



HAL
open science

Fiabilité des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques

B. Ksir

► **To cite this version:**

B. Ksir. Fiabilité des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques. Annales de l'ISUP, 1988, XXXIII (1), pp.57-89. hal-03672697

HAL Id: hal-03672697

<https://hal.science/hal-03672697v1>

Submitted on 19 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FIABILITÉ DES SYSTÈMES GOUVERNÉS
PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

B. KSIR

ABSTRACT. We try to calculate probabilistic quantities choosen as measures of the reliability of systems described by processes with small diffusion in the one dimensionnel case. The basic tool used here is the asymptotic expansions of W.K.B. type of the transition density and the density of the probability at time t of the studied processes.

Key Words : measures of reliability, asymptotic expansions of W.K.B. type, eigenvalue of the L-operator.

INTRODUCTION. On étudie des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques de la forme :

$$dX^\epsilon(t) = b(X^\epsilon(t))dt + \epsilon \sigma(X^\epsilon(t)) dW(t)$$

où W est un processus de Wiener et ϵ un paramètre > 0 . Plus précisément on se donne un processus de Markov $X^\epsilon = (\Omega, \mathcal{d}, P, X^\epsilon(t), t \in \mathbb{R}_+)$ à valeurs dans l'espace $(\mathbb{R}_+, B_{\mathbb{R}_+})$ où $X^\epsilon(t)$ vérifie l'équation ci-dessus. On note $P_{\tilde{\lambda}_0}$ la distribution du processus X^ϵ et $E_{\tilde{\lambda}_0}$ son espérance lorsque $\tilde{\lambda}_0$ est la loi initiale. Si $\tilde{\lambda}_0 = \delta_x$,

mesure de Dirac au point x , on écrit P_x (respectivement E_x) au lieu de P_{λ_0} (respectivement E_{λ_0}). Nous donnons, lorsque les coefficients b et σ sont de classe C^k , $k > 3$, avec une croissance modérée à l'infini, un développement asymptotique à tous les ordres, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, de la densité $p_\epsilon(t, x, y)$ de la probabilité de transition du processus $X^\epsilon(t)$ ainsi que de la densité $v^\epsilon(t, y)$ de la probabilité au temps t , quand $\lambda_0(\cdot)$ est la densité de la loi initiale par rapport à la mesure de Lebesgue sur (R, B_R) . Par exemple Kiefer [1,2] a déjà mis la densité de transition $p_\epsilon(t, x, y)$ sous la forme $(\sum_0^\infty \epsilon^i \alpha_i) \exp -\frac{1}{\epsilon^2} \varphi$ où φ est le minimum sur un ensemble de trajectoires d'une fonction d'actions. Nous faisons, ici, un autre développement asymptotique de $p_\epsilon(t, x, y)$ sous des hypothèses différentes et à l'aide d'une technique différente qui permet de donner la fonction φ explicitement et surtout sous une forme particulière dont nous nous servons pour démontrer la formule du temps moyen de survie d'un système et celle du temps de survie d'un système (pour une probabilité de panne donnée).

Dans le cas de systèmes composés d'éléments réparables, si on est intéressé par leur fonctionnement sur un intervalle de temps limité $[0, T]$, on est amené à calculer (plutôt estimer) des quantités du type $P_x[\tau_D^\epsilon > T]$ ou bien $P_{\lambda_0}[\tau_D^\epsilon > T]$ où $\tau_D^\epsilon = \inf\{t > 0; X^\epsilon(t) \notin D\}$ et D un intervalle de R_+ tel que : si $X^\epsilon(t) \in D$ on dit que le système fonctionne normalement (de façon satisfaisante) et si $X^\epsilon(t) \notin D$ il est en panne. Ici, on est intéressé surtout par le calcul du temps moyen de survie d'un système. Ce problème est étudié en liaison avec la notion de valeur propre de l'opérateur $Lv = \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \sigma^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial b v}{\partial x}$. Enfin le dernier paragraphe est consacré

à l'étude de systèmes soumis à des dommages cumulatifs ; on cherche un temps T tel que $P_x[\tau_D^c > T] = \alpha(\epsilon)$ ou bien $P_{\lambda_0}[\tau_D^c > T] = \beta(\epsilon)$ avec $\alpha(\epsilon)$ et $\beta(\epsilon)$ choisis suffisamment petits.

I. THEOREMES DE DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DU TYPE W.K.B.

Considérons l'équation différentielle stochastique suivante, sur le demi-plan $]0, +\infty[$: $dX^c(t) = b(X^c(t)) dt + \epsilon \sigma(X^c(t)) dW(t)$ avec $X^c(0) = x$, où $W(t)$ est un processus de Wiener, b et σ sont deux applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soient g et f deux fonctions réelles définies par :

$$x = \int_0^x \frac{g(u)}{\sigma(u)} du \quad ; \quad f(x) = \int_0^x \frac{du}{\sigma(u)} .$$

g et f sont inverses l'une de l'autre. On pose :

$$\bar{B}(x) = \frac{b(g(x))}{\sigma(g(x))} - \frac{1}{2} \sigma'(g(x)) , \quad \bar{B}(\epsilon, x) = -\frac{(\bar{B})^2(x)}{2} - \frac{\epsilon^2}{2} (\bar{B})'(x) ,$$

$$\bar{G}_\epsilon(f(y)) = E \left(\exp \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial \epsilon^2} (\epsilon v(1-v), f(x) + \epsilon v(1-v)W(u) - \frac{u}{t} \epsilon v(1-v)W(t) + \frac{u}{t} v(1-v)[f(y) - f(x)]) dudv \right) .$$

THEOREME I.1. Sous les hypothèses suivantes :

i) Les applications b et σ sont lipschitziennes et de classe C^k , $k > 3$ et $\sigma(x) > 0$.

ii) Il existe $\epsilon_0 < \sqrt{2}$ tel que pour tout $\epsilon < \epsilon_0$ on ait :

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial \bar{B}(\epsilon, x)}{\partial x} / (1+x^2) < 0 .$$

iii) Les dérivées d'ordre ≥ 2 de $\bar{B}(\epsilon, x)$ par rapport à ϵ vérifient pour tout $\delta > 0$:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sup_{0 < \epsilon < \epsilon_0} \frac{\partial^m \bar{B}(\epsilon, x)}{\partial \epsilon^m} \cdot e^{-\delta x^2} = 0, \quad 2 \leq m \leq k-1.$$

Alors la probabilité de transition $P^\epsilon(t, x, \cdot)$ du processus $X^\epsilon(t)$ vérifiant l'équation différentielle stochastique ci-dessus admet une densité $p_\epsilon(t, x, y)$ de la forme suivante, lorsque ϵ tend vers zéro :

$$p_\epsilon(t, x, y) = \frac{1}{\sigma(y)\sqrt{2\pi t}} \left[\sum_{i=0}^{k-3} \epsilon^{2i} \alpha_{2i}(t, x, y) + \epsilon^{k-3} 0(1) \right] \exp - \frac{1}{2} \varphi(t, x, y)$$

$$\text{avec } \varphi(t, x, y) = \frac{1}{2t} \left(\int_x^y \frac{du}{\sigma(u)} \right)^2 + \frac{t}{2} (\bar{b})^2(f(x)) + \frac{2t}{3} \bar{b}(f(x)) (\bar{b})'(f(x)) \int_x^y \frac{du}{\sigma(u)} - \int_x^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(y)}{\sigma(x)}$$

$$\text{et } \alpha_i(t, x, y) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \bar{G}_\epsilon(f(y))}{\partial \epsilon^i} \Big|_{\epsilon=0}.$$

DEMONSTRATION. Posons provisoirement $\sigma(x) = 1$ et considérons le processus $\bar{X}^\epsilon(t) = x + \epsilon W(t)$ avec $\bar{X}^\epsilon(0) = X^\epsilon(0) = x$. Si $P^\epsilon(t, x, \cdot)$ est la probabilité de transition du processus $X^\epsilon(t)$, $t > 0$ alors pour tout borélien D les résultats sur l'absolue continuité des mesures [2], [3] donnent :

$$P_x\{X^\epsilon(t) \in D\} = P^\epsilon(t, x, D) = E_x \left\{ 1_D(\bar{X}^\epsilon(t)) \exp \left\{ \frac{1}{\epsilon} \int_0^t b(\bar{X}^\epsilon(u)) dW(u) - \frac{1}{2\epsilon^2} \int_0^t b^2(\bar{X}^\epsilon(u)) du \right\} \right\}.$$

Posons $\phi(t,x, \bar{X}^\epsilon(t)) = E\left\{\exp\left\{\frac{1}{\epsilon} \int_0^t b(\bar{X}^\epsilon(u)) dW(u) - \frac{1}{2\epsilon^2} \int_0^t b^2(\bar{X}^\epsilon(u)) du\right\} / \bar{X}^\epsilon(t)\right\}$.

