



HAL
open science

Choix des investissements : la règle du "plancher moyen" nul

Max Pinhas

► **To cite this version:**

Max Pinhas. Choix des investissements : la règle du "plancher moyen" nul. Annales de l'ISUP, 1988, XXXIII (2), pp.89-95. hal-03673594

HAL Id: hal-03673594

<https://hal.science/hal-03673594>

Submitted on 20 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CHOIX DES INVESTISSEMENTS : LA RÈGLE DU "PLANCHER MOYEN" NUL

Max PINHAS

Le critère à l'exposé duquel nous consacrons la présente note a pour objet le classement de perspectives aléatoires conformes au schéma suivant :

. à l'instant $t=0$ est effectuée une dépense d'investissement qui s'élève à $a > 0$, tandis que le fonds de réserve (trésorerie initiale) est placé au niveau $x > 0$;

. au cours de l'exercice le total des coûts varie de façon déterministe et proportionnelle à t : d'une part $i(a+x)t$, amortissement de a et x par rapport à un horizon infini (i taux d'intérêt), d'autre part ct charges de fonctionnement, $c > 0$;

. quant au montant des recettes afférentes à la période $[0, t]$ nous le supposons aléatoire et représentable par un processus stochastique $X(t)$ tel que $E X(t) = m t$, ($m > c$) .

Ainsi le fonds de réserve évolue-t-il par hypothèse selon la formule $x + X(t) - [c + i(a+x)]t$.

Nous pouvons à présent énoncer l'idée directrice qui gouverne notre critère : imposer à ce fonds qu'en moyenne son plancher relativement à l'horizon infini ne se situe pas au dessous de zéro. L'application de cette règle a pour conséquence d'associer à chaque projet une fonction de demande de monnaie $i = f_a(r-c)$, $r = x+a$, qu'il convient de confronter à l'offre de monnaie existante $i = g(r)$. La connaissance de l'équilibre (r^*, i^*) permet ensuite d'affecter à cette même perspective le réel $\gamma^* = m - c - i^* r^*$ qui mesure le gain moyen unitaire net qu'elle procure. Il apparaît alors raisonnable de décréter que plus grande est la valeur de γ^* observée meilleur est le classement du projet en question.

Indiquons enfin que nous avons choisi pour mettre en oeuvre ce critère le cadre des processus de Paul Lévy. Les avantages de cette spécification nous ont déjà séduit (2) :

- . disposer d'un modèle qui s'adapte avec souplesse à la réalité;
- . obtenir la plupart des résultats sous une forme explicite et aisément opératoire.

1. Préliminaire de calcul stochastique

Sont consignés dans ce paragraphe définitions et résultats mathématiques utiles à la compréhension du modèle exposé.

a) Processus de Paul Lévy

Il est d'usage d'appeler processus de Lévy toute famille $\{X(t), t \geq 0\}$ de variables aléatoires remplissant les quatre conditions :

. accroissements indépendants : pour $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ ($n \geq 2$) les v.a. $X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ sont mutuellement indépendantes, et $X(0) = 0$.

. accroissements à distribution homogène : la loi de $X(t_2) - X(t_1)$ ne dépend que de $t_2 - t_1$;

. processus continu en probabilité : $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X(t)| > \varepsilon) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0_+$;

. régularité des trajectoires : avec la probabilité 1, les trajectoires sont continues à droite et $X(t_-)$ existe $\forall t > 0$.

b) Une sous-classe de processus à trajectoires non décroissantes

Nous extrayons de l'ensemble précédent la sous-classe (1,3) des processus tels que $E e^{-\theta X(t)} = e^{-t \varphi(\theta)}$, $\forall t \geq 0$, $\forall \theta \geq 0$, où φ met la représentation $\varphi(\theta) = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\theta x}) x^{-2} H(dx)$. De son côté H désigne une mesure positive sur \mathbb{R}_+ qui vérifie :

. I intervalle borné $\Rightarrow H(I) < +\infty$; $\int_{x_-}^{+\infty} y^{-2} H(dy) < +\infty$, $\forall x > 0$;

. $\varphi(\theta) = m \theta - \frac{\sigma^2}{2} \theta^2 + \theta^2 \varepsilon(\theta)$;

. $\varphi'(\theta) = m - \sigma^2 \theta + \theta \varepsilon_1(\theta)$, $m > 0$.

. φ'' existe et l'on a $\varphi''(\theta) = - \int_0^{+\infty} e^{-\theta x} H(dx)$.

Il est alors licite d'affirmer que :

. φ est une fonction concave ; $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \varphi'(\theta) = 0$; $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(\theta)}{\theta} = 0$;

. $E X(t) = m t$, $\text{Var } X(t) = \sigma^2 t$;

. les trajectoires du processus sont non décroissantes.

