



**HAL**  
open science

# Sur Les Processus Autoregressifs Dans Un Espace De Hilbert

Denis Bosq

► **To cite this version:**

Denis Bosq. Sur Les Processus Autoregressifs Dans Un Espace De Hilbert. Annales de l'ISUP, 1990, XXXV (2), pp.3-17. hal-03667353

**HAL Id: hal-03667353**

**<https://hal.science/hal-03667353v1>**

Submitted on 13 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LES PROCESSUS AUTOREGRESSIFS  
DANS UN ESPACE DE HILBERT

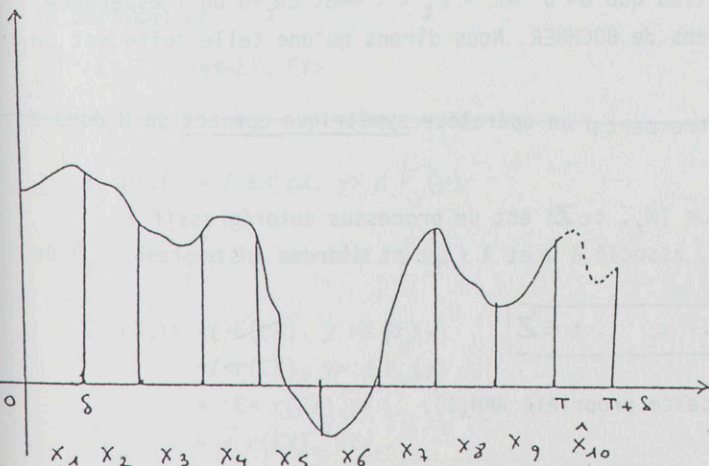
DENIS BOSQ

(Université Pierre et Marie Curie)

I - Introduction

Considérons un processus à temps continu observé sur des intervalles de même longueur  $\delta$ . La prévision globale de l'évolution future du processus sur un intervalle de longueur  $\delta$  est un problème qui se pose naturellement dans les applications : observation d'un électrocardiogramme, d'une température, des prix etc...

Si le processus est observé sur l'intervalle  $[0, T]$  ( $T > \delta$ ) on peut se ramener au schéma précédent en découpant  $[0, T]$  en intervalles de longueur  $\delta$  (non nécessairement disjoints!). Dans tous les cas on a ramené l'observation du processus à celle d'un nombre fini de variables aléatoires à valeurs dans un espace fonctionnel :  $X_1, \dots, X_n$  (figure 1).



*Figure 1*

Construction de variables fonctionnelles associées à un processus observé sur  $[0, T]$ . La variable  $X_{10}$  est prévue.

On peut alors envisager une modélisation du processus  $(X_t)$ . Une idée simple consiste à choisir le modèle autorégressif ou, plus généralement, le modèle ARMA.

Dans ce travail nous donnons quelques indications sur les processus autorégressifs Hilbertiens en insistant sur l'auto-régressif d'ordre 1. Nous étudierons ultérieurement l'estimation et la prévision d'un processus de ce type.

Signalons que DENIDEVSKII (1986) a étudié l'existence et la validité de la loi faible des grands nombres pour un processus linéaire Banachique. L'idée de modéliser  $(X_t)$  d'une façon autorégressive a été lancée par T. MOURID.

## II - Définition et existence d'un autorégressif Hilbertien d'ordre 1

Soit  $(H, \mathcal{B}_H)$  un espace de Hilbert séparable muni de sa tribu Borélienne. Le produit scalaire de  $H$  est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , la norme  $\| \cdot \|$ , la norme d'un opérateur continu sur  $H$   $\| \cdot \|_{\mathcal{L}}$ .

On considère une suite  $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$  de v.a. à valeurs dans  $H$ , définies sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ , indépendantes et de même loi et telles que  $0 < \sigma^2 = E \| \varepsilon_t \|^2 < +\infty$  et  $E \varepsilon_t = 0$  où l'espérance est prise au sens de BOCHNER. Nous dirons qu'une telle suite est un H- Bruit blanc.