Cette espérance est finie à cause de l'hypothèse ii). Alors on obtient :

$$\begin{aligned} P^\epsilon(t,x,D) &= E_x\{1_D(\bar{X}^\epsilon(t)) \phi(t,x, \bar{X}^\epsilon(t))\} = \int 1_D(y) \phi(t,x,y) P_x[\bar{X}^\epsilon(t) \in dy] \\ &= \int_D \phi(t,x,y) P_x[(x+\epsilon W(t)) \in dy] = \int_D \frac{\phi(t,x,y)}{\epsilon \sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t\epsilon^2}\right] dy. \end{aligned}$$

Donc la probabilité de transition $P^\epsilon(t,x,D)$ admet une densité $p_\epsilon(t,x,y)$ donnée par :

$$p_\epsilon(t,x,y) = \frac{\phi(t,x,y)}{\epsilon \sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t\epsilon^2}\right].$$

Maintenant nous allons transformer l'expression $\phi(t,x,y)$. Pour cela posons $A(x) = \int_0^x b(u) du$. La formule d'ITO appliquée à la fonction $A(x)$ nous donne :

$$A(\bar{X}^\epsilon(t)) - A(\bar{X}^\epsilon(0)) = \int_0^t \frac{\partial A(\bar{X}^\epsilon(u))}{\partial x} d\bar{X}^\epsilon(u) + \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 A(\bar{X}^\epsilon(u))}{\partial x^2} du.$$

Comme $d\bar{X}^\epsilon(u) = \epsilon dW(u)$, $\frac{\partial A(x)}{\partial x} = b(x)$ et $\bar{X}^\epsilon(0) = 0$, alors :

$$\epsilon \int_0^t b(\bar{X}^\epsilon(u)) dW(u) = A(\bar{X}^\epsilon(t)) - A(x) - \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 A(\bar{X}^\epsilon(t))}{\partial x^2} du.$$

Soit encore :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t b(\bar{X}^\varepsilon(u)) dW(u) = \frac{1}{\varepsilon^2} (A(\bar{X}^\varepsilon(t)) - A(x)) - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 A(\bar{X}^\varepsilon(u))}{\partial x^2} du .$$

D'où :

$$\begin{aligned} \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t b(\bar{X}^\varepsilon(u)) dW(u) - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t b^2(\bar{X}^\varepsilon(u)) du\right\} &= \exp\left\{-\frac{1}{2} (A(\bar{X}^\varepsilon(t)) - A(x)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial b(\bar{X}^\varepsilon(u))}{\partial x} du - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t b^2(\bar{X}^\varepsilon(u)) du\right\} . \\ &= \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} (A(\bar{X}^\varepsilon(t)) - A(x)) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t B(\varepsilon, \bar{X}^\varepsilon(u)) du\right\} , \end{aligned}$$

$$\text{avec } B(\varepsilon, x) = -\frac{1}{2} b^2(x) - \frac{\varepsilon^2}{2} b'(x) .$$

Posons $\theta_t(\varepsilon) = \int_0^t B(\varepsilon, \bar{X}^\varepsilon(u)) du$. La formule de Taylor-Laplace d'ordre 2, avec reste intégral, nous donne :

$$\theta_t(\varepsilon) = \theta_t(0) + \varepsilon \theta_t'(0) + \varepsilon^2 \int_0^1 \theta_t''(\varepsilon v(1-v)) dv .$$

Calculons $\theta_t(0)$ et $\theta_t'(0)$.

$$\theta_t(0) = \int_0^t B(0, x) du = -\frac{t}{2} b^2(x) .$$

$$\begin{aligned} \theta_t'(0) &= \int_0^t \frac{\partial B}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \bar{X}^\varepsilon(u)) du = -\int_0^t (b(\bar{X}^\varepsilon(u)) b'(\bar{X}^\varepsilon(u)) W(u) + \varepsilon b'(\bar{X}^\varepsilon(u)) + \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} b''(\bar{X}^\varepsilon(u)) W(u)) du . \end{aligned}$$

$$\theta_t'(0) = -\int_0^t b(x) b'(x) W(u) du .$$

Posons $u = ts$. Alors $\theta_t'(u) = -t \int_0^1 b(x)b'(x)W(ts)ds$. Or $W(ts) = \sqrt{s}W(t)$.

Donc :

$$\theta_t'(0) = -tb(x)b'(x)W(t) \int_0^1 \sqrt{s} ds = -\frac{2t}{3}b(x)b'(x)W(t).$$

Il s'ensuit que :

$$\phi(t, x, \bar{X}^\varepsilon(t)) = E\left\{ \exp\left[\frac{1}{\varepsilon^2}(A(\bar{X}^\varepsilon(t)) - A(x)) + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t B(\varepsilon, \bar{X}^\varepsilon(u)) du \right] / \bar{X}^\varepsilon(t) \right\}$$

$$= \exp\left[\frac{1}{\varepsilon^2}(A(\bar{X}^\varepsilon(t)) - A(x)) E\left\{ \exp\left[\frac{\theta_t'(0)}{\varepsilon^2} + \frac{\theta_t''(0)}{\varepsilon} + \int_0^1 \theta_t''(\varepsilon v(1-v)) dv \right] / \bar{X}^\varepsilon(t) \right\} \right].$$

$$= \exp\left[\frac{1}{\varepsilon^2}(A(\bar{X}^\varepsilon(t)) - A(x)) - \frac{t}{2\varepsilon^2}b^2(x) \right] E\left\{ \exp\left(-\frac{2t}{3}b(x)b'(x)\frac{W(t)}{\varepsilon}\right) x \exp\left[\int_0^1 \theta_t''(\varepsilon v(1-v)) dv \right] / \bar{X}^\varepsilon(t) \right\}$$

$$= \exp\left[\frac{1}{\varepsilon^2}(A(\bar{X}^\varepsilon(t)) - A(x)) - \frac{tb^2(x)}{2\varepsilon^2} \right] E\left\{ \exp\left(-\frac{2tb(x)b'(x)\varepsilon W(t)}{\varepsilon^2}\right) x \exp\left[\int_0^1 \theta_t''(\varepsilon v(1-v)) dv \right] / \bar{X}^\varepsilon(t) \right\}.$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon^2}[-A(\bar{X}^\varepsilon(t)) + A(x) + \frac{t}{2}b^2(x) + \frac{2t}{3}b(x)b'(x)]\bar{X}^\varepsilon(t) - x \right] x E\left\{ \exp\left[\int_0^1 \theta_t''(\varepsilon v(1-v)) dv \right] / \bar{X}^\varepsilon(t) \right\}.$$

Introduisons le processus $\eta_\epsilon(u) = \epsilon W(u) - \frac{u}{t} \epsilon W(t)$. $\bar{X}^\epsilon(u)$ s'écrit alors :

$$\bar{X}^\epsilon(u) = x + \epsilon W(t) = x + \eta_\epsilon(u) + \frac{u}{t} \epsilon W(t) .$$

Il est facile de montrer que $\eta_\epsilon(u)$ est indépendant de $w(t)$. Comme l'exponentielle est une fonction continue alors on peut appliquer le lemme 2, page 92, chapitre 3, [4] à l'espérance conditionnelle ci-dessus.

$$\begin{aligned} E\left\{ \exp \int_0^1 \theta_t''(\epsilon v(1-v)) dv \middle/ \bar{X}^\epsilon(t) \right\} &= E\left\{ \exp \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 B}{\partial \epsilon^2}(\epsilon v(1-v), \bar{X}^\epsilon(u)) dudv \middle/ \bar{X}^\epsilon(t) \right\} \\ &= E\left\{ \exp \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 B}{\partial \epsilon^2}(\epsilon v(1-v), x + \eta_\epsilon(u) + \frac{u}{t} \epsilon v(1-v) W(t)) dudv \middle/ \bar{X}^\epsilon(t) \right\} \\ &= G_\epsilon(\bar{X}^\epsilon(t)) , \end{aligned}$$

$$\text{où } G_\epsilon(y) = E\left\{ \exp \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 B}{\partial \epsilon^2}(\epsilon v(1-v), x + \eta_\epsilon(u) + \frac{\epsilon u}{t} v(1-v)[y-x]) dudv \right\} .$$

La densité $p_\epsilon(t, x, y)$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} p_\epsilon(t, x, y) &= \frac{G_\epsilon(y)}{\sqrt{2\pi t}} \exp -\frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{(y-x)^2}{2t} + A(x) - A(y) + \frac{t}{2} b^2(x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2t}{3} b(x)b'(x)[y-x] \right] . \end{aligned}$$

Passons au cas où $\sigma(\cdot) \neq 1$.

