii) et (iii) du théorème B.

## Références

- [1] BACRO J.N. (1986) "Encadrements limites de lois de type Erdős-Rényi-Shepp". Rapport Technique L.S.T.A. , Université Paris VI.
- [2] CHUNG, K.L., ERDÖS, P.(1952) "On the application of the Borel-Cantelli lemma". Trans.Amer.Math.Soc.72, 179-186.
- [3] CSÖRGÖ, M., STEINEBACH, J.(1981) "Improved Erdős-Rényi and strong approximation laws for increments of partial sums".Ann.Probab. 9 , 988-996.
- [4] DEHEUVELS P.,DEVROYE L. (1983) "Limit laws related to the Erdős-Rényi theorem". Rapport technique L.S.T.A., Université PARIS VI.
- [5] DEHEUVELS, P., DEVROYE L. (1985) "Limit laws of the Erdős-Rényi type". A paraître Ann.Probab.
- [6] DEHEUVELS P., DEVROYE L., et LYNCH J. (1986) "Exact convergence rate in the limit theorems of Erdős-Rényi and Shepp". Soumis pour publication.
- [7] PETROV, V.V. (1965) "On the probabilities of large deviations of sums of independants random variables". Ann.Probab. 7, 745-789.
- [8] SHEPP, L.A. (1964) "A limit theorem concerning moving average". Ann.Math.Statist. 35, 424-428.

Reçu en Mars 1986