



**HAL**  
open science

# Le Mouvement Brownien Fractal

Charles El-Nouty

► **To cite this version:**

Charles El-Nouty. Le Mouvement Brownien Fractal. Annales de l'ISUP, 1991, XXXVI (1-2), pp.93-107. hal-03664763

**HAL Id: hal-03664763**

**<https://hal.science/hal-03664763v1>**

Submitted on 11 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Pub. Inst. Stat. Univ. Paris  
XXXVI, fasc. 1-2, 1991, 93 à 107

## LE MOUVEMENT BROWNIEN FRACTAL

Charles EL-NOUTY

L. S. T. A., PARIS VI.

Résumé : des approches différentes du mouvement brownien fractal sont présentées. Deux domaines d'application sont étudiés : d'une part, une caractérisation des éléments de ses classes supérieures; d'autre part, l'énoncé d'un théorème central limite fonctionnel dans le cas d'un système dynamique aperiodique.

Mots clefs : mouvement brownien fractal; classes supérieures; théorème central limite fonctionnel.

Classification AMS : 60 K Special Processes.

## I. INTRODUCTION

Le mouvement brownien fractal entre de diverses manières dans le cadre des processus longue-mémoire. D'une part, ses propriétés élémentaires justifient sa place dans cette catégorie de processus; d'autre part, le mouvement brownien fractal, processus gaussien, illustre les difficultés techniques qui existent pour les processus longue-mémoire.

Ainsi, nous présenterons tout d'abord deux approches du mouvement brownien fractal : l'approche historique (paragraphe 2) et l'approche "processus limite" (paragraphe 3); puis nous introduisons le bruit gaussien fractal (paragraphe 4). L'étude des classes supérieures du mouvement brownien fractal fera l'objet du paragraphe 5. Enfin, au paragraphe 6, nous donnons un théorème central limite fonctionnel dans le cadre d'un système dynamique apériodique.

## II. LE MOUVEMENT BROWNIEN FRACTAL : INTEGRALE DU PROCESSUS DE WIENER.

L'objet de ce paragraphe est de présenter l'approche historique de la construction du mouvement brownien fractal.

Définition : Soit  $H$  tel que  $0 < H < 1$ .

Soit  $b_0 \in \mathbb{R}$ ; soit  $(\Omega; \mathcal{a}, p)$  un espace de probabilité.

On définit le mouvement brownien fractal de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 B_H(0, \omega) &= b_0 \\
 B_H(t, \omega) - B_H(0, \omega) &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left( \int_{-\infty}^0 \left( (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dW(s, \omega) \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW(s, \omega) \right), \quad t > 0.
 \end{aligned}$$

Remarque 1 :

$\Gamma$  désigne la fonction gamma usuelle.

$W$  est un processus de Wiener.

Remarque 2 :

Si  $b_0 = 0$ , alors on a :  $B_{1/2}(t, \omega) = W(t, \omega)$ .

Propriétés :

- \* Les accroissements du mouvement brownien fractal sont stationnaires et Hss (H self-similaire).
- \*  $B_H(t)$  est une fonction continue en moyenne quadratique.
- \*  $B_H(t)$  est une fonction continue avec probabilité 1.
- \*  $B_H(t)$  n'est pas différentiable.
- \* Avec  $B_H(0) = 0$ ,  $EB_H(t) = 0$  et  $\text{Var } B_H(1) = 1$ .

On a :

$$\text{Cov}(B_H(t_1)B_H(t_2)) = \frac{1}{2} [t_1^{2H} + t_2^{2H} - (t_1 - t_2)^{2H}].$$

$$\text{Var } B_H(t) = t^{2H}.$$

Remarque : Les propriétés précédentes sont soit démontrées dans l'article de Mandelbrot et van Ness (1968), soit se démontrent directement.

Théorème 1 : Soit  $X(t, \omega)$  un processus gaussien non constant qui vérifie les propriétés suivantes :

- ses accroissements sont stationnaires et Hss,
  - il est continu en moyenne quadratique,
- alors  $X$  est le mouvement brownien fractal.

Théorème 2 : Soit un processus gaussien  $Z(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , tel que :

- \*  $Z(0) = 0$ ,
- \*  $EZ(t) = 0$ ,
- \*  $EZ^2(1) = 1$ ,
- \*  $E(Z(t_1)Z(t_2)) = \frac{1}{2} [ |t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H} ]$ ,
- \*  $Z$  continu en moyenne quadratique,

Alors  $Z(t)$  est le mouvement brownien fractal.