Soient g et f deux fonctions réelles définies par $x = \int_0^{g(x)} \frac{du}{\sigma(u)}$ et

$f(x) = \int_0^x \frac{du}{\sigma(u)}$. Introduisons la diffusion :

$$Y^E(t) = f(X^E(t)) = \bar{B}(X^E(t)) + \epsilon W(t)$$

avec $\bar{B}(x) = \frac{b(g(x))}{\sigma(g(x))} - \frac{1}{2} \sigma'(g(x))$. La densité de la probabilité de

transition $\bar{p}_\epsilon(t, x, y)$ du processus $Y^E(t)$ est donnée par l'expression $p_\epsilon(t, x, y)$ ci-dessus en y remplaçant $A(x)$ par $\bar{A}(x) = \int_0^x \bar{B}(u) du$ et $B(x)$

par $\bar{B}(\epsilon, x) = -\frac{(\bar{B})^2(x)}{2} - \frac{\epsilon^2}{2} (\bar{B})'(x)$. D'autre part la nouvelle

expression de $p_\epsilon(t, x, y)$ de $Y^E(t)$ vérifie :

$$p_\epsilon(t, x, y) = \bar{p}_\epsilon(t, f(x), f(y)) f'(y) = \frac{1}{\sigma(y)} p_\epsilon(t, f(x), f(y)), \text{ puisque}$$

on travaille dans un cadre markovien. Or :

$$\bar{A}(f(x)) = \int_0^{f(x)} \left[\frac{b(g(y))}{\sigma(g(y))} - \frac{1}{2} \sigma'(g(y)) \right] dy.$$

En substituant dans cette intégrale $g(y) = z$, on obtient :

$$p_\epsilon(t, x, y) = \frac{\bar{G}_\epsilon(f(y))}{\sigma(y) \sqrt{2\pi t}} \exp - \frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{1}{2t} \left(\int_x^y \frac{du}{\sigma(u)} \right)^2 - \int_x^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(y)}{\sigma(x)} \right. \\ \left. + \frac{t}{2} (\bar{B})^2(f(x)) + \frac{2t}{3} \bar{B}(f(x)) (\bar{B})'(f(x)) \int_x^y \frac{du}{\sigma(u)} \right],$$

où $\bar{G}_\epsilon(\cdot)$ est l'expression de $G_\epsilon(\cdot)$ en y remplaçant $B(\epsilon, \cdot)$ par $\bar{B}(\epsilon, \cdot)$.

$$\bar{G}_\varepsilon(f(y)) = E\left\{\exp \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial c^2}(\varepsilon v(1-v), f(x) + \eta(u) + \frac{u}{\varepsilon v(1-v)} [f(y) - f(x)]) du dv\right\}$$

Mais

$$\int_0^t \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial c^2}(\varepsilon v(1-v), f(x) + \eta(u) + \frac{u}{\varepsilon v(1-v)} [f(y) - f(x)]) du < \int_0^t [1 + f(x) + \eta(u) + \frac{u}{\varepsilon v(1-v)} [f(y) - f(x)]]^2 du \quad (\text{Grâce à})$$

l'hypothèse ii).

$$< t \int_0^1 (1 + [f(x) + \eta(ts) + s(f(y) - f(x))])^2 ds \quad (\text{après avoir posé})$$

$$\frac{u}{t} = s).$$

Donc pour démontrer que $\bar{G}_\varepsilon(y) < +\infty$ il suffit d'avoir :

$$E\left\{\exp \int_0^1 \eta^2(ts) ds\right\} < +\infty. \quad \text{Or le théorème de Jensen nous permet}$$

$$\text{d'écrire } \exp \int_0^1 \eta^2(ts) ds < \int_0^1 \exp(\eta^2(ts)) ds. \quad \text{En réalité, il}$$

$$\text{suffit de vérifier que } E\left\{\exp \int_0^1 \eta_\varepsilon^2(ts) ds\right\} < +\infty.$$

Démontrons alors que $E\{\exp \eta_\varepsilon^2(ts)\} < +\infty$. En effet $\eta_\varepsilon(ts)$ est un processus gaussien de moyenne nulle et de variance $\varepsilon^2 s(1-s)$.

Donc $\eta_\varepsilon^2 = \varepsilon^2 s(1-s) \xi^2$ avec ξ un processus gaussien centré et réduit.

$$\text{D'où } E\{\exp \eta_\varepsilon^2(ts)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\varepsilon^2 s(1-s) y^2 - \frac{1}{2} y^2) dy$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{1}{2}\right) y^2 dy < \sqrt{\frac{2}{(2-\varepsilon^2)}}.$$

Cette intégrale est finie pour tout $\epsilon < \epsilon_0$, avec $\epsilon_0 < \sqrt{2}$. Donc pour $0 < \epsilon < \epsilon_0$ on peut dériver sous le signe espérance dans l'expression de $\bar{G}_\epsilon(f(y))$. Grâce à l'hypothèse iii) du théorème on peut montrer

que $\frac{\partial \bar{G}}{\partial \epsilon}(f(y))$ est finie. Cela revient à refaire le calcul précédent. Il en est ainsi pour toutes les dérivées d'ordre $< k-3$.

Par conséquent l'application qui à ϵ fait correspondre $\chi(\epsilon) = \bar{G}_\epsilon(f(y))$ est de classe C^{k-3} sur l'intervalle $[0, \epsilon_0]$ et a pour développement asymptotique au voisinage de zéro :

$$\chi(\epsilon) = \sum_{i=0}^{k-3} \frac{\epsilon^i}{i!} \tilde{\alpha}_i(t, x, y) + \epsilon^{k-3} R_k(\epsilon),$$

$$\text{où } R_k(\epsilon) = \int_0^1 (\chi_{k-3}(x, \epsilon^2 v) + \chi_{k-3}(x, 0) \frac{(1-v)^{k-4}}{(k-4)!}) dv \text{ avec}$$

$$\chi_{k-3}(x, \epsilon) = \frac{\partial^{k-3}}{\partial \epsilon^{k-3}} \chi(\epsilon), \text{ la fonction } \tilde{\alpha}_i(t, x, y) \text{ est la valeur au}$$

point $\epsilon = 0$ de la dérivée d'ordre i ($i < k-3$) par rapport à ϵ de la fonction $\chi(\epsilon)$. On remarque que l'application $\epsilon \rightarrow \chi(\epsilon)$ est paire donc tous les termes d'ordre impair sont nuls dans le développement asymptotique ci-dessus. L'expression finale de la densité $p_\epsilon(t, x, y)$ est, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$:

$$p_\epsilon(t, x, y) = \frac{1}{\sigma(y)\sqrt{2\pi t}} \left[\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} \epsilon^{2i} \alpha_{2i}(t, x, y) + \epsilon^{k-3} U(1) \exp\left\{-\frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{y}{2t} \frac{dz}{\sigma(z)} \right]^2 + \frac{t}{2} (\bar{b})^2 (f(x)) + \frac{2t}{3} \bar{b}(f(x)) (\bar{b})' (f(x)) \int \frac{y}{x} \frac{dz}{\sigma(z)} - \int \frac{y}{x} \frac{b(z)}{\sigma^2(z)} dz + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(y)}{\sigma(x)} \right] \right]$$

$$\text{où on a posé } \alpha_{2i}(t, x, y) = \frac{1}{(2i)!} \tilde{\alpha}_{2i}(t, x, y).$$

LEMME I.1. Soit F une fonction réelle ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $h+1$. Supposons que sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ on ait $\max_{\alpha < x < \beta} F(x) = F(\alpha)$

et qu'il existe un voisinage du point $x = \alpha$ tel que :

$$F(x) - F(\alpha) = F^h(\alpha) \frac{(x-\alpha)^h}{h!} + F^{h+1}(\xi) \frac{(x-\alpha)^{h+1}}{(h+1)!}, \quad \xi \in (\alpha, x).$$

Si $G(x)$ est une fonction continue au point $x = \alpha$ et

$\int_{\alpha}^{\beta} |G(x)| \exp - \frac{1}{v_0} F(x) dx < +\infty$ pour un $v_0 > 0$, alors quand v tend

vers zéro on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} G(x) \exp - \frac{1}{v} F(x) dx = \frac{h^{-1} G(\alpha) \Gamma(\frac{1}{h}) v^{1/h} \exp - \frac{1}{v} F(\alpha)}{\sqrt[h]{F^h(\alpha)/h!}} [1 + o(v^{1/h})]$$

où $\Gamma(P) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$.

