



**HAL**  
open science

## Les Processus FARMA ET GARMA

D. Smili

► **To cite this version:**

D. Smili. Les Processus FARMA ET GARMA. Annales de l'ISUP, 1991, XXXVI (1-2), pp.109-117.  
hal-03664780

**HAL Id: hal-03664780**

**<https://hal.science/hal-03664780>**

Submitted on 11 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Pub. Inst. Stat. Univ. Paris  
XXXVI, fasc. 1-2, 1991, 109 à 117

## LES PROCESSUS FARMA ET GARMA

D.SMILI

UNIVERSITÉ DAUPHINE, PARIS IX.

### Résumé :

Dans ce travail, nous définissons et donnons les propriétés probabilistes des processus *FARMA* et *GARMA*, qui sont des processus fractionnaires, (Hosking (1981-1982), Gray, Zhan & Woodward (1989)). Ceux-ci sont caractérisés par leur caractère longue mémoire, qui joue un rôle très important dans la modélisation des phénomènes aléatoires comme par exemple en hydrologie, (Mandelbrot & Wallis (1969)) et en économie.

### Mots clefs :

Autocorrélation, FARMA, Fractionnaire, GARMA, G-polynôme, G-processus, Inversible, Longue mémoire, Serie Temporelle, Stationnaire.

CEREMADE, UNIVERSITÉ DAUPHINE (PARIS IX),  
PLACE DU MARÉCHAL DE LATTRE DE TASSIGNY,  
75775 PARIS CEDEX 16.

## I-Introduction :

Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  réel est dit à longue mémoire si  $\sum_{k \geq 0} |\gamma_k| = +\infty$  où  $(\gamma_k)_{k \geq 0}$  est la fonction d'autocovariance du processus, ainsi sa densité spectrale est non bornée en un certain point. Les premiers processus étudiés en particulier par Mandelbrot et Van Ness (1968), présentant cette propriété sont les mouvements browniens fractionnaires. D'autres processus ont été introduits par la suite, il s'agit des processus FARMA et GARMA, voir Granger et Joyeux (1980), Hosking (1981, 1982), Gray, Zhang et Woodward (1989).

Contrairement aux processus ARMA classiques, les processus dits fractionnaires sont caractérisés par la décroissance hyperbolique de leur fonction d'autocorrélation ( $\rho_k \simeq k^{-d}$ , quand  $k$  est assez grand,  $d$  étant une constante strictement positive.). Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  une série temporelle et  $\nabla$  l'opérateur de différenciation défini par :

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t,$$

où  $B$  est l'opérateur retard défini par :  $B^k X_t = X_{t-k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Si  $d$  est un entier,  $\nabla^d$  se définit d'une manière naturelle par  $\nabla^d = \nabla(\nabla^{d-1})$ , avec  $\nabla^0 = 1$ , sinon il est défini par le développement binomial suivant :

$$\nabla^d = (1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-B)^k,$$

Où

$$\binom{d}{k} = \frac{d(d-1)\dots(d-k+1)}{k!}.$$

Dans ce travail, nous étudions les processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  qui satisfont les équations aux différences suivantes :

$$i) \Phi(B)\nabla^d X_t = \Theta(B)\varepsilon_t, \quad d \notin \mathbb{N}.$$

$$ii) \Phi(B)(1 - 2uB + B^2)^\lambda X_t = \Theta(B)\varepsilon_t; \quad \lambda, u \in \mathbb{R}.$$

Où  $\Phi$  et  $\Theta$  sont deux polynômes de degrés respectivement  $p$  et  $q$  :

$$\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p,$$

$$\Theta(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q,$$

et  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un bruit blanc, centré, de variance  $\sigma^2$ .

Dans le paragraphe 2 on introduit les processus FARMA et le paragraphe 3 traite des processus GARMA.

