



HAL
open science

Convergences Stochastiques De Suites De Mesures Aléatoires Signées Considérées Comme Variables Aléatoires Hilbertiennes

Charles Suquet

► **To cite this version:**

Charles Suquet. Convergences Stochastiques De Suites De Mesures Aléatoires Signées Considérées Comme Variables Aléatoires Hilbertiennes. Annales de l'ISUP, 1993, XXXVII (1-2), pp.59-69. hal-03664834

HAL Id: hal-03664834

<https://hal.science/hal-03664834v1>

Submitted on 11 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CONVERGENCES STOCHASTIQUES DE SUITES DE MESURES ALÉATOIRES SIGNÉES CONSIDÉRÉES COMME VARIABLES ALÉATOIRES HILBERTIENNES

par

Charles SUQUET

Université des Sciences et Technologies de Lille

U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Laboratoire de Statistique et Probabilités - Bât. M2

59655 - Villeneuve d'Ascq Cedex (France)

Résumé : Soit \mathcal{B} la tribu borélienne d'un espace métrique \mathcal{X} . On utilise le plongement de l'espace \mathcal{M} des mesures signées bornées sur \mathcal{B} dans un espace de Hilbert autoreproduisant séparable H_K afin de construire les mesures aléatoires signées comme variables aléatoires hilbertiennes. Cette construction est effectivement possible dans les trois cas où \mathcal{X} est compact, localement compact, séparable. Les problèmes de mesurabilité dus à ce plongement sont résolus dans ces 3 cas. Les variables aléatoires réelles naturellement associées à une mesure aléatoire ainsi définie sont les intégrales des éléments de H_K par rapport à cette mesure. On étudie la convergence presque sûre, en probabilité et en loi des suites de mesures aléatoires et de leurs v.a.r. associées.

Summary : Let \mathcal{X} be a metric space and \mathcal{B} its Borel σ -algebra. Let \mathcal{M} the space of bounded signed measures on \mathcal{B} . In order to construct the signed random measures as hilbertian random variables we use the embedding of \mathcal{M} in a separable reproducing kernel space H_K . That construction is effectively possible when \mathcal{X} is compact or locally compact or separable. Mesurability problems due to embedding are resolved in these three cases. Real random variables naturally associated with a so defined random measure μ^\bullet are integrals of H_K elements with respect to μ^\bullet . For random sequences and their associated random variables, three modes of convergence are studied (almost surely, in probability, in law)

CLASSIFICATION A.M.S. (M.O.S.) : 60G57 - 46E27

MOTS CLES : Espace autoreproduisant — Mesure signée — Mesure aléatoire — Relative compacité — Convergence faible — Convergence stochastique.

INTRODUCTION

L'objet de cet article est la présentation d'une construction hilbertienne des mesures aléatoires signées.

D'un point de vue formel une mesure aléatoire est une application mesurable d'un espace probabilisé dans un espace de mesures muni d'une certaine tribu. Dans la théorie classique des mesures aléatoires (cf. par exemple Kallenberg [3]) on considère un espace \mathcal{X} localement compact à base dénombrable et l'ensemble \mathcal{M}^+ des mesures de Radon positives muni de la tribu borélienne de la topologie vague.

Le point de vue que nous avons adopté est sensiblement différent. Notre construction concerne l'espace vectoriel \mathcal{M} des mesures signées bornées et l'espace sous-jacent \mathcal{X} n'est pas nécessairement localement compact. Pour ce faire nous employons la construction d'un produit scalaire faisant de \mathcal{M} un espace préhilbertien développée dans [9] d'après une idée de C. Guilbart (cf. [2]). On dispose ainsi d'une isométrie φ entre \mathcal{M} et un s.c.v. dense d'un espace séparable autoreproduisant H_K de fonctions réelles sur \mathcal{X} . Une telle construction est effectivement possible au moins dans les 3 cas où \mathcal{X} est : métrique compact (cas 1), métrique localement compact (cas 2), métrique séparable (cas 3). Notons de plus que dans les cas 1 et 3 la topologie trace sur \mathcal{M}^+ de la topologie de la norme hilbertienne est la topologie faible (cf. § I).

Dans la perspective d'une exploitation ultérieure des propriétés des lois de probabilité sur un espace de Hilbert séparable, nous avons choisi de définir une mesure aléatoire (m.a.) comme une variable aléatoire à valeurs dans le complété de \mathcal{M} prenant presque sûrement ses valeurs dans \mathcal{M} . Ceci nous permet en outre d'avoir une notion élargie de la convergence d'une suite de mesures aléatoires, la limite n'étant alors pas forcément une m.a.

Cette construction suppose que $\varphi(\mathcal{M})$ (ou $\varphi(\mathcal{M}^+)$ pour les m.a. positives) est un borélien de H_K . Bien que cela soit loin d'être évident dans le cas général

la réponse est positive au moins dans les 3 cas de construction effective évoqués ci-dessus (cf. § II).

Une fois définie une mesure aléatoire μ^\bullet on lui associe naturellement les variables aléatoires réelles $\int_{\mathcal{X}} h d\mu^\bullet$ ($h \in H_K$). Ces v.a.r. caractérisent μ^\bullet (ce sont les produits scalaires de $\varphi(\mu^\bullet)$ par les $h \in H_K$) et peuvent s'interpréter comme des observations de la mesure aléatoire μ^\bullet . On dispose dans les 3 cas déjà cités de familles de v.a.r. $\int_{\mathcal{X}} f d\mu^\bullet$ pour des f appartenant à des classes de fonctions plus larges que H_K et on en déduit que $|\mu^\bullet|$, $\mu^{\bullet+}$, $\mu^{\bullet-}$ sont aussi des m.a. (cf. § III).

Les v.a.r. $\int_{\mathcal{X}} h d\mu^\bullet$ ($h \in H_K$) jouent un rôle essentiel dans l'étude de la convergence des suites de m.a.. La convergence d'une suite de m.a. (μ_n^\bullet) implique la convergence des suites de v.a.r. $(\int h d\mu_n^\bullet)$ selon le même mode. La réciproque est malheureusement fautive en général (avec une exception notable pour les m.a. positives dans les cas 1 et 3 (cf. V.3 et VII.3.)). Aussi pour pouvoir remonter de la convergence des observations $(\int h d\mu_n^\bullet)$ à celle de la suite de m.a. (μ_n^\bullet) avons-nous été contraints d'adjoindre une hypothèse de relative compacité. Une classification des hypothèses de ce type que nous avons envisagées est donnée au § IV.

Le § V étudie la convergence presque sûre d'une suite de m.a.. Après un théorème général de convergence presque sûre dans H_K , des conditions suffisantes de convergence p.s. vers une m.a. (dans les cas 1-2-3) sont exposées.

Le § VI suit le même plan en ce qui concerne la convergence en probabilité. Notons que dans ce cas la condition de relative compacité utilisée dans le théorème général est la plus faible de toutes : relative compacité faible de la suite des lois $(P_{\mu_n^\bullet})$.

L'étude de la convergence en loi (§ VII) termine cet exposé. Après un théorème général de convergence en loi pour une suite de m.a. signées, nous obtenons dans le cas des m.a. positives un théorème de convergence en loi sans adjonction d'hypothèse de relative compacité.

I - NOTATIONS ET RAPPELS

Dans [9] nous avons étudié le plongement d'un espace de mesures signées dans un espace de Hilbert séparable autoreproduisant. Pour faciliter la lecture du présent article nous rappelons ci-dessous les notations et les principaux résultats qui nous seront utiles. \mathcal{M} (resp. \mathcal{M}^+) désigne l'espace des mesures signées (resp. positives) bornées sur un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathbf{B})$ où \mathcal{X} est un espace topologique et \mathbf{B} la tribu borélienne associée.

Pour toute fonction réelle f mesurable bornée sur \mathcal{X} et tout noyau K reproduisant réel mesurable borné sur \mathcal{X}^2 nous noterons $\int f d\mu$ pour $\int_{\mathcal{X}} f d\mu$ et $\int K d\mu \otimes \nu$ pour $\int_{\mathcal{X}^2} K d\mu \otimes \nu$.

Nous ferons sur $(\mathcal{X}, \mathbf{B})$ l'hypothèse suivante : "Il existe une suite $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de fonctions réelles mesurables bornées sur \mathcal{X} , caractérisant les mesures au sens suivant :

$$(\forall i \in \mathbb{N} \int f_i d\mu = 0) \Rightarrow \mu = 0 \quad (0.1)$$

Sans perdre de généralité on peut alors se ramener au cas où la série de fonctions définie par :

$$K(x, y) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x)f_i(y) \quad (0.2)$$

vérifie

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (\|f_i\|_{\infty})^2 < +\infty. \quad (0.3)$$

K ainsi défini est un noyau reproduisant borné et mesurable sur \mathcal{X}^2 . Nous noterons H_K l'espace fonctionnel autoreproduisant associé à K . Dans [9] nous avons donné une hypothèse plus générale que (0.3). Cette apparente restriction, sans grande conséquence pratique sur la construction effective des noyaux, est utilisée essentiellement au § II.2.