Soit d'autre part  $\rho$  un opérateur symétrique compact de  $H$  dans  $H$  tel que  $\| \rho \|_{\mathcal{L}} < 1$ .

On dira que  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  est un processus autorégressif à valeurs dans  $H$ , associé à  $\rho$  et à  $(\varepsilon_t)$  et d'ordre 1 si

$$\boxed{X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}} \quad (1)$$

Nous noterons cette propriété ARH(1).

Proposition 1 (Existence et unicité)

Sous les hypothèses précédentes l'équation

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

a une solution stationnaire unique (presque sûrement) donnée par

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

où la série converge presque sûrement et au sens de  $L^2_H$ .

Par conséquent,  $\varepsilon_t$  est indépendant de  $X_s$  pour  $s < t$ .

Avant la démonstration nous rappelons un lemme connu :

Lemme 2 : soit un opérateur continu sur  $H$ ,  $X$  et  $Y$  deux v.a. à valeurs dans  $H$ , intégrables et indépendantes.

Alors

$$E\langle rX, Y \rangle = \langle r(EX), Y \rangle$$

en particulier

$$E\langle X, Y \rangle = \langle EX, EY \rangle$$

$$\underline{D} : E\langle rX, Y \rangle = \int E\langle rX, y \rangle dP_y(y)$$

où  $P_y$  désigne la loi de  $Y$ . D'où

$$\begin{aligned} E\langle rX, Y \rangle &= \int \langle E(rX), y \rangle dP_y(y) \\ &= \int \langle r(EX), y \rangle dP_y(y) \\ &= E\langle r(EX), Y \rangle \\ &= \langle r(EX), EY \rangle. \end{aligned}$$

Démonstration de la proposition

D'abord, d'après le théorème de P. LEVY dans un espace de Banach, la série (2) converge presque sûrement dès qu'elle converge dans  $L_H^2$  (GEFFROY (1959)).

Considérons maintenant l'expression

$$\begin{aligned} \Delta_{n,m} &= E \left\| \sum_{j=0}^m \rho^j \varepsilon_{t-j} \right\|^2 \\ &= \sum_{j=0}^m E \left\| \rho^j \varepsilon_{t-j} \right\|^2 \quad (\text{lemme 2}) \\ &\leq \sum_{j=0}^m E \left( \|\rho\|_{\mathcal{L}}^{2j} \|\varepsilon_{t-j}\|^2 \right) \\ &\leq \sigma^2 \sum_{j=0}^m \|\rho\|_{\mathcal{L}}^{2j} \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \Delta_{n,m} = 0$$

$n, m \rightarrow \infty$

d'où la convergence de (2) dans  $L_H^2$ .

La stationnarité est claire et l'unicité vient de la formule

$$X_t = \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \dots + \rho^k \varepsilon_{t-k} + \rho^{k+1} X_{t-k-1}, k \geq 1 \quad (3)$$

puisque  $\rho^{k+1} X_{t-k-1}$  tend vers 0 dans  $L_H^2$ .

La propriété de symétrie que nous avons imposée à  $\rho$  permet d'obtenir plusieurs propriétés intéressantes, notamment une relation avec les autorégressifs réels que la proposition suivante met en évidence .

Proposition 3 :

1) Soit  $\varphi$  un élément propre de  $\rho$  associé à la valeur propre  $\lambda$  alors  $(\langle X_t, \varphi \rangle, t \in \mathbb{Z})$  est un AR (1) vérifiant

$$\langle X_t, \varphi \rangle = \lambda \langle X_{t-1}, \varphi \rangle + \langle \varepsilon_t, \varphi \rangle, t \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

2) Inversement, soit  $\varphi \in H$  tel que  $(\langle X_t, \varphi \rangle, t \in \mathbb{Z})$  vérifie

$$\langle X_t, \varphi \rangle = \lambda \langle X_{t-1}, \varphi \rangle + U_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

où  $|\lambda| < 1$  et où  $(U_t)$  est un bruit blanc fort.