DEMONSTRATION. C'est une conséquence des lemmes page 554 [5].

Si les fonctions φ et α_i , $i=0,1,2,\dots$ définies dans le théorème I.1 satisfont aux conditions du lemme I.1 et si la densité de la loi initiale est à support compact (de R) on a le résultat suivant.

THEOREME I.2. Sous les hypothèses du théorème I.1 et si en outre :

iv) La densité $\lambda_0(x)$ de la loi initiale $\tilde{\lambda}_0$ est nulle en dehors d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ et continue au point $x = \alpha$.

v) La fonction $x \rightarrow \varphi(t, x, y)$ est $h+1$ fois dérivable et vérifie :

$$\varphi(t, x, y) - \varphi(t, \alpha, y) = \frac{(x-\alpha)^h}{h!} \frac{\partial^h \varphi(t, \alpha, y)}{\partial x^h} + \frac{(x-\alpha)^{h+1}}{(h+1)!} \frac{\partial^{h+1} \varphi(t, \xi, y)}{\partial x^{h+1}},$$

$\xi \in (\alpha, x)$, dans le voisinage du point $x = \alpha$.

vi) Les fonctions $x \rightarrow \alpha_i(t, x, y) \quad i=0, 1, \dots, k-3$

$x \rightarrow \chi_{k-3}(x, \epsilon)$

où $\chi_{k-3}(x, \epsilon) = \frac{\partial^{k-3}}{\partial \epsilon^{k-3}} \bar{\zeta}_\epsilon(f(y))$, sont continues au point $x = \alpha$.

Alors la densité de la loi de probabilité au temps t du processus $X^\epsilon(t)$ est de la forme suivante, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$:

$$v^\epsilon(t, y) = \frac{\epsilon^{2/h}}{\epsilon \sigma(y) \sqrt{2\pi t}} \left[\sum_{i=0}^{k-3} \epsilon^{2i} \beta_{2i}(t, y) + \epsilon^{k-3} 0(1) \right] [1 + O(\epsilon^{2/h})] \exp\left(-\frac{1}{2} \psi(t, y)\right)$$

où $\psi(t, y) = \varphi(t, \alpha, y)$, $\beta_j(t, y) = K \lambda_0(\alpha) \alpha_j(t, \alpha, y) \quad (j < k-3)$ avec

$$K = \frac{h^{-1} \Gamma(1/h)}{h \frac{\partial^h \varphi(t, \alpha, y)}{\partial x^h} / h!}.$$

DEMONSTRATION. D'après le théorème I.1. lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on a :

$$p_\epsilon(t, x, y) = \frac{1}{\epsilon \sigma(y) \sqrt{2\pi t}} \left[\sum_{i=0}^{k-3} \epsilon^{2i} \alpha_{2i}(t, x, y) + \epsilon^{k-3} R_k(\epsilon) \right] \exp\left(-\frac{1}{2} \varphi(t, x, y)\right)$$

avec $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_k(\epsilon) = 0$. Or $v^\epsilon(t, y) = \int_\alpha^\beta p_\epsilon(t, x, y) \lambda_0(x) dx$. Donc :

$$v^\epsilon(t, y) = \frac{1}{\epsilon \sigma(y) \sqrt{2\pi t}} \left[\sum_{i=0}^{k-3} \epsilon^{2i} \int_\alpha^\beta \alpha_i(t, x, y) \lambda_0(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \varphi(t, x, y)\right) dx + \right. \\ \left. + \epsilon^{k-3} \int_\alpha^\beta R_k(x) \lambda_0(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \varphi(t, x, y)\right) dx \right]$$

Le lemme ci-dessus s'applique aux intégrales :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \alpha_i(t, x, y) \lambda_0(x) \exp\left[-\frac{1}{\epsilon} \varphi(t, x, y)\right] dx \quad \text{pour } 0 < i < k-3.$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \alpha_i(t, x, y) \lambda_0(x) \exp\left[-\frac{1}{\epsilon} \varphi(t, x, y)\right] dx = \alpha_i(t, \alpha, y) \lambda_0(\alpha) \exp\left[-\frac{1}{\epsilon} \varphi(t, \alpha, y)\right] \times$$

$$\frac{\epsilon^{2/h} \Gamma\left(\frac{1}{h}\right)}{h \sqrt{\frac{\partial^h \varphi(t, \alpha, y)}{\partial x^h}} / h!} [1 + O(\epsilon^{2/h})].$$

Calculons le terme $\int_{\alpha}^{\beta} R_k(\epsilon) \lambda_0(x) \exp\left[-\frac{1}{\epsilon} \varphi(t, x, y)\right] dx$. On a déjà vu dans la démonstration du théorème I.1 que le reste $R_k(\epsilon)$ peut être évalué par la formule de Taylor-Laplace et vaut :

$$\int_0^1 (\chi_{k-3}(x, \epsilon v) + \chi_{k-3}(x, 0) \frac{(1-v)^{k-4}}{(k-4)!}) dv$$

où $\chi_{k-3}(x, \epsilon v) = \frac{\partial^{k-3} E_x}{\partial \epsilon^{k-3}} \exp \int_0^1 \theta_t''(\epsilon v(1-v)) dv$, $x \in [\alpha, \beta]$. Donc :

$$\int_{\alpha}^{\beta} R_k(\epsilon) \lambda_0(x) \exp\left[-\frac{1}{\epsilon} \varphi(t, x, y)\right] dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_0^1 (\chi_{k-3}(x, \epsilon v) + \right.$$

$$\left. + \chi_{k-3}(x, 0) \frac{(1-v)^{k-4}}{(k-4)!}) dv \right] \lambda_0(x) \exp\left[-\frac{1}{\epsilon} \varphi(t, x, y)\right] dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_0^1 \chi_{k-3}(x, \epsilon v) dv \right] \lambda_0(x) \exp\left[-\frac{1}{\epsilon} \varphi(t, x, y)\right] dx$$

$$+ \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_0^1 \chi_{k-3}(x, 0) \frac{(1-v)^{k-4}}{(k-4)!} dv \right] \lambda_0(x) \exp\left[-\frac{1}{\epsilon} \varphi(t, x, y)\right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[\int_{\alpha}^{\beta} x_{k-3}(x, \epsilon v) \lambda_0(x) \exp - \frac{1}{\epsilon} \varphi(t, x, y) dx \right] dv + \\
&\quad + \int_0^1 \left[\int_{\alpha}^{\beta} x_{k-3}(x, 0) \frac{(1-v)^{k-4}}{(k-4)!} \lambda_0(x) \exp - \frac{1}{\epsilon} \varphi(t, x, y) \right] dv . \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{h}\right) \epsilon^{2/h}}{h \sqrt{\frac{\partial^h \varphi(t, \alpha, y)}{\partial x^h} / h!}} \left[\lambda_0(\alpha) \exp - \frac{1}{\epsilon} \varphi(t, \alpha, y) \int_0^1 (x_{k-3}(\alpha, \epsilon^2 v) + \right. \\
&\quad \left. + x_{k-3}(\alpha, 0) \frac{(1-v)^{k-4}}{(k-4)!} dv) \right] [1 + O(\epsilon^{2/h})] .
\end{aligned}$$

Posons $\tilde{R}_k(\epsilon) = \int_0^1 (x_{k-3}(\alpha, \epsilon v) + x_{k-3}(\alpha, 0) \frac{(1-v)^{k-4}}{(k-4)!} dv)$; $\tilde{R}_k(\epsilon)$ est la valeur du reste $R_k(\epsilon)$ au point $x = \alpha$. Donc $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{R}_k(\epsilon) = 0$. Par

conséquent $v^\epsilon(t, y)$ s'écrit :

$$v^\epsilon(t, y) = \frac{\epsilon^{2/h}}{\epsilon \sigma(y) \sqrt{2\pi t}} [1 + O(\epsilon^{2/h})] \left[\sum_{i=0}^{k-3} \epsilon^{2i} \beta_{2i}(t, y) + \epsilon^{k-3} \tilde{R}_k(\epsilon) \right] \exp - \frac{1}{\epsilon} \psi(t, y)$$

avec $\beta_j(t, y) = K \alpha_j(t, \alpha, y) \lambda_0(\alpha)$ pour $j < k-3$, $K = \frac{\Gamma(1/h)}{h \sqrt{\frac{\partial^h \varphi(t, \alpha, y)}{\partial x^h} / h!}}$

et $\psi(t, y) = \varphi(t, \alpha, y)$.

