Étude de la convergence L1 de la distribution locale moyenne d'une mesure composite aléatoire

Sami Saleh

Pub. Inst. Stat. Univ.
XXXIII, fasc. 3, 1988, 67 à 70

ETUDE DE LA CONVERGENCE L1 DE LA DISTRIBUTION LOCALE MOYENNE D'UNE MESURE COMPOSITE ALEATOIRE

Sami SALEH

Dans un récent article [4], on a défini la mesure composite aléatoire (m.c.a.) sur R et la distribution locale moyenne d'une m.c.a. Dans [5], on a étudié l'estimation de cette distribution. Dans le présent article, on va étudié la convergence L1 de l'estimateur défini dans [5].

The L1 convergence of the mean local distribution of a random composite measure.

In a recent paper [4], we defined the random composite measure on R and the mean local distribution of a random composite measure. In [5], we studied the estimation of this distribution. In the present paper, we study the L1 convergence of the estimator defined in [5].

1- Soit $\mu^\cdot$ une m.c.a. sur R . Soient $m^{(1)}$ la mesure moyenne de $\mu^\cdot$, m_0 sa projection sur R et q^x la distribution locale moyenne de $\mu^\cdot$ au point $x \in R$. Dans la suite $\mathcal{A}_b$ et $\mathcal{B}_b^+$ désignent respectivement les ensembles des boréliens bornés de $R_+^2 = R \times [0,+\infty[$ et R^+ . Soit $B \in \mathcal{B}_b^+$; f est la fonction de R dans R^+ qui, à $x \in R$, fait correspondre $f(x) = q^x(B)$, [5].

Soit $(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)$ un échantillon de la loi P_μ. vérifiant pour tout $C \in \mathcal{A}_b$, $E[\mu^\cdot(C)] < +\infty$. On considère comme partition de R , $\Delta_K = \{\Delta_{K,r}\}_{r \in N^*}$, où $\{K(n)\ ;\ n \in N^*\}$ est une suite d'entiers telle que K(n) tend vers l'infini quand n tend vers l'infini et $\Delta_{K,r} = [\frac{r-1}{K}, \frac{r}{K}[$. L'estimateur f_n de f , associé à Δ_K, est [4], [5] :

$$\forall r \in N^*,\ \forall x \in \Delta_{K,r},\ f_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\Delta_{K,r} \times B)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\Delta_{K,r} \times R^+)}\ ,\quad \text{si } \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\Delta_{K,r} \times R^+) \neq 0$$

$$= \ 0 \qquad\qquad ,\quad \text{si } \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\Delta_{K,r} \times R^+) = 0$$

et à toute partition Δ_K , nous associons une fonction $\overline{f}_K$, en posant :

$$\forall r \in N^*\ ,\ \overline{f}_{k,r} = \frac{Q_B(\Delta_{k,r})}{m_0(\Delta_{k,r})} = \frac{1}{m_0(\Delta_{k,r})} \int_{\Delta_{k,r}} f(x) m_0(dx)$$

(où $Q_B(A) = m(A \times B)$, pour tout $A \subset R$)

et nous poserons pour tout $r \in N^*$, pour tout $x \in \Delta_{k,r}$, $\bar{f}_k(x) = \bar{f}_{k,r}$.

Dans la suite, on prend $B = [0,v[$, $v \in R^+$, et on fait les hypothèses suivantes :

(a) $\mu'(C)$ a des moments de tous les ordres ($C = B_1 \times R^+$, $B_1 \in \mathcal{B}_b^+$).

(b) $\exists H > 0$; $\forall j > 2$, $|E[(\mu'(C) - m(C))^j]| < (\frac{1}{2}) H^{j-2} \operatorname{Var}[\mu'(C)]$ ($C = B_1 \times R^+$ ou $C = B_1 \times [0,v[$, $B_1 \in \mathcal{B}_b^+$, $v \in R^+$).

(c) $\exists \alpha > 0$; $\forall \Delta \in \mathcal{B}_b^+$, $m(\Delta \times [0,v[) > \alpha \lambda(\Delta)$, où λ est la mesure de Lebesgue.

(α dépend de m et de v).

(d) $\exists N_0 \in R_+^*$; $\forall x,y \in R$, $y > x$, alors $|f(x) - f(y)| < N_0 |x-y|$

et on note : $\Delta_n = \int_0^{d(n)} |f_n(x) - f(x)| dx$, où $d(n)$ est une fonction croissante de n.

2- <u>Théorème 1</u> : - Si μ' vérifie de plus la condition

(A) $\exists M(m) > 0$; $\operatorname{Var}[\mu'(C)] < M(m) m(C) = M(m) E[\mu'(C)]$

(où $C = B_1 \times R^+$ ou $C = B_1 \times [0,v[$, $B_1 \in \mathcal{B}_b^+$, $v \in R^+$) et si $d(n) = \operatorname{Log} n$, $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{k \operatorname{Log}^3 n} = +\infty$

et $\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{Log} n}{k} = 0$, alors Δ_n converge presque complètement vers 0 .

