



**HAL**  
open science

# Étude de la convergence L1 de la distribution locale moyenne d'une mesure composite aléatoire

Sami Saleh

► **To cite this version:**

Sami Saleh. Étude de la convergence L1 de la distribution locale moyenne d'une mesure composite aléatoire. Annales de l'ISUP, 1988, XXXIII (3), pp.67-70. hal-03673971

**HAL Id: hal-03673971**

**<https://hal.science/hal-03673971v1>**

Submitted on 20 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Pub. Inst. Stat. Univ.  
XXXIII, fasc. 3, 1988, 67 à 70

ETUDE DE LA CONVERGENCE L1 DE LA DISTRIBUTION LOCALE MOYENNE  
D'UNE MESURE COMPOSITE ALEATOIRE

Sami SALEH

Dans un récent article [4], on a défini la mesure composite aléatoire (m.c.a.) sur  $R$  et la distribution locale moyenne d'une m.c.a. Dans [5], on a étudié l'estimation de cette distribution. Dans le présent article, on va étudier la convergence L1 de l'estimateur défini dans [5].

The L1 convergence of the mean local distribution of a random composite measure.

In a recent paper [4], we defined the random composite measure on  $R$  and the mean local distribution of a random composite measure. In [5], we studied the estimation of this distribution. In the present paper, we study the L1 convergence of the estimator defined in [5].

1- Soit  $\mu^*$  une m.c.a. sur  $R$ . Soient  $m^{(1)}$  la mesure moyenne de  $\mu^*$ ,  $m_0$  sa projection sur  $R$  et  $q^x$  la distribution locale moyenne de  $\mu^*$  au point  $x \in R$ . Dans la suite  $\mathcal{A}_b$  et  $\mathcal{B}_b^+$  désignent respectivement les ensembles des boréliens bornés de  $R_b^2 = R \times [0, +\infty[$  et  $R^+$ . Soit  $B \in \mathcal{B}_b^+$ ;  $f$  est la fonction de  $R$  dans  $R^+$  qui, à  $x \in R$ , fait correspondre  $f(x) = q^x(B)$ , [5].

Soit  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  un échantillon de la loi  $P_{\mu^*}$  vérifiant pour tout  $C \in \mathcal{A}_b$ ,  $E[\mu^*(C)] < +\infty$ . On considère comme partition de  $R$ ,  $\Delta_k = \{\Delta_{k,r}\}_{r \in N^*}$ , où  $(k(n); n \in N^*)$  est une suite d'entiers telle que  $k(n)$  tend vers l'infini quand  $n$

tend vers l'infini et  $\Delta_{k,r} = \left[ \frac{r-1}{k}, \frac{r}{k} \right]$ . L'estimateur  $f_n$  de  $f$ , associé à  $\Delta_k$ ,

est [4], [5] :

$$\begin{aligned}
 \forall r \in N^*, \forall x \in \Delta_{k,r}, f_n(x) &= \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i(\Delta_{k,r} \times B)}{\sum_{i=1}^n \mu_i(\Delta_{k,r} \times R^+)} \quad , \quad \text{si } \sum_{i=1}^n \mu_i(\Delta_{k,r} \times R^+) \neq 0 \\
 &= 0 \quad , \quad \text{si } \sum_{i=1}^n \mu_i(\Delta_{k,r} \times R^+) = 0
 \end{aligned}$$

et à toute partition  $\Delta_k$ , nous associons une fonction  $\bar{F}_k$ , en posant :

$$\forall r \in N^*, \bar{F}_{k,r} = \frac{Q_B(\Delta_{k,r})}{m_0(\Delta_{k,r})} = \frac{1}{m_0(\Delta_{k,r})} \int_{\Delta_{k,r}} f(x) m_0(dx)$$

(où  $Q_B(A) = m(A \times B)$ , pour tout  $A \subset R$ )

et nous poserons pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in \Delta_{k,r}$ ,  $\bar{F}_k(x) = \bar{F}_{k,r}$ .

