



HAL
open science

Statistique Non Paramétrique des Processus à Longue Mémoire le Cas du Modèle de Régression

Denis Bosq

► **To cite this version:**

Denis Bosq. Statistique Non Paramétrique des Processus à Longue Mémoire le Cas du Modèle de Régression. Annales de l'ISUP, 1991, XXXVI (1-2), pp.119-123. hal-03664790

HAL Id: hal-03664790

<https://hal.science/hal-03664790v1>

Submitted on 11 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Pub. Inst. Stat. Univ. Paris
XXXVI, fasc. 1-2, 1991, 119 à 123

**STATISTIQUE NON PARAMETRIQUE DES PROCESSUS A LONGUE MEMOIRE
LE CAS DU MODELE DE REGRESSION**

Denis BOSQ

(Université Pierre et Marie Curie)

Résumé : On présente une synthèse des résultats de HALL et HART (1990) sur l'estimation d'un modèle de régression non paramétrique avec bruit faiblement stationnaire. La vitesse de convergence de l'estimateur est la même que dans le cas de l'indépendance si et seulement si la série des autocovariances est convergente. La perte de vitesse est précisée quand le processus est à mémoire longue.

Mots clefs : Estimation non paramétrique, modèle de régression, mémoire longue, vitesse de convergence.

Classification AMS : 62G05.

1. Introduction

Le développement de la Statistique non paramétrique des processus à longue mémoire est récent et les travaux sont encore rares.

Le présent travail étudie la détérioration de la vitesse de convergence d'un estimateur non paramétrique quand le processus observé est à mémoire longue. Cette étude a été faite par HALL et HART (1990) dans le cadre d'un modèle de régression à bruit corrélé. Ce bruit étant supposé faiblement stationnaire, ils montrent que la vitesse est la même que dans le cas de l'indépendance si et seulement si la série des autocovariances est convergente. Plus précisément la vitesse est de l'ordre de $n^{2/5}$ si la série des autocovariances est convergente et d'un ordre strictement inférieur si le processus est à mémoire longue.

2. Le modèle

Considérons le modèle de régression

$$Y_i = f\left(\frac{i}{n}\right) + \varepsilon_i \quad 1 \leq i \leq n$$

où f est inconnue et appartient à la classe $\mathcal{C}_2(B)$ des fonctions deux fois différentiables définies sur $[0,1]$ et telles que

$$\sup_{0 < x < 1} \max_{j=0,1,2} |f^{(j)}(x)| \leq B.$$

$(\varepsilon_i, i \in \mathbf{Z})$ est un processus du second ordre, centré, faiblement stationnaire et d'autocovariance

$$r(j) = E(\varepsilon_0 \varepsilon_j) \quad , \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Plus précisément (ε_i) est un processus autorégressif Gaussien d'ordre infini qui vérifie

$$\sum_i b_i \varepsilon_{i+j} = \xi_j \quad , \quad j \in \mathbf{Z}$$

où les ξ_j sont i.i.d. de loi normale centrée réduite et où $\sum_i |b_j| < +\infty$ et $\int_0^\pi \left| \sum_j b_j e^{ij\theta} \right| d\theta < \infty$. Cette dernière condition assure l'inversibilité du processus :

$$\varepsilon_j = \sum_i a_i \xi_{i+j} \quad , \quad i \in \mathbf{Z}.$$

(PRIESTLEY (1981)).

Par conséquent

$$r(j) = \sum_i a_i a_{i+j}$$

et

$$\sum_j r(j) > 0.$$

D'autre part on montre que $\sum r(j)$ converge si et seulement si $\sum b_j \neq 0$.

3. L'estimateur

Soit K une densité bornée, paire, continue par morceaux et à support compact. Pour tout $h > 0$ on pose

$$K_h(x) = K\left(\frac{x}{h}\right) \left[n^{-1} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{i}{nh}\right) \right]^{-1}$$

et l'estimateur \hat{f} de f est défini par

$$\hat{f}\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_h\left(\frac{i-j}{n}\right) Y_j$$

aux points de la forme $\frac{i}{n}$ et par interpolation ailleurs. f étant à dérivée bornée, l'erreur due à l'interpolation est négligeable devant l'erreur d'estimation.