I.1. -

Proposition.-

$$i) \forall (\mu, \nu) \in \mathcal{M}^2 \quad \int K d\mu \otimes \nu = \sum_{i=0}^{+\infty} (\int f_i d\mu)(\int f_i d\nu).$$

ii) La formule :

$$\langle \mu, \nu \rangle_K = \int K d\mu \otimes \nu \quad (\mu, \nu) \in \mathcal{M}^2$$

définit un produit scalaire sur \mathcal{M} .

I.2. -

Théorème.-

i) L'application $\varphi : \mu \mapsto \int K(\cdot, y) d\mu(y)$ définit une injection isométrique de $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle_K)$ dans l'espace hilbertien H_K .

ii) $\varphi(\mathcal{M})$ est un s.e.v. dense de H_K .

iii) On a : $\forall f \in H_K, \forall \mu \in \mathcal{M}, \langle f, \varphi(\mu) \rangle_K = \int f d\mu$.

I.3. - Construction effective de H_K :

Pour développer notre construction des mesures aléatoires, nous envisageons essentiellement les 3 cas suivants pour lesquels il est possible de trouver des noyaux K ayant les propriétés requises.

cas 1 : \mathcal{X} est métrique compact.

L'espace de Banach $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ des fonctions continues bornées sur \mathcal{X} muni de la norme du supremum $\| \cdot \|_\infty$ est alors séparable. On prend pour $(f_i, i \in \mathbb{N})$ une suite totale dans $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ convenablement normée.

cas 2 : \mathcal{X} est métrique localement compact.

L'espace de Banach (pour la norme $\| \cdot \|_\infty$) $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ des fonctions continues sur \mathcal{X} tendant vers zéro à l'infini est séparable et caractérise les mesures. On prend pour $(f_i, i \in \mathbb{N})$ une suite totale dans $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$.

cas 3 : \mathcal{X} est métrique séparable.

Il existe une métrique équivalente pour laquelle \mathcal{X} est totalement borné. Soit $U(\mathcal{X})$ l'espace de Banach pour la norme $\| \cdot \|_\infty$ des fonctions uniformément continues sur \mathcal{X} pour cette nouvelle métrique. Alors $U(\mathcal{X})$ est séparable et caractérise les mesures. On prend pour $(f_i, i \in \mathbb{N})$ une suite totale de $U(\mathcal{X})$.

Notons que pour chacune de ces 3 constructions, on sait, lorsque \mathcal{X} est une partie de \mathbb{R}^n , construire des espaces H_K et exhiber des bases hilbertiennes particulièrement simples. D'autre part, dans le cas général $\{f_i, i \in \mathbb{N}\}$ est une famille totale de H_K (cf. [8], [9]).

I.4. - Comparaison avec la topologie faible sur \mathcal{M}^+ .

Proposition.-

i) Dans les cas 1 et 3 du § I.3. la topologie définie par la norme $\| \cdot \|_K$ sur \mathcal{M}^+ est la topologie de la convergence faible.

ii) Si \mathcal{X} est métrique séparable et si le noyau K est continu sur \mathcal{X}^2 alors la topologie faible sur \mathcal{M}^+ est plus forte que celle de la norme $\| \cdot \|_K$.

■ (cf. [9] IV). ■

I.5. - Caractérisation des éléments de $\varphi(\mathcal{M})$ dans H_K (cas 1 et 2)

Proposition.- Dans les cas 1 et 2 du § I.3. une CNS pour qu'un élément f de H_K soit dans $\varphi(\mathcal{M})$ est :

$$\sup_{h \in H_K, \|h\|_\infty \leq 1} | \langle f, h \rangle_K | < +\infty .$$

II - MESURABILITE DE $\varphi(\mathcal{M})$ ET $\varphi(\mathcal{M}^+)$

Afin de pouvoir définir une mesure aléatoire à signe (resp. positive) comme v.a. à valeurs dans H_K dont la loi est concentrée sur $\varphi(\mathcal{M})$ (resp. $\varphi(\mathcal{M}^+)$), il importe de savoir si $\varphi(\mathcal{M})$ ou $\varphi(\mathcal{M}^+)$ appartiennent à la tribu borélienne de H_K .

Dans le cas le plus général c'est loin d'être évident (un s.c.v. dense n'étant pas nécessairement borélien), mais nous pouvons répondre positivement dans les cas 1-2-3 que nous avons répertoriés au § I.3.

II.1. - Mesurabilité de $\varphi(\mathcal{M})$ dans les cas 1 et 2.

Proposition.- Dans les cas 1 et 2, $\varphi(\mathcal{M})$ est un borélien de H_K .

■ Le résultat s'obtient facilement en utilisant la séparabilité de H_K donc de la trace sur H_K de la boule unité de $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ (resp. $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$), la continuité des formes linéaires $\langle h, \cdot \rangle_K$ ($h \in H_K$) pour la topologie de la norme $\| \cdot \|_K$ et le critère I.5. de caractérisation de $\varphi(\mathcal{M})$. ■

II.2. - Mesurabilité de $\varphi(\mathcal{M})$ dans le cas 3.

Le résultat est ici moins immédiat et nous aurons besoin d'un lemme précisant les propriétés de l'opérateur de prolongement $U(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{X}})$.

Dans le cas 3, on munit \mathcal{X} d'une nouvelle distance topologiquement équivalente à la distance originelle telle que le complété $\tilde{\mathcal{X}}$ soit compact. \mathcal{X} est alors un G_δ dense de $\tilde{\mathcal{X}}$ (cf. [5] th. 6.2 et 6.5 p. 46).

Toute fonction f élément de $U(\mathcal{X})$ admet un unique prolongement par continuité \tilde{f} à l'espace $\tilde{\mathcal{X}}$. Notons T l'application de $U(\mathcal{X})$ dans $\mathcal{C}(\tilde{\mathcal{X}})$ ainsi définie ($Tf = \tilde{f}$). On vérifie facilement que T est une isométrie linéaire pour la norme $\| \cdot \|_\infty$ entre $U(\mathcal{X})$ et $\mathcal{C}(\tilde{\mathcal{X}})$.

Il en résulte en particulier que si $\{f_i, i \in \mathbb{N}\}$ est totale dans $(U(\mathcal{X}), \| \cdot \|_\infty)$ $\{Tf_i, i \in \mathbb{N}\}$ est totale dans $(\mathcal{C}(\tilde{\mathcal{X}}), \| \cdot \|_\infty)$.

On pose alors

$$\tilde{K} = \sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{f}_i \otimes \tilde{f}_i$$

Compte tenu de (0.3) \tilde{K} est bien défini et borné sur $\tilde{\mathcal{X}}^2$. $\{\tilde{f}_i, i \in \mathbb{N}\}$ étant totale dans $\mathcal{C}(\tilde{\mathcal{X}})$, \tilde{K} définit un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{X}})$. Nous noterons $H_{\tilde{K}}$ l'espace autoreproduisant associé et $\tilde{\varphi}$ l'injection isométrique de $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{X}})$ dans $H_{\tilde{K}}$.

On a alors :

II.2.1. - Lemme.-

Si T est l'opérateur de prolongement par continuité de $U(\mathcal{X})$ dans $\mathcal{C}(\tilde{\mathcal{X}})$.

i) La restriction de T à H_K est une isométrie d'espaces de Hilbert entre H_K et $H_{\tilde{K}}$.

ii) On a de plus $T(\varphi(\mathcal{M}(\mathcal{X}))) = \tilde{\varphi}(\mathcal{M}_0(\tilde{\mathcal{X}}))$ où

$$\mathcal{M}_0(\tilde{\mathcal{X}}) = \{\mu \in \mathcal{M}(\tilde{\mathcal{X}}), |\mu|(\tilde{\mathcal{X}} \setminus \mathcal{X}) = 0\}$$

■

i) D'après ([1] p. 351), puisque \mathcal{X} est dense dans $\tilde{\mathcal{X}}$ l'opérateur de restriction à \mathcal{X} des éléments de $H_{\tilde{K}}$ est une isométrie d'espaces de Hilbert entre $H_{\tilde{K}}$ et H_K .

ii) Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ définissons $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_0(\tilde{\mathcal{X}})$ par :

$$\begin{cases} \tilde{\mu}|_{\mathcal{X}} = \mu \\ |\tilde{\mu}|(\tilde{\mathcal{X}} \setminus \mathcal{X}) = 0 \end{cases}$$

Soit alors $h = \varphi(\mu)$. Soit $\{g_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H_K on a alors :

$$h = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\int_{\mathcal{X}} g_i d\mu \right) g_i$$

la convergence de cette série ayant lieu au sens de la norme $\| \cdot \|_K$. D'après (i), $\{\tilde{g}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de $H_{\tilde{K}}$ et on a :

$$\tilde{h} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\int_{\tilde{\mathcal{X}}} g_i d\tilde{\mu} \right) \tilde{g}_i$$

D'autre part il résulte de la définition de $\tilde{\mu}$ que :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathcal{X}} g_i d\mu = \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \tilde{g}_i d\tilde{\mu}$$

On a donc $\tilde{h} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\int_{\tilde{\mathcal{X}}} \tilde{g}_i d\tilde{\mu} \right) \tilde{g}_i$. Il en résulte que

$$\tilde{h} = \tilde{\varphi}(\tilde{\mu}). \quad \blacksquare$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir :

II.2.2. -

Proposition.- Dans le cas 3, $\varphi(\mathcal{M})$ est un borélien de H_K .