La variable aléatoire L

Pour notre étude le principal attrait de la sous-classe retenue

réside en les deux propriétés de la grandeur $L = \inf_{t \geq 0} (X(t) - t)$, ($m > 1$) ,

que nous citons :

. L est bien une variable aléatoire (i.e. mesurabilité) ;

. la distribution de $-L$ est exponentielle, de paramètre $\eta > 0$,

solution de l'équation $\delta = \varphi(\delta)$ et donc $EL = -\frac{1}{\eta}$.

La règle du "plancher moyen" nul

Revenant sur la formule qui précise l'évolution du fonds de réserve :

$Z(t) = x + X(t) - [c + i(a+x)]t$, nous supposons désormais que X est un processus de Lévy, à trajectoires non décroissantes, de paramètre $m > c$, et dont la transformée de Laplace s'exprime à l'aide de la fonction φ .

Nous savons, d'après le paragraphe 1, que la contrainte $E \inf_{t \geq 0} Z(t) \geq 0$

i.e. la règle du "plancher moyen" non négatif, s'écrit $\eta x \geq c + i(a+x)$,

pourvu que m reste supérieur à $c + i(a+x)$, où η désigne la racine positive de

l'équation $\delta = \varphi\left(\frac{\delta}{c + i(a+x)}\right)$.

Examinons en détail ce qu'implique à l'égalité la contrainte précédente:

$\eta x = c + i(a+x)$. Par élimination de η il vient :

$i = \frac{x\varphi\left(\frac{1}{x}\right) - c}{a+x} = f_a(x)$. Adjoignant la condition naturelle $i \geq 0$ et posant

$\tau = a+x$ nous mettons à jour la demande de monnaie qui émane de la perspective

considérée : $i = f_a(\tau - a)$, $\tau > a$.

3. Etude de la fonction de demande

Nous dressons dans ce paragraphe la liste des propriétés générales de f_a qui découlent immédiatement de la concavité de φ et de l'hypothèse

- $f_a(x) = 0$ et $x > 0 \Leftrightarrow x = \bar{x}$, solution unique de $a\varphi(\frac{1}{x}) + c - (1 + \frac{a}{x})\varphi'(\frac{1}{x}) = 0$ et $\bar{x} < \hat{x}$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = 0$;
- f_a croît sur $]0, \hat{x}[$, puis décroît sur $] \hat{x}, +\infty[$, \hat{x} solution unique de $a\varphi(\frac{1}{x}) + c - (1 + \frac{a}{x})\varphi'(\frac{1}{x}) = 0$ et $\bar{x} < \hat{x}$;
- $\forall x > 0$ les couples $(x, i = f_a(x))$ vérifient la condition $m > c + i$.

Donc, sauf circonstance exceptionnelle, la demande de monnaie effective se réduira à la restriction : $i = f_a(r - a)$, $a + \bar{x} \leq \bar{r} \leq r \leq \hat{r} = a + \hat{x}$.

4. La procédure de classement

Supposant connue l'offre de monnaie $i = g(r)$, on détermine pour chaque projet le point d'intersection d'abscisse minimale des graphes de g et de la demande $i = f_a(r - a) : (r^*, i^*)$. Puis on attribue au projet la valeur $\gamma^* = m - c - i^* r^*$, qui constitue le gain moyen net par unité de temps.

Finalement nous préconisons de comparer les différentes perspectives aléatoires en concurrence à l'aide des valeurs correspondantes de γ^* .

5. Le cas particulier important des processus doublement exponentiels

Il importe que nous insistions sur le cas des processus doublement exponentiels, c'est-à-dire des processus de Poisson ainsi composés : arrivée ponctuelle des recettes au taux moyen λ et cumul de ces recettes supposées aléatoires indépendantes et de loi exponentielle à moyenne μ . En effet l'emploi de cette spécification présente un double profit :

- illustrer la théorie par une fonction de demande complètement explicite ;
- fournir une approximation commode du cas général grâce à l'adéquation des paramètres $m = \lambda \mu$ et $\sigma^2 = 2 \lambda \mu^2$.

