



**HAL**  
open science

# Processus à Mémoire Longue et Théorème Non Central Limite: Une introduction.

Emmanuel Guerre

► **To cite this version:**

Emmanuel Guerre. Processus à Mémoire Longue et Théorème Non Central Limite: Une introduction.. Annales de l'ISUP, 1991, XXXVI (1-2), pp.71-91. hal-03664677

**HAL Id: hal-03664677**

**<https://hal.science/hal-03664677>**

Submitted on 11 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Pub. Inst. Stat. Univ. Paris*  
 XXXVI, fasc. 1-2, 1991, 71 à 91

**Processus à Mémoire Longue et Théorème Non Central Limite:**  
 Une introduction.

Emmanuel Guerre

(CREST-ENSAE et LSTA)

**Résumé:**

Cet article est une introduction à la théorie des théorèmes non centraux limites, pour les processus à mémoire longue. On présente plusieurs théorèmes non centraux limites s'appliquant aux estimateurs de la moyenne et de la covariance. Les principales techniques de démonstrations sont données, et on souligne les conditions nécessaires à l'obtention de ces résultats.

**Mots clés:** Convergence faible, Mémoire longue, Polynômes d'Hermite, Processus de Rosenblatt.

**Key Words:** Weak convergence, Long range dependence, Hermite Polynomials, Rosenblatt Process.

Classification AMS 1980. Primaire 60F17; Secondaire 33A70.

## I. Introduction.

Bien que la mise en évidence de phénomènes "étranges" pour des sommes de variables aléatoires à longue mémoire soit relativement ancienne, puisqu'elle remonte à Rosenblatt (1961), les théorèmes non centraux limites ont connu un regain d'intérêt important depuis quelques années. En effet, le domaine d'application de la théorie des processus à mémoire longue a considérablement augmenté, de nombreuses séries semblant rentrer dans ce cadre d'hypothèses.

Le théorème central limite étant un outil essentiel en Statistiques, il est donc naturel de chercher à caractériser les lois limites des estimateurs usuels dans le cadre de ces nouvelles hypothèses. Commençons par rappeler un théorème central limite usuel. On note:

$$\mathfrak{B}_t^{+\infty} = \sigma(\{X_i\}_{i \geq t}), \quad \mathfrak{B}_{-\infty}^t = \sigma(\{X_i\}_{i \leq t}),$$

$$\alpha(n) = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \left( \sup_{A \in \mathfrak{B}_t^{+\infty}, B \in \mathfrak{B}_{-n}^{t+n}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \right),$$

les coefficients d' $\alpha$ -mélangeance du processus  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . On dit qu'il est  $\alpha$ -mélangeant si  $\alpha(n)$  tend vers 0. Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour obtenir un théorème central limite.

*Théorème (Yoshihara 1972):*

Si  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus réel stationnaire  $\alpha$ -mélangeant,  $H_t = H(X_t)$  une fonction mesurable à valeurs dans  $\mathbb{R}$  vérifiant  $\mathbb{E}H_t = 0$ , alors s'il existe  $\delta > 0$  tel que:

$$i) \mathbb{E}|H_t|^{2+\delta} < +\infty,$$

$$ii) \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha(n)^{\delta/(2+\delta)} < +\infty,$$

la suite  $(\sum_{t=1}^T H_t)/\sqrt{T}$  tend en loi vers une normale de variance:

$$\sigma^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{cov}(H_0, H_n) = 2\pi f_H(0),$$

où  $f$  est la densité spectrale de  $H_t$ .

### Remarques:

1.- i) et ii) garantissent la convergence normale de la série:

$$f_H(\lambda) = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{cov}(H_0, H_n) \exp(in\lambda) \right) / (2\pi), \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

qui définit la densité spectrale de  $H_t$ , car, d'après l'inégalité de Hipp (1979):

$$\sup_{\lambda} |f_H(\lambda)| \leq 6(E|H_0|^{2+\delta})^{1/(4+2\delta)} / \pi \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha(n)^{\delta/(2+\delta)}. \quad (1)$$

En outre, la densité spectrale est bornée.

2.- On remarque que, dans le théorème précédent, la loi limite de  $(\sum_{t=1}^T H_t)/\sqrt{T}$  peut être dégénérée, si la densité spectrale est nulle en 0. Ceci se produit en particulier, lorsque  $H_t$  est un processus MA(1) de la forme:

$$H_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1},$$

où  $\varepsilon_t$  est une suite de variables i.i.d. Dans ce cas,

$$\sum_{t=1}^T H_t = \varepsilon_T - \varepsilon_0,$$

et la loi de  $\sum_{t=1}^T H_t$  est la loi de  $\varepsilon_T - \varepsilon_0$ , qui n'est pas gaussienne *a priori*.

On remarque en outre que  $(\sum_{t=1}^T H_t)/\sqrt{T}$  tend vers 0.

3.- Dans le cas d'un processus gaussien, tous les moments existent, et il est donc possible d'autoriser:

$$\alpha(n) = O(n^{-\alpha}), \quad \alpha > 1.$$

Or pour des processus à mémoire longue, on a typiquement:

$$\alpha(n) = O(n^{-\alpha}), \quad \alpha \leq 1,$$

et le théorème de Yoshihara ne s'applique donc plus. On remarque également que la majoration (1) ne s'applique plus, et la densité spectrale n'est plus nécessairement bornée en 0.

Le problème est alors de savoir, si pour une suite  $A(T)$  bien choisie, la suite,

$$\left( \sum_{t=1}^T H_t \right) / A(T), \quad (2)$$

admet une limite en loi. Deux situations sont à distinguer:

- la limite est gaussienne, et l'on parle alors de théorèmes centraux limites,
- la limite est non gaussienne, et il s'agit alors d'un théorème non central limite.