Soit $R_k = \{r \in N^* ; \Delta_{k,r} \cap [0,d(n)[\neq \emptyset\}$ et soit $\varepsilon > 0$. On a, pour n assez grand :

$$\Delta_n < \sum_{r \in R_k} \frac{1}{k} \sup_{x \in \Delta_{k,r}} |f_n(x) - f(x)|$$

$$< \frac{1}{k} \sum_{r \in R_k} [|f_n(x) - \bar{f}_k(x)| + \omega_f(\Delta_{k,r})] , \quad (x \in \Delta_{k,r})$$

$$< \frac{1}{k} \sum_{r \in R_k} [|f_n(x) - \bar{f}_k(x)| + \frac{N_0}{k}]$$

(où $\omega_f(\Delta_{k,r})$ est l'oscillation de f sur $\Delta_{k,r}$). D'où (puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{k} = 0$ et $\operatorname{Card} R_k < 1 + k \operatorname{Log} n$)

$$\Pr\{\Delta_n > \varepsilon\} < \sum_{r\in R_k} \Pr\{|f_n(x) - \overline{f}_k(x)| + \frac{N_0}{k} > \frac{\varepsilon k}{\operatorname{Card} R_k}\}$$

$$< \sum_{r\in R_k} \Pr\{|f_n(x) - \overline{f}_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{Log} n}\}$$

Posons $\varepsilon_{(n)} = \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{Log} n}$. En suivant la méthode utilisée dans [5] (et puisque $\varepsilon_{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$) on peut démontrer, pour n assez grand :

$$\Pr\{|f_n(x) - \overline{f}_k(x)| > \varepsilon_{(n)}\} < 4 \exp(-n h_0 \alpha \frac{\varepsilon^2_{(n)}}{k})$$

où h_0 est une constante positive. Donc pour n assez grand, on a :

$$\Pr\{\Delta_n > \varepsilon\} < 4 \operatorname{Card} R_k \exp(-n h_0 \alpha \frac{\varepsilon^2_{(n)}}{k})$$

$$< 4(1+n^2) \exp_{(n)}(-n h_0 \alpha \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{1}{k \operatorname{Log}^3 n})^{(2)}$$

Il est clair que le dernier terme est le terme général d'une série convergente.

Théorème 2 : - Sous les hypothèses du théorème 1, on a $\lim_{n\to\infty} E[\Delta_n] = 0$.

On a $\Delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.co} 0$, donc $\Delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0$; il suffit alors de démontrer que la famille $(\Delta_n)_{n\in N}$ est équi-intégrable à partir d'un certain rang [3] ; pour cela, on a pour n assez grand :

$$\Delta_n < \frac{1}{k} \sum_{r\in R_k} [|f_n(x) - \overline{f}_k(x)| + \frac{N_0}{k}]$$

$$< \frac{1}{k} [\operatorname{Card} R_k + \sum_{r\in R_k} \frac{N_0}{k}] , \quad (\text{car on a : } \forall\, n \in N ,\ 0 < f_n, \overline{f}_k < 1)$$

$$< \frac{1}{k} (N_0 + 1)(1 + K \operatorname{Log} n)$$

d'où, pour n assez grand

$$\int_{\Delta_n > \varepsilon} \Delta_n(\omega)\, P(d\omega)^{(3)} < \frac{1}{k}\,(N_0+1)(1+k\,\mathrm{Log}\,n)\ \Pr\{\Delta_n > \varepsilon\}$$

$$< 4(N_0+1)(1+\mathrm{Log}\,n)(1+k\,\mathrm{Log}\,n)\ \exp_{(n)}\left(-n\,h_0\,\alpha\,\frac{\varepsilon^2}{4}\,\frac{n}{k\,\mathrm{Log}^3 n}\right)$$

$$< 16\,(N_0+1)\ n^3\ \exp_{(n)}\left(-n\,h_0\,\alpha\,\frac{\varepsilon^2}{4}\,\frac{1}{k\,\mathrm{Log}^3 n}\right)$$

$$< 16(N_0+1)\ \exp_{(n)}\left(3-h_0\,\alpha\frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \psi(n,\varepsilon), \left(\text{Car} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{k\,\mathrm{Log}^3 n} = +\infty\right)$$

si on fait tendre ε vers l'infini alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour n assez grand (soit par exemple pour $n \geq N_1$) et pour tout $\varepsilon > \varepsilon_0$, on a

$$3 - h_0\,\alpha\,\frac{\varepsilon^2}{4} < 0 \text{ et } \psi(n,\varepsilon) < 16(N_0+1)\ \exp_{(2)}\left(3-h_0\,\alpha\frac{\varepsilon^2}{4}\right)$$

donc, pour tout $\varepsilon > \varepsilon_0$, on a :

$$\sup_{n \geq N_1} \int_{\Delta_n > \varepsilon} \Delta_n(\omega)P(d\omega) < \sup_{n \geq N_1} \psi(n,\varepsilon) < 16(N_0+1)\exp_{(2)}\left(3-h_0\,\alpha\,\frac{\varepsilon^2}{4}\right) \xrightarrow[\varepsilon\to+\infty]{} 0$$

d'où le résultat.

(1) $\forall\ A \subset R$, (A borné), $m(A \times R^+) < +\infty$

(2) $\forall\ x \in R$, $\exp_{(n)}(x) = n^x$.

(3) $\omega \in \Omega$, où $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ est l'espace probabilisé sur lequel $\mu^{\cdot}$ est défini.

Références bibliographiques

[1] J. GEFFROY et H. ZEBOULON, sur certaines convergences stochastiques des mesures aléatoires et des processus ponctuels, Comptes rendus, 280, série A, 1975, p. 291-293.

[2] A. KARR, Derived random measures. Stochastic Process. Appl., 8, 1978, p. 159-169.

[3] J. NEVEU, Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson.

[4] S. SALEH, Mesure composite aléatoire, Pub. Inst. Stat. Univ. XXIX, fasc. 3-4, 1984, p. 59-67.

[5] S. SALEH, Estimation de la distribution locale moyenne d'une mesure composite aléatoire, Comptes-rendus, 301, série I, 1985, p. 545-548.

Reçu en Septembre 1988

Université Paris VI
L.S.T.A.
Tour 45-55, E3
4 Place Jussieu
75252 PARIS Cedex 05