■ D'après le lemme II.2.1. T réalise une isométrie entre H_K et $H_{\tilde{K}}$ et entre $\varphi(\mathcal{M}(\mathcal{X}))$ et $\tilde{\varphi}(\mathcal{M}_0(\tilde{\mathcal{X}}))$ pour les normes hilbertiennes $\| \cdot \|_K$ et $\| \cdot \|_{\tilde{K}}$. Il suffit donc de prouver que $\tilde{\varphi}(\mathcal{M}_0(\tilde{\mathcal{X}}))$ est un borélien de $H_{\tilde{K}}$. D'après le cas 1 on sait que $\tilde{\varphi}(\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{X}}))$ est borélien dans $H_{\tilde{K}}$. Il suffit donc de prouver que $(\tilde{\varphi}(\mathcal{M}_0(\tilde{\mathcal{X}})))$ est borélien dans $\tilde{\varphi}(\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{X}}))$.

Puisque \mathcal{X} est un G_δ de $\tilde{\mathcal{X}}$, on peut alors trouver une suite décroissante $\{G_l, l \in \mathbb{N}^*\}$ d'ouverts de $\tilde{\mathcal{X}}$ tels que $\mathcal{X} = \bigcap_{l \in \mathbb{N}^*} G_l$.

Notons alors

$$\mathcal{M}_l(\tilde{\mathcal{X}}) = \{\mu \in \mathcal{M}(\tilde{\mathcal{X}}) \text{ , } |\mu|(\tilde{\mathcal{X}} \setminus G_l) = 0\}$$

On a

$$\mathcal{M}_0(\tilde{\mathcal{X}}) = \bigcap_{l \in \mathbf{N}^*} \mathcal{M}_l(\tilde{\mathcal{X}})$$

Il suffit donc finalement de prouver que $\mathcal{M}_l(\tilde{\mathcal{X}})$ est un borélien de $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{X}})$.
Notons F_l le compact $\tilde{\mathcal{X}} \setminus G_l$ et considérons l'application :

$$\tau : \mathcal{M}(\tilde{\mathcal{X}}) \rightarrow \mathbf{R} \quad \mu \mapsto |\mu|(F_l) .$$

On a : $\mathcal{M}_l = \tau^{-1}(\{0\})$ il suffit donc de prouver que τ est mesurable ($\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{X}})$ étant muni de la tribu borélienne associée à la topologie préhilbertienne définie par K).

$\mathcal{C}(F_l)$ étant séparable, si $\{g_p \mid p \in \mathbf{N}\}$ est dense dans sa boule unité (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) on a

$$|\mu|(F_l) = \sup_{p \in \mathbf{N}} \int_{F_l} g_p d\mu$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ tout élément g de $\mathcal{C}(F_l)$ admet un prolongement continu à $\tilde{\mathcal{X}}$ noté $g^{(1/n)}$ vérifiant :

$$\begin{cases} g^{(1/n)} = 0 & \text{sur } \tilde{\mathcal{X}} \setminus F_l^{1/n} \text{ où } F_l^{1/n} = \{x \in \tilde{\mathcal{X}} \mid d(x, F_l) < \frac{1}{n}\} \\ g^{(1/n)} = g & \text{sur } F_l \\ \|g^{(1/n)}\|_\infty = \|g\|_\infty \end{cases}$$

μ étant bornée, il est clair que l'on a :

$$\forall g \in \mathcal{C}(F_l) \quad \int_{F_l} g d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} g^{(1/n)} d\mu$$

On obtient ainsi :

$$|\mu|(F_l) = \sup_{p \in \mathbf{N}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} g_p^{(1/n)} d\mu .$$

En utilisant alors la densité de $(H_{\tilde{K}}, \|\cdot\|_\infty)$ dans $\mathcal{C}(\tilde{\mathcal{X}})$ (cf : [9] § VI.1. (ii)). On a d'autre part :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \exists h_{p,n} \in H_{\tilde{K}}, \quad \left\| g_p^{(1/n)} - h_{p,n} \right\|_\infty \leq \frac{1}{n}$$

et on vérifie facilement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} g_p^{(1/n)} d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} h_{p,n} d\mu$$

On a donc finalement :

$$|\mu|(F_I) = \tau(\mu) = \sup_{p \in \mathbb{N}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle h_{p,n}, \tilde{\varphi}(\mu) \rangle_{\tilde{K}}$$

La mesurabilité de τ en découle. ■

II.3. - Mesurabilité de $\varphi(\mathcal{M}^+)$.

II.3.1. - Proposition.- Dans les cas 1 et 3 $\varphi(\mathcal{M}^+)$ est un borélien de H_K .

cas 1 : On sait que la topologie définie par K sur \mathcal{M}^+ est la topologie faible (cf. I.4.).

D'autre part on sait que si \mathcal{X} est compact alors

$$M_1 = \{ \mu \in \mathcal{M}^+(\mathcal{X}) , \mu(\mathcal{X}) \leq 1 \}$$

est compact pour la topologie faible (cf. [5]). M_1 est donc compact donc borélien dans $(\mathcal{M}(\mathcal{X}) , \| \cdot \|_K)$ lequel est borélien de son complété d'après II.1. On conclut en remarquant que :

$$\varphi(\mathcal{M}^+) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n\varphi(M_1).$$

cas 3 : C'est un corollaire immédiat du cas 1 puisque $\mathcal{M}^+(\mathcal{X})$ est isométrique par $\mu \mapsto \tilde{\mu}$ (cf. II.2.1.) à $\mathcal{M}_o(\tilde{\mathcal{X}}) \cap \mathcal{M}^+(\tilde{\mathcal{X}})$. ■

II.3.2. -

Proposition.- Dans le cas 2, si \mathcal{X} est de plus dénombrable à l'infini, $\varphi(\mathcal{M}^+)$ est borélien dans H_K .

■ Il résulte de ([8] VI.2.) que l'on a alors

$$|\mu|(\mathcal{X}) = \sup_{\substack{h \in H_K \\ \|h\|_\infty \leq 1}} |\langle h, \varphi(\mu) \rangle_K|$$

Il en résulte que l'application $\mu \mapsto |\mu|(\mathcal{X})$ est mesurable. D'autre part les mesures positives étant caractérisées par la relation $\mu(\mathcal{X}) = |\mu|(\mathcal{X})$ il suffit donc de prouver que l'application

$$\theta : (\mathcal{M}, \|\cdot\|_K) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\mu \mapsto \mu(\mathcal{X})$$

est mesurable pour en déduire que \mathcal{M}^+ est un borélien de \mathcal{M} donc aussi de son complété.

\mathcal{X} étant dénombrable à l'infini peut s'écrire comme réunion d'une suite croissante de compacts C_n .

Par le lemme d'Urysohn on dispose alors d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions continues à supports compacts donc éléments de $\mathcal{C}_o(\mathcal{X})$ telles que :

$$1_{C_n} \leq f_n \leq 1.$$

En utilisant la densité de H_K dans $\mathcal{C}_o(\mathcal{X})$ (au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$) on peut alors facilement construire une suite $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de H_K telle que :

$$\forall \mu \in \mathcal{M} \quad \mu(\mathcal{X}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{X}} g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle g_n, \varphi(\mu) \rangle_K.$$

La mesurabilité de θ en découle. ■

III - MESURES ALEATOIRES HILBERTIENNES

Nous supposons désormais que $\varphi(\mathcal{M})$ et $\varphi(\mathcal{M}^+)$ sont des boréliens de H_K . Notons que H_K étant séparable sa tribu borélienne forte et sa tribu borélienne faible coïncident.

Nous désignerons par $\bar{\mathcal{M}}$ un complété de $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_K)$ que nous munirons de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{\bar{\mathcal{M}}}$ et par (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

III.1. -

Définition.- On appelle mesure aléatoire (resp. mesure aléatoire positive) basée sur (Ω, \mathcal{A}, P) toute variable aléatoire μ^\bullet sur (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans $\bar{\mathcal{M}}$ et prenant ses valeurs presque sûrement dans \mathcal{M} (resp. \mathcal{M}^+).