Dans cet article, on considérera trois types de processus: le paragraphe 2 est consacré aux processus gaussiens univariés, et le paragraphe 3 introduit au cas bivarié gaussien. Enfin, le paragraphe 4 donne un théorème non central limite dans le cas non gaussien univarié.

Pour étudier ces différents problèmes, on introduit maintenant quelques notations et conventions.

#### 1) Type de sommes étudiées.

En toute généralité, la variable aléatoire  $H_t$  peut être prise de la forme:

$$H_t = H(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-d}),$$

avec  $d$  entier supérieur ou égal à 0, et:

$$\mathbb{E}H_t = 0, \quad \mathbb{E}H_t^2 < +\infty.$$

Dehling-Taquq (1989) considèrent également des variables aléatoires à valeurs dans un espace de fonctions, soit:

$$H_t(u) = H(X_t, u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

On se limitera ici aux cas  $H(X_t)$  et  $H(X_t, X_{t-1})$ , qui permettent de traiter les sommes de type moyenne empirique et covariance empirique. on obtient ainsi un grand degré de généralités par rapport aux sommes intervenant en Statistiques.

Lorsque  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  est gaussien univarié, l'hypothèse d'existence de la variance permet de développer  $H(x)$  dans une base orthogonale de l'espace  $L^2(\exp(-x^2/2)dx)$ , constituée de polynômes d'Hermite. Ceux-ci sont définis par:

$$H_i(x) = \exp(x^2/2) \left( d^i \exp(-x^2/2) / dx^i \right), \quad i \geq 0.$$

$H(X_t)$  admet alors le développement en polynômes d'Hermite dans l'espace  $L^2(\exp(-x^2/2)dx)$ :

$$H(X_t) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i H_i(X_t), \text{ avec } \sum_{i=1}^{+\infty} c_i^2 i! \leq +\infty,$$

ce développement étant également vrai au sens de la convergence presque-sûre. On notera  $k$  le rang d'Hermite de  $H$ , défini par:

$$k = \inf\{i \geq 1 / c_i \neq 0\},$$

ce qui donne:

$$H(X_t) = \sum_{i=k}^{+\infty} c_i H_i(X_t), \text{ avec } c_k \text{ non nul.} \quad (3)$$

Si  $r(n)$  est la covariance entre  $X_0$  et  $X_n$ , on a alors la propriété suivante:

$$\mathbb{E}H_i(X_0)H_j(X_n) = \begin{cases} i!r^{i/2}(n) & \text{si } i=j, \\ & i, j \geq 0. \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad (4)$$

Pour une suite  $A(T)$  bien déterminée, Les théorèmes prouvés dans la littérature sont alors de type Donsker: ils portent sur la convergence en loi du processus en  $r$  ( $0 \leq r \leq 1$ ):

$$\left( \sum_{t=1}^{\lfloor rT \rfloor} H_t \right) / A(T), \quad (5)$$

voir Taqu (1975), Surgailis (1983), Giraitis (1985), Taqu (1987), Dehling-Taqu (1989), Ho-Sun (1990). On trouve également des résultats de loi limite pour les distributions finies du processus en  $n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ):

$$\left( \sum_{t=nN}^{(n+1)N} H_t \right) / A(N),$$

où  $N$  tend vers l'infini, dans Dobrushin-Major (1979) et Rosenblatt (1981). Ce type de somme semble provenir de problèmes liés à la transformée de Fourier rapide, ainsi que de problèmes propres à la Physique (cf Dobrushin-Major

(1979)). Par la suite, on se contentera d'énoncer des résultats de lois limites pour la somme désignée précédemment par (2):

$$S_T(H)/A(T) = \left( \sum_{t=1}^T H_t \right) / A(T).$$

## 2) Hypothèses de dépendance.

a) Il est possible de se limiter à des hypothèses sur la fonction de covariance. La majorité des auteurs suppose:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (r(n)/n^{-\alpha}) > 0, \text{ ou } \lim_{n \rightarrow +\infty} (r(n)/n^{-\alpha} L(n)) > 0,$$

$L(x)$  étant une fonction à variations lentes au voisinage de  $+\infty$ , telle que, pour  $x$  positif,  $L(x)$  soit mesurable et positive, et telle que  $\lim_{v \rightarrow +\infty} (L(xv)/L(v)) = 1$ . Ces fonctions sont telles que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = +\infty$ . Un exemple de fonction à variations lentes est donnée par la fonction  $\text{Log}(x)$ .

### Remarque:

Notons que l'hypothèse de variations lentes interdit à la fonction d'autocovariance d'être de l'ordre de:

$$\cos(n\theta)/n^{-\alpha},$$

qui peut être obtenu au moyen de processus possédant de forte saisonnalité, du type:

$$(1 - 2\cos\theta L + L^2)^{\alpha/2} X_t = \varepsilon_t,$$

où  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc d'ordre 2. Ce type de fonction d'autocovariance est traité par Rosenblatt (1981) et envisagé par Dobrushin-Major (1979), qui montrent que les lois limites sont modifiées par rapport à l'hypothèse usuelle. Dans la mesure où les techniques de démonstrations reposent sur la représentation spectrale du processus, il est vraisemblable, qu'en faisant porter les hypothèses sur les asymptotes de la densité spectrale, on puisse traiter ce genre de cas.