Alors, ou bien  $\varphi$  est un élément propre de  $\rho$  associé à  $\lambda$  et l'on a (4), ou bien  $X_0$  est presque sûrement orthogonal à  $\rho \varphi - \lambda \varphi$ .

D : La relation (4) se vérifie immédiatement puisque

$$\langle \rho X_{t-1}, \varphi \rangle = \langle X_{t-1}, \rho \varphi \rangle = \lambda \langle X_{t-1}, \varphi \rangle$$

et il est clair que  $(\langle \varepsilon_t, \varphi \rangle)$  est un bruit blanc réel et que

$$\|\lambda\| \cdot \|\rho\| < 1.$$

Pour la réciproque on écrit

$$\langle X_t, \varphi \rangle = \langle X_{t-1}, \rho \varphi \rangle + \langle \varepsilon_t, \varphi \rangle$$

d'où en utilisant (5)

$$\langle X_{t-1}, \rho \varphi - \lambda \varphi \rangle = U_t - \langle \varepsilon_t, \varphi \rangle$$

le second membre de cette inégalité est une v.a.r. centrée et les deux membres sont indépendants. Ils sont donc nuls (p.s.) et pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ .

$\langle X_{t-1}, \rho \varphi - \lambda \varphi \rangle = 0$  p.s. alors si  $\rho \varphi \neq \lambda \varphi$  on a bien  $X_0 \perp \rho \varphi - \lambda \varphi$  p.s.

Corollaire 4 :

$(X_t)$  est un ARH (1) associé à  $\rho$ ,  $(\varepsilon_t)$  si et seulement si  $(\langle X_t, \varphi_j \rangle)$  est un AR (1) associé à  $\lambda_j$ ,  $(\langle \varepsilon_t, \varphi_j \rangle)$  pour tout vecteur propre  $\varphi_j$  de  $\rho$  associé à la valeur propre  $\lambda_j$ ;  $j=1, 2, \dots$

D : La proposition 3 montre que la condition est nécessaire.

Inversement, si

$$\langle X_t, \varphi_j \rangle = \lambda_j \langle X_{t-1}, \varphi_j \rangle + \langle \varepsilon_t, \varphi_j \rangle, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad j=1, 2, \dots$$

on a pour tout  $\varphi \in H$  et tout  $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \langle X_t, \varphi \rangle &= \sum_j \langle X_t, \varphi_j \rangle \langle \varphi, \varphi_j \rangle \\ &= \sum_j \lambda_j \langle X_{t-1}, \varphi_j \rangle \langle \varphi, \varphi_j \rangle + \sum_j \langle \varepsilon_t, \varphi_j \rangle \langle \varphi, \varphi_j \rangle \\ &= \langle \rho X_{t-1}, \varphi \rangle + \langle \varepsilon_t, \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$\text{donc } X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Exemple de construction d'un ARH (1) :

Considérons un processus de Wiener standard défini par

$$W = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \frac{\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi u\right)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}, u \in \mathbb{R}_+ \quad (6)$$

où les  $Y_n$  sont i.i.d. normales réduites (cf par exemple ASH-GARDNER (1975)).

Posons pour tout  $\omega \in \Omega$

$$\varepsilon_t(\omega) = \{ u \rightarrow W_{t+u}(\omega) - W_t(\omega), u \in [0,1] \}, t \in \mathbb{Z}$$

la relation (6) (où l'on peut remplacer les sinus par leurs classes d'équivalence) montre que  $\varepsilon_t$  est une v.a. à valeurs dans  $H = L^2[0,1]$ .

En considérant un deuxième processus de Wiener indépendant du premier on peut étendre  $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$  à  $\mathbb{R}$ . Le fait qu'un processus de Wiener soit à accroissements indépendants permet d'établir que  $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$  est un H-bruit blanc.