$\varphi \circ \mu^\bullet$ est alors une variable aléatoire à valeurs dans H_K telle que :

$$P(\varphi(\mu^\bullet) \in \varphi(\mathcal{M})) = 1 \quad (\text{resp. } P(\varphi(\mu^\bullet) \in \varphi(\mathcal{M}^+)) = 1).$$

Par commodité d'écriture nous noterons par P_{μ^\bullet} aussi bien la loi de μ^\bullet que celle de $\varphi(\mu^\bullet)$.

III.2. -

Proposition.- Une application ν^\bullet de Ω dans $\bar{\mathcal{M}}$ est une mesure aléatoire si et seulement si :

(i) il existe $\Omega' \in \mathcal{A}$ tel que : $P(\Omega') = 1$ et $\nu^\bullet(\Omega') \subset \mathcal{M}$.

(ii) pour toute $f \in H_K$, $\int_{\mathcal{X}} f d\nu^\bullet$ est une variable aléatoire réelle.

■ Les conditions (i) et (ii) sont évidemment nécessaires (rappelons que $\int f d\nu^\bullet = \langle f, \varphi(\nu^\bullet) \rangle$). Leur suffisance provient de l'identité des tribus boréliennes forte et faible de H_K . ■

III.3. -

Remarques. - Il résulte de l'interprétation des v.a.r. $\int f d\mu^\bullet$ ($f \in H_K$) comme des produits scalaires qu'une mesure aléatoire μ^\bullet est entièrement déterminée par la famille de v.a.r. $\{\int f d\mu^\bullet, f \in H_K\}$. Ces v.a.r. jouent dans notre construction des mesures aléatoires un rôle analogue à celui joué par les v.a.r. $\mu^\bullet(B)$ pour B appartenant à certaines classes de boréliens dans les théories classiques sur les mesures aléatoires positives (cf. [3]). On peut les interpréter comme des *observations* de la mesure aléatoire μ^\bullet .

Le cadre H_K pour l'étude des mesures aléatoires signées est mieux adapté à une caractérisation *fonctionnelle* des mesures qu'à leur caractérisation comme *fonctions d'ensembles*.

De ce point de vue il est commode de disposer de v.a.r. de la forme $\int f d\mu^\bullet$ pour des f appartenant à un espace fonctionnel plus large que H_K .

III.4. -

Proposition.- Si μ^\bullet est une mesure aléatoire alors :

i) Dans les cas 1 et 3, $\int f d\mu^\bullet$ est une v.a.r. pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$.

ii) Dans le cas 2, $\int f d\mu^\bullet$ est une v.a.r. pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X})$.

iii) Si de plus, dans le cas 2, \mathcal{X} est dénombrable à l'infini alors $\int f d\mu^\bullet$ est une v.a.r. pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$.

■ Preuve de (ii) : En utilisant la séparabilité de $(H_K, \|\cdot\|_\infty)$ et sa densité dans $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ et le fait que μ^\bullet est presque sûrement une mesure signée bornée, on voit que pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ il existe une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H_K telle que :

$$\int f d\mu^\bullet = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{p.s.} \int h_n d\mu^\bullet.$$

Preuve de (iii) : \mathcal{X} étant réunion d'une suite croissante de compacts C_n , on dispose grâce au lemme d'Urysohn d'une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues à supports compacts (donc dans $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$) telles que :

$$1_{C_n} \leq g_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ on a alors $\int f d\mu^\bullet = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int (f g_n) d\mu^\bullet$ p.s. et comme $f g_n \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ on peut conclure grâce à (ii).

Preuve de (i) :

cas 1 : Même argument qu'en (ii) en remplaçant $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ par $\mathcal{C}(\mathcal{X})$.

cas 3 : Par densité de H_K dans $U(\mathcal{X})$ on vérifie facilement que $\int f d\mu^\bullet$ est une v.a.r. pour tout $f \in U(\mathcal{X})$. On peut alors prouver le :

Lemme.- Dans le cas 3 si F est un fermé de \mathcal{X} alors $\mu^\bullet(F)$ est une v.a.r.

■ On considère la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions sur \mathcal{X} définie par

$$g_n(x) = [1 - nd(x, F)]^+ \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Les g_n sont uniformément continues bornées sur \mathcal{X} .

D'autre part, si ν est une mesure à signes bornée quelconque on a :

$$\int_{\mathcal{X}} g_n d\nu = \nu(F) + \int_{\{x \in \mathcal{X}, 0 < d(x, F) \leq (1/n)\}} g_n d\nu$$

donc $|\int_{\mathcal{X}} g_n d\nu - \nu(F)| \leq |\nu|(F^{1/n} \setminus F)$. ■

On en déduit par continuité monotone séquentielle de $|\nu|$ que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n d\nu = \nu(F)$. Par conséquent $\mu^\bullet(F)$ est limite p.s. de la suite de v.a.r. $\int g_n d\mu^\bullet$ donc $\mu^\bullet(F)$ est une v.a.r..

Enfin si $f \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, $\int f d\mu^\bullet$ est limite p.s. d'une suite de combinaisons linéaires finies de v.a.r. du type $\mu^\bullet(F)$ donc $\int f d\mu^\bullet$ est aussi une v.a.r. ■

III.5. -

Proposition.- Dans les cas 1, 2 et 3 si μ^\bullet est une mesure aléatoire alors $|\mu^\bullet|$, $\mu^{\bullet+}$ et $\mu^{\bullet-}$ sont aussi des mesures aléatoires.

■ Il suffit de faire la démonstration pour $|\mu^\bullet|$ et d'après III.2. il suffit en fait de vérifier que si μ^\bullet est une mesure aléatoire alors pour toute fonction $h \in H_K$ $\int_{\mathcal{X}} h d|\mu^\bullet|$ est une v.a.r..

En écrivant $h = h^+ - h^-$ où $h^+ = \text{Max}(h, 0)$ et en remarquant que si $h \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ (resp. $U(\mathcal{X})$, resp. $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$) il en est de même pour h^+ et h^- on est ramené à prouver que $\int_{\mathcal{X}} g d|\mu^\bullet|$ est une v.a.r. pour $g \geq 0$ et $g \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, $U(\mathcal{X})$ ou $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ selon le cas.

(Si $h \in H_K$, il n'est pas certain que h^+ et h^- soient dans $H_K \dots$).

Cas 1 : On a $H_K \subset \mathcal{C}(\mathcal{X})$.

On sait que pour toute fonction $g \geq 0$ appartenant à $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ et pour toute mesure à signe bornée μ on a :

$$\int_{\mathcal{X}} g d|\mu| = \sup \left\{ \left| \int_{\mathcal{X}} f d\mu \right| \mid f \in \mathcal{C}(\mathcal{X}), 0 \leq |f| \leq g \right\}$$

(cf. par exemple [10] th. 4 et 6 p. 165).

En utilisant la séparabilité de $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ on peut alors conclure.

Cas 3 : On a $H_K \subset U(\mathcal{X})$.

Si $g \geq 0$ et $g \in U(\mathcal{X})$, pour toute mesure à signe μ on a :

$$\int_{\mathcal{X}} g d|\mu| = \int_{\mathcal{X}} \tilde{g} d|\tilde{\mu}|.$$

Et on se ramène au cas 1 en utilisant l'isométrie du lemme II.2.1.

Cas 2 : On a $H_K \subset \mathcal{C}_0(\mathcal{X})$.

En notant $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ l'espace des fonctions continues à support compact sur \mathcal{X} on sait que l'on a :

$$\int_{\mathcal{X}} g d|\mu| = \sup \left\{ \left| \int_{\mathcal{X}} f d\mu \right| \mid f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}), 0 \leq |f| \leq g \right\}$$

pour tout $g \geq 0$ dans $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ et tout $\mu \in \mathcal{M}$ (cf. [6] th. 6.19 p. 126).

$\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ est séparable et les $\int_{\mathcal{X}} f d\mu^\bullet$ pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ sont des v.a.r. d'après III.4. (ii).

Donc $\int_{\mathcal{X}} g d|\mu|$ est une v.a.r. pour tout $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ donc par densité de $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ aussi pour tout $g \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X})$.

IV - CONVERGENCES DES SUITES DE M.A. ET RELATIVE COMPACTITE

IV.1. - Hypothèses de relative compacité

Nous abordons maintenant l'étude de divers modes de convergence de suites de m.a. : convergence presque sûre, en probabilité, en loi.

Il est facile de vérifier que la convergence d'une suite (μ_n^\bullet) de m.a. implique la convergence des suites de v.a.r. $(\int f d\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout $f \in H_K$ selon le même mode (cf. V, VI, VII).

La réciproque est bien sûr fautive comme il est facile de le voir en considérant la suite de mesures déterministes associée à une base hilbertienne de H_K formée d'éléments de $\varphi(\mathcal{M})$.

Pour remonter de la convergence des v.a.r. *observations* $(\int f d\mu_n^\bullet)$ ($f \in H_K$) à celle de $\varphi(\mu_n^\bullet)$ nous aurons besoin d'adjoindre des hypothèses de relative compacité.