On notera  $f$  et  $(\phi_{jj})_{j \geq 0}$  respectivement les fonctions densité spectrale et auto-corrélation

partielle et par  $\Gamma(\cdot)$  la fonction gamma définie par :

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, & x > 0, \\ \infty, & x = 0, \\ x^{-1} \Gamma(1+x), & x < 0. \end{cases}$$

## II-Processus FARMA :

Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus FARMA(p,d,q) s'il satisfait l'équation aux différences suivante :

$$\Phi(B) \nabla^d X_t = \Theta(B) \varepsilon_t, \quad d \notin \mathbb{N}.$$

II-1. supposons tout d'abord que :  $p = q = 0$ .

Le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  que nous considérons vérifie l'équation :

$$\nabla^d X_t = \varepsilon_t \quad (1).$$

C'est un processus FARMA(0,d,0), il est semblable au bruit blanc fractionnaire introduit par Mandelbrot et Wallis (1969) dans le but de générer des séries temporelles possédant le caractère longue mémoire, et cela dans le domaine de l'hydrologie. On peut voir que ce processus est self-similaire, Mandelbrot et Van Ness (1968). Les autres propriétés de ce processus sont les suivantes:

### Théorème 2-1 : (Hosking, 1981)

Si  $|d| < \frac{1}{2}$ , alors il existe un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  stationnaire et inversible satisfaisant (1) et qui a les propriétés suivantes :

i)

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = \varepsilon_t,$$

avec,

$$\psi_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)} \sim \frac{j^{d-1}}{\Gamma(d)}, \quad \text{quand } j \rightarrow \infty,$$

$$\pi_j = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} \sim \frac{j^{d-1}}{\Gamma(-d)}, \quad \text{quand } j \rightarrow \infty.$$

ii)

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} (2 \sin(\frac{\omega}{2}))^{-2d} \sim \omega^{-2d}, \quad \text{quand } \omega \rightarrow 0.$$

iii)

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2 \Gamma(1-2d)}{\Gamma^2(1-d)}.$$

iv)

$$\rho_j = \frac{\Gamma(j+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(j-d+1)\Gamma(d)} \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} j^{2d-1}, \quad \text{quand } j \rightarrow \infty.$$

v)  $\phi_{jj}$  (fonction d'auto-corrélation partielle):  $\phi_{jj} = \frac{d}{j-d}, j \geq 1$ .

**Remarques :**

1- Les coefficients  $\psi_j$  et  $\pi_j$  décroissent hyperboliquement (exponentiellement dans le cas ARMA(p,q)).

2- Quand  $j$  est assez grand,  $\phi_{jj}$  est indépendant de  $d$  :  $\phi_{jj} \sim k^{-1}$ .

3- Si  $d = \frac{1}{2}$ ,  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est inversible et non stationnaire ( $\psi_j \sim (\pi_j)^{-1/2}$ ).

4- Si  $0 < d < 1/2$ , le comportement de la densité spectrale au voisinage de 0 montre la persistance à long terme du processus, caractérisée aussi par la fonction d'autocorrélation. Le processus est donc à longue mémoire avec :

-  $\rho_j$  et  $\phi_{jj} > 0$ .

-  $f$  est décroissante et  $f(\omega)$  tend vers  $+\infty$  quand  $\omega$  tend vers 0.

5- Si  $d = 0$ ,  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un bruit blanc.

6- Si  $-1/2 < d < 0$ ,  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est à court mémoire :

-  $\rho_j < 0$ ,  $\phi_{jj} < 0$ , et  $\rho_j$  décroît hyperboliquement vers 0.

-  $f$  est une fonction croissante et  $f(0)=0$ ,  $(f'(0)=+\infty)$ .

7- Si  $d=-1/2$ ,  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est stationnaire et non inversible, de plus on a :

$f(\omega) = 2\sin(\frac{\omega}{2}) \rightarrow 0$  quand  $\omega$  tend vers 0 ,

$$\rho_j = \frac{1}{4j^2 - 1} , \quad \gamma_0 = \frac{4}{\pi} , \quad \text{et } \phi_{jj} = -\frac{1}{2j + 1} .$$

Nous donnons maintenant un théorème relatif au comportement de la moyenne empirique du processus ( $\bar{X}_n = \frac{\sum_{t=1}^n X_t}{n}$ ):

**Théorème 2-2:**(Hosking, 1982)

Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un FARMA(0,d,0),  $|d| < \frac{1}{2}$  et  $\gamma_0 = E(X_t^2)$ . Alors :

i)  $E(\bar{X}_n) = 0$ .