Remarque : Notons que l'on peut prendre  $t \in \mathbb{R}$ , alors que dans la

définition,  $t$  était supposé positif. Le passage à  $\mathbb{R}$  se fait en étendant les propriétés données par Mandelbrot (1968) dans le cas  $t > 0$  à un processus défini sur  $\mathbb{R}$ .

Démonstration.

Les hypothèses du théorème 2 entraînant celles du théorème 1, ce dernier étant démontré dans l'article de Mandelbrot et van Ness (1968).

L'énoncé du théorème 2 fournit la forme la plus commode pour caractériser le mouvement brownien fractal.

III. LE MOUVEMENT BROWNIEN FRACTAL : PROCESSUS LIMITE.

Nous avons considéré le mouvement brownien fractal comme une "intégrale" du processus de Wiener. Nous allons proposer une autre approche.

Théorème 1 : Soit un processus  $Z_N(t)$  de fonctions aléatoires de  $D[0,1]$  qui vérifie :

$$* Z_N(t) = \frac{S_{[Nt]}}{N^{2H}L(N)}, \quad 0 < H < 1 \quad \text{où } L \text{ est une fonction à variation lente.}$$

$$S_N = \sum_{i=1}^N Y_i \quad \text{avec } (Y_i) \text{ strictement stationnaire,}$$

$$EY_i = 0; \quad \text{Var } Y_i < +\infty.$$

$$* ES_N^2 = O(N^{2H}L(N)), \quad N \rightarrow +\infty,$$

$$* E|S_N|^{2a} = O((ES_N^2)^a), \quad a > \frac{1}{2H},$$

\* les distributions de dimension finie de  $Z_N(t)$  convergent, alors  $Z_N$  converge faiblement vers  $\bar{Z}(t)$  qui a les propriétés suivantes :

- $\bar{Z}(0) = 0$ ,
- accroissements stationnaires,
- $\bar{Z}$  est Hss,
- $\bar{Z}$  est centré,
- $E|\bar{Z}(t)|^\gamma < +\infty$  pour  $\gamma \leq \frac{1}{H}$ ,
- $\bar{Z}$  est continu,
- ses distributions de dimension finie sont les limites de celles de  $Z_N(t)$ .

Rappel : L'espace  $D[0,1]$  est la classe des fonctions bornées  $x$  à valeurs réelles sur  $[0,1]$  tel que  $x$  ait une limite à droite en tout point de  $[0,1]$  et une limite à gauche en tout point de  $]0,1[$ .

De plus, on impose que  $x$  soit continue à droite sur  $[0,1[$ .

Théorème 2 : Soit  $X_1$  un processus gaussien stationnaire, de moyenne nulle et de covariance  $M_{1-j} = EX_1 X_j$ .

Supposons

$$\sum_1^j M_{1-j} \underset{\infty}{\sim} K N^{2H} L(N)$$

alors

$$Z_{N,1}(t) = \frac{1}{d_N} \sum_1^{[NT]} X_1 ; d_N^2 \sim N^{2H} L(N);$$

converge faiblement,  $N \rightarrow \infty$ , vers  $\sqrt{K} B_H(t)$ .

Remarques : 1) Ces deux théorèmes prouvent l'existence du mouvement brownien fractal; ils sont démontrés dans l'article de Taqqu (1975).

2)  $d_N^2$  est asymptotiquement proportionnel à  $\text{Var} \sum_1^N X_1$ .

3) Nous avons présenté deux manières d'aboutir au mouvement brownien fractal. Une autre approche possible est de considérer le mouvement brownien fractal comme un cas particulier de processus self-similaires. Le guide bibliographique de Taqqu dans le livre d'Eberlein et de Taqqu (1986) donne l'état actuel des résultats concernant cette catégorie de processus.

#### IV. LE BRUIT GAUSSIEN FRACTAL.

L'étude des accroissements de rang 1 du mouvement brownien fractal permet d'insister sur le phénomène longue mémoire et d'établir un lien avec les ARMA fractals.

Définition : Soit  $B_H(t)$  le mouvement brownien fractal.

On pose  $G(i) = B_H(i+1) - B_H(i)$ ,  $-\infty < i < +\infty$

$G$  s'appelle le bruit gaussien fractal.

Propriétés :

- \*  $G$  est stationnaire,
- \*  $G$  est gaussien de moyenne nulle et de variance égale à 1.