$v^\epsilon(t, y)$ peut s'écrire également, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$:

$$v^\epsilon(t, y) = \frac{\epsilon^{2/h}}{\epsilon \sigma(y) \sqrt{2\pi t}} [1 + O(\epsilon^{2/h})] \left[\sum_{i=0}^{k-3} \epsilon^{2i} \beta_{2i}(t, y) + \epsilon^{k-3} 0(1) \right] \exp - \frac{1}{\epsilon} \psi(t, y) .$$

II. FIABILITE DE SYSTEMES

II.1 Systèmes composés d'éléments réparables

On considère un système S qui comporte r_n éléments où n est un paramètre que l'on fera tendre vers l'infini avec r_n . On se donne les fonctions $v_n(t)$ telles que $v_n(t)$ représente la proportion d'éléments en panne au temps t (un élément sous réparation est considéré comme un élément en panne). L'état du système est donc l'intervalle $[0,1]$. On suppose que le système S fonctionne normalement (de façon satisfaisante) si $v_n(t) \in [0, d_n[$ et qu'il est en panne si $v_n(t) \notin [0, d_n[$ où d_n est un point de l'intervalle $]0,1[$.

Considérons le modèle déterministe suivant :

$$\frac{d v_n(t)}{dt} = -\mu_n(v_n(t)) + \lambda_n(v_n(t)) ,$$

où $\mu_n(.)$ est le taux de réparation et $\lambda_n(.)$ le taux de panne .
 $\mu_n(.)$ et $\lambda_n(.)$ ne dépendent que de l'état présent du système. Une version stochastique de ce modèle peut être :

$$d v_n(t) = (-\mu_n(v_n(t)) + \lambda_n(v_n(t))) dt + \epsilon \sigma_n(v_n(t)) dW(t) ,$$

sur l'intervalle $]0,1[$ où $dW(t)$ est un processus gaussien de moyenne nulle et de variance dt ; c'est-à-dire les effets aléatoires sont modélisés par un bruit blanc. Le facteur $\sigma_n(.)$ est introduit pour prendre en considération les variations éventuelles du bruit blanc avec l'état du système.

HYPOTHESES.

$$a_1) r_n = nr, d_n = nd, \lambda_n(\cdot) = n\lambda(\frac{\cdot}{n}), \mu_n(\cdot) = n\mu(\frac{\cdot}{n}) \text{ et } \sigma_n(\cdot) = \sigma(\frac{\cdot}{n}).$$

$$a_2) \sigma(x) > 0 \text{ pour } x \in]0,1[\text{ et } \sigma(0) = \sigma(1) = 0.$$

L'hypothèse a_1) signifie que les taux de panne et de remplacement sont proportionnels au nombre d'éléments dans le système. L'hypothèse a_2) veut dire que lorsque le processus $v_n(t)$ atteint les bornes 0 ou 1 il évolue suivant un système dynamique déterministe.

Si on pose $X_n(t) = \frac{v_n(t)}{n}$ alors l'équation stochastique ci-dessus devient :

$$dX_n(t) = (-\mu(X_n(t)) + \lambda(X_n(t))) dt + \frac{1}{n} \sigma(X_n(t)) dW(t),$$

$X_n(t) \in]0,d[$; $X_n(t)$ est l'état normalisé du système.

A) FIABILITE DU SYSTEME S

Si on est intéressé par le fonctionnement du système S sur un intervalle de temps limité $[0,T]$ on est alors amené à calculer

(plutôt estimer) des quantités du type $P_x[\tau_d^n > T]$, $P_{\tilde{\lambda}_0^n}[\tau_d^n > T]$ où

$$\tau_d^n = \inf\{t > 0 ; X_n(t) \notin [0,d]\}, \quad 0 < d < r.$$

Dans ce paragraphe nous travaillons soit dans le contexte du théorème I.1 et du lemme I.1 (conditions A1 ci-dessous) soit dans

le contexte du théorème 1.2 et du lemme 1.1 (conditions A2 ci-dessous), avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et $b(x) = -\mu(x) + \lambda(x)$.

CONDITIONS A1

Nous reprenons les fonctions φ et α_i $i=0,2,4,\dots$ du théorème 1.1 auxquelles nous demandons de satisfaire aux hypothèses du lemme 1.1, à savoir :

- La fonction $y \rightarrow \varphi(t,x,y)$ vérifie : $\varphi(t,x,d) = \max_{d < y < r} \varphi(t,x,y)$

$$\text{et } \varphi(t,x,y) = \varphi(t,x,d) + (y-d)^h \frac{\partial^h \varphi(t,x,d)}{\partial y^h} + (y-d)^{h+1} \frac{\partial^{h+1} \varphi(t,x,\xi)}{\partial y^{h+1}};$$

$\xi \in (d,y)$, dans le voisinage du point $y = d$.

- Les fonctions $y \rightarrow \frac{1}{\sigma(y)} \alpha_i(t,x,y)$ $i=0,2,4,\dots$ sont

continues au point $y = d$.

- Il existe $\varepsilon_0 < \sqrt{2}$ tel que $\int_d^r \frac{|\alpha_i(t,x,y)|}{\sigma(y)} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon_0^2} \varphi(t,x,y)\right) dy < \varepsilon_0$

PROPOSITION II.1.1. Sous les hypothèses $a_1)$, $a_2)$ et les conditions A1 on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \text{Log } P_x[\tau_d^n < T] = -\varphi(T,x,d).$$

DEMONSTRATION. L'expression de $p_n(t,x,y)$ est donnée par le théorème 1.1:

$$p_n(t,x,y) = \frac{n}{\sigma(y)\sqrt{2\pi t}} \left[\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} \frac{1}{n^{2i}} \alpha_{2i}(t,x,y) + \frac{1}{n^{k-3}} \theta(1) \right] \exp(-n^2 \varphi(t,x,y)).$$

Or $\{\tau_d^n < T\} \iff \{X^n(T) \notin D\}$ avec $D = [0, d]$.

Pour les mêmes raisons que dans la démonstration du théorème I.2

on a :

$$P_x[\tau_d^n < T] = P_x[X^n(t) \notin D] = \int_d^r p_n(T, x, y) dy$$

$$= \frac{n}{\sqrt{2\pi T}} \left[\sum_{i=0}^{k-3} \frac{1}{n^{2i}} \int_d^r \frac{\alpha_{2i}(T, x, y)}{\sigma(y)} \exp(-n^2 \varphi(T, x, y)) dy \right] \left[1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{k-3} o(1) \right].$$

En appliquant le lemme I.1 on obtient le résultat voulu :

$$P_x[\tau_D^n < T] = \frac{n}{n^{2/h} \sqrt{2\pi T}} \left[\sum_{i=0}^{k-3} \frac{K \alpha_{2i}(T, x, d)}{\sigma(d)} \exp(-n^2 \varphi(T, x, d)) \right] \left[1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{k-3} o(1) \right]$$

$$\left[1 + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{1/h}\right) \right]$$

avec $K = h^{-1} \Gamma(1/h) / \sqrt{\frac{\partial^n \varphi(T, d, y)}{\partial x^h} / h!}$. Lorsque $n \rightarrow \infty$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \text{Log } P_x[\tau_D^n < T] = -\varphi(T, x, d).$$

CONDITIONS A2

- On suppose les hypothèses du théorème I.2 vérifiées et on reprend

les fonctions $\psi(t, y)$ et $\beta_i(t, y)$, $i = 0, 2, 4, \dots$

- La fonction $y \rightarrow \psi(t, y)$ satisfait à la 1ère condition du lemme I.1

sur l'intervalle $[d, \Delta]$; elle est $h+1$ fois dérivable.

- Les fonctions $y \rightarrow \frac{\beta_i(t, y)}{\sigma(y)}$, $i = 0, 2, 4, \dots$ satisfont à la 2^{ème}

condition du lemme I.1 au point $y = d$.

- Il existe $\epsilon_0 < \sqrt{2}$ tel que $\int_d^{\Delta} \frac{|\beta_i(t,y)|}{\sigma(y)} \exp(-n^2 \varphi(t,y)) dy < M$.

PROPOSITION II.1.2. Sous les hypothèses $a_1), a_2)$, les conditions A_1 et si la densité $\lambda_0(\cdot)$ de la loi initiale $\tilde{\lambda}_0$ est nulle en dehors de l'intervalle $[0, \beta]$ et continue au point $x = 0$; alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \text{Log } P_{\tilde{\lambda}_0}^n [\tau_D^n < T] = -\psi(T, d).$$

DEMONSTRATION. On utilise la même démarche que dans la proposition II.1.

EXEMPLE. Un cas simple est celui où le taux de réparation est une fonction linéaire $\mu(x) = ax$, $a > 0$ et le taux de panne est constant $\lambda(x) = \lambda$. Dans ce cas $b(x) = -ax + \lambda$. On voit immédiatement que toutes les hypothèses que nous avons utilisées dans nos résultats sont vérifiées. C'est vrai aussi lorsque les taux de panne et de réparation sont tous les deux linéaires.