ii)

$$Var(\bar{X}_n) = n^{-2} \frac{\gamma_0 d}{1 + 2d} \left( 1 - \frac{\Gamma(-d)\Gamma(n + d + 1)}{\Gamma(d + 1)\Gamma(n - d)} \right) \sim \frac{\gamma_0 \Gamma(1 - d)}{(1 + 2d)\Gamma(1 + d)} n^{2d-1} , \quad n \rightarrow \infty .$$

Si  $d > 0$ ,  $Var(\bar{X}_n)$  tend vers 0 plus lentement que  $n^{-1}$  et si  $d < 0$ ,  $Var(\bar{X}_n)$  tend vers 0 plus rapidement que  $n^{-1}$ .

**Remarque :**

On peut voir que ces résultats sont très différents de ceux obtenus dans le cas des ARMA.

**II-2.** On suppose maintenant que :  $(p, q) \neq (0, 0)$ .

Soit  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus FARMA(p,d,q) réel, vérifiant l'équation :

$$\Phi(B)\nabla^d Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (2).$$

On suppose que les racines des polynômes  $\Phi$  et  $\Theta$  sont de module  $> 1$ .

**Théorème 2-3:**(Hosking, 1981)

1- Si  $|d| < 1/2$ , alors il existe un processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  stationnaire et inversible satisfaisant (2).

2- Si  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est stationnaire et inversible alors :

i -  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^{2d} f(\omega)$  existe et fini.

ii -  $\lim_{j \rightarrow +\infty} j^{1-2d} \rho_j$  existe et fini.

**Idée de preuve :**

1- Posons :

$$\Psi(z) = (1-z)^{-d} \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} \quad \text{et} \quad \Pi(z) = (1-z)^d \frac{\Phi(z)}{\Theta(z)},$$

$\Psi$  et  $\Pi$  sont bien définis pour  $|z| \leq 1$  et  $|d| < \frac{1}{2}$ .

2- i-

$$f(\omega) = \left| \frac{\Theta(e^{i\omega})}{\Phi(e^{i\omega})} \right| |1 - e^{i\omega}|^{-d} \sim \left( \frac{1 - \theta_1 - \dots - \theta_q}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p} \right)^2 \omega^{-2d}, \quad \text{quand } \omega \rightarrow 0,$$

d'où le résultat.

ii- Le processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est défini par (2):

posons:

$$X_t = \Theta^{-1}(B)\Phi(B)Y_t,$$

$$\begin{aligned}\nabla^d X_t &= \varepsilon_t, \quad X_t \sim \text{FARMA}(0, d, 0), \\ u_t &= \nabla^d Y_t, \\ \Phi(B)u_t &= \Theta(B)\varepsilon_t, \quad u_t \sim \text{ARMA}(p, q).\end{aligned}$$

Soit  $(\gamma_j^u)$  la fonction d'auto-covariance du processus  $(u_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ . Elle s'écrit donc :

$$\gamma_j^u = \sum_{l=1}^p \alpha_l \beta_l^{j-q}, \quad j > q,$$

où  $\alpha_l, \beta_l$  sont des constantes, avec  $|\beta_l| < 1$ .

Nous notons  $(\gamma_k^Y)$  et  $(\gamma_k^X)$  les fonctions d'auto-covariance des processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  et  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  respectivement, alors :

$$\begin{aligned}\gamma_k^Y &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j^u \gamma_{k-j}^X \\ &= \sum_{j=-q}^{j=q} \gamma_j^u \gamma_{k-j}^X + \gamma_{k+q}^X \sum_{l=1}^p \alpha_l (F(1, d-q-k; 1-d-q-k; \beta_l) - 1) \\ &\quad + \gamma_{k-q}^X \sum_{l=1}^p \alpha_l (F(1, k-q+d; k-q+1-d; \beta_l) - 1),\end{aligned}$$

où  $F(a, b; c; z)$  est la fonction hypergéométrique (Magnus, 1966) définie par :

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n \geq 0} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}$$

$a, b, c, n$  sont entiers et  $z$  tel que  $|z| < 1$ .