Propriété : La covariance  $\gamma_k = E(G(i+k)G(i))$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , est égale à :



$$\gamma_k = \frac{1}{2} \left[ |k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H} \right]$$

de plus, on a :

$$\gamma_k \underset{+\infty}{\sim} H(2H-1) k^{2H-2}$$

Remarque : La démonstration se fait de manière directe.

Définitions : Si  $\frac{1}{2} < H < 1$ ,  $G$  a une forme persistente de dépendance à long terme.

Si  $H = \frac{1}{2}$ ,  $G$  est un bruit blanc.

Si  $0 < H < \frac{1}{2}$ ,  $G$  a une forme antipersistente de dépendance à long terme.

Densité spectrale :  $\frac{1}{2} < H < 1$

$$f(x, H) = \frac{(1 - \cos x) \int_{-\infty}^{+\infty} |x+2k\pi|^{-1-2H} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos x) |x|^{1-2H} dx}$$

Démonstration :

On considère la forme générale de la densité spectrale d'un processus self-similaire donnée par Sinai (1976). Puis, on utilise le fait que :

$$\gamma_k = \int_0^{2\pi} e^{ikx} f(x, H) dx.$$

## V. CLASSES SUPERIEURES DU MOUVEMENT BROWNIEN FRACTAL.

L'étude des classes supérieures du mouvement brownien fractal permet une connaissance plus fine du processus et montre que des techniques dites classiques doivent être modifiées.

Définition :  $\Phi$  appartient à la classe supérieure-supérieure du processus  $Z$ , ce qui se note

$\Phi \in \text{UUC}(Z)$  si avec probabilité 1 :

$$\exists t_0(\omega) \quad \forall t > t_0 \quad Z(t) < \Phi(t)$$

Définition :  $\Phi \in \text{ULC}(Z)$  si avec probabilité 1, il existe une suite  $(t_i)$  tel que  $\forall i$

$$0 < t_1 < \dots \quad \text{avec} \quad t_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{tel que} \quad Z(t_i) \geq \Phi(t_i)$$

Remarque : UUC et ULC sont des abréviations respectives de "upper-upper class" et de "upper-lower class".

Lemme :  $0 < H < 1$ ; soient  $T$  et  $h$  positifs ; on pose  $\sigma(h) = h^H$ .

Alors, on a :

$$\begin{aligned} P \left( \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq t' - t \leq h}} \left( B_H(t') - B_H(t) \right) \geq \sigma(h) \cdot u \right) \\ \leq C_H \frac{T}{h} u^{\frac{1}{H}-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \end{aligned}$$

pour  $u \geq 0$ ;  $C_H$  dépend de  $H$  mais ni de  $T$  ni de  $h$ .

Démonstration :

Ort́ega (1989) distingue deux cas :  $0 < H < \frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2} < H < 1$ ; puis il utilise les ŕesultats de Berman (1985). #



Soit  $a_t$  une fonction non décroissante tel que  $0 < a_t < t$  et  $\frac{a_t}{t}$  non croissante.

On pose :

$$Y_1(t) = \frac{B_H(t+a_t) - B_H(t)}{\sigma(a_t)}$$

$$Y_2(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \sup_{0 \leq u \leq a_t} \frac{B_H(t+u) - B_H(t)}{\sigma(a_t)}$$

et

$$Y_1^*(t) = |Y_1(t)| ; Y_2^*(t) = |Y_2(t)|$$

Théorème : Soit  $Z_1$  l'un des  $Y_1, Y_1^*$

$$\Phi \in \text{UUC}(Z) \iff I_H(\Phi) < +\infty$$

avec

$$I_H(\Phi) = \int_1^\infty \frac{\Phi^{\frac{1}{2}-1}(t)}{a(t)} \exp\left(-\frac{\Phi^2(t)}{2}\right) dt.$$

La présentation des grandes lignes de la démonstration de ce théorème va mettre en relief une partie des difficultés techniques liées aux processus longue-mémoire.

Démonstration :

<=/ Montrons que :  $I_\alpha(\Phi) < \infty \Rightarrow \Phi \in \text{UUC}(Y_6^*)$ .

On suppose que pour  $t$  grand,  $1 \leq \Phi(t) \leq t^{1/4}$

(sinon on pose  $\hat{\Phi}(t) = \min(1, \Phi(t))$ ).

On considère la suite croissante  $T_k$  par :  $T_k = T_{k-1}(1 + \Phi^{-2}(T_{k-1}))$ .