Le choix de $h = h_n$ est précisé ci-dessous. De toute façon si $\lim_{j \rightarrow \infty} r(j) = 0$ (ce que l'on supposera), les conditions $h_n \rightarrow 0$ et

$n h_n \rightarrow +\infty$ sont nécessaires et suffisantes pour que \hat{f} converge en moyenne quadratique quand $n \rightarrow \infty$.

4. Les résultats

Soit \tilde{f} un estimateur quelconque de f , alors :

a) Si $\sum r(j) = \infty$, il existe une suite $\lambda_n \rightarrow \infty$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{C}_2(B)} P(n^{2/5} |\tilde{f}(x) - f(x)| > \lambda_n) > 0.$$

b) Si $\sum r(j) < \infty$, il existe $\Delta > 0$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{C}_2(B)} P(n^{2/5} |\tilde{f}(x) - f(x)| > \Delta) > 0.$$

c) Si $\sum |r(j)| < \infty$ et si h_n est de l'ordre de $n^{-1/5}$ alors,

pour tout $\Delta \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$ on peut trouver $\lambda > 0$ tel que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{C}_2(B)} \sup_{\Delta < x < 1 - \Delta} P(n^{2/5} |\hat{f}(x) - f(x)| > \lambda) < \Delta.$$

Maintenant, pour un choix particulier des b_j et de h on peut préciser les vitesses de convergence : Si r_j est de l'ordre de $|j|^{-\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ la vitesse de convergence est de l'ordre de $n^{-\frac{2\alpha}{4+\alpha}}$ pour $\alpha < 1$ et de l'ordre de $\left(\frac{\text{Log } n}{n}\right)^{2/5}$ pour $\alpha = 1$.

Sous des conditions analogues on obtient des vitesses de convergence en moyenne quadratique :

$$d) \inf_{h > 0} \sup_{f \in \mathcal{C}_2(B)} \sup_{\Delta < x < 1 - \Delta} E(\hat{f}(x) - f(x))^2 = O(\delta(n)^2)$$

$$\text{où } \delta(n) = \begin{cases} n^{-2/5} & \text{si } \sum |r(j)| < \infty \\ \left(\frac{\text{Log } n}{n}\right)^{2/5} & \text{si } r(j) = |j|^{-1} \\ n^{-\frac{2\alpha}{4+\alpha}} & \text{si } r(j) = |j|^{-\alpha}, 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

e) Si $r \geq 0$ alors

$$\inf_{h > 0} E(\hat{f}(x_0) - f(x_0))^2 = O\left(n^{-\frac{4}{5}}\right)$$

si et seulement si $\sum r(j) < \infty$.

f) Si r est ultimement de signe constant

$$\sup_{f \in \mathcal{C}_2(B)} \sup_{\Delta < x < 1 - \Delta} E(\hat{f}(x) - f(x))^2 = O\left(h^4 + (nh)^{-1} \sum_{j=1}^{[nh]} |r(j)|\right).$$

5. Commentaires

(i) La preuve de a) et b) est basée sur un argument de discrimination entre deux fonctions f bien choisies. Les preuves de d), e), f) sont classiques, c) s'en déduit par l'inégalité de Tchelychev.

(ii) Les résultats s'appliquent aux processus fractionnaires

et à l'estimation de la tendance d'un processus.

(iii) La détérioration de vitesse est plus importante que dans le cas de l'estimation de la régression à partir de données bivariées (cf. BIERENS (1983)).

(iii) Pour une vitesse de convergence dans le cas strictement stationnaire et géométriquement mélangeant nous renvoyons à BOSQ (1991) qui montre que si $\beta < \frac{1}{3}$

$$b^{\beta} |f^*(x) - f(x)| \xrightarrow[p.co]{} 0$$

où f^* est un estimateur analogue à \hat{f} .

Bibliographie

BIERENS, H.J. (1983) - Uniform consistency of kernels estimators of a regression function under generalized conditions. J. Amer. Statist. Assoc. 78, 699-707.

BOSQ, D. (1991) - Bernstein-type large deviations inequalities for spatial sums of strong mixing processes. Preprint.

HALL, P. - HART, J.D. (1990) - Non parametric regression with long-range dependence. Stoch. Processes and their Applic. 36, 339-351.

PRIESTLEY, M.B. (1981) - Spectral analysis and time series. Acad. Press., N.Y.