Pour  $1 \leq l \leq p$ ,  $F(1, d-q-k; 1-d-q-k; \beta_l)$  et  $F(1, k-q+d; k-q+1-d; \beta_l)$  tendent vers  $(1 - \beta_l)^{-1}$  quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\gamma_k^Y}{\gamma_k^X} = \sum_{j=-q}^q \gamma_j^u + 2 \sum_{l=1}^p \alpha_l \frac{\beta_l}{1 - \beta_l}$$

comme  $\gamma_k^X \sim k^{1-2d}$  quand  $k$  tend vers l'infini, le résultat en découle. ⊙

### III-Les Processus GARMA:

$(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus  $\text{GARMA}(p, u, \lambda, q)$  s'il satisfait l'équation aux différences suivantes :

$$\Phi(B)(1 - 2uB + B^2)^\lambda X_t = \Theta(B)\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (3),$$

où  $u$  et  $\lambda$  sont des réels,  $\Phi$  et  $\Theta$  sont respectivement deux polynômes de degré  $p$  et  $q$ .

Pour étudier ce processus, il est très utile de rappeler certaines notions sur les polynômes. Notons que l'intérêt d'un tel modèle par rapport au précédent est qu'il introduit par l'intermédiaire du paramètre  $u$ , un facteur de saisonnalité pour le processus.

### III-1. Les G-polynômes (Polynômes de Gegenbauer) :

Les G-polynômes appelés dans la littérature les polynômes de Gegenbauer et notés  $C_n^{(\lambda)}(\cdot)$  sont définis par le développement :

$$(1 - 2uz + z^2)^{-\lambda} = \sum_{n \geq 0} C_n^{(\lambda)}(u) z^n, \quad \lambda \neq 0, \quad |z| < 1 \text{ et } |u| < 1,$$

où,

$$C_n^{(\lambda)}(u) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(\lambda + n - k)}{\Gamma(\lambda) k! (n - 2k)!} (2u)^{n-2k}.$$

### III-2. Les G-processus (Processus de Gegenbauer) :

$(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un G-processus s'il satisfait l'équation :

$$X_t = \sum_{k=0} C_n^{(\lambda)}(u) \varepsilon_{t-k}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (4),$$

où  $C_n^{(\lambda)}(u)$  est défini en III-1 et où  $(\varepsilon_t)_t$  étant un bruit blanc centré et de variance  $\sigma^2$  et  $\lambda$  un réel non nul.

Le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  s'écrit aussi :

$$X_t = (1 - 2uB + B^2)^{-\lambda} \varepsilon_t.$$

Si  $|u| = 1$ , le processus (4) est un FARMA.

**Théorème 3-1 :** (Gray, Zhan, Woodward, 1989)

1- Le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est stationnaire si  $|u| < 1$  et  $\lambda < 1/2$  ou si  $|u| = 1$  et  $\lambda < 1/4$ .

2- Le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est inversible si  $|u| < 1$  et  $\lambda > -1/2$  ou si  $|u| = 1$  et  $\lambda > -1/4$ . ⊙

**Théorème 3-2 :** (Gray, Zhan, Woodward, 1989)

Un G-processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  stationnaire est un processus à longue mémoire si  $(|u| < 1 \text{ et } 0 < \lambda < 1/2)$  ou  $(|u| = 1 \text{ et } 0 < \lambda < 1/4)$ . ⊙

**Idée de preuve :**

On pose,  $\omega_0 = \cos^{-1} u$  (appelé la G-fréquence), la densité spectrale du processus est définie par :

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} (4(\cos \omega - u)^2)^{-\lambda}.$$



$f$  est non bornée au voisinage de  $\omega_0$ , d'où le résultat.