b) L'hypothèse de dépendance va contraindre le choix de  $A(T)$ . Pour que

$A(T)$  stabilise la variance de la somme  $S_T(H_k)$  ( $H_k(x)$  étant le  $k$ -ième polynôme d'Hermite), il faut que  $A^2(T)$  soit de l'ordre de:

$$\text{Var}(S_T(H_k)) = T\text{Var}(H_k(X_0)) + 2 \sum_{1 \leq n \leq T} (T-n)r^k(n),$$

d'après (4). Dobrushin-Major (1979) ont étudié l'ordre de cette variance quand  $T$  tend vers l'infini, en fonction de  $\alpha$  et de  $k$ . Ils ont obtenu:

$$\begin{cases} T^{2-k\alpha}(L'(T))^k, & \text{si } \alpha k < 1 & (6) \\ TL'(T) & , & \text{si } \alpha k = 1 & (7) \\ T & , & \text{si } \alpha k > 1 & (8) \end{cases}$$

où  $L'(T)$  est une fonction à variations lentes. Ce résultat s'obtient facilement lorsque  $r(n) = n^{-\alpha}$ , en faisant apparaître des sommes de Riemann. Dans ce cas, on peut prendre  $L'(T) = 1$ . De façon générale,  $A(T)$  peut être pris de l'ordre de  $\sqrt{T}$  uniquement dans le cas (8), et doit être d'un ordre supérieur dans les autres cas.

## II. Processus gaussien univarié.

On rappelle pour commencer un théorème central limite dans le cas mémoire longue. Ceci permettra de mettre en évidence la frontière entre théorèmes centraux limite (cas (7) et (8)) et non centraux limite (cas (6)). On verra que cette frontière est définie en partie par le choix de  $A(T)$ , qui est déterminée par  $k\alpha$ , où  $k$  est le rang d'Hermite de  $H$  (cf (3)). Il faut ensuite distinguer les cas  $k=1$  et  $k>1$ . On peut résumer les différentes situations par le schéma:

	$0 < \alpha k < 1$	$\alpha k \geq 1$
$k = 1$	T.C.L	T.C.L
$k > 1$	T.N.C.L	T.C.L



## II.1 Théorème central-limite.

**Théorème 1: (Ho-Sun 1987)**

Si  $H(x)$  est de rang d'Hermite  $k$  alors:

i) Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |r(n)|^k < +\infty$  alors la limite en loi de  $S_T(H)/\sqrt{T}$  est gaussienne.

ii) Si  $r(n) = n^{-\alpha}L(n)$ , avec  $k\alpha > 1$ , alors la limite en loi de  $S_T(H)/(T \sum_{t=1}^T |r(t)|^k)^{1/2}$  est gaussienne.

Remarques:

1.- La suite  $A(T)$  est donc celle qui stabilise les variances de  $S_T(H_k)$ , et dont l'ordre est donnée par (7) et (8). Dans les deux cas, la variance asymptotique de  $S_T(H)/A(T)$  est donnée par:

$$c_k^2 \lim_{T \rightarrow +\infty} \text{Var}(S_T(H_k)/A(T)).$$

2.- Le cas i) correspond au cas  $k\alpha > 1$ . L'hypothèse garantit que la densité spectrale  $f_{H_k}$  existe et est bornée. Dans le cas ii) celle-ci n'est pas définie en 0. La suite  $A(T)$  n'est donc pas de l'ordre de  $\sqrt{T}$ .

3.- On trouve, dans l'article de Ho et Sun (1987), la généralisation au cas:

$$H_t = H(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-d}),$$

## II.2 Sommes de type moyenne empirique.

On s'intéresse maintenant à des sommes de type moyenne empirique, et l'on suppose  $k\alpha < 1$ . Il est alors possible d'obtenir un théorème non central limite dû à Dobrushin-Major (1979):

*Théorème 2: (Dobrushin-Major 1979)*

Si  $H(x)$  est de rang d'Hermite  $k$ , si  $r(n) = n^{-\alpha}L(n)$ , avec  $k\alpha < 1$ , alors la limite en loi de  $S_T(H)/(T^{1-k\alpha/2}L'(T)^{k/2})$  est  $c_k Z_k$ , où  $Z_k$  s'exprime sous forme d'intégrales de Wiener-Ito:

$$Z_k = \int_{\mathbb{R}^k} \left( \exp(i(x_1 + \dots + x_k)) - 1 \right) / i(x_1 + \dots + x_k) \prod_{l=1}^k (D|x_l|^{\alpha-1})^{1/2} dW(x_l),$$

où  $W(x)$  est un mouvement Brownien symétrique et  $D = \int \exp(ix) |x|^{\alpha-1} dx = 2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)$ .

Remarques:

- 1.-  $A(T)$  est ici donnée par (6), et est d'un ordre supérieure à  $\sqrt{T}$ .
- 2.- Dobrushin-Major vérifient soigneusement l'existence de  $Z_k$ , qui n'est défini que pour  $k\alpha < 1$ . Il faut faire attention à ce que  $Z_k$  dépend en fait de  $\alpha$ . On s'en tiendra cependant à cette notation, qui correspond à celle de Rosenblatt (1961).
- 3.- Dans le cas  $k=1$  (estimation de la moyenne), la loi limite est encore normale, puisqu'il s'agit d'un mouvement Brownien fractionnaire d'ordre  $1-\alpha/2$ . Pour  $k=2$ , la loi limite correspond au processus de Rosenblatt, introduit par Rosenblatt (1961).
- 4.- Rosenblatt (1961) et Taqqu (1975) avaient trouvé (pour  $k$  valant 2) un équivalent de la fonction caractéristique de la loi limite de  $S_T(H)/(T^{1-k\alpha/2}L'(T)^{k/2})$ . Cela suffit à déduire le résultat dans ces cas précis.