On peut alors construire un ARH (1) en se donnant un opérateur symétrique contractant pde  $L^2[0,1]$ . On peut choisir un opérateur de la forme

$$(\rho y)(x) = \int K(x,y) \bar{\varphi}(y) dy, x \in [0,1], \rho \in \mathbb{H}$$

où  $K$  est un élément symétrique de  $L^2([0,1]^2)$  tel que

$$\int_{[0,1]^2} K^2(x,y) dx dy < 1.$$

Il suffit alors de poser

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j}, t \in \mathbb{Z}$$

### III- Propriétés d'un ARH (1)

Rappelons d'abord que si  $Y$  et  $Z$  sont deux v.a. appartenant à  $L_H^2$ , leurs opérateurs de covariance croisée sont définies par

$$C_{Y,Z}(x) = E(\langle Y, x \rangle Z) \quad , \quad x \in H$$

et

$$C_{Z,Y}(x) = C_{Y,Z}^*(x) = E(\langle Z, x \rangle Y) \quad , \quad x \in H$$

Si  $Z=Y$ ,  $C_{Y,Z}=C_{Y,Y}$  est l'opérateur de covariance de  $Y$ .

$C_Y$  est symétrique.

#### Proposition 5 (moments)

Si  $(X_t)$  est un ARH(1) associé à  $\rho$  et  $(\varepsilon_t)$  on a

$$E X_t = 0 \quad (7)$$

$$C_{X_t} = \rho C_{X_{t-1}} + C_{\varepsilon_t} \quad (8)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j C_{\varepsilon_{t-j}} \quad (8 \text{ bis})$$

$$C_{X_t, X_{t-k}} = C_{X_t} \rho^k \quad ; k=1,2,\dots \quad (9)$$

$$C_{X_{t-k}, X_t} = \rho^{k-1} C_{X_t} \quad ; k=1,2,\dots \quad (10)$$

D : Posons  $E X_t = m$ , de  $X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$  et de la stationnarité de  $(X_t)$  on tire  $m = \rho m$  comme 1 n'est pas valeur propre de  $\rho$  il vient  $m=0$ .

D'autre part

$$\begin{aligned} \langle C_{X_t} x, x \rangle &= E(\langle X_t, x \rangle^2) \\ &= E(\langle X_{t-1}, \rho x \rangle^2) + E(\langle \varepsilon_t, x \rangle^2) \\ &= \langle \rho C_{X_{t-1}} \rho \rangle x, x \rangle + \langle C_{\varepsilon_t} x, x \rangle \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $C_{X_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j C_{\varepsilon_{t-j}}$  se déduit de (2)

Pour les covariances croisées on peut utiliser (3).



Remarques :

1 - Si  $C_{X_t}$  et  $\rho$  commutent on en déduit

$$C_{\epsilon_t} = (I - \rho^2) C_{X_t}$$

et comme  $(I - \rho^2)$  est inversible

$$C_{X_t} = (I - \rho^2)^{-1} C_{\epsilon_t}$$

2 - Si  $C_{X_t}$  est inversible on a

$$\rho = C_{X_t}^{-1} C_{X_t, X_{t-1}} = C_{X_{t-1}, X_t} C_{X_t}^{-1}$$

en écrivant  $C_{X_t} = C_{X_t}^{1/2} C_{X_{t-1}}^{1/2}$  et en faisant des hypothèses de commutabilité on obtient des formules symétriques :

$$\rho = C_{X_t}^{-1/2} C_{X_t, X_{t-1}} C_{X_{t-1}}^{-1/2} = C_{X_{t-1}}^{-1/2} C_{X_{t-1}, X_t} C_{X_t}^{-1/2}$$

Posons  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $n \geq 1$ , nous avons les résultats classiques suivants :

Proposition 6 (Théorèmes limites)

quand  $n$  devient infini

1)  $E \left\| \frac{S_n}{n} \right\|^2 \rightarrow 0$  et  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} 0$

2)  $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$  converge en loi vers une variable Gaussienne  $N$  centrée et

d'opérateur de covariance

$$\begin{aligned} C_N &= C_X + \sum_{I=1}^{\infty} [C_{X_0, X_I} + C_{X_I, X_0}] \\ &= (I - \rho)^{-1} C_{\epsilon} (I - \rho)^{-1} \end{aligned}$$

D : 1) Soit  $(\varphi_j)$  une base orthonormale de vecteurs propres de  $\rho$ ,  $(\lambda_j)$  la suite des valeurs propres associées.