Les principales hypothèses de ce type que nous serons amenés à utiliser sont les suivantes :

(\mathcal{H}_1) : p.s. $\{\varphi(\mu_n^\bullet), n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compacte i.e. : il existe $\Omega' \in \mathcal{A}$ tel que $P(\Omega') = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega'$ il existe C^ω compact de H_K tel que $\{\varphi(\mu_n^\bullet), n \in \mathbb{N}\} \subset C^\omega$.

(\mathcal{H}_2) : $\{\varphi(\mu_n^\bullet), n \in \mathbb{N}\}$ est p.s. borné dans H_K et $(f_i, i \in \mathbb{N})$ étant une base hilbertienne, la suite (Y_m) de v.a.r. définie par

$$Y_m = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \geq m} \left(\int f_i d\mu_n^\bullet \right)^2 \quad (m \in \mathbb{N})$$

converge vers 0 en loi ou en probabilité ou p.s.

(\mathcal{H}_3) :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} E \left(\sum_{i \geq m} \left(\int f_i d\mu_n^\bullet \right)^2 \right) = 0$$

(\mathcal{H}_4) : La suite $\{P_{\mu_n^\bullet}, n \in \mathbb{N}\}$ des lois de probabilité des μ_n^\bullet est relativement compacte pour la topologie de la convergence faible.

Pour une étude de critères de relative compacité dans H_K ou $\varphi(\mathcal{M})$ nous renvoyons à [8] ou [9].

IV.2. -

Proposition.- Les hypothèses (\mathcal{H}_1) (\mathcal{H}_2) (\mathcal{H}_3) (\mathcal{H}_4) vérifient le diagramme d'implications suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{H}_1) & \iff & (\mathcal{H}_2) \implies (\mathcal{H}_3) \\ & & \searrow \\ & & \Downarrow \\ & & (\mathcal{H}_4) \end{array}$$

où l'implication $(\mathcal{H}_2) \Rightarrow (\mathcal{H}_3)$ est valable dès que $E(Y_0) < +\infty$

■ Remarquons d'abord que dans (\mathcal{H}_2) les 3 modes de convergence de (Y_m) sont équivalents puisque la limite est constante et la suite p.s. décroissante.

L'hypothèse (\mathcal{H}_3) n'est que la traduction dans le cadre *mesures aléatoires hilbertiennes* d'une condition suffisante de relative compacité faible pour les mesures de probabilité sur un Hilbert donnée par Parthasarathy ([5] p. 154 th. VI.2.2.).

En effet, selon ce théorème, une condition suffisante de relative compacité faible de $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ est

$$\sup_n \int_{H_K} \sum_{i \geq m} (\langle f_i, h \rangle)^2 dP_n(h) \rightarrow 0 \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty.$$

Ceci prouve du même coup l'assertion $(\mathcal{H}_3) \Rightarrow (\mathcal{H}_4)$

$(\mathcal{H}_1) \Leftrightarrow (\mathcal{H}_2)$: est évident à cause de la caractérisation des parties relativement compactes de H_K (cf. [9]).

$(\mathcal{H}_2) \Rightarrow (\mathcal{H}_3)$, si $E(Y_0) < +\infty$: Par le théorème de convergence monotone on a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E(Y_m) = 0. \text{ D'autre part, on a :}$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} E \left(\sum_{i \geq m} \left(\int f_i d\mu_n^\bullet \right)^2 \right) \leq E(Y_m).$$

$(\mathcal{H}_2) \Rightarrow (\mathcal{H}_4)$: Soit $\eta > 0$ fixé. Puisque $Y_0 = \sup_n \|\varphi(\mu_n^\bullet)\|_K^2$ est p.s. fini, il existe $a > 0$ tel que

$$P(Y_0 > a^2) < \frac{\eta}{2}. \quad (1)$$

D'autre part $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 en probabilité donc : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists m(p) \in \mathbb{N}$,

$$P \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \geq m(p)} \left(\int f_i d\mu_n^\bullet \right)^2 > \frac{1}{p} \right) < \frac{\eta}{2^{p+1}}. \quad (2)$$

Posons alors

$$A_p = \left\{ \omega \in \Omega, Y_{m(p)}^\omega \leq \frac{1}{p} \right\}$$

$$C_p = \left\{ \varphi(\mu_n^\omega), \omega \in A_p, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$C = \left(\bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} C_p \right) \cap \{h \in H_K, \|h\|_K \leq a\}$$

On va montrer que :

i) C est relativement compact dans H_K .

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P_{\mu_n^\bullet}(\overline{C}) > 1 - \eta$ ce qui permettra de conclure par le théorème de Prokhorov.

Justification de (i) :

- C est borné en norme $\|\cdot\|_K$.

- Si $h \in C$ on a $h = \varphi(\mu_n^\omega)$ pour $\omega \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} A_p$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $m(p)$ indépendant de ω et n donc de h tel que

$$\sum_{i \geq m(p)} \langle h, f_i \rangle^2 \leq \frac{1}{p}$$

Le critère de relative compacité dans H_K (cf. [9]) est donc vérifié.

Justification de (ii) : C'est une conséquence de (1), (2) et de la définition de C. ■

V - CONVERGENCE PRESQUE SURE D'UNE SUITE DE MESURES ALEATOIRES

Par définition nous dirons que la suite de m.a. (μ_n^\bullet) converge presque sûrement si la suite de variables aléatoires $(\varphi(\mu_n^\bullet))$ converge presque sûrement pour la topologie forte de H_K .

V.1. -

Proposition.- Soit (μ_n^\bullet) une suite de m.a. p.s. convergente alors :

(i) Pour tout $f \in H_K$ la suite de v.a.r. $(\int f d\mu_n^\bullet)$ est p.s. convergente.

(ii) Si de plus la limite p.s. de (μ_n^\bullet) est une m.a. μ^\bullet on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f d\mu_n^\bullet = \int f d\mu^\bullet \quad \text{p.s.}$$

■ Evident grâce à I.2. (iii). ■

V.2. -

Théorème.- Si la suite (μ_n^\bullet) vérifie l'une des hypothèses de relative compacité (\mathcal{H}_1) ou (\mathcal{H}_2) du § IV et si pour tout $f \in H_K$ la suite de v.a.r. $(\int f d\mu_n^\bullet)$ est p.s. convergente alors (μ_n^\bullet) converge p.s.

■ En utilisant (\mathcal{H}_1) on dispose d'un événement $\Omega' \in \mathcal{A}$ de probabilité 1 tel que :

$$\forall \omega \in \Omega' \quad \left\{ \begin{array}{l} \{\varphi(\mu_n^\omega), n \in \mathbf{N}\} \text{ est relativement compact dans } H_K . \\ \forall i \in \mathbf{N}, \left(\int f_i d\mu_n^\omega \right) \text{ converge dans } \mathbf{R} . \end{array} \right.$$

Rappelons que $\{f_i, i \in \mathbf{N}\}$ est totale dans H_K . Soit F l'espace des combinaisons linéaires finies des f_i . On vérifie facilement que l^ω définie par :

$$l^\omega(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f d\mu_n^\omega \quad (f \in F)$$

est une forme linéaire continue sur F se prolongeant de manière unique à H_K . Par le théorème de Riesz on a alors un élément unique g^ω de H_K tel que $l^\omega = \langle g^\omega, \cdot \rangle$. On a alors :

$$\forall \omega \in \Omega' \quad \begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi(\mu_n^\omega)\|_K < +\infty \\ \forall f \in F \quad \langle g^\omega, f \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \varphi(\mu_n^\omega), f \rangle \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\varphi(\mu_n^\omega) \xrightarrow{\sigma(H_K, H_K)} g^\omega$$

et donc que $(\varphi(\mu_n^\omega))$ converge aussi fortement vers g^ω à cause de la relative compacité. Ceci prouve que g^\bullet est une v.a. à valeurs dans H_K et que $\varphi(\mu_n^\bullet)$ converge p.s. vers g^\bullet . ■

Ce théorème général ne nous dit pas si la limite de (μ_n^\bullet) est encore une m.a. Pour répondre positivement à cette question, il suffirait de remplacer (\mathcal{H}_1) par une hypothèse de relative compacité presque sûre dans $\varphi(\mathcal{M})$. Mais d'une part nous ne connaissons pas de critère de relative compacité dans $\varphi(\mathcal{M})$ dans le cas le plus général, d'autre part dans les 3 cas de construction effective de H_K que nous avons répertoriés au § 1.3. il est possible de donner une réponse plus consistante (cf. V.4. et V.5.). Auparavant nous donnons une version de V.2. pour des m.a. positives sans hypothèse de relative compacité dans les cas 1 et 3 :

V.3. -

Proposition.- Soit (μ_n^\bullet) une suite de m.a. positives.

Dans les cas 1 et 3 si les v.a.r. $(\int f d\mu_n^\bullet)$ convergent p.s. pour tout $f \in H_K$ alors (μ_n^\bullet) converge p.s.