Etapes de la démonstration:

Pour simplifier, on suppose que  $r(n)$  est égale à  $n^{-\alpha}$ , ce qui implique qu'au voisinage de 0, la densité spectrale de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  est équivalente à  $D|x|^{\alpha-1}$ . Sous cette hypothèse, on a  $A(T) = T^{1-k\alpha/2}$ .

Etape 1: Passage de la fonction  $H$  au polynôme d'Hermite  $H_k$ .

*Lemme: Théorème de réduction.*

$$(S_T(H) - c_k S_T(H_k)) / A(T) = o_p(1). \quad (9)$$

On retrouve ce type de lemme dans la plupart des théorèmes énoncés ici. Il permet de se ramener à l'étude de la loi limite de  $S_T(H_k)$ . D'après (3), on a:

$$S_T(H) - c_k S_T(H_k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} c_i S_T(H_i).$$

En utilisant (4) et en permutant les signes sommes:

$$\mathbb{E}[(S_T(H) - c_k S_T(H_k))^2] = \sum_{i=k+1}^{+\infty} c_i^2 \mathbb{E}[S_T(H_i)^2],$$

On obtient alors le résultat (9), car, d'après (8):

$$\mathbb{E}[(S_T(H) - c_k S_T(H_k))^2] = \sum_{i=k+1}^{+\infty} c_i^2 i! o(A(T)^2) = o(A(T)^2).$$

Etape 2: expression de  $S_T(H_k)$  en fonction de la densité spectrale  $f$  de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ .

On considère la représentation spectrale de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ :

$$X_t = \int_{[-\pi, \pi]} \exp(itx) \sqrt{f(x)} dW(x),$$

où  $dW(x)$  sont les accroissements d'un mouvement brownien, pour  $x \geq 0$ , et où  $dW(-x) = dW(x)$ . On veut obtenir une représentation de:

$$H_k(X_t) = H_k \left( \int_{[-\pi, \pi]} \exp(itx) \sqrt{f(x)} dW(x) \right). \quad (10)$$

Pour cela, on utilise la formule d'Itô.

*Formule d'Itô:*

Si  $\phi_1, \dots, \phi_p$  est une famille orthogonale de  $L^2([-\pi, \pi], f(x)dx)$ , si  $n_1, \dots, n_p$  sont  $p$  entiers naturels tels que  $N = n_1 + \dots + n_p$ ,  $h_j(x) = \phi_j(x)$ , si  $n_1 + \dots + n_{q-1} < j \leq n_1 + \dots + n_q$ , alors:

$$\prod_{q=1}^p H_{n_q} \left( \int_{[-\pi, \pi]} \phi_q(x) \sqrt{f(x)} dW(x) \right) = \int_{[-\pi, \pi]} \text{Sym}[h_1(x_1) \dots h_N(x_N)] \prod_{n=1}^N \sqrt{f(x_n)} dW(x_n), \quad (11)$$

avec:

$$\text{Sym}[H(x_1, \dots, x_N)] = \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_N} H(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) \right) / N!,$$

où  $\mathcal{G}_N$  est l'ensemble des permutations sur  $\{1, \dots, N\}$ .

On applique (11) pour  $\phi(x) = \exp(itx)$ , avec  $p = 1$ ,  $n_1 = N = k$ . (10) devient:

$$H_k(X_t) = \int_{[-\pi, \pi]^k} \exp(it(x_1 + \dots + x_k)) \prod_{i=1}^k \sqrt{f(x_i)} dW(x_i),$$

et:

$$S_T(H_k) = \int_{[-\pi, \pi]^k} \left( \sum_{t=1}^T \exp(it(x_1 + \dots + x_k)) \right) \prod_{i=1}^k \sqrt{f(x_i)} dW(x_i) =$$

$$\int_{[-\pi, \pi]^k} \left( (1 - \exp(i(T+1)(x_1 + \dots + x_k))) / (1 - \exp(i(x_1 + \dots + x_k))) \right) \prod_{i=1}^k \sqrt{f(x_i)} dW(x_i).$$

Afin de "deviner" quelle peut être la limite de cette suite, posons  $N_T(y) = (1 - \exp(iy)) / T(1 - \exp(iy/(T+1)))$ ,  $x_1 = (T+1)y_1$ , et en rappelant que  $A(T) = T^{-1-k\alpha/2}$ :

$$S_T(H_k) / A(T) = \int_{[-(T+1)\pi, (T+1)\pi]^k} N_T(y_1 + \dots + y_k) \prod_{i=1}^k \sqrt{T^\alpha f(y_i / (T+1))} dW(y_i / (T+1)) \quad (12)$$

Etape 3: Montrons que  $S_T(H_k) / A(T) \xrightarrow{d} Z_k$ .

Dans (12),  $N_T(y)$  tend uniformément sur tout compact vers:

$$(\exp(iy) - 1) / (iy).$$

D'autre part, on a:

$$\sqrt{T^\alpha f(y/(T+1))} dW(y/(T+1)) = \sqrt{(T^\alpha / (T+1)) f(y/(T+1))} dW(y),$$

et comme  $f(y/(T+1))$  est équivalente à  $D|y|^{\alpha-1}(T+1)/T^\alpha$ ,  $\sqrt{(T^\alpha / (T+1)) f(y/(T+1))}$  tend vers  $\sqrt{D|y|^{\alpha-1/2}}$  uniformément sur tout compact.