Nous avons

$$\begin{aligned} E \langle X_t, X_{t-k} \rangle &= \sum_j E \langle X_t, \varphi_j \rangle \langle X_{t-k}, \varphi_j \rangle \\ &= \sum_j \langle C_{X_t, X_{t-k}} \varphi_j, \varphi_j \rangle \\ &= \sum_j \langle C_{X_t} \rho^k \varphi_j, \varphi_j \rangle \\ &= \sum_j \lambda_j^k \langle C_{X_t} \varphi_j, \varphi_j \rangle \end{aligned}$$

par conséquent

$$|E \langle X_t, X_{t-k} \rangle| \leq \|a\|_L^k E \|X_t\|^2, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

On en déduit

$$E \|X_n + \dots + X_{n+p-1}\|^2 = O(p)$$

et l'on peut conclure comme dans le cas réel (DOOB 1953 p. 492).

2) Considérons les vecteurs aléatoires

$$Y_{tm} = (\langle X_t, \varphi_1 \rangle, \dots, \langle X_t, \varphi_m \rangle), \quad t \in Z$$

( $Y_{tm}, t \in Z$ ) est un AR (1) dans  $R^m$  de matrice d'autocorrélation

$$\rho_m = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

il vérifie donc le théorème central limite (HANNAN (1970) p. 221) :

$$\frac{Y_{1m} + \dots + Y_{nm}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N_m$$

où  $N_m$  est Gaussienne centrée et de matrice de covariance

$$C_m = (I - \rho_m)^{-1} C_{\varepsilon_m} (I - \rho_m)^{-1}$$

$C_{\varepsilon_m}$  désignant la matrice de covariance du vecteur

$$\varepsilon_m = (\langle \varepsilon_0, \varphi_1 \rangle, \dots, \langle \varepsilon_0, \varphi_m \rangle)$$

Pour conclure il suffit de procéder comme ZHURBENKO- ZUPAROV (1986); on utilise la décomposition

$$\begin{aligned} S_n &= S_{nm} + R_{nm} \\ &= \sum_{j=1}^m \left( \sum_{t=1}^n \langle X_t, \varphi_j \rangle \right) + \sum_{j=m+1}^m \left( \sum_{t=1}^n \langle X_t, \varphi_j \rangle \right) \end{aligned}$$

Ce qui précède montre que  $\frac{S_{nm}}{n}$  converge en loi dans  $H$  vers une variable Gaussienne centrée  $N_m^1$  dont l'opérateur de covariance a pour matrice  $C_m$  dans la base  $(\varphi_j)$ . En utilisant les fonctionnelles caractéristiques on montre alors la convergence faible de  $N_m^1$  vers  $N$ .

Par ailleurs, l'inégalité de Tchebychev permet d'établir

$$(\forall \varepsilon > 0), \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\|R_{nm}\| > \varepsilon \sqrt{n}) = 0$$

On se trouve ainsi dans les conditions d'application d'un théorème de BILLINGSLEY (1968) p. 25 d'où la conclusion.

#### IV - Autorégressifs Hilbertiens d'ordre supérieur.

Nous proposons maintenant une définition assez restreinte d'un ARH(p) qui a l'avantage d'être maniable.