**Théorème 3-3 :** (Gray, Zhan, Woodward, 1989)

Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un G-processus stationnaire à longue mémoire :

$$(1 - 2uB + B^2)X_t = \varepsilon_t$$

1- Si  $u = 1$  et  $0 < \lambda < 1/4$  :

$$\rho_k = \frac{\Gamma(1 - 2\lambda)\Gamma(k + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(k - 2\lambda + 1)} \sim k^{4\lambda - 1} \text{ quand } k \rightarrow +\infty .$$

2- Si  $u = -1$  et  $0 < \lambda < 1/4$  :

$$\rho_k = (-1)^k \frac{\Gamma(1 - 2\lambda)\Gamma(k + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(k - 2\lambda + 1)} \sim (-1)^k k^{4\lambda - 1} , \text{ quand } k \rightarrow +\infty .$$

3- Si  $|u| < 1$  et  $0 < \lambda < 1/2$  :

$$\rho_k \simeq k^{2\lambda - 1} \sin(\lambda\pi - k\omega_0) , \text{ quand } k \rightarrow +\infty ,$$

où  $\omega_0$  est la G-fréquence.

### III-3. Processus GARMA :

**Théorème 3-4 :**

Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus *GARMA*( $p, u, \lambda, q$ ), défini par (4), alors :

- 1-  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est stationnaire si  $|u| = 1$  et  $\lambda < 1/4$  ou si  $|u| < 1$  et  $\lambda < 1/2$ .
- 2-  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est inversible si  $|u| = 1$  et  $\lambda > -1/4$  ou si  $|u| < 1$  et  $\lambda > -1/2$ .
- 3-  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est à longue mémoire si  $0 < \lambda < 1/4$  et  $|u| = 1$  ou si  $0 < \lambda < 1/2$  et  $|u| < 1$ .
- 4- i) Si  $|u| < 1$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} (\omega - \omega_0)^{2\lambda} f(\omega)$  existe et finie.  
 ii) Si  $|u| = 1$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^{4\lambda} f(\omega)$  existe et finie.
- 5- Quand  $k \rightarrow +\infty$  :
  - i) si  $u = 1$  et  $0 < \lambda < 1/4$  :  $\rho_k \simeq k^{4\lambda - 1}$ .
  - ii) si  $u = -1$  et  $0 < \lambda < 1/4$  :  $\rho_k \simeq (-1)^k k^{4\lambda - 1}$ .
  - iii) si  $|u| < 1$  et  $0 < \lambda < 1/2$  :  $\rho_k \simeq k^{2\lambda - 1} \sin(\pi\lambda - k\omega_0)$ .  
 où  $\omega_0$  est la G-fréquence.

Les processus GARMA représentent une extension des processus FARMA. Celle-ci est justifiée par l'introduction d'un facteur de saisonnalité dans le modèle.

## Bibliographie

- [1] BOX, G.E.P. & JENKINS, G.M. (1976) : Time Series Analysis : Forecasting and Control. San Francisco : Holden Day.
- [2] GRANGER, C.W.J. & JOYEUX, R. (1980) : An Introduction to Long-memory Times Series Models and Fractional Differencing. Journal of Times Series Analysis, Vol. 1, no. 1, pp. 15-29 .
- [3] GRAY, H.L., ZHANG, N-F. & WOODWARD, W.A. (1989) : On Generalised Fractional Processes. Journal of Time Series Analysis Vol. 10, No. 3, pp. 233-258.
- [4] HOSKING, J.R.M (1981) : Fractional Differencing. Biometrika 68(1), pp. 165-76.
- [5] HOSKING, J.R.M. (1982) : Time Series Analysis: Theory and Practice 1. O.D. Anderson (editor). North-Holland Publishing Company.
- [6] HOSKING, J.R.M. (1984) : Modeling Persistence in Hydrological Time Series Using Fractional Differencing. Water Resource Res. 20(12), 1898-908.
- [7] MANDELBROT, B.B. & J. W. VAN NESS (1968) : Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. SIAM Review 10,422-437.
- [8] MANDELBROT, B.B. & WALLIS, J.R. (1969) : Computer Experiments With Fractional Noise Processes. Water Resour. Res. 7, 1460-8.
- [9] MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. & SONI, R.P. (1966) : Formulas and Theorems for The Special Functions of Mathematical Physics. Berlin: Springer-Verlag.

Mots clefs : Estimation non paramétrique, modèle de régression, séries temporelles, vitesses de convergence.

Classification : 62G05, 62M10.