On pose :

$$B_k = \left\{ \sup_{T_{k-1} \leq t \leq T_k} \sup_{0 \leq s \leq a_{T_k}} (B_H(t+s) - B_H(t)) \geq \sigma(a_{T_{k-1}}) \cdot \Phi(T_{k-1}) \right\}$$

On majore la probabilité de  $B_k$  à l'aide du lemme précédent;

On obtient  $I_\alpha(\Phi) < \infty \Rightarrow \Sigma p(B_k) < +\infty$ , et en utilisant le lemme de Borel-Cantelli, on a le résultat.

$\Rightarrow$  Montrons que  $I_\alpha(\Phi) = \infty \Rightarrow \Phi \in \text{ULC}(Y_1)$ .

Soit  $\beta = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a(t)}{t}$ ; le cas  $\beta=1$  a déjà été traité. On suppose

donc :

$\beta < 1$ .

On définit la suite  $T_k \uparrow \infty$  par  $0 < \frac{a(T_0)}{T_0} < \beta' = \frac{1+\beta}{2}$  ;

$$\Phi(T_0) > 1 ; \xi(T_k) = T_k - a(T_k) = T_{k-1}.$$

On définit aussi :

$$\delta_k = \left[ \frac{1}{\Phi^\alpha(T_k)} \right] ; \delta'_k = [\lambda \delta_k] \quad 0 < \lambda < 1$$

$$\tau_{k,j} = \frac{j a(T_{k-1})}{\delta_k} ; t_{k,j} = T_{k-1} + \tau_{k,j}$$

$$G_k = \left\{ \max_{1 \leq j \leq \delta'_k} Y_1(t_{k,j}) > \Phi(T_k) \right\}_j$$

Etape 1 : Soient  $s$  et  $t$  éléments de  $[T_{k-1}, T_{k-1} + \lambda a(T_{k-1})]$ ,  $s \leq t$ .

On montre qu'il existe  $D_H > 0$  tel que :

$$E(Y_1(t) - Y_1(s))^2 \geq D_H \frac{(t-s)^{2H}}{a^{2H}(T_{k-1})}$$

A cet effet, après avoir développé le membre de gauche, on utilise une formule de Taylor, puis on distingue les cas  $H < \frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2} < H < 1$ .

Etape 2 :  $q \in [0, 1]$  ;  $V_k(q) = Y_1(T_{k-1}) + q \lambda a(T_{k-1})$ .

On considère :

$$p(G_k) = p \left( \max_{1 \leq j \leq \delta'_k} V_k \left( \frac{j}{\delta_k} \right) > \Phi(T_k) \right)$$

On minore  $p(G_k)$  pour obtenir :

$$I_\alpha(\Phi) = \infty \Rightarrow \sum p(G_k) = \infty.$$

Etape 3 : Puisque les événements ne sont pas indépendants (phénomène longue-mémoire), on a besoin pour conclure d'un lemme de Borel-Cantelli amélioré.

Lemme : Soit  $(A_n)$  une suite d'évènements.

Si (i)  $\Sigma p(A_n) = \infty$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \frac{p(A_j \cap A_k) - p(A_j)p(A_k)}{\left(\sum_{l=1}^n p(A_l)\right)^2} = 0$$

alors,  $p(A_n \text{ i.o.}) = 1.$  #

## VI. SYSTEMES DYNAMIQUES - MOUVEMENT BROWNIEN FRACTAL.

Ce paragraphe a pour but de justifier une partie de l'intérêt que l'on porte au mouvement brownien fractal. Certes, il n'est pas simple de donner une définition générale d'un système dynamique : néanmoins je demanderai au lecteur de se référer à celle de Cook (1986).

Soit  $(X, \mu, T)$  un système dynamique avec  $\mu(X)=1$ ; soit  $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ;  $f$  centrée.

On pose :  $S_n f = f + f \circ T + \dots + f \circ T^{n-1}$

$$V_n^2 = \int_x (S_n f)^2.$$

On définit :  $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_n f(t, x) = \begin{cases} S_k f & t = \frac{k}{n} \\ \text{linéaire entre deux} & \end{cases}$$

Propriété :  $S_n f(\cdot, x)$  est continue sur  $[0, 1]$ .

Notation : Soit  $Y(\cdot), t \in [0, 1]$  un processus stochastique avec  $p(Y(\cdot) \in C(0, 1)) = 1$ ; on écrit :  $f \in \text{CLT}(Y)$  si  $\forall h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  bornée, continue  $\forall u \in \mathbb{R}$ .

$$\mu(x \in X : h\left(\frac{S_n f(\cdot, x)}{V_n} < u\right)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p(h(Y) < u).$$

Théorème :  $0 < H < 1$

Pour tout système aperiodique  $(X, \mu, T)$ , il existe  $f \in \mathcal{L}^2(X)$  tel que  $f \in \text{CLT}(B_H)$ .