##### Définition :

Soient  $\pi_1, \dots, \pi_p$  des opérateurs symétriques compacts de H dans H qui ont une base commune d'éléments propres et tels que

$$\sum_{j=1}^p \|\pi_j\|_{\mathcal{L}} < 1 \quad \text{et soit } (\varepsilon_t) \text{ un H-bruit blanc.}$$

On dira que  $(X_t)$  est un ARH (p) si  $\pi_p$  n'est pas nul et si

$$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \dots + \pi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (11)$$

Cela signifie qu'il existe  $\phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$  base orthonormale de H telle que, pour tout  $j=1, \dots, p$ , la famille des éléments propres de  $\pi_j$  associés aux valeurs propres non nulles est une partie de  $\phi$ .

La valeur propre (éventuellement nulle) de  $\pi_j$  associée à  $\varphi$  sera notée  $\lambda_{jk}$  ;  $k=1, 2, \dots$ . On a alors la

##### Proposition 7 (existence)

Soit  $K = \{k : \langle \varepsilon_t, \varphi_k \rangle^2 \neq 0\}$  alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe  $(X_t)$  stationnaire vérifiant (11) est que tous les polynômes

$$Q_k(z) = 1 - \lambda_{1k} z - \dots - \lambda_{pk} z^k, \quad k \in K$$

aient leurs racines de module strictement supérieur à 1.

D : Si  $(X_t)$  stationnaire vérifie (6) on a pour tout  $k \in K$

$$\langle X_t, \varphi_k \rangle = \lambda_{1k} \langle X_{t-1}, \varphi_k \rangle + \dots + \lambda_{pk} \langle X_{t-k}, \varphi_k \rangle + \langle \varepsilon_t, \varphi_k \rangle$$

si les  $\lambda_{jk}$  sont tous nuls,  $(\langle X_t, \varphi_k \rangle)$  est un bruit blanc et  $Q_k(z) \equiv 1$ .  
Sinon  $(\langle X_t, \varphi_k \rangle)$  est un AR(p') ( $p' \leq p$ ) stationnaire, par conséquent les racines de  $Q_k$  sont en dehors du disque unité.

Inversement, si la condition sur les  $Q_k$  est vérifiée on peut

construire des AR(p') ( $0 \leq p' \leq p$ )  $(X_t^k)$  tels que

$$X_t^k = \lambda_{1k} X_{t-1}^k + \dots + \lambda_{pk} X_{t-p}^k + \langle \varepsilon_t, \varphi_k \rangle \quad (12), \quad t \in \mathbb{Z}, k \in K.$$

Pour  $k \in K$ , on peut poser  $X_{k_t} = 0$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  et (12) est encore vérifié.

Montrons que la série  $\sum_k X_{k_t} \varphi_k$  converge dans  $L_H^2$ . Nous avons

$$E \left\| \sum_k X_{k_t} \varphi_k \right\|^2 = \sum_k V X_{k_t}$$

or

$$\begin{aligned} V X_{k_t} &= \sum_{j=1}^p \lambda_{jk} \text{cov}(X_{k_t}, X_{k_{t-j}}) + V \langle \varepsilon_t, \varphi_k \rangle \\ &\leq \sum_{j=1}^p |\lambda_{jk}| \sigma(X_{k_t}) \sigma(X_{k_{t-j}}) + V \langle \varepsilon_t, \varphi_k \rangle \end{aligned}$$

( $X_{k_t}$ ) étant stationnaire on en déduit

$$V X_{k_t} \leq \frac{V \langle \varepsilon_t, \varphi_k \rangle}{1 - \sum_{j=1}^p |\lambda_{jk}|}$$

$$\text{mais } 1 - \sum_{j=1}^p |\lambda_{jk}| \geq 1 - \sum_{j=1}^p \|\pi_j\|_{\mathcal{L}} > 0$$

donc

$$E \left\| \sum_k X_{k_t} \varphi_k \right\|^2 \leq \sum_k V \langle \varepsilon_t, \varphi_k \rangle / 1 - \sum_{j=1}^p \|\pi_j\|_{\mathcal{L}}$$

et le majorant tend vers 0 avec  $\frac{1}{m}$  et  $\frac{1}{n}$  puisque

$$\sum_k V \langle \varepsilon_t, \varphi_k \rangle = E \|\varepsilon_t\|^2 < +\infty.$$