(12) suggère donc la limite  $Z_k$  du théorème 2. Afin d'établir ce résultat, Dobrushin-Major définissent les mesures:

$$\mu_T(A) = \int_{A \cap [-\pi, \pi]^k} |N_T(y_1 + \dots + y_k)|^2 \prod_{i=1}^k ((T^\alpha / (T+1)) f(y_i / (T+1)) dy_i),$$

$$\mu_0(A) = \int_A |(\exp(i(y_1 + \dots + y_k)) - 1) / i(y_1 + \dots + y_k)|^2 \prod_{i=1}^k (D|y_i|^{\alpha-1} dy_i),$$

qui sont les mesures spectrales associées à  $S_T(H_k) / A(T)$  et à  $Z_k$ . Dobrushin-Major prouvent ensuite la convergence faible de  $\mu_T$  vers  $\mu_0$ .

en étudiant les transformées de Fourier de  $\mu_T$  et  $\mu_0$ . Plus précisément ils calculent la fonction  $\phi_T(v_1, \dots, v_k)$

$$\phi_T(v_1, \dots, v_k) = \int \exp\left(i \left( \sum_{j=1}^k y_j [(T+1)v_j]/(T+1) \right)\right) d\mu_T(y_1, \dots, y_k),$$

qui est différente de la transformée de Fourier usuelle à cause de l'introduction des parties entières  $[(T+1)v_j]/(T+1)$ . Ils démontrent que l'étude de cette fonction est équivalente à l'étude de la transformée de Fourier usuelle. L'intérêt de la fonction  $\phi_T$  vient d'une plus grande facilité de calcul. En effet  $d\mu_T$  s'écrit:

$$\prod_{i=1}^k \frac{dy_i/(T+1)}{[-\pi, \pi]} \left| \left( \sum_{t=1}^T \exp(it(y_1 + \dots + y_k)/(T+1)) \right) / T \right|^2 \prod_{i=1}^k (T^{\alpha}/(T+1)) f(y_i/(T+1)) dy_i.$$

En posant  $y_j = (T+1)x_j$ , on obtient l'expression suivante de  $\phi_T$ :

$$\left( \sum_{t_1, t_2=1}^T \sum_{j=1}^k T^{\alpha k} \prod_{j=1}^k \int_{[-\pi, \pi]} \exp\left(i((t_1 - t_2) + [(T+1)v_j])x_j\right) f(x_j) dx_j \right) / T^2,$$

où l'on voit apparaître la coordonnée de la densité spectrale associée à l'élément  $\exp\left(i((t_1 - t_2) + [(T+1)v_j])x_j\right)$  de la base de Fourier.  $\phi_T$  admet donc l'expression suivante, qui ne dépend plus que des covariances:

$$\left( \sum_{t_1, t_2=1}^T \sum_{j=1}^k \left( \prod_{j=1}^k T^{\alpha} r(t_1 - t_2 + [(T+1)v_j]) \right) \right) / T^2.$$

En utilisant le fait que l'on a supposé  $r(n) = n^{-\alpha}$ , on obtient la somme de Riemann:

$$\left( \sum_{t_1, t_2=1}^T \sum_{j=1}^k \left( \prod_{j=1}^k (|t_1/T - t_2/T + [(T+1)v_j]/T|)^{-\alpha} \right) \right) / T^2,$$

qui tend vers:

$$\int_{[0,1]^2} \prod_{j=1}^k |x - y - v_j|^{-\alpha} dx dy,$$

qui existe bien car  $k\alpha < 1$ .

Dobrushin-Major (1979) montrent que la transformée de Fourier de  $\mu_T$  admet également cette limite, et qu'il s'agit de la transformée de Fourier de  $\mu_0$ ;  $\mu_T$  converge donc faiblement vers  $\mu_0$ . On déduit

$$\mathbb{E}[(S_T(H_k)/A(T) - Z_k)^2] \leq \int_C |\sqrt{d\mu_T} - \sqrt{d\mu_0}|^2 + \int_{\mathbb{R}^k \setminus C} d\mu_T + d\mu_0.$$

Comme  $\sqrt{d\mu_T}$  converge uniformément vers  $\sqrt{d\mu_0}$  sur tout compact, et que  $\mu_T$  converge faiblement vers  $\mu_0$ , on déduit la convergence en moyenne quadratique de  $S_T(H_k)/A(T)$  vers  $Z_k$ . ■

On remarque donc que de la convergence en loi de plusieurs sommes, on peut déduire la convergence en loi du vecteur composé de ces sommes: d'après le résultat précédent, c'est en effet une convergence en moyenne quadratique qui est prouvée. On peut donc passer de la convergence en loi coordonnées par coordonnées à celle d'un vecteur.

### II.3 Sommes de type covariance empirique.

Fox-Taqq (1985) ont étudié des sommes du type:

$$S_T^m = \sum_{p=1}^T \sum_{q=1}^T a_{p-q} H_m(X_p) H_m(X_q), \quad (13)$$

où la suite  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est telle que:

$$a_s = a_{-s}, \quad \sum_{s \in \mathbb{Z}} |a_s| < +\infty. \quad (14)$$

D'après (4),  $\mathbb{E}H_m(X_p)H_m(X_q) = m!r(p-q)^m$ , et la série

$$\begin{cases} a_{p-q} = 1, & \text{si } |p-q|=s, \\ a_{p-q} = 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

permet de déduire un estimateur de la covariance  $r(s)$ , en prenant par exemple  $H_1(x) = x$ . On suppose que

$$\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}} \text{ est centré réduit.} \quad (15)$$

