



HAL
open science

Valeurs algébriques de E -fonctions aux points algébriques

Tanguy Rivoal

► **To cite this version:**

| Tanguy Rivoal. Valeurs algébriques de E -fonctions aux points algébriques. 2016. hal-03676576

HAL Id: hal-03676576

<https://hal.science/hal-03676576>

Preprint submitted on 24 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

VALEURS ALGÈBRIQUES DE E -FONCTIONS AUX POINTS ALGÈBRIQUES

T. RIVOAL

1. INTRODUCTION

On s'intéresse dans cette note aux E -fonctions transcendentes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ qui prennent des valeurs algébriques en des points algébriques non-nuls. Les premiers exemples qui viennent à l'esprit sont les E -fonctions $F(z)$ de la forme

$$F(z) = \alpha + (z - \xi)G(z)$$

où $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $G(z)$ est une E -fonction transcendante quelconque. Les résultats plus précis suivants montrent que ce sont les seuls exemples.

Théorème 1. *Soit $F(z)$ une E -fonction transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ tels que $F(\xi) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Alors il existe un entier $m \geq 0$, un polynôme $P(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ de degré $\leq m$ et une E -fonction $G(z)$ transcendante tels que*

$$F(z) = P(z - \xi) + (z - \xi)^{m+1}G(z) \quad \text{et} \quad G(\xi) \notin \overline{\mathbb{Q}}.$$

Remarque. Soit μ l'ordre d'un E -opérateur annulant $F(z)$. La preuve ci-dessous montre que $\mu \geq 2$ et que $m \leq \mu - 2$.

On peut renforcer le théorème 1 de la manière suivante.

Théorème 2. *Soit $F(z)$ une E -fonction transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Soit ξ_1, \dots, ξ_s la liste de tous les nombres algébriques non nuls tels que $F(\xi_j) \in \overline{\mathbb{Q}}$, où l'on suppose que $s \geq 1$. Alors il existe des entiers $m_1, \dots, m_s \geq 0$, un polynôme $Q(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ de degré $\leq m_1 + \dots + m_s + s - 1$ et une E -fonction $G(z)$ transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ tels que*

$$F(z) = Q(z) + \left(\prod_{j=1}^s (z - \xi_j)^{m_j+1} \right) G(z)$$

et quel que soit $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$, $G(\xi) \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

Remarque. Une terminologie possible est de dire que la E -fonction $G(z)$ est *purement transcendante* dans le théorème 2. On explique au début de la démonstration du théorème 2 pourquoi il n'y a bien qu'un nombre fini s de nombres algébriques non nuls ξ tels que $F(\xi) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Si $s = 0$, le résultat est trivialement vrai avec $Q(z) = 0$ et $G(z) = F(z)$.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

On commence par la remarque suivante. Soit \mathcal{L} un E -opérateur annulant $F(z)$ (il en existe), d'ordre $\mu \geq 1$ disons. Par la théorie d'André [1], \mathcal{L} n'a que $z = 0$ comme singularité finie. Si l'on réécrit l'équation $\mathcal{L}F(z) = 0$ sous forme de système différentiel, on obtient donc

$${}^t(F'(z), \dots, F^{(\mu)}(z)) = M(z) \cdot {}^t(F(z), \dots, F^{(\mu-1)}(z))$$

où $M(z) \in M_\mu(\overline{\mathbb{Q}}[z, 1/z])$. Par le théorème de Siegel-Shidlovskii, on en déduit que pour tout $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, on a

$$\text{degtr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(F(\xi), \dots, F^{(\mu-1)}(\xi)) = \text{degtr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(F(z), \dots, F^{(\mu-1)}(z)) \geq 1 \quad (2.1)$$

puisque $F(z)$ est transcendante. ⁽¹⁾

Supposons maintenant que $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ soit tel que $F(\xi) = \alpha_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$. (Notons que cela force $\mu \geq 2$ car si $\mu = 1$, $F(\xi) \notin \overline{\mathbb{Q}}$ par (2.1).) Par la Proposition 4.1 page 8 de la version arXiv de [2], il existe une E -fonction $F_1(z)$ (forcément transcendante) telle que

$$F(z) = \alpha_0 + (z - \xi)F_1(z).$$

Si $F_1(\xi) \notin \overline{\mathbb{Q}}$, le théorème est démontré. Si au contraire $F_1(\xi) = \alpha_1 \in \overline{\mathbb{Q}}$, on applique de nouveau la Proposition 4.1 : il existe une E -fonction transcendante $F_2(z)$ telle que $F_1(z) = \alpha_1 + (z - \xi)F_2(z)$, c'est-à-dire

$$F(z) = \alpha_0 + \alpha_1(z - \xi) + (z - \xi)^2 F_2(z).$$

Si $F_2(\xi) \notin \overline{\mathbb{Q}}$, le théorème est démontré. Sinon, on réapplique la Proposition 4.1, etc. Nous allons montrer que ce procédé s'arrête toujours après un nombre fini d'étapes et que l'on a donc la conclusion attendue : il existe un entier $m \geq 0$, un polynôme $P(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ de degré $\leq m$ et une E -fonction transcendante $G(z)$ tels que

$$F(z) = P(z - \xi) + (z - \xi)^{m+1}G(z) \quad \text{et} \quad G(\xi) \notin \overline{\mathbb{Q}}.$$

Pour cela, supposons *a contrario* que le procédé ne s'arrête jamais. Alors quel que soit $m \geq 0$, il existe un polynôme $P_m(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ de degré $\leq m$ et une E -fonction transcendante $F_{m+1}(z)$ tels que

$$F(z) = P_m(z - \xi) + (z - \xi)^{m+1}F_{m+1}(z) \quad \text{et} \quad F_{m+1}(\xi) \in \overline{\mathbb{Q}} \quad (2.2)$$

et, par construction, $P_m(z - \xi) = P_{m-1}(z - \xi) + \alpha_m(z - \xi)^m$ pour un certain $\alpha_m \in \overline{\mathbb{Q}}$. L'équation (2.2) est donc simplement le développement de Taylor tronqué à l'ordre m de $F(z)$ en $z = \xi$. On en déduit donc que $F^{(m)}(\xi) = m!\alpha_m \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour tout $m \geq 0$. Or ceci est impossible par la minoration ≥ 1 du degré de transcendance (2.1) ci-dessus. En fait, cette même minoration montre que le procédé s'arrête pour un $m \leq \mu - 2$.