On peut alors poser

$$X_t = \sum_k X_{k_t} \varphi_k, \quad t \in \mathbb{Z}$$

et (12) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \langle X_t, \varphi_k \rangle &= \lambda_{1k} \langle X_{t-1}, \varphi_k \rangle + \dots + \lambda_{pk} \langle X_{t-p}, \varphi_k \rangle + \langle \varepsilon_t, \varphi_k \rangle \\ &= \langle \pi_1 X_{t-1}, \varphi_k \rangle + \dots + \langle \pi_p X_{t-p}, \varphi_k \rangle + \langle \varepsilon_t, \varphi_k \rangle \end{aligned}$$

d'où (11).

Enfin la stationnarité de  $(X_t)$  s'établit en remarquant que les processus de la forme  $(\langle X_t, \varphi_{i1} \rangle, \dots, \langle X_t, \varphi_{ip} \rangle)$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  sont stationnaires dans  $\mathbb{R}^p$  comme AR  $(p')$ ,  $0 \leq p' \leq p$ .

Remarques :

1 - Si  $(X_t)$  est un ARH(p) et si  $\langle \varepsilon_t, \varphi_k \rangle = 0$  p.s. et  $\lambda_{pk} \neq 0$  alors  $(\langle X_t, \varphi_k \rangle)$  est un ARH(p) dégénéré.

S'il ne vérifie pas d'équation d'ordre inférieur à p, les racines de  $Q_k$  sont de module 1 (cf FELLER (1966) p.90-92).

2 - L'unicité de  $(X_t)$  est assuré si  $E(\langle \varepsilon_t, \varphi_k \rangle^2) \neq 0$  pour tout k. Sinon on obtient encore l'unicité de  $(X_t)$  en imposant des conditions aux polynômes  $Q_k$  pour  $k \in K$ .

Proposition 8 (équations de Yule-Walker)

Les opérateurs de covariance croisée d'un ARH (p) vérifient

$$C_{X_t, X_{t-k}} = \sum_{j=1}^p \pi_j C_{X_{t-j}, X_{t-h}} \quad ; k=1,2,\dots \quad (13)$$

$$C_{X_t} = \sum_{j=1}^p \pi_j C_{X_{t-j}, X_t} + C_{\varepsilon_t} \quad (14)$$

D : D'après la définition

$$E(\langle X_t, x \rangle \langle X_{t-h} \rangle) = \sum_{j=1}^p \pi_j E(\langle X_{t-j}, x \rangle \langle X_{t-h} \rangle) + 0$$

d'où (13).

Par ailleurs

$$E(\langle X_t, x \rangle \langle X_t \rangle) = \sum_{j=1}^p \pi_j E(\langle X_{t-j}, x \rangle \langle X_t \rangle) + E(\langle X_t, x \rangle \langle \varepsilon_t \rangle)$$

ce qui donne (14) avec  $C_{X_t, \varepsilon_t}$  à la place de  $C_{\varepsilon_t}$ . Mais

$$E(\langle X_t, x \rangle \langle \varepsilon_t \rangle) = \sum_{j=1}^p \pi_j E(\langle X_{t-j}, x \rangle \langle \varepsilon_t \rangle) + E(\langle \varepsilon_t, x \rangle \langle \varepsilon_t \rangle)$$

$$= 0 + C_{\varepsilon_t}(x)$$

d'où (14).

### V - Autocovariance

L'autocovariance croisée d'un ARH (p) se définit comme la suite d'opérateurs  $(C_h)$  définie par

$$C_h = C_{X_0, X_h} \quad h \in \mathbb{H}$$

$C_{-h}$  est alors l'adjoint de  $C_h$ .

Nous allons maintenant étudier l'autocovariance croisée partielle (ACCP) d'un ARH (p).