**Théorème 3:** (Taqu-Fox 1985)

Si  $r(n) = n^{-\alpha}L(n)$ , alors, pour  $S_T^m$  définie par (13) et (14), et si  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  vérifie (15):

i) Pour  $0 < \alpha < 1/2$ , la limite en loi de  $(S_T^m - \mathbb{E}S_T^m)/T^{1-\alpha}L'(T)$  est:

$$mlm\left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s r^{m-1}(s)\right)Z_2$$

ii) Si  $\sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s = 0$ , en supposant que:

a)  $\sum |r(n) - r(n+1)| < +\infty$ ,

b)  $r(n+1) \leq r(n)(1+c/k)$ , pour  $c \geq 0$ ,  $k$  supérieur à un  $k_0$ ,

c)  $a_s = s^{-\beta}L''(s)$ , avec  $1 \leq \beta \leq 3$  et  $\alpha + \beta > 3/2$ ,

la loi limite de  $(S_T^1 - \mathbb{E}S_T^1)/\sqrt{T}$  est gaussienne, de variance  $16\pi^3 \int (f(x)g(x))^2 dx$ , où  $g(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s \exp(isx)$ ,

iii) Pour  $1/2 < \alpha < 1$ , la limite en loi de  $(S_T^m - \mathbb{E}S_T^m)/\sqrt{T}$  est gaussienne, de variance:

$$(m!)^2 \sum_{n=1}^m \binom{m}{n}^2 \sum_{s_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{s_2=-\infty}^{+\infty} a_{s_1} a_{s_2} (r(s_1)r(s_2))^{m-n} \\ \sum_{q=0}^n \binom{n}{q}^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r(k)^q r(k+s_1-s_2)^q r(k+s_1)^{n-q} r(k-s_2)^{n-q}.$$

Remarques:

1.-  $Z_2$  désigne le processus de Rosenblatt, qui a été introduit dans le théorème 2, et qui correspond à la limite en loi de l'estimateur de la variance:

$$\left(\sum_{t=1}^T (X_t^2 - 1)\right) / (T^{1-\alpha}L'(T)),$$

Il est donc naturel de le voir réapparaître puisque l'on étudie ici des formes quadratiques. En particulier, il donne la loi limite de l'estimateur de la covariance d'ordre 1:

$$\left(\sum_{t=2}^T (X_t X_{t-1} - r(1))\right) / (T^{1-\alpha}L'(T)) \xrightarrow{d} Z_2.$$

2.- Les parties i) et ii) du théorème 3 permettent de déduire la loi de nombreuses combinaisons linéaires finies de covariances: il faut cependant faire attention à ce que la loi limite de l'estimateur de  $\text{Var}(X_t - X_{t-1})$

$$2 \sum_{t=1}^T X_t^2 / T - 2 \sum_{t=2}^T X_t X_{t-1},$$

n'est pas donnée ici (la suite  $a_0 = 2, a_1 = a_{-1} = -1, a_n = 0$ , pour  $n \neq -1, 0, 1$  ne vérifie pas la condition c du ii). Le processus  $\{X_t - X_{t-1}\}_{t \in \mathbb{Z}}$  n'est plus à mémoire longue car sa densité spectrale est bornée, et nulle en 0. De façon plus générale, le problème provient de ce que  $S_T^1$  se réécrit:

$$S_T^m = \sum_{p=1}^T X_p \sum_{q=1}^T a_{p-q} X_q,$$

qui fait apparaître un filtre de  $X_q$ , qui est asymptotiquement:

$$G(L)X_p = \sum_{q=1}^{+\infty} a_{p-q} X_q,$$

avec  $G(1) = 0$ , qui "abaisse" donc la fonction de covariance de  $G(L)X_p$  par rapport à celle de  $X_p$ .

#### Ideé de démonstration:

Le théorème 3 utilise une formule de représentation (formule du diagramme, développée dans Major (1981)), qui appliquée au cas présent donne:

$$H_m(X_p)H_m(X_q) = m!r(p-q)^m + \sum_{n=1}^m (m-n)! \binom{m}{n}^2 r(p-q)^{m-n} I_n(p,q),$$

avec

$$I_n(p,q) = \int_{[-\pi, \pi]^{2n}} \exp(ip(x_1 + \dots + x_n) + iq(x_{n+1} + \dots + x_{2n})) \prod_{l=1}^{2n} f(x_l) dW(x_l).$$

On regarde ensuite quels sont les termes de plus grand ordre, et on montre, dans le cas i), qu'il s'agit de  $I_2(k,j)$ .

### III. Processus gaussien, bivarié.

On considère maintenant un processus gaussien  $\{(X_t, Y_t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$  dont la fonction d'autocovariance est définie par:

$$r_1(n) = \mathbb{E}X_0 X_n \approx n^{-\alpha_1}, \quad r_2(n) = \mathbb{E}Y_0 Y_n \approx n^{-\alpha_2}, \quad r_3(n) = \mathbb{E}X_0 Y_n \approx \begin{cases} n^{-\alpha_3}, & n \geq 0 \\ (-n)^{-\alpha_4}, & n \leq 0 \end{cases},$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  sont strictement positifs, et éventuellement distincts. Les applications de théorèmes limites sont nombreuses, et comportent notamment



l'étude de lois limites d'estimateurs de la régression.

### III.1 Sommes de type moyenne empirique.

On considère les sommes:

$$S_T(H) = \sum_{t=1}^T H(X_t), \quad H \text{ de rang d'Hermite } k_1, \quad \mathbb{E}H(X_t) = 0,$$

$$S_T(K) = \sum_{t=1}^T K(Y_t), \quad K \text{ de rang d'Hermite } k_2, \quad \mathbb{E}K(Y_t) = 0.$$

Les lois limites de  $S_T(H)$  et  $S_T(K)$ , pris séparément, sont données par le théorème 2, dont on conserve les notations. Le théorème 4 donne des conditions suffisantes pour caractériser l'indépendance entre les deux lois limites.