Dans la suite, on prend  $B = [0, v[$ ,  $v \in \mathbb{R}^+$ , et on fait les hypothèses suivantes :

(a)  $\mu^*(C)$  a des moments de tous les ordres ( $C = B_1 \times \mathbb{R}^+$ ,  $B_1 \in \mathcal{B}_b^+$ ).

(b)  $\exists H > 0$  ;  $\forall j > 2$ ,  $|E[(\mu^*(C) - m(C))^j]| < \frac{1}{2} H^{j-2} \text{Var}[\mu^*(C)]$  ( $C = B_1 \times \mathbb{R}^+$

ou  $C = B_1 \times [0, v[$ ,  $B_1 \in \mathcal{B}_b^+$ ,  $v \in \mathbb{R}^+$ ).

(c)  $\exists \alpha > 0$  ;  $\forall \Delta \in \mathcal{B}_b^+$ ,  $m(\Delta \times [0, v[) > \alpha \lambda(\Delta)$ , où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue.

( $\alpha$  dépend de  $m$  et de  $v$ ).

(d)  $\exists N_0 \in \mathbb{R}_+^*$  ;  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,  $y > x$ , alors  $|f(x) - f(y)| < N_0 |x - y|$

et on note :  $\Delta_n = \int_0^{d(n)} |f_n(x) - f(x)| dx$ , où  $d(n)$  est une fonction croissante

de  $n$ .

## 2- Théorème 1 : - Si $\mu^*$ vérifie de plus la condition

(A)  $\exists M(m) > 0$  ;  $\text{Var}[\mu^*(C)] < M(m)m(C) = M(m)E[\mu^*(C)]$

(où  $C = B_1 \times \mathbb{R}^+$  ou  $C = B_1 \times [0, v[$ ,  $B_1 \in \mathcal{B}_b^+$ ,  $v \in \mathbb{R}^+$ ) et si  $d(n) = \text{Log} n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{k \text{Log} n} = +\infty$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log} n}{k} = 0$ , alors  $\Delta_n$  converge presque complètement vers 0.

Soit  $R_k = \{r \in \mathbb{N}^* ; \Delta_{k,r} \cap [0, d(n)] \neq \emptyset\}$  et soit  $\varepsilon > 0$ . On a, pour  $n$  assez grand :

$$\begin{aligned} \Delta_n &< \sum_{r \in R_k} \frac{1}{k} \sup_{x \in \Delta_{k,r}} |f_n(x) - f(x)| \\ &< \frac{1}{k} \sum_{r \in R_k} [ |f_n(x) - \bar{F}_k(x)| + \omega_f(\Delta_{k,r}) ], \quad (x \in \Delta_{k,r}) \\ &< \frac{1}{k} \sum_{r \in R_k} [ |f_n(x) - \bar{F}_k(x)| + \frac{N_0}{k} ] \end{aligned}$$

(où  $\omega_f(\Delta_{k,r})$  est l'oscillation de  $f$  sur  $\Delta_{k,r}$ ). D'où (puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } n}{k} = 0$ )

et  $\text{Card } R_k < 1 + k \text{Log } n$ )

$$\begin{aligned} \Pr\{\Delta_n > \varepsilon\} &< \sum_{r \in R_k} \Pr\{|f_n(x) - \bar{f}_k(x)| + \frac{N_0}{k} > \frac{\varepsilon k}{\text{Card } R_k}\} \\ &< \sum_{r \in R_k} \Pr\{|f_n(x) - \bar{f}_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2 \text{Log } n}\} \end{aligned}$$

Posons  $\varepsilon(n) = \frac{\varepsilon}{2 \text{Log } n}$ . En suivant la méthode utilisée dans [5] (et puis

$\varepsilon(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ) on peut démontrer, pour  $n$  assez grand :

$$\Pr\{|f_n(x) - \bar{f}_k(x)| > \varepsilon(n)\} < 4 \exp(-nh_0 \alpha \frac{\varepsilon(n)^2}{k})$$

où  $h_0$  est une constante positive. Donc pour  $n$  assez grand, on a :

$$\begin{aligned} \Pr\{\Delta_n > \varepsilon\} &< 4 \text{Card } R_k \exp(-nh_0 \alpha \frac{\varepsilon(n)^2}{k}) \\ &< 4(1+n^2) \exp(n) (-nh_0 \alpha \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{1}{k \text{Log}^3 n}) \quad (2) \end{aligned}$$

Il est clair que le dernier terme est le terme général d'une série convergente.