Si de plus il existe une m.a. μ^\bullet telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f d\mu_n^\bullet = \int f d\mu^\bullet$ ($f \in H_K$) alors $\mu_n^\bullet \xrightarrow{\text{p.s.}} \mu^\bullet$.

■ Les cas 1 et 3 vérifient le théorème IV.2. de [9] selon lequel la convergence $\sigma(H_K, H_K)$ d'une suite (μ_n) d'éléments de \mathcal{M}^+ équivaut à sa convergence forte.

Il nous suffit donc de prouver la convergence $\sigma(H_K, H_K)$ presque sûre de $\varphi(\mu_n^\bullet)$ vers une v.a. g^\bullet à valeurs dans H_K .

Par densité de H_K dans $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ (resp. $U(\mathcal{X})$) pour la norme $\| \cdot \|_\infty$, il existe $f \in H_K$ telle que : $\inf_{x \in \mathcal{X}} f(x) > 0$.

On en déduit que :

$$\sup \mu_n^\bullet(\mathcal{X}) < +\infty \quad \text{p.s.}$$

puis que

$$\sup \|\mu_n^\bullet\|_K < +\infty \quad \text{p.s.}$$

On peut alors reprendre la construction de l^ω comme dans la démonstration de V.2. et en déduire de la même façon que

$$\varphi(\mu_n^\bullet) \xrightarrow{\sigma(H_K, H_K)} g^\bullet \quad \text{p.s.}$$

g^\bullet est limite $\sigma(H_K, H_K)$ presque sûre d'une suite de v.a. à valeurs dans H_K et comme les tribus boréliennes forte et faible de H_K sont les mêmes, g^\bullet est une v.a. à valeurs dans H_K et on conclut grâce au th. IV.2. de [9]. ■

V.4. -

Théorème.- Soit (μ_n^\bullet) une suite de m.a. telle que $(\int f d\mu_n^\bullet)$ converge p.s. pour tout f de H_K et vérifiant :

$$\sup |\mu_n^\bullet|(\mathcal{X}) < +\infty \quad \text{p.s.}$$

Alors dans les cas 1 et 2 (μ_n^\bullet) converge p.s. vers une m.a. μ^\bullet .

■ Nous allons utiliser le lemme V.2.2. de [9] selon lequel :

“ S'il existe une base hilbertienne $(g_i, i \in \mathbb{N})$ de H_K telle que $\sum_{i=0}^{+\infty} g_i(x)^2$ converge uniformément sur \mathcal{X} et si $\sup\{|\mu_n|(\mathcal{X}), n \in \mathbb{N}\} < +\infty$ alors $\{\varphi(\mu_n), n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans H_K ”.

Soit donc $(g_i, i \in \mathbb{N})$ une base hilbertienne quelconque.

Dans le cas 1 la convergence uniforme de $\sum_{i \in \mathbb{N}} g_i(x)^2$ résulte du théorème de Dini.

Dans le cas 2 posons :

$$S_m(x) = \sum_{i=0}^m g_i(x)^2 \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(x)^2$$

Soit $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de \mathcal{X} . On prolonge S_m et S à $\hat{\mathcal{X}}$ en posant :

$$S(\infty) = S_m(\infty) = 0$$

Dans le cas de S_m il s'agit d'un prolongement continu puisque les g_i sont dans $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$. Il en est de même pour S en remarquant que : $S(x) = K(x, x) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x)^2$ et que cette dernière série converge uniformément sur \mathcal{X} d'après (0.3). Donc $S \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X})$. On peut alors appliquer le théorème de Dini dans $\mathcal{C}(\hat{\mathcal{X}})$ et conclure à la convergence uniforme de S_m vers S .

En notant F l'espace des combinaisons linéaires finies des g_i on construit un événement Ω' de probabilité 1 tel que

$$\forall \omega \in \Omega' \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall f \in F \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f d\mu_n^\omega \text{ existe} \\ \text{et} \\ \sup_n |\mu_n^\omega|(\mathcal{X}) < +\infty \end{array} \right.$$

Dans le cas 1 pour tout ω , (μ_n^ω) définit alors une suite de formes linéaires équicontinues sur $(\mathcal{C}(\mathcal{X}), \|\cdot\|_\infty)$.

L'ensemble G des $f \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f d\mu_n^\omega$ existe est donc un fermé de $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ et la limite simple de (μ_n^ω) ainsi définie est encore une forme linéaire continue sur G (cf. [7] T.2 XX3.1 corollaire 5 p. 312).

Comme $G \supset F$ et F est dense dans $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ on a $G = \mathcal{C}(\mathcal{X})$ et par le théorème de Riesz il existe une mesure μ^ω telle que :

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{X}) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f d\mu_n^\omega = \int f d\mu^\omega$$

En particulier on a

$$\varphi(\mu_n^\omega) \xrightarrow{\sigma(H_K, H_K)} \varphi(\mu^\omega).$$

et d'après le lemme $\{\varphi(\mu_n^\omega), n \in \mathbb{N},\}$ est relativement compact dans H_K donc

$$\varphi(\mu_n^\omega) \xrightarrow{\|\cdot\|_K} \varphi(\mu^\omega).$$

La démonstration est la même dans le cas 2 en remplaçant $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ par $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$. ■

V.5. -

Remarque.- Dans le cas 3 si les $\int f d\mu_n^\bullet$ ($f \in H_K$) convergent p.s. et si $\sup |\mu_n^\bullet(\mathcal{X})| < +\infty$ alors (μ_n^\bullet) converge presque sûrement. Il existe alors une mesure aléatoire ν^\bullet sur $\tilde{\mathcal{X}}$ telle que si g^\bullet est la limite p.s. de $\varphi(\mu_n^\bullet)$ dans H_K :

$$\forall h \in H_K \quad \langle g^\bullet, h \rangle_K = \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \tilde{h} d\nu^\bullet \quad \text{p.s.}$$

On le vérifie facilement en utilisant l'isométrie T pour les normes $\| \cdot \|_\infty$ et les normes hilbertiennes du lemme III.2.1. et le cas 1 de V.4.

Alors $(\tilde{\mu}_n^\bullet)$ converge p.s. vers la m.a. (ν^\bullet) mais on ne peut en déduire que (μ_n^\bullet) converge p.s. vers la restriction $\nu_{|\mathcal{X}}^\bullet$ de ν^\bullet à \mathcal{X} : si $\nu^\omega \in \mathcal{M}_0(\tilde{\mathcal{X}})$ alors $\int_{\mathcal{X}} f d\mu_n^\omega \rightarrow \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \tilde{f} d\nu^\omega$ mais on ne peut affirmer que $\int_{\tilde{\mathcal{X}}} \tilde{f} d\nu^\omega = \int_{\mathcal{X}} f d\nu_{|\mathcal{X}}^\omega$ et donc la convergence $\sigma(H_K, H_K)$ de $\varphi(\mu_n^\omega)$ vers $\varphi(\nu_{|\mathcal{X}}^\omega)$ n'est pas garantie.

V.6.-

Théorème.- Dans le cas 3 si la suite de m.a. (μ_n^\bullet) vérifie l'hypothèse :

“ Il existe une mesure aléatoire positive ρ^\bullet telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |\mu_n^\bullet| \leq \rho^\bullet$ p.s. ”
 et si les v.a.r. $(\int f d\mu_n^\bullet)$ convergent p.s. pour tout $f \in H_K$ alors μ_n^\bullet converge p.s. vers une mesure aléatoire μ^\bullet .

■ D'après la proposition V.2.4. de [9] $\{\varphi(\mu_n^\bullet), n \in \mathbb{N}\}$ est p.s. un compact de H_K inclus dans $\varphi(\mathcal{M})$. Par application du théorème V.2. $\varphi(\mu_n^\bullet)$ converge p.s.. Sa limite g^\bullet est p.s. dans $\varphi(\mathcal{M})$ donc est une m.a. ■

VI - CONVERGENCE EN PROBABILITE D'UNE SUIITE DE MESURES ALEATOIRES

Par définition nous dirons que la suite de mesures aléatoires (μ_n^\bullet) converge en probabilité s'il existe une variable aléatoire g^\bullet à valeurs dans H_K telle que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\{\|\varphi(\mu_n^\bullet) - g^\bullet\|_K > \varepsilon\}) = 0$$

VI.1. -

Proposition.- Si la suite $(\varphi(\mu_n^\bullet))$ converge en probabilité vers la variable aléatoire hilbertienne g^\bullet , alors pour tout $f \in H_K$ la suite de v.a.r. $(\int f d\mu_n^\bullet)$ converge en probabilité vers $\langle g^\bullet, f \rangle$.