*Théorème 4: (Ho-Sun 1990a)*

i) Si  $k_1 \alpha_1 < 1$ ,  $k_2 \alpha_2 > 1$ , avec si  $k_1 = 1$ ,  $\inf(\alpha_3, \alpha_4) > (1 + \alpha_2)/2$ , alors la limite en loi de  $(S_T(H)/T^{1-k_1 \alpha_1/2}, S_T(K)/\sqrt{T})$  est  $(Z_{k_1}, N(0, \sigma^2))$  avec indépendance entre les deux composantes.

ii) Si  $k_1 \alpha_1 < 1$ ,  $k_2 \alpha_2 < 1$ , la limite en loi de  $(S_T(H)/T^{1-k_1 \alpha_1/2}, S_T(K)/T^{1-k_2 \alpha_2/2})$  est  $(Z_{k_1}, Z_{k_2})$  avec indépendance entre les deux composantes.

iii) Si  $k_1 \alpha_1 > 1$ ,  $k_2 \alpha_2 > 1$ , la limite en loi de  $(S_T(H)/\sqrt{T}, S_T(K)/\sqrt{T})$  est une normale centrée bivariée, avec indépendance si  $\{j \geq k_1/c_j^K \neq 0\} \cap \{j \geq k_2/c_j^H \neq 0\} = \emptyset$ .

Remarquons que dans iii) il y a dépendance dès que  $k_1 = k_2$ . L'indépendance correspond à  $\text{cov}(H(X_t), K(Y_t)) = 0$ .

#### Idee de démonstration:

En suivant l'idée de la démonstration du théorème 2, on démontre que, dans le cas ii):

$$\begin{pmatrix} S_T(H)/A_1(T) \\ S_T(K)/A_2(T) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \begin{pmatrix} \int N_0(y_1 + \dots + y_{k_1}) \prod_{l=1}^{k_1} f_1(y_l) dW_1(y_1) \\ \int N_0(y_1 + \dots + y_{k_2}) \prod_{l=1}^{k_2} f_1(y_l) dW_2(y_1) \end{pmatrix},$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont les densités spectrales des processus  $\{X_t\}$  et  $\{Y_t\}$ . On étudie ensuite les liaisons entre  $dW_1(y)$  et  $dW_2(y)$ .

### III.b Sommes de type moments croisés.

Il s'agit d'étudier:

$$S_T(H) = \sum_{t=1}^T H(X_t, Y_t), \quad \mathbb{E}H(X_t, Y_t) = 0,$$

$$S_T(K) = \sum_{t=1}^T K(X_t, Y_t), \quad \mathbb{E}K(X_t, Y_t) = 0.$$

On développe les fonctions  $H$  et  $K$  dans une base de Hermite bivariée définie par:

$$H_{i,j}(x,y) = \exp((x^2 + y^2)/2) \delta^{i+j} \exp(-(x^2 + y^2)/2) / \delta^i x \delta^j y$$

le rang étant défini par  $\text{rang}(H_{i,j}) = i+j$ . Il ne semble pas exister de théorème non central limite à l'heure actuelle.

*Théorème 5: (Ho-Sun 1990b) (T.C.L)*

Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |r_i(n)|^k < +\infty$ , avec  $k = \text{Inf}(k_1, k_2)$ ,  $i=1,2,3$ , alors la limite en loi de  $(S_T^1/\sqrt{T}, S_T^2/\sqrt{T})$  est une normale centrée bivariée, de matrice de variance-covariance

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}(S_T^1/\sqrt{T}, S_T^2/\sqrt{T}).$$

### IV. Processus non gaussien.

Le cas non gaussien a été étudié, notamment par Surgailis (1982), Giraitis (1985) (qui démontre un théorème central limite équivalent au théorème 1), Avram-Taquq (1987). Les résultats qu'obtiennent ces auteurs montrent la généralité des résultats exposés ci-dessus, car ils ne font plus l'hypothèse de processus gaussien. L'approche n'est plus dans le domaine des fréquences mais dans celui des temps, et ces auteurs utilisent donc la représentation  $MA(\omega)$  du processus. L'hypothèse de dépendance porte donc sur les coefficients de cette représentation.

**Théorème 6:** (Surgailis 1982)

Si  $X_t = \sum_{i \in \mathbb{Z}} h(t-i)\zeta_i$ , avec  $h(i) = |i|^{-\beta} L(i)$  ( $\beta > 0$ ),  $\{\zeta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  une famille de v.a.r. i.i.d dont tous les moments existent, si  $F$  est une fonction définie par son développement en série entière:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j x^j,$$

dont les coefficients vérifient:

$$\sum_{k, j=0}^{+\infty} |c_j| |c_k| (j!k!)^2 < +\infty,$$

alors, en posant  $k = \inf\{j/E[d^j F(X_0)/d^j x] = 0\}$ ,  $\alpha = 2\beta - 1$ , si  $\alpha k < 1$ ,

la loi limite de  $(S_T(F) - ES_T(F)) / (T^{1-k\alpha/2} L'(T)^{k/2})$  est

$$Z_k E[d^k F(X_0)/d^k x] / k!,$$

où  $Z_k$  a été défini dans le théorème 2.

Remarques:

1.- Le coefficient  $\alpha$  du théorème 6 est bien équivalent à celui des théorèmes précédents, en raison des liens entre densité spectrale et forme  $MA(\infty)$ .