Remarquons d'abord que la régression linéaire de Z en Y ( $Y, Z \in L_H^2$ ) se définit en considérant une famille  $\mathcal{A}$  d'opérateurs sur H tels que  $\mathcal{V} = \{AY, A \in \mathcal{A}\}$  soit un sous espace vectoriel fermé de  $L_H^2$ . La régression linéaire de Z en Y par rapport à  $\mathcal{A}$  est alors l'application  $y \rightarrow A_0 y$  où  $A_0$  minimise  $E \|Z - AY\|^2$  quand A décrit  $\mathcal{A}$ . Mais le choix de  $\mathcal{A}$  est assez arbitraire. Pour l'éviter nous définissons directement l'ACCP d'un ARH (p) en posant

$$\Gamma_h = C_{X_t - E(X_t | \mathcal{B}_{t,h}), X_{t-h} - E(X_{t-h} | \mathcal{B}_{t,h})}, \quad h \in \mathbb{H} \quad \text{où } \mathcal{B}_{t,h} \text{ désigne la}$$

sous tribu engendrée par les  $X_s$  tels que  $s=t-1, \dots, t-h+1$  (resp.  $t+1, \dots, t+h-1$ ). Le caractère linéaire de  $E(\cdot | \mathcal{B}_{t,h})$  pour un ARH (p) justifie cette définition.

Alors

Proposition 9 :

$$\Gamma_p = C_{X_{t-p} - E(X_{t-p} | \mathcal{B}_{t,p}), X_t - E(X_t | \mathcal{B}_{t,p})}$$

et

$$\Gamma_h = 0 \quad \text{pour } h > p.$$

D : On écrit

$$\begin{aligned} E(X_t | \mathcal{B}_{t,p}) &= \sum_{j=1}^{p-1} \pi_j X_{t-j} + E(\pi_p X_{t-p} | \mathcal{B}_{t,p}) + 0 \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} \pi_j X_{t-j} + \pi_p E(X_{t-p} | \mathcal{B}_{t,p}) \end{aligned}$$

d'où

$$X_t - E(X_t | \mathcal{B}_{t,p}) = \pi_p (X_{t-p} - E(X_{t-p} | \mathcal{B}_{t,p}))$$

alors

$$\begin{aligned} \Gamma_p(x) &= E \langle X_t - E(X_t | \mathcal{B}_{t,p}), x \rangle (X_{t-p} - E(X_{t-p} | \mathcal{B}_{t,p})) \\ &= C_{X_{t-p} - E(X_{t-p} | \mathcal{B}_{t,p})} (\pi_p x), \quad x \in H \end{aligned}$$

maintenant, pour  $h > p$

$$E(X_t | \mathcal{B}_{t,p}) = \sum_{j=1}^p \pi_j X_{t-j}$$

d'où

$$X_t - E(X_t | \mathcal{B}_{t,p}) = \varepsilon_t$$

et comme  $X_{t-p} - E(X_{t-p} | \mathcal{B}_{t,p})$  et  $\varepsilon_t$  sont indépendants

on a bien  $\Gamma_h = 0$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- ASH R.B. - GARDNER M.F. ( 1975 ) - Topics in stochastic processes - Acad.Press.
- BILLINGSLEY P. ( 1968 ) - Convergence of Probability measures. Wiley.
- DENISEVSKI N.A. ( 1986 ) - The strong law of large numbers for a linear process in Banach space ( en Russe ). Dokl. Akad. Nauk. Ukrain SSR ser A N° 12 p. 57-61.
- DOOB J.L. ( 1953 ) - Stochastic Processes - Wiley.
- FELLER W. ( 1966 ) - An introduction to Probability theory and its applications ( Vol II ) - Wiley.
- GEOFFROY J. ( 1959 ) - CRAS
- HANNAN E.J. ( 1970 ) - Multiple time series - Wiley.
- ZHURBENKO I.G. - ZUPAROV T.M. ( 1986 ) - The central limit theorem for stationary processes with mixing in a Hilbert space. Soviet Math. Dokl. Vol 33 N° 1 p 66-69.

-----

Reçu en Novembre 1989

74, Rue Dunois  
75013 PARIS