REMARQUE 1. Nous avons fait une approximation d'un modèle discret ($X^n(t)$ est un processus discret en réalité) par un modèle continu. Bien entendu cette approximation n'est valable que lorsque le système comporte un grand nombre d'éléments c'est-à-dire quand r_n est assez grand soit n assez grand.

REMARQUE 2. La proposition II.1.1 existe sous d'autres hypothèses dans [6] sauf qu'ici la fonction φ est donnée explicitement.

B) TEMPS MOYEN DE SURVIE DU SYSTEME

Ici on se propose d'approximer le moyen de survie du système S. On montre d'abord que lorsque t est suffisamment grand la densité de la loi de probabilité au temps t , $v^n(t, y)$ du processus $X^n(t)$ s'écrit : $v^n(t, y) \approx e^{-ct} v^n(y)$. En effet, d'après le théorème I.2 si on se contente d'un développement asymptotique d'ordre 1 on a :

$$v^n(t, y) \approx \frac{n\beta_0(t, y)}{\sqrt{2\pi t}} \exp - n^2 \psi(t, y) ,$$

$$\text{où } \psi(t, y) = \int_{\alpha}^y \frac{\mu(u) - \lambda(u)}{\sigma^2(u)} du + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(y)}{\sigma(\alpha)} + \frac{1}{2t} \left(\int_{\alpha}^y \frac{du}{\sigma(u)} \right)^2 + \\ + \frac{t}{2} (\bar{B})^2(f(\alpha)) + \frac{2}{3} t \bar{B}(f(\alpha)) \int_{\alpha}^y \frac{du}{\sigma(u)} , \quad \text{et}$$

$\beta_0(t, y) = E[e^{tL(y, \tilde{\eta}_{\varepsilon})}] \Big|_{\varepsilon=0}$ (voir théorème I.2 pour l'expression de la fonction L) avec $0 < \alpha < d < 1$, $y \in [0, 1]$.

Posons $H(y) = \frac{2}{3} \bar{B}(f(\alpha)) (\bar{B})'(f(\alpha)) \int_{\alpha}^y \frac{du}{\sigma(u)}$; un développement limité

d'ordre 1 au voisinage du point d donne $H(y) \approx H(d) + (y-d)H'(d)$ et

$e^{tH(y)} \approx e^{tH(d)} (1 + t(y-d)H'(d))$. Lorsque t tend vers $+\infty$

$\frac{e^{tH(y)}}{t^{1/4}} \approx e^{tH(d)} t^{3/4} (y-d)H'(d)$ (puisque $\frac{1}{t^{1/4}}$ tend vers 0). Vu la forme

de $\beta_0(t, y)$ le même raisonnement entraîne $\beta_0(t, y) \approx e^{tQ(d)} t^{3/4} (y-d)Q'(d)$

où $Q(d)$ est une fonction indépendante de t (toujours pour t assez

grand). D'autre part lorsque t tend vers $+\infty$ $\exp\left[-\frac{n^2}{2t} \left(\int_{\alpha}^y \frac{du}{\sigma(u)}\right)^2\right]$ tend vers 1. Donc lorsque t est choisi suffisamment grand

$$v^n(t,y) \approx \frac{ne^{t(H(d)+Q(d))}}{\sqrt{2\pi}} t^{3/2} (y-d)^2 H'(d) Q'(d) \exp\left[-n^2 \int_{\alpha}^y \frac{\mu(u)-\lambda(u)}{\sigma(u)} du\right]$$

+ $\frac{1}{2} \log \frac{\sigma(y)}{\sigma(\alpha)} + \frac{t}{2} (\bar{b})^2 (f(\alpha))$. Autrement dit on peut séparer les

variables t et y dans $v^n(t,y)$ soit $v^n(t,y) \approx g(t)v^n(y)$, pour t assez grand. Or le processus $X^n(t)$ est markovien, donc $g(t) = e^{-ct}$, $c > 0$. $v^n(t,y)$ est bien de la forme $e^{-ct} v^n(y)$ lorsque t est assez grand. En outre la densité s'annule au point $y = d$. Ceci est réaliste puisque le système tombe en panne quand il aura atteint l'état d , c'est-à-dire lorsque le processus $X^n(t)$ atteint le point il y reste (d joue le rôle d'un état absorbant). Les considérations qui viennent d'être faites conviennent aux systèmes qui ne se détériorent pas rapidement, c'est le cas, par exemple, des systèmes hautement fiables (le taux de réparation dépasse largement le taux de panne). Puisque le point d joue le rôle d'un état absorbant alors que le temps de panne du système suit une loi exponentielle de paramètre c . Le problème revient à calculer $1/c$. Dans le but de trouver une formule pour c on cherche une solution de l'équation de FOKKER-PLANCK de la forme $v^n(t,y) \approx e^{-ct} v^n(y)$. L'équation de FOKKER-PLANCK s'écrit :

$$\frac{\partial v^n(t,y)}{\partial t} = \frac{1}{2n^2} \frac{\partial^2 (\sigma^2(y) v^n(t,y))}{\partial y^2} + \frac{\partial (\mu(y) - \lambda(y)) v^n(t,y)}{\partial y}.$$

En y remplaçant $v^n(t,y)$ par $e^{-ct} v^n(y)$ on obtient :

$$-c v^n(y) = \frac{1}{2n^2} \frac{\partial^2 \sigma^2(y) v^n(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial(\mu(y) - \lambda(y)) v^n(y)}{\partial y}.$$

Posons $w^n(y) = \sigma^2(y) v^n(y)$. Alors :

$$-c \frac{w^n(y)}{\sigma^2(y)} = \frac{1}{2n^2} \frac{\partial^2 w^n(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial(\mu(y) - \lambda(y)) / \sigma^2(y)}{\partial y}.$$

$w^n(y)$ apparaît donc comme la fonction propre associée à c . En

intégrant deux fois les deux membres de cette égalité, sur

l'intervalle $[0, d]$, on obtient :

$$c = \frac{-\frac{1}{2n^2} \left[\frac{dw^n(y)}{dy} + \frac{(\mu(y) - \lambda(y)) w^n(y)}{\sigma^2(y)} \right]_0^d}{\int_0^d \frac{w^n(y)}{\sigma^2(y)} dy}$$

Le problème est de connaître $w^n(y)$. En utilisant le théorème I.2 on peut donner une bonne approximation de $w^n(y)$ et donc une approximation de c .

Avant d'énoncer le résultat de ce paragraphe précisons que nous nous situons dans les hypothèses du théorème I.2 avec $\epsilon = \frac{1}{n}$ et $b(x) = -\mu(x) + \lambda(x)$. Nous reprenons aussi les fonctions ψ et β_i pour $i = 0, 2, 4, \dots$

PROPOSITION II.1.3. Sous les conditions ci-dessus on a :

$$c \approx \frac{-\frac{1}{2n^2} \left[\frac{d\omega^n(y)}{dy} + \frac{(\mu(y) - \lambda(y)) \omega^n(y)}{\sigma^2(y)} \right]_0^d}{\int_0^d \frac{\omega^n(y)}{\sigma^2(y)} dy}, \text{ pour } n \text{ grand,}$$

où $\omega^n(y) = K(n, y, t_0) \exp -n^2 \left[\int_{\alpha}^y \frac{\mu(u) - \lambda(u)}{\sigma^2(u)} du + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(y)}{\sigma(\alpha)} \right]$ avec $K(n, y, t_0) =$

$$= \frac{n}{\sigma(y) \sqrt{2\pi t_0}} \exp -n^2 \left(\frac{1}{2t_0} \left(\int_{\alpha}^y \frac{du}{\sigma^2(u)} \right)^2 + \frac{t_0}{2} (\overline{B})^2 (f(\alpha)) + \frac{2t_0}{3} \overline{B}(f(\alpha)) (\overline{B})' (f(\alpha)) \int_{\alpha}^y \frac{du}{\sigma(u)} \right)$$

le point t_0 vérifie $\lim_{t \rightarrow t_0} \text{Log} \frac{\beta_0(t, y)}{\sqrt{t}} = 0$.