■ Le cas $f = 0$ étant trivial, pour tout $f \neq 0$ on a d'après I.2. (iii) et l'inégalité de Schwarz :

$$P\left(\left|\int f d\mu_n^\bullet - \langle f | g^\bullet \rangle\right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\left\{\|\varphi(\mu_n^\bullet) - g^\bullet\|_K > \frac{\varepsilon}{\|f\|_K}\right\}\right)$$

ce qui permet de conclure. ■

Bien entendu la réciproque est fautive comme nous l'avons déjà signalé. Pour remonter de la convergence en probabilité des observations $\int f d\mu_n^\bullet$ ($f \in H_K$) à celle de (μ_n^\bullet) il est assez naturel d'adjoindre une hypothèse de relative compacité comme (\mathcal{H}_2) (dans la version convergence en probabilité de (Y_m) vers 0) ou comme (\mathcal{H}_3) .

La démonstration directe des deux théorèmes correspondants est possible mais on peut améliorer le résultat en utilisant l'hypothèse plus faible (\mathcal{H}_4) :

VI.2. -

Théorème.- Soit (μ_n^\bullet) une suite de m.a. telle que $\{P_{\mu_n^\bullet}, n \in \mathbb{N}\}$ soit relativement compact pour la topologie de la convergence faible des mesures de probabilité sur H_K (\mathcal{H}_4) et qu'il existe une variable aléatoire g^\bullet à valeurs dans H_K telle que :

$$\forall f \in H_K \quad \int f d\mu_n^\bullet \xrightarrow{\text{Pr}} \langle g^\bullet, f \rangle_K$$

Alors $(\varphi(\mu_n^\bullet))$ converge en probabilité vers g^\bullet .

■ D'après le théorème de Prokhorov il résulte de (\mathcal{H}_4) que : $\forall \eta > 0, \exists C$ compact de H_K tel que :

$$(1) \quad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} & P(\{\varphi(\mu_n^\bullet) \in C\}) > 1 - \eta \\ & P(\{g^\bullet \in C\}) > 1 - \eta \end{cases}$$

Soit $(g_i, i \in \mathbb{N})$ une base hilbertienne de H_K .

Fixons $\eta > 0$ et choisissons un compact C de H_K vérifiant (1). D'après la caractérisation des compacts de H_K (cf. [9] V.1.) on a en notant π_m la projection orthogonale sur le sev fermé engendré par $\{g_0, \dots, g_{m-1}\}$:

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists m, \forall f \in C \quad \|f - \pi_m(f)\|_K < \frac{\varepsilon}{3}$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ et choisissons m vérifiant (2). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a alors :

$$\left\{ \|\varphi(\mu_n^\bullet) - \pi_m(\varphi(\mu_n^\bullet))\|_K \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \subset \{\varphi(\mu_n^\bullet) \notin C\}$$

On en déduit

$$(3) \quad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad P \left(\left\{ \|\varphi(\mu_n^\bullet) - \pi_m(\varphi(\mu_n^\bullet))\|_K \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right) < \eta \\ P \left(\left\{ \|g^\bullet - \pi_m(g^\bullet)\|_K \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right) < \eta \end{cases}$$

En utilisant alors l'inclusion de $\{\|\varphi(\mu_n^\bullet) - g^\bullet\|_K \geq \varepsilon\}$ dans :

$$\begin{aligned} & \left\{ \|\varphi(\mu_n^\bullet) - \pi_m(\varphi(\mu_n^\bullet))\|_K \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \cup \left\{ \|\pi_m(\varphi(\mu_n^\bullet)) - \pi_m(g^\bullet)\|_K \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \\ & \cup \left\{ \|\pi_m(g^\bullet) - g^\bullet\|_K \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \end{aligned}$$

on en déduit la majoration :

$$\begin{aligned} P(\{\|\varphi(\mu_n^\bullet) - g^\bullet\|_K \geq \varepsilon\}) & \leq P \left(\left\{ \|\varphi(\mu_n^\bullet) - \pi_m(\varphi(\mu_n^\bullet))\|_K \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right) \\ & \quad + P \left(\left\{ \|\pi_m(\varphi(\mu_n^\bullet)) - \pi_m(g^\bullet)\|_K \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right) \\ & \quad + P \left(\left\{ \|\pi_m(g^\bullet) - g^\bullet\|_K \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right) \end{aligned}$$

Le premier et le 3^{ème} terme de ce majorant sont majorables par η d'après (3). (Uniformément par rapport à n pour le 1^{er}).

Quant au 2^{ème} terme, on peut le majorer par η pour $n \geq n_0$ en raison de la convergence en probabilité en dimension finie qui se démontre facilement à partir de la convergence en probabilité des v.a.r. $\int g_i d\mu_n^\bullet$. Ceci achève la preuve. ■

Pour la convergence en probabilité vers une m.a. on a des résultats analogues à ceux du § V :

VI.3. -

Théorème.- Soit (μ_n^\bullet) une suite de m.a. telle que $\int f d\mu_n^\bullet \xrightarrow{\text{Pr}} \langle g^\bullet, f \rangle_K$
 $(\forall f \in H_K)$.

Alors pour que (μ_n^\bullet) converge en probabilité vers une m.a. il suffit qu'elle vérifie l'une des hypothèses suivantes :

cas 1 et 2 : $\sup |\mu_n^\bullet|(\mathcal{X}) < +\infty$ p.s.

cas 3 : Il existe une m.a. positive ρ^\bullet telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |\mu_n^\bullet| \leq \rho^\bullet$ p.s.

■ Les 2 hypothèses ci-dessus impliquent chacune que $\{\varphi(\mu_n^\bullet), n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans H_K p.s. L'hypothèse (\mathcal{H}_1) est donc vérifiée donc aussi (\mathcal{H}_4) . D'après le théorème VI.2. $(\varphi(\mu_n^\bullet))$ converge en probabilité vers g^\bullet . On peut donc extraire une sous-suite $(\mu_{n_p}^\bullet)$ p.s. convergente. Par le théorème V.4. ou V.6. on en déduit alors que $\mu_{n_p}^\bullet$ converge p.s. vers une m.a. μ^\bullet . Cette convergence ayant lieu aussi en probabilité on en conclut que $g^\bullet = \varphi(\mu^\bullet)$. ■

Remarques.-

En fait il suffit que les hypothèses des cas 1, 2, 3 ci-dessus soient vérifiées par une sous-suite de (μ_n^\bullet) et que (μ_n^\bullet) vérifie (\mathcal{H}_4) pour que (μ_n^\bullet) converge en probabilité vers une m.a..

Il est possible d'établir un théorème de convergence en probabilité pour des suites de m.a. positives analogue à V.3. (sans adjonction d'hypothèse de relative compacité). Ce théorème sera obtenu comme corollaire d'un théorème de convergence en loi (cf. VII.5.).

VII - CONVERGENCE EN LOI D'UNE SUITE DE MESURES ALEATOIRES

Par définition, une suite de m.a. (μ_n^\bullet) converge en loi si la suite des mesures de probabilité associée $(P_{\mu_n^\bullet})$ converge faiblement.

VII.1. -

Proposition.- Soit (μ_n^\bullet) une suite de m.a. telle que $\varphi(\mu_n^\bullet)$ converge en loi

vers une v.a. g^\bullet . Alors pour toute famille finie $\{h_1, \dots, h_m\}$ d'éléments de H_K la suite de vecteurs aléatoires $(\int h_1 d\mu_n^\bullet, \dots, \int h_m d\mu_n^\bullet)$ de \mathbf{R}^m converge en loi vers $(\langle h_1, g^\bullet \rangle, \dots, \langle h_m, g^\bullet \rangle)$.

■ Evident à cause de la continuité des $\langle h, \cdot \rangle_K$ ($h \in H_K$). ■

VII.2. -

Théorème.- Si $\{P_{\mu_n^\bullet}, n \in \mathbf{N}\}$ est relativement compact pour la topologie de la convergence faible des mesures de probabilité sur H_K et si les suites de v.a.r. $\int h d\mu_n^\bullet$ convergent en loi alors $\varphi(\mu_n^\bullet)$ converge en loi vers une v.a. à valeurs dans H_K .

■ Remarquons d'abord que nous ne supposons pas que les $\int h d\mu_n^\bullet$ convergent en loi vers $\langle g^\bullet, h \rangle$ pour g^\bullet v.a. à valeurs dans H_K .