1. Dans cet argument, le point essentiel est que $F(z)$ soit solution d'une équation différentielle dont 0 est la seule singularité finie, afin de pouvoir appliquer le théorème de Siegel-Shidlovskii en tout point algébrique non-nul. Un E -opérateur convient mais ce n'est pas forcément la seule possibilité.

Remarque. Dans l'énoncé de la Proposition 4.1 de la version arXiv de [2] (mais c'est aussi le cas dans la version parue), il est supposé que $\xi \in \mathbb{Q}^*$. Il s'agit d'une coquille et il faut lire $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$. En effet, dans la preuve de cette proposition, on commence par changer z en ξz pour se ramener à supposer $\xi = 1$. Ce changement de variable marche tout aussi bien en supposant $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ puisque la E -fonction $f(z)$ considérée est à coefficients algébriques pas forcément rationnels.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Comme $F(z)$ est transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, elle est en particulier $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ -indépendante de la fonction 1. Comme de plus $F(z)$ est holonome sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, il existe donc un système différentiel sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ vérifié par des E -fonctions $f_1(z) = 1, f_2(z) = F(z), \dots, f_m(z)$ telles que toutes les $f_j(z)$ sont $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ -indépendantes. Alors, par le Corollary 1.4 de [2], pour tout $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}$, sauf 0 et éventuellement les singularités du système, les nombres $f_1(\xi) = 1, f_2(\xi) = F(\xi), \dots, f_m(\xi)$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$ -indépendants. Il suit en particulier qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres algébriques ξ tels que $F(\xi) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Passons maintenant à la démonstration proprement dite. On commence par appliquer le théorème 1 à $F(z)$ et $\xi = \xi_1$: on obtient

$$F(z) = P_1(z - \xi_1) + (z - \xi_1)^{m_1+1}G_1(z) \quad (3.1)$$

où $P_1(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ est de degré $\leq m_1$, $G_1(z)$ est une E -fonction transcendante telle que si $G_1(\xi) \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour un $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ alors nécessairement $\xi = \xi_j$ pour $j = 2, \dots, s$. Si $s = 1$, le résultat est démontré.

Si $s \geq 2$, on applique alors le théorème 1 à $G_1(z)$ et $\xi = \xi_2$: on obtient

$$G_1(z) = P_2(z - \xi_2) + (z - \xi_2)^{m_2+1}G_2(z) \quad (3.2)$$

où $P_2(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ est de degré $\leq m_2$, $G_2(z)$ est une E -fonction transcendante telle que si $G_2(\xi) \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour un $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ alors nécessairement $\xi = \xi_j$ pour $j = 3, \dots, s$. En reportant (3.2) dans (3.1), on obtient que

$$F(z) = P_1(z - \xi_1) + (z - \xi_1)^{m_1+1}P_2(z - \xi_2) + (z - \xi_1)^{m_1+1}(z - \xi_2)^{m_2+1}G_2(z)$$

ce qui démontre le résultat si $s = 2$.

On itère ce procédé jusqu'à épuisement des ξ_j , pour finalement obtenir

$$\begin{aligned} F(z) = & P_1(z - \xi_1) + (z - \xi_1)^{m_1+1}P_2(z - \xi_2) + \dots \\ & + (z - \xi_1)^{m_1+1}(z - \xi_2)^{m_2+1} \dots (z - \xi_{s-1})^{m_{s-1}+1}P_s(z - \xi_s) \\ & + (z - \xi_1)^{m_1+1}(z - \xi_2)^{m_2+1} \dots (z - \xi_s)^{m_s+1}G_s(z) \end{aligned}$$

où $P_s(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ est de degré $\leq m_s$ et $G_s(z)$ est une E -fonction transcendante telle qu'il n'y a aucun $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ vérifiant $G_s(\xi) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Cela démontre le théorème avec

$$\begin{aligned} Q(z) = & P_1(z - \xi_1) + (z - \xi_1)^{m_1+1}P_2(z - \xi_2) + \dots \\ & + (z - \xi_1)^{m_1+1}(z - \xi_2)^{m_2+1} \dots (z - \xi_{s-1})^{m_{s-1}+1}P_s(z - \xi_s) \end{aligned}$$

et $G(z) = G_s(z)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. André, *Séries Gevrey de type arithmétique I. Théorèmes de pureté et de dualité*, Annals of Math. **151** (2000), 705–740.
- [2] F. Beukers, *A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem*, Annals of Math. **163** (2006), no. 1, 369–379. <http://arxiv.org/pdf/math/0405549.pdf>

T. RIVOAL, TANGUY RIVOAL, INSTITUT FOURIER, CNRS ET UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES, CS
40700, 38058 GRENOBLE CEDEX 9, FRANCE,
tanguy.rivoal (a) univ-grenoble-alpes.fr