2.- L'hypothèse de convergence sur les coefficients de  $F(x)$  permet d'obtenir la convergence uniforme de cette série sur tout compact, et la définition de  $F(X_t)$ , au sens  $L_1$  et presque-sûre.

Idée de démonstration:

Les étapes de la démonstration sont similaires à celles du théorème 2: l'auteur montre par un lemme de réduction que la loi limite est la même que celle de:

$$E[d^k F(X_0)/d^k x] / k! (S_T(X^k) - ES_T(X^k)) / (T^{1-k\alpha/2} L'(T)^{k/2}).$$

Le calcul de  $X_t^k$  donne:

$$X_t^k = \sum_{p_1, \dots, p_k} \dots \sum h(t-p_1) \dots h(t-p_k) \zeta_{p_1} \dots \zeta_{p_k},$$

où la sommation porte sur tout les  $k$ -uplets possibles, et l'auteur montre, par un deuxième théorème de réduction, qu'il suffit de prendre en compte ceux

composés d'entiers distincts deux à deux. La loi limite est alors celle de:

$$S_T^k / (T^{1-k\alpha/2} L'(T)^{k/2}) = \frac{1}{T} \left( \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k \\ p_i \neq p_j}} (h(t-p_1)/T)^{\alpha/2} L'(T) \dots (h(t-p_k)/T)^{\alpha/2} L'(T) \zeta_{p_1} \dots \zeta_{p_k} \right). \quad (16)$$

On pose  $h(i) = |i|^{-\beta}$ , avec  $\alpha = 2\beta - 1$ , et (16) se réécrit:

$$\frac{1}{T} \left( \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k \\ p_i \neq p_j}} h((t-p_1)/T) \dots h((t-p_k)/T) (\zeta_{p_1} \sqrt{T}) \dots (\zeta_{p_k} \sqrt{T}) \right).$$

L'auteur montre que cette somme de Riemann converge, au sens  $L_2$ , vers l'intégrale stochastique par rapport à la mesure de Wiener, indépendamment de la loi de  $\zeta$ :

$$\int_0^1 dx \int_1^k \prod_{i=1}^k (|x-y_i|^{-\beta} dW(y_i)).$$

Il faut alors montrer que cette intégrale correspond bien à la définition du processus  $Z_k$  du théorème 2. Pour ceci, il suffit de remarquer que lorsque  $\{\zeta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  est une famille de variables gaussiennes i.i.d, on se trouve dans le cas gaussien. En prenant  $F = H_k$ , où  $H_k$  est un polynôme d'Hermite d'ordre  $k$ , on déduit par application du théorème 2:

$$Z_k = \int_0^1 dx \int_1^k \prod_{i=1}^k (|x-y_i|^{-\beta} dW(y_i)),$$

car la convergence a lieu indépendamment de la loi des  $\{\zeta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ . ■

## BIBLIOGRAPHIE

- AVRAM F., TAQQU M.S (1987): "Non Central Limit Theorems and Appell Polynomials", *The Annals of Probability*, Vol. 15, N°2, p. 767-775.
- DEHLING H., TAQQU M.S. (1989): "The Empirical Process of some Long-range Dependence Sequences with an Application to U-statistics", *The Annals of Probability*, Vol. 17, N°4, p. 1767-1783.
- DOBRUSHIN R.L., MAJOR P. (1979): "Non-Central Limit Theorems for Non-Linear Functionals of Gaussian Fields", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, Vol. 50, p. 27-52.
- FOX R., TAQQU M.S. (1985): "Non Central Limit Theorems for Quadratic Forms in Random Variables Having Long-Range Dependence", *The Annals of Probability*, Vol. 13, N°2, p. 428-446.
- GIRAITIS L. (1985): "Central Limit Theorem For Functionals of a Linear Process", *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. 25, N°1, p. 25-35.
- HIPP C. (1979): "Convergence Rates of the Strong Law for Stationary Mixing Sequences", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, Vol. 49, p. 49-62.
- HO H.C., SUN T.C. (1987): "A Central Limit Theorem for Non-instantaneous Filters of a Stationary Gaussian Process", *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 27, N°1, p. 144-155.
- HO H.C, SUN T.C. (1990a): "Limiting Distributions of Nonlinear Vector Functions of Stationary Gaussian Processes", *The Annals of Probability*, Vol. 18, N°3, p. 1159-1173.
- HO H.C., SUN T.C. (1990b): "A Central Limit Theorem for Non-Linear Vector Functionals of Vector Gaussian Processes", IMA Preprint Series # 745, Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnesota, Minneapolis.
- HO H.C., SUN T.C. (1990c): "A Mixture Type Limit Theorem for Non-Linear Functions of Gaussian Sequences", A paraître dans *Journal of Theoretical*

*Probability.*

MAJOR P. (1981): "Multiple Wiener Integrals", *Lectures Notes in Maths.* Vol. 849, Springer-Verlag, New York/Berlin.

ROSENBLATT M. (1961): "Independence and dependence", *Proc. 4<sup>th</sup> Berkeley Symp. Math. Statist. Proba*, p. 411-443. Berkley: Univ. Calif. Press.

ROSENBLATT M. (1981): "Limit Theorems for Fourier Transforms of Functionals of Gaussian Sequences", Vol. 55, p. 123-132.

SURGAILIS D. (1982): "Zones of Attraction of Self-similar Multiple Integrals", *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. 22, N°3, p.327-340.

TAQQU M.S. (1975): "Weak Convergence to Fractional Brownian Motion and to the Rosemblay Process", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, Vol. 31, p. 287-302.

TAQQU M.S. (1979): "Convergence of Integrated Processes of Arbitrary Hermite Rank", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, Vol. 50, p. 53-83.