DEMONSTRATION. Grâce au théorème 1.2 on a une première approximation pour $v^n(t, y)$:

$$v^n(t, y) \approx \frac{n \beta_0(t, y)}{\sigma(y) \sqrt{2\pi t}} \exp -n^2 \psi(t, y) \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Or par hypothèse $v^n(t, y) \approx e^{-ct} v^n(y)$. Donc :

$$v^n(y) \approx \frac{n e^{cy} \beta_0(t, y)}{\sqrt{2\pi t} \sigma(y)} \exp -n^2 \psi(t, y).$$

En explicitant $\psi(t, y)$ on obtient :

$$v^n(y) \approx \frac{n e^{ct} \beta_0(t, y)}{\sqrt{2\pi t} \sigma(y)} \exp -n^2 \left[\int_{\alpha}^y \frac{\mu(u) - \lambda(u)}{\sigma^2(u)} du + \frac{1}{2t} \left(\int_{\alpha}^y \frac{du}{\sigma^2(u)} \right)^2 + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(y)}{\sigma(\alpha)} + \frac{t}{2} (\overline{B})^2 (f(\alpha)) + \frac{2t}{3} \overline{B}(f(\alpha)) (\overline{B})' (f(\alpha)) \int_{\alpha}^y \frac{du}{\sigma(u)} \right]$$

ou encore :

$$\frac{v^n(y)}{\exp -n^2 \left[\int_{\alpha}^y \frac{\mu(u) - \lambda(u)}{\sigma^2(u)} du + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(y)}{\sigma(\alpha)} \right]} \approx \frac{n e^{ct} \beta_0(t, y)}{\sqrt{2\pi t} \sigma(y)} \exp -n^2 \left[\frac{1}{2t} \left(\int_{\alpha}^y \frac{du}{\sigma^2(u)} \right)^2 + \frac{2}{3} \overline{B}(f(\alpha)) (\overline{B})' (f(\alpha)) \int_{\alpha}^y \frac{du}{\sigma(u)} + \frac{t}{2} (\overline{B})^2 (f(\alpha)) \right].$$

Le membre de gauche ne dépend pas de t , donc la dérivée par rapport à t du membre de droite est nulle. Après dérivation par rapport à t et intégration sur l'intervalle $[t_0, t]$ on a :

$$\frac{v^n(y)}{\exp-n^2 \left[\int_{\alpha}^y \frac{\mu(u)-\lambda(u)}{\sigma^2(u)} du + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(y)}{\sigma(\alpha)} \right]} \approx K(n, y, t_0) \exp c t_0,$$

$$\text{où } K(n, y, t_0) = \frac{n}{\sqrt{2\pi t_0} \sigma(y)} \exp n^2 \left(\frac{1}{2t_0} \left(\int_{\alpha}^y \frac{du}{\sigma^2(u)} \right)^2 + \frac{t_0}{2} (\bar{B})^2 (f(\alpha)) + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} t_0 \bar{B}(f(\alpha)) (\bar{B})' (f(\alpha)) \int_{\alpha}^y \frac{du}{\sigma(u)} \right)$$

$$\text{et } t_0 \text{ vérifiant } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\beta_0(t, y)}{\sqrt{t}} = 0.$$

D'autre part on a déjà montré ci-dessus que :

$$c = \frac{-\frac{1}{2n^2} \left[\frac{d w^n(y)}{dy} + \frac{\mu(y)-\lambda(y)}{\sigma^2(y)} w^n(y) \right]_0^d}{\int_0^d \frac{w^n(y)}{\sigma^2(y)} dy}, \quad \text{avec } w^n(y) = \sigma^2(y) v^n(y).$$

$$\text{Posons } \omega^n(y) = K(n, y, t_0) \exp-n^2 \left[\int_{\alpha}^y \frac{\mu(u)-\lambda(u)}{\sigma^2(u)} du + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(y)}{\sigma(\alpha)} \right],$$

alors $w^n(y) = \sigma^2(y) v^n(y) = \omega^n(y) \exp c t$. Donc c est approximé par :

$$c \approx \frac{-\frac{1}{2n^2} \left[d \omega^n(y) + \frac{\mu(y)-\lambda(y)}{\sigma^2(y)} \omega^n(y) \right]_0^d}{\int_0^d \frac{\omega^n(y)}{\sigma^2(y)} dy}$$

REMARQUE 3.

- $w^n(y)$ est donc une approximation, pour n assez grand, de la fonction propre associée à c .

- Remarquons également que $w^n(y) = \frac{K(n,y,t_0)}{\sqrt{\lambda(n)}} [W_e^n(y)]^{1/2}$ où

$$W_e^n(y) = \lambda(n) \exp - 2n^2 \left[\int_{\alpha}^y \frac{\mu(u) - \lambda(u)}{\sigma^2(u)} du + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(y)}{\sigma(\alpha)} \right] \text{ est solution de}$$

l'équation de Fokker-Planck elliptique c'est-à-dire $W_e^n(y)$ vérifie :

$$\frac{1}{2n^2} \frac{\partial^2 \sigma^2(y) W_e^n(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial(\mu(y) - \lambda(y)) W_e^n(y)}{\partial y} = 0. \lambda(n) \text{ est une}$$

constante de normalisation de la densité. Autrement dit, la fonction propre associée à c peut être obtenue sans difficulté à partir de la densité indépendante du temps $W_e^n(y)$.

II.2 SYSTEMES AVEC DES DOMMAGES CUMULATIFS

On s'intéresse à un appareillage soumis à des dommages cumulatifs. Ces dommages sont dus soit à l'usure (effets corrosifs,...) soit à la fatigue (engins soumis à l'effort,...). On désigne par $x(t)$ la somme des dommages cumulés au temps t . Le processus $x(t)$ prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, \Delta]$ où 0 correspond à l'état neuf et Δ à l'état cassé de l'appareillage. Un modèle déterministe peut être :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Q(x(t)) \quad \text{avec } x(0) = x_0,$$

où Q est une fonction déterministe positive connue (donnée par la loi de Paris-Erdogan par exemple), x l'état initial et $t \in [0, T]$.

Une version aléatoire de ce modèle est :

$$\frac{dX^E(t)}{dt} = Y^E(t) Q(X^E(t)) \quad \text{avec } X^E(0) = x ,$$

où $Y^E(t)$ est un processus aléatoire représentant le phénomène de l'usure ou de la fatigue et ϵ un paramètre, $\epsilon > 0$. On considère $Y^E(t) = \lambda(X^E(t)) + R^E(t)$ où λ est déterministe positive et $R^E(t)$ un processus aléatoire de moyenne nulle. On suppose que la distribution de $R^E(t)$ dépend seulement de l'état $X^E(t)$ du système ; c'est-à-dire :

$$E(Y^E(t)/X^E(t)=y) = \lambda(y)$$

$$E(R^E(t)/X^E(t)=y) = 0$$

$$E((R^E(t))^2/X^E(t)=y) = \epsilon^2 \gamma^2, \quad \gamma > 0 \quad \text{et } \epsilon \text{ petit.}$$

Définissons une nouvelle variable $dS^E(t)$ par $dS^E(t) = R^E(t) dt$.

Alors $E(dS^E(t)/X^E(t)=y) = 0$ et $E((dS^E(t))^2/X^E(t)=y) = \epsilon^2 \gamma^2 dt$.

Sous toutes ces considérations, le modèle stochastique ci-dessus s'écrit :

$$\frac{dX^E(t)}{dt} = Q(X^E(t)) \lambda(X^E(t)) + Q(X^E(t)) \frac{dS^E(t)}{dt}, \quad X^E(0) = x .$$

Pour pouvoir appliquer les résultats du paragraphe I on est obligé de

prendre $dS^E(t)$ gaussien. Mais cette hypothèse pose un problème de modélisation puisque le processus $X^E(t)$, somme des dommages cumulés au temps t , est positif croissant. Pour éviter cette difficulté on ajoute la condition $\lambda(y) > \gamma$ pour tout y dans $[x, \Delta]$. Grâce à cette condition et au théorème 1, chapitre 1, page 20 [4] on peut montrer que $X^E(t)$ est positif croissant presque sûrement. En effet, soit $t_1 < t_2$; si $Q = 0$ on a immédiatement $X^E(t_1) = X^E(t_2)$. Si $Q > 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $Q(y) > \delta$ pour tout y dans $]0, \Delta]$ et on a :

$$X^E(t_2) - X^E(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} Q(X^E(s)) \lambda(X^E(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} Q(X^E(s)) dS^E(s).$$

Or $\int_{t_1}^{t_2} Q(X^E(s)) \lambda(X^E(s)) ds > \gamma \delta (t_2 - t_1)$ et d'autre part :

$$\begin{aligned} P_X \left[\left| \int_{t_1}^{t_2} Q(X^E(s)) dS^E(s) \right| > \delta (t_2 - t_1) \right] &= P_X \left[\left| \int_{t_1}^{t_2} Q(X^E(s)) dW(s) \right| > \delta (t_2 - t_1) \right] \\ &= P_X \left[\left| \int_0^u Q(X^E(t_1+v)) dW(t_1+v) \right| > \frac{\delta u}{\epsilon \gamma} \right] \\ &< P_X \left[\sup_{0 < u < T} \left| \int_0^u Q(X^E(t_1+v)) dW(t_1+v) \right| > \frac{\delta u}{\epsilon \gamma} \right] \\ &< \frac{\epsilon^2 \gamma^2}{\delta u} \int_0^u E_X (Q^2(X^E(t_1+v))) dv, \text{ (grâce} \end{aligned}$$

au théorème auquel on a fait référence ci-dessus),

$$< \frac{\epsilon^2 \gamma^2}{\delta u} \int_0^u M^2 dv = \frac{\epsilon^2 \gamma^2}{\delta} M^2,$$

car Q est continue sur $[0, \Delta]$ donc bornée, $0 < Q < M$.