La fonction de demande

Rappelons que dans le cas d'un processus X doublement exponentiel

$$\varphi(\theta) = \frac{\lambda \mu \theta}{1 + \mu \theta} \quad . \text{ Par suite } f_a(x) = \frac{x(\lambda \mu - c) - \mu c}{(a+x)(\mu+x)} \quad . \text{ D'où } \bar{x} = \frac{\mu c}{\lambda \mu - c}$$

$$\hat{x} = \frac{\mu c + \mu(\lambda[c(\mu-a) + a\lambda\mu])^{\frac{1}{2}}}{\lambda \mu - c} \quad , \text{ ainsi que la fonction de demande}$$

$$i = \frac{(\tau - a)(\lambda \mu - c) - \mu c}{\tau(\mu + \tau - a)} \quad , \quad \bar{\tau} \leq \tau \leq \hat{\tau} .$$

b) Influence de σ^2 sur le classement

Considérons deux projets caractérisés par les mêmes valeurs des

paramètres à une exception près : $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Si nous exprimons $f_a^{(1)}$ et $f_a^{(2)}$ à l'aide de (m, σ_1^2) et (m, σ_2^2) nous découvrons que : $\forall \tau > a$, $f_a^{(1)}(\tau - a) < f_a^{(2)}(\tau - a)$.

Dans de très nombreuses situations, par exemple si l'offre de monnaie est localement

indépendante de τ , cette inégalité uniforme entraînera $\{ \tau_1^* > \tau_2^* \text{ et } i_1^* \geq i_2^* \}$

et donc $\gamma_1^* < \gamma_2^*$.

Nous pouvons ainsi affirmer que pratiquement la procédure de classement

préconisée défavorise, comme cela était prévisible, le projet 1 face au projet 2

qui est de nature moins risquée. Signalons pour terminer qu'une conclusion analogue

subsiste dans le cas général de deux perspectives qui ne diffèrent que par leur

fonction φ : $\forall \theta > 0 \quad \varphi_1(\theta) < \varphi_2(\theta)$

(1) Lukacs E. "Fonctions caractéristiques" Dunod.

(2) Pinhas M. "Le concept de défaillance moyenne comme fondement de certaines tarifications actuarielles" (à paraître).

(3) Prabhu N.U. "Stochastic Storage Processes" Springer.

Annexe

Un autre mode de classement issu de la règle du "plancher moyen" nul

Ranger les perspectives aléatoires selon les valeurs de γ^* , comme nous l'avons précédemment conseillé, revient à rendre prioritaire la dimension "robustesse à long terme" de l'activité économique. En effet l'évolution moyenne du fonds de réserve, aussi longtemps qu'aucun profit n'est prélevé, demeure conforme à la loi $E Z^*(t) = x^* + \gamma^* t$, expression dont la partie principale, quand t tend vers l'infini, n'est autre que $\gamma^* t$.

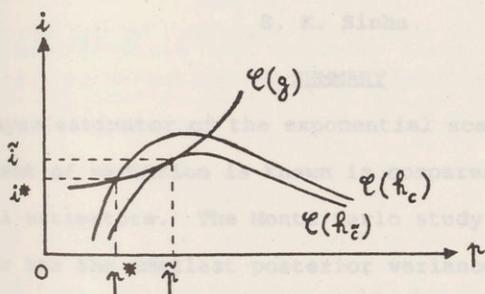
Mais on peut concevoir de façon tout aussi naturelle une seconde procédure de classement qui, respectant encore la règle du "plancher moyen" nul, donne la préférence à la "rentabilité immédiate". Explicitons ce point de vue. Soient $\mathcal{L}(g)$ le graphe de l'offre de monnaie $i = g(r)$, et $\mathcal{L}(h_c)$ celui de la demande de monnaie $i = h_c(r) = \frac{r}{r+a}$, l'indice c rappelle ici le niveau des charges unitaires de fonctionnement, amortissements exclus. Supposons ces graphes non disjoints et introduisons la grandeur $\tilde{c} = \max \{ c', c \leq c' < m, \mathcal{L}(h_c) \cap \mathcal{L}(g) \neq \emptyset \}$.

Le profit maximal que l'entrepreneur a le droit de distraire (par unité de temps) du fonds de réserve vaut par conséquent $\tilde{\delta} = \tilde{c} - c$.

Alors la substitution de $\tilde{\delta}$ à γ^* suffira-t-elle à définir le nouveau mode de classement.

Remarque : la ponction régulière du profit $\tilde{\delta}$ est rendue possible par un équilibre financier différent. La demande $h_c(\tau)$ étant fonction décroissante de c , on observera en général : $(\tilde{\tau}, \tilde{i})$ où $\tau^* < \tilde{\tau}$, $i^* \leq \tilde{i}$ et donc $m - \tilde{c} - \tilde{i} \tilde{\tau} = \tilde{y} < y^*$.

La croissance du fonds de réserve aura donc évidemment perdu de sa rapidité.



Reçu en Février 1987,
Version révisée Septembre 1988

Université des Sciences Sociales
Place Anatole-France
31042 TOULOUSE CEDEX