Remarque : Les mouvements browniens fractals sont la classe la plus vaste de processus gaussiens non triviaux pour laquelle le théorème précédent peut d'appliquer.

Ce théorème a été établi par Lacey (preprint); la fin du chapitre est consacrée à l'exposé des grandes lignes de la démonstration de ce théorème.

Démonstration :

Lacey (preprint) traite tout d'abord un cas particulier avant de résoudre le cas général.

Etape 1 : on pose  $X = \mathbb{R}/2\pi$  et  $Tx = x + \alpha[2\pi]$  avec  $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ .

Si on suppose que  $f$  existe,  $f$  s'écrit sous la forme :

$$f(x) = 2 \sum_1^{\infty} b_j \cos jx ; \sum_1^{\infty} b_j^2 < \infty$$

On pose :  $K_n(\lambda) = \frac{1 - e^{in\lambda}}{1 - e^{i\lambda}}$ .

Lemme 1 : Il existe une fonction réelle symétrique, intégrable sur  $[-\pi, \pi]$  tel que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} w(x) |K_m(x)|^2 dx = m^{2H} ; m \geq 1$$

et

$$w(x) = O(|x|^{1-2H}) \quad |x| \downarrow 0$$

Démonstration

Pour  $H \neq \frac{1}{2}$ , on suppose l'existence de  $w$ ; on obtient l'expression des coefficients de Fourier, puis on montre que la condition est suffisante.

Lemme 2 : il existe  $J = \{j_1, j_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$  et  $b_j$  tel que

\*  $j_{r+1} > 4j_r$

\*  $b_j = 0$  si  $|j| \notin J$

\*  $\sum b_j^2 < \infty$

\*  $\nabla_n^2 = n^{2H} + O(\ln n) \quad n \rightarrow +\infty$

\*  $\max_j \nabla_n^{-1} b_j |K_n(j\alpha)| = O(n^H)$   
 $n \rightarrow +\infty$

Démonstration :

Le lemme 2 découle du fait que l'on approxime  $\nabla_n^2$  par une intégrale appropriée en utilisant la fonction  $w$  du lemme 1. #

Lemme 3 :

$$* \forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r < 1 \quad n \rightarrow +\infty$$

$$\{\nabla_n^{-1} S_n f(t_n)\}_{1 \leq u \leq v} \xrightarrow{d} \{B_H(t_u)\}_{1 \leq u \leq v}$$

$$* \forall \delta > 0 \quad n > \frac{2}{\delta} \quad \text{et} \quad \lambda^2 > c\delta^{2H}$$

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}/2\pi : \sup_{|s-t| < \delta} |S_n f(s, x) - S_n f(t, x)| > \lambda \nabla_n\}| \\ \leq c\delta^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{c\delta^{2H}}\right). \end{aligned}$$

Démonstration :

On applique le théorème central limite de Salem-Zygmund (cf. Lacey (preprint)) pour la première assertion.

La deuxième assertion découle de techniques classiques sur les processus empiriques. #

A l'aide des deux derniers lemmes et compte tenu de la continuité p.s. de  $B_H$ , on a le résultat. #

Etape 2 : Cas général.

Ce cas va nécessiter l'emploi d'outils beaucoup plus complexes et moins connus que ceux utilisés dans le cas d'une rotation irrationnelle.

Soit  $(X, \mu, T)$  un système dynamique apériodique.

Définition : pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $\varepsilon > 0$ ,  $F$  un ensemble mesurable inclus dans  $X$  est un "(N,E) tower" si  $F, TF, \dots, T^{N-1}F$  sont disjoints et  $\mu(R) < \varepsilon$  où  $R = X - \bigcup_0^{N-1} T^i F$  est l'ensemble résiduel.

Définition : soient  $L$  et  $N$  des entiers positifs,  $\epsilon > 0$  et  $F$  un "(LN,  $\epsilon$ ) tower" avec  $R$  ensemble résiduel.

Soit  $0 < \lambda < \pi$  tel que  $e^{i\lambda}$  racine  $n^{\text{ième}}$  de l'unité.