Par conséquent $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_x \left[\left| \int_{t_1}^{t_2} Q(X^\epsilon(s)) ds \right| > \delta(t_2 - t_1) \right] = 0$.

Autrement dit $X^\epsilon(t_2) > X^\epsilon(t_1)$ P_x p.s., lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

Maintenant écrivons le modèle stochastique ci-dessus sous la forme :

$$dX^\epsilon(t) = Q(X^\epsilon(t)) \lambda(X^\epsilon(t)) dt + \epsilon \gamma Q(X^\epsilon(t)) dW(t), \quad X^\epsilon(0) = x.$$

Cette équation stochastique est bien du même type que celle étudiée dans le paragraphe I avec $b(y) = Q(y)\lambda(y)$ et $\sigma(x) = \gamma Q(y)$.

Enfin on se donne une amplitude critique d et on se propose de chercher un temps T tel que $P_x[\tau_d^\epsilon > T] = \alpha(\epsilon)$, avec $\alpha(\epsilon)$ choisi très petit et $\tau_d^\epsilon = \inf\{t > 0, X^\epsilon(t) \notin [x, d]\}$. Dans le cas où l'état initial n'est pas l'amplitude minimale détectable x mais un état aléatoire qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, \beta]$ avec une loi $\tilde{\lambda}_0$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est $\lambda_0(\cdot)$ avec $\lambda_0(y) = 0$ pour tout $y \notin [0, \beta]$, alors on cherche un temps T qui vérifie

$P_{\tilde{\lambda}_0}[\tau_d^\epsilon > T] = \beta(\epsilon)$, $\beta(\epsilon)$ très petit. Là encore selon le cas on se

place soit dans le contexte du théorème I.1 et du lemme I.1

(conditions B1) soit dans celui du théorème I.2 et du lemme I.1

(conditions B2).

CONDITIONS B1.

- Les hypothèses du théorème I.1 sont vérifiées avec $b(y) = Q(y)\lambda(y)$ et $\sigma(y) = \gamma Q(y)$. Donc, nous reprenons les fonctions $\varphi(t, x, y)$ et

$\alpha_i(t, x, y), i = 0, 2, 4, \dots$

- Les fonctions $y \rightarrow \varphi(t, x, y)$ et $y \rightarrow \frac{\alpha_i(t, x, y)}{\sigma(y)}$, $i = 0, 2, 4, \dots$

satisfont aux conditions du lemme I.1 sur l'intervalle $[d, \Delta]$.

φ est supposée $h+1$ fois dérivable par rapport à y .

CONDITIONS B2.

- Les hypothèses du théorème 1.2 sont vérifiées avec $b(y) = Q(y)\lambda(y)$, $\sigma(y) = YQ(y)$ et la densité $\lambda_0(\cdot)$ nulle en dehors de l'intervalle $[0, \beta]$. Nous reprenons aussi les fonctions $\psi(t, y)$ et $\beta_i(t, y)$,

$i = 0, 2, 4, \dots$

- Les fonctions $y \rightarrow \psi(t, y)$ et $y \rightarrow \beta_i(t, y)$ satisfont aux hypothèses du lemme I.1 sur l'intervalle $[d, \Delta]$. ψ est supposée $h+1$ dérivable par rapport à y .

PROPOSITION II.2.1. Sous les conditions B1, le temps T cherché est solution de l'équation :

$$AT^2 + BT + C = 0$$

avec $A = (\bar{b})^2 (f(x)) + \frac{2}{3} \bar{b}(f(x))(b')(f(x)) \int_0^d \frac{du}{\sigma(u)}$, $B = a - \int_x^d \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(d)}{\sigma(x)}$

$$C = \left(\int_x^d \frac{du}{\sigma(u)} \right)^2 \quad \text{et} \quad a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \text{Log}(1 - \alpha(\epsilon)) .$$

DEMONSTRATION. On a $P_x[\tau_d^\epsilon < T] = \int_d^\Delta p_\epsilon(t, x, y) dy$. D'après le théorème I.1

$$p_\epsilon(T, x, y) = \frac{1}{\epsilon \sqrt{2\pi T \sigma(y)}} \left[\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} \epsilon^{2i} \alpha_{2i}(T, x, y) + \epsilon^{k-3} \theta(1) \right] \exp - \frac{1}{2} \varphi(T, x, y).$$

En appliquant le lemme I.1 on déduit :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \text{Log } P_x[\tau_d^\epsilon < T] = -\varphi(T, x, d),$$

$$\text{où } \varphi(T, x, d) = \frac{1}{2T} \left(\int_x^d \frac{du}{\sigma(u)} \right)^2 + \frac{T}{2} (\bar{b})^2(f(x)) - \int_x^d \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(d)}{\sigma(x)} + \frac{2T}{3} (\bar{b})(f(x)) (\bar{b})'(f(x)) \int_x^d \frac{d(u)}{\sigma(u)}.$$

Mais $P_x[\tau_d^\epsilon < T] = 1 - \alpha(\epsilon)$; si on pose $a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \text{Log}(1 - \alpha(\epsilon))$

$$\text{on obtient } -a = \frac{1}{2T} \left(\int_x^d \frac{du}{\sigma(u)} \right)^2 + \frac{T}{2} (\bar{b})^2(f(x)) + \frac{2T}{3} (\bar{b})(f(x)) (\bar{b})'(f(x)) \int_x^d \frac{du}{\sigma(u)}$$

$$- \int_x^d \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(d)}{\sigma(x)}.$$

Soit encore :

$$AT^2 + BT + C = 0$$

$$\text{avec } A = \frac{1}{2} (\bar{b})^2(f(x)) + \frac{2}{3} (\bar{b})(f(x)) (\bar{b})'(f(x)) \int_x^d \frac{du}{\sigma(u)}, B = a - \int_x^d \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(d)}{\sigma(x)},$$

$$\text{et } C = \frac{1}{2} \left(\int_x^d \frac{du}{\sigma(u)} \right)^2.$$

PROPOSITION II.2.2. Sous les conditions B2 le temps T cherché est solution de l'équation :

$$AT^2 + BT + C = 0$$

avec $A = (\bar{b})^2 (f(\alpha)) + \frac{2}{3} (\bar{b}) (f(\alpha)) (\bar{b}') (f(\alpha)) \int_{\alpha}^d \frac{du}{\sigma(u)}$, $B = b - \int_{\alpha}^d \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sigma(d)}{\sigma(\alpha)}$

$$C = \left(\int_{\alpha}^d \frac{du}{\sigma(u)} \right)^2$$

et $b = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \text{Log}(1 - \beta(\epsilon))$.

DEMONSTRATION. Immédiat.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y.U. KIFER (1976), On the asymptotics of the transition density of processes with small diffusion. Theory of probability and its applications, Vol. 21, n° 3, pp. 513-522.
- [2] Y.U. KIFER (1974), Certain results concerning small random perturbations of dynamical systems. Theory of Proba. and its Appl. Vol. 19, n° 3.
- [3] A.V. SKOROHOD (1960), The differentiability of measures corresponding to random processes. Theory of probability and its applications, 5, pp. 40-49.
- [4] I.I. GIHMAN, A.V. SKOROHOD (1972), Stochastic differential equations. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York.
- [5] M.A. LAVRENT'EV and B.W. SHABAT (1967), Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Berlin Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften (en allemand).
- [6] M.I. FREIDLIN, A.D. WENTZELL (1984), Random perturbations of dynamical systems, Springer Verlag New-York-Berlin-Heidelberg-Tokyo.
- [7] V.P. MASLOV (1972), Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Paris, Dunod et Gauthier-Villars (études mathématiques).

Reçu en Juillet 1987

L.S.T.A. Université Paris VI
 Tour 45 - 55, E 3
 4, Place Jussieu
 75252 PARIS Cedex 05