Nous utilisons les fonctions caractéristiques : Par définition la fonction caractéristique $\Phi_{\mu_n^\bullet}$ de la m.a. μ_n^\bullet est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall h \in H_K, \quad \Phi_{\mu_n^\bullet}(h) &= \int_{H_K} \exp(i\langle f, h \rangle_K) dP_{\mu_n^\bullet}(f) \\ &= \int_{\varphi(\mathcal{M})} \exp(i \int h d\nu) dP_{\mu_n^\bullet}(\varphi(\nu)) \end{aligned}$$

d'où

$$\Phi_{\mu_n^\bullet}(h) = E \left(\exp(i \int h d\mu_n^\bullet) \right) \quad (\forall h \in H_K)$$

D'autre part les v.a.r. $\int h d\mu_n^\bullet$ ont des fonctions caractéristiques données par :

$$\Phi_{\int h d\mu_n^\bullet}(t) = E \left(\exp(it \int h d\mu_n^\bullet) \right) \quad (\forall t \in \mathbf{R}).$$

On a donc la relation :

$$\Phi_{\mu_n^\bullet}(h) = \Phi_{\int h d\mu_n^\bullet}(1) \quad (\forall h \in H_K)$$

De la convergence en loi des v.a.r. $\int h d\mu_n^\bullet$ on peut alors déduire que pour tout $h \in H_K$ $\Phi_{\mu_n^\bullet}(h)$ converge dans \mathbf{C} . Et comme $\{P_{\mu_n^\bullet}, n \in \mathbf{N}\}$ est faiblement relativement compact on peut conclure à la convergence en loi de (μ_n^\bullet) (cf. [4] Prop. 1.8.2.). ■

Nous terminons par un théorème de convergence en loi d'une suite de m.a. positives vers une m.a. positive. Ce théorème énoncé dans les cas 1 et 3 ne nécessite pas l'adjonction d'une hypothèse de relative compacité.

VII.3. -

Théorème.- Dans les cas 1 et 3, soit (μ_n^\bullet) une suite de m.a. positives et μ^\bullet une m.a. positive telles que les v.a.r. $\int h d\mu_n^\bullet$ convergent en loi vers $\int h d\mu^\bullet$ pour tout $h \in H_K$. Alors (μ_n^\bullet) converge en loi vers μ^\bullet .

■ Pour alléger les écritures nous indexerons la suite (μ_n^\bullet) par \mathbf{N}^* et nous noterons $\mu_0^\bullet = \mu^\bullet$. Soit $(g_i, i \in \mathbf{N})$ une base hilbertienne de H_K . Dans le cas 1 nous savons que $\sum_{i=0}^{+\infty} g_i(x)^2$ converge uniformément sur \mathcal{X} (cf. V.4.). Grâce au lemme II.2.1. on vérifie aisément qu'il en est de même pour le cas 3. On en déduit la convergence uniforme sur \mathcal{X}^2 de la série $\sum_{i=0}^{+\infty} g_i(x)g_i(y)$.

Notons π_m la projection orthogonale sur le sev G_m engendré par g_0, \dots, g_{m-1} . Pour toute mesure positive ν on a :

$$\|\varphi(\nu) - \pi_m(\varphi(\nu))\|_K^2 = \sum_{i \geq m} \left(\int g_i d\nu \right)^2 = \int_{\mathcal{X}^2} \sum_{i \geq m} g_i(x)g_i(y) \nu \otimes \nu(dx, dy)$$

On en déduit alors

$$(1) \quad \forall \delta > 0 \quad \exists m \in \mathbf{N}, \quad \forall \nu \in \mathcal{M}^+ \quad \|\varphi(\nu) - \pi_m(\varphi(\nu))\|_K^2 \leq \delta^2 \nu(\mathcal{X})^2$$

D'autre part on sait dans les cas 1 et 3 qu'il existe un élément h_0 de H_K tel que :

$$1_{\mathcal{X}} \leq h_0$$

On a donc

$$(2) \quad \forall \nu \in \mathcal{M}^+ \quad 0 \leq \nu(\mathcal{X}) \leq \int h_0 d\nu$$

La suite de v.a.r. $(\int h_0 d\mu_n^\bullet)$ étant convergente en loi vers $\int h_0 d\mu_0^\bullet$ la famille $\left\{ P_{\int h_0 d\mu_n^\bullet}, n \in \mathbf{N} \right\}$ est équitendue. En utilisant (2) et la caractérisation des compacts de \mathbf{R} on en déduit :

$$(3) \quad \forall \eta \in]0; 1[, \exists c > 0, \forall n \in \mathbf{N} \quad P(\{0 \leq \mu_n^\bullet(\mathcal{X}) \leq c\}) > 1 - \eta$$

D'après le théorème de Billingsley-Alexandroff pour établir la convergence en loi de $(\varphi(\mu_n^\bullet))$ vers $\varphi(\mu_0^\bullet)$ il suffit de prouver que pour tout fermé F de H_K :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} P(\{\varphi(\mu_n^\bullet) \in F\}) \leq P(\{\varphi(\mu_0^\bullet) \in F\})$$

Nous noterons F^ε le dilaté d'ordre ε de F pour la distance d induite par la norme hilbertienne de H_K :

$$F^\varepsilon = \{h \in H_K, d(h, F) \leq \varepsilon\}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et $\eta \in]0, 1[$. En utilisant (1) et (3) on voit qu'il existe un entier m dépendant de ε et η tel que :

$$(4) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P(\{\|\varphi(\mu_n^\bullet) - \pi_m(\varphi(\mu_n^\bullet))\|_K \leq \varepsilon\}) > 1 - \eta$$

On en déduit :

$$(5) \quad P(\{\varphi(\mu_n^\bullet) \in F\}) \leq \eta + P(\{\pi_m(\varphi(\mu_n^\bullet)) \in F^\varepsilon \cap G_m\})$$

Grâce à l'hypothèse de convergence en loi des $\int h d\mu_n^\bullet$ vers $\int h d\mu_0^\bullet$ pour tout h de G_m on vérifie facilement que $\pi_m(\varphi(\mu_n^\bullet))$ converge en loi vers $\pi_m(\varphi(\mu_0^\bullet))$. En appliquant le théorème de Billingsley-Alexandroff on en déduit :

$$(6) \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} P(\{\pi_m(\varphi(\mu_n^\bullet)) \in F^\varepsilon \cap G_m\}) \leq P(\{\pi_m(\varphi(\mu_0^\bullet)) \in F^\varepsilon \cap G_m\})$$

En appliquant (4) avec μ_0^\bullet on a d'autre part :

$$(7) \quad P(\{\pi_m(\varphi(\mu_0^\bullet)) \in F^\varepsilon \cap G_m\}) \leq \eta + P(\{\varphi(\mu_0^\bullet) \in (F^\varepsilon \cap G_m)^\varepsilon\})$$

En remarquant que $(F^\varepsilon \cap G_m)^\varepsilon$ est inclus dans $F^{2\varepsilon}$ on aboutit finalement compte-tenu de (5) (6) et (7) à :

$$(8) \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} P(\{\varphi(\mu_n^\bullet) \in F^\varepsilon\}) \leq \eta + P(\{\varphi(\mu_0^\bullet) \in F^{2\varepsilon}\})$$

Cette dernière assertion étant valide pour tout choix de ε et η il en résulte :

$$(9) \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} P(\{\varphi(\mu_n^\bullet) \in F\}) \leq P(\{\varphi(\mu_0^\bullet) \in F\})$$

ce qui est bien la conclusion souhaitée. ■

VII.4. -

Remarque : Dans le cas 2 le théorème précédent reste valable si l'on ajoute l'hypothèse d'équitension de $\{P_{\mu_n^\bullet}(x), n \in \mathbb{N}\}$.

VII.5. -

Corollaire.- Dans les cas 1 et 3 si pour tout $h \in H_K$ ($\int h d\mu_n^\bullet$) converge en probabilité vers $\int h d\mu^\bullet$, μ_n^\bullet et μ^\bullet étant des m.a. positives, alors (μ_n^\bullet) converge en probabilité vers μ^\bullet .

■ Par application du théorème VII.3. la convergence en probabilité des v.a.r. $\int h d\mu_n^\bullet$ implique la convergence en loi de (μ_n^\bullet) vers μ^\bullet et donc l'équitension de $\{P_{\mu_n^\bullet}, n \in \mathbb{N}\}$. Le théorème VI.2. permet alors de conclure. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARONSZAJN N.- *Theory of reproducing kernels*. Transactions of the A.M.S. n° 68, 1950 (p. 307-404).
- [2] GUILBART C.- *Etude des produits scalaires sur l'espace des mesures. Estimation par projections. Tests à noyaux*. Thèse d'Etat. Université de Lille I (Octobre 1978).
- [3] KALLENBERG O.- *Random Measures*. 3^{ème} édition. Academic Press (1983).
- [4] LINDE W.- *Probability in Banach space. Stable and infinitely divisible distributions*. Wiley (1986).
- [5] PARTHASARATHY K.R.- *Probability measures on metric spaces*. Academic Press (1967).
- [6] RUDIN W.- *Analyse réelle et complexe*. Masson (1975).
- [7] SCHWARTZ L.- *Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle*. Hermann (1970).
- [8] SUQUET C.- *Espaces autoreproduisants et mesures aléatoires*. Thèse de 3^{ème} cycle Université de Lille I (Décembre 1986).
- [9] SUQUET C.- *Une topologie préhilbertienne sur l'espace des mesures à signes bornées*. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris XXXV 2 51-77.
- [10] VARADARAJAN V.S.- *Measures on Topological Spaces*. Amer. Math. Soc. Transl. Series 2, t. 48, 1961 (p. 161-228).