$g : \lambda \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction spéciale pour  $(L, N, \epsilon, F, \lambda)$  si :

a)  $g_{1F}$  équidistribuée sur  $\{1, e^{i\lambda}, \dots, e^{i(n-1)\lambda}\}$

b)  $g(T^1 x) = e^{i\lambda} g(x)$ ,  $0 \leq 1 \leq NL$ ,  $x \in F$ .

Notre fonction  $f$  va être la somme de fonctions spéciales correctement choisies.

Supposons que  $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_r g_r$ . Il s'agit maintenant de démontrer que cette fonction convient. A cet effet, on définit pour tout  $n$  :

$$f_n = \sum_{|r| > r_0(n)} b_r g_r$$

$r_0(n)$  étant correctement choisi.

On démontre que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_t \nabla_n^{-1} |S_n(f - f_n)(t)| = 0 \quad \text{p. s.}$$

Ainsi, il suffit de considérer la suite  $S_n f_n$  et de prouver à l'aide de la théorie des martingales que :

- la suite des mesures de probabilités de  $\nabla_n^{-1} S_n f_n$  est tendue,
- la faible convergence vers  $B_H$  pour un ensemble dense de fonctions linéaires de  $C(0,1)$ . #

Définition : Soit  $K$  un compact de  $C(0,1)$ .

$f \in \text{FLIL}(K)$  s'il existe  $N < X$  avec  $\mu(N) = 0$  tel que  $\forall x \in X - N$ , on ait pour  $\mathcal{F}(x) = \{a_n^{-1} S_n f(\cdot, x), n \geq 1\} \subset C(0,1)$  avec

$$a_n^2 = 2 \nabla_n^2 \ln^+(1 + \ln^+ \nabla_n^2)$$

\*  $\mathcal{F}(x)$  est relativement compact dans  $C(0,1)$

\* l'ensemble des points limites de  $\mathcal{F}$  est  $K$ .

On note  $K_H$  la boule unité du noyau autoreproduisant de l'espace de Hilbert associé au mouvement brownien fractal.

Théorème : Soit  $0 < H < 1$ .

Pour tout système dynamique apériodique  $(X, \mu, T)$ , il existe  $f \in \mathcal{L}^2(X)$  tel que  $f \in \text{FLIL}(K_H)$ .

Démonstration :

Il suffit de montrer que le  $f$  construit au théorème précédent convient. #

## VII. CONCLUSION.

Le mouvement brownien fractal peut être considéré comme une "intégrale" du processus de Wiener ou comme un processus limite. Ce processus est continu p.s. et en moyenne quadratique, non différentiable p.s. et possède des accroissements stationnaires et Hss. Le calcul de la densité spectrale du bruit gaussien fractal met en évidence le phénomène long-mémoire.

Cependant, force est de constater que le mouvement brownien fractal et l'étude de ses accroissements ont engendré beaucoup moins de travaux que ceux sur le processus de Wiener. La construction historique du mouvement brownien fractal comme "intégrale" du processus de Wiener peut expliquer cette situation : on a pu penser que l'ensemble des résultats sur Wiener pourrait être appliqué à quelques modifications près. L'hypothèse d'indépendance des accroissements est très forte. Ainsi, comme l'illustre l'étude des classes supérieures du mouvement brownien fractal, d'autres techniques doivent être utilisées. De plus, la diversité des domaines d'application de ce dernier - comme en témoigne le théorème central limite dans le cas d'un système dynamique apériodique - justifie la nécessité d'une connaissance approfondie de ce processus.

## BIBLIOGRAPHIE.

\* Berman S. (1985). An asymptotic bound for the tail of the distribution of the maximum of a Gaussian process. IHP, vol.2n°1, p.47-57.

- \* Cook P.A. (1986). Nonlinear Dynamical Systems. Prentice-Hall International Series in systems and control engineering. Series editor M.J. Grimble.
  
- \* Eberlein et Taqqu (1986). Dependence in probability and statistics. Birkhauser.
  
- \* Lacey M.T. (preprint). Dynamical systems, fractional brownian motion and limit theorems.  
University of North Carolina, Chapel Hill.
  
- \* Mandelbrot et van Ness (1968). Fractional brownian motions, fractional noises and applications.  
SIAM Review, vol.10, n°4.
  
- \* Ortega J. (1989). Upper classes for the increments of fractional brownian motion.  
Proba Theory and Related Fields, 80.
  
- \* Sinai Ya. G. (1976). Self-similar probability distributions. Theory Proba., appli.21, p.64-80.
  
- \* Taqqu M. (1975). Weak convergence to Fractional brownian motion and to the Rosenblatt Process. ZKW, Gebiete 31, p.287-302.