Théorème 2 : - Sous les hypothèses du théorème 1, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\Delta_n] = 0$ .

On a  $\Delta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.c.} 0$ , donc  $\Delta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p} 0$  ; il suffit alors de démontrer que

la famille  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est équi-intégrable à partir d'un certain rang [3] ; pour

cela, on a pour  $n$  assez grand :

$$\begin{aligned} \Delta_n &< \frac{1}{k} \sum_{r \in R_k} [|f_n(x) - \bar{f}_k(x)| + \frac{N_0}{k}] \\ &< \frac{1}{k} [\text{Card } R_k + \sum_{r \in R_k} \frac{N_0}{k}] , \quad (\text{car on a : } \forall n \in \mathbb{N}, 0 < f_n, \bar{f}_k < 1) \\ &< \frac{1}{k} (N_0 + 1)(1 + K \text{Log } n) \end{aligned}$$

d'où, pour  $n$  assez grand

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_n > \varepsilon} \Delta_n(\omega) P(d\omega) &< \frac{1}{k} (N_0+1)(1+k \log n) \Pr\{\Delta_n > \varepsilon\} \\ &< 4(N_0+1)(1+\log n)(1+k \log n) \exp_{(n)}(-n h_0 \alpha \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{n}{k \log^3 n}) \\ &< 16(N_0+1) n^3 \exp_{(n)}(-n h_0 \alpha \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{1}{k \log^3 n}) \\ &< 16(N_0+1) \exp_{(n)}(3-h_0 \alpha \frac{\varepsilon^2}{4}) = \psi(n, \varepsilon), \quad (\text{Car } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{k \log^3 n} = +\infty) \end{aligned}$$

si on fait tendre  $\varepsilon$  vers l'infini alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour  $n$  assez grand (soit par exemple pour  $n > N_1$ ) et pour tout  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , on a

$$3 - h_0 \alpha \frac{\varepsilon^2}{4} < 0 \text{ et } \psi(n, \varepsilon) < 16(N_0+1) \exp_{(2)}(3 - h_0 \alpha \frac{\varepsilon^2}{4})$$

donc, pour tout  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , on a :

$$\sup_{n > N_1} \int_{\Delta_n > \varepsilon} \Delta_n(\omega) P(d\omega) < \sup_{n > N_1} \psi(n, \varepsilon) < 16(N_0+1) \exp_{(2)}(3 - h_0 \alpha \frac{\varepsilon^2}{4}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +\infty} 0$$

d'où le résultat.

- (1)  $\forall A \subset \mathbb{R}$ , ( $A$  borné),  $m(A \times \mathbb{R}^+) < +\infty$
- (2)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp_{(n)}(x) = n^x$ .
- (3)  $\omega \in \Omega$ , où  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  est l'espace probabilisé sur lequel  $\mu^*$  est défini.

### Références bibliographiques

- [1] J. GEFFROY et H. ZEBOLON, sur certaines convergences stochastiques des mesures aléatoires et des processus ponctuels, Comptes rendus, 280, série A, 1975, p. 291-293.
- [2] A. KARR, Derived random measures. Stochastic Process. Appl., 8, 1978, p. 159-169.
- [3] J. NEVEU, Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson.
- [4] S. SALEH, Mesure composite aléatoire, Pub. Inst. Stat. Univ. XXIX, fasc. 3-4, 1984, p. 59-67.
- [5] S. SALEH, Estimation de la distribution locale moyenne d'une mesure composite aléatoire, Comptes-rendus, 301, série I, 1985, p. 545-548.



Reçu en Septembre 1988

Université Paris VI  
L.S.T.A.  
Tour 45-55, E3  
4 Place Jussieu  
75252 PARIS Cedex 05