



**HAL**  
open science

# Processus à Longue Mémoire. Propriétés Probabilistes et Statistiques

Dominique Guegan

► **To cite this version:**

Dominique Guegan. Processus à Longue Mémoire. Propriétés Probabilistes et Statistiques. Annales de l'ISUP, 1991, XXXVI (1-2), pp.5-41. hal-03664650

**HAL Id: hal-03664650**

**<https://hal.science/hal-03664650>**

Submitted on 11 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Pub. Inst. Stat. Univ. Paris*  
*XXXVI, fasc. 1-2, 1991, 5 à 41*

PROCESSUS A LONGUE MEMOIRE.  
PROPRIETES PROBABILISTES ET STATISTIQUES

D. GUEGAN

Université Paris XIII\* et L.S.T.A..

Résumé.

Nous faisons ici une présentation générale des processus à longue mémoire et nous montrons l'intérêt que ces processus ont sur le plan de la modélisation statistique. Nous donnons des exemples de processus présentant ce type de comportement. Nous précisons les propriétés probabilistes et statistiques qui ont déjà été étudiées. Puis nous proposons un ensemble de sujets de recherche dans le domaine. L'article se termine par une bibliographie commentée.

Mots Clefs: Processus Longue Mémoire - Processus Self-Similaires - FARMA - GARMA - Cointégration - Théorèmes Limites - Estimation - Tests - Prévisions.

Classification A.M.S. 60G11 - 60F17 - 62M10.

Université Paris XIII  
Institut Galilée  
Département de Mathématiques  
Avenue J.B. Clément  
93430 Villetaneuse.

## I - Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons aux motivations qui ont amené les statisticiens à s'intéresser aux processus longue mémoire. L'existence du phénomène est connue depuis de longue date dans la pratique. Les probabilistes ont étudié et analysé certaines propriétés des processus longue mémoire depuis longtemps, mais ce n'est que récemment que les statisticiens et les praticiens ont cherché à construire et utiliser des modèles présentant un tel comportement et à en étudier les propriétés. Nous présentons ici des modèles, à temps continu et à temps discret, qui présentent des comportements longue mémoire. Nous précisons les domaines d'applications de ces modèles, puis nous faisons le point sur les propriétés probabilistes et statistiques déjà étudiées. Nous précisons ensuite les domaines qui n'ont pas encore été étudiés, et ceux pour lesquels des développements restent à faire.

Le but de cet article est de faire une revue sur le sujet et de permettre aux chercheurs qui souhaitent l'aborder, de s'y retrouver au milieu d'une bibliographie qui commence à être florissante. L'article est organisé de la manière suivante: Dans le paragraphe 2 nous précisons les motivations qui ont conduit les statisticiens à s'intéresser aux processus longue mémoire. Dans le paragraphe 3 nous indiquons les principaux domaines pour lesquels les processus longue mémoire ont déjà été étudiés. Dans le paragraphe 4, nous présentons rapidement quelques processus qui présentent des comportements longue mémoire: processus self-similaires, processus FARMA et GARMA, agrégation de processus autorégressifs d'ordre 1. Dans le paragraphe 5 nous indiquons quelles propriétés probabilistes et statistiques concernant ces modèles ont été développées. Le paragraphe 6 propose quelques axes de recherche sur ce sujet. Enfin l'article se termine par une annexe qui est une bibliographie commentée permettant de se repérer au sein des différents domaines concernés par l'étude des processus longue mémoire.

## II - Les motivations

Pourquoi s'intéresser à des processus longue mémoire? L'indépendance des variables aléatoires observées est, en général, la première hypothèse envisagée par les statisticiens; mais bien souvent cette hypothèse n'est qu'une approximation de la réalité.

Et l'on sait que si l'on fait de l'inférence statistique à partir de variables que l'on a supposées indépendantes, et qui sont en fait corrélées, même faiblement, les erreurs ainsi produites peuvent avoir des effets non négligeables, d'où la nécessité de disposer de modèles qui peuvent prendre en compte ces "faibles" corrélations. C'est ainsi qu'à l'origine les modèles dits à "mémoire courte" ont fait leur apparition. Sous cette dénomination, nous pensons aux modèles ARMA développés dans les années 1970, dont une présentation se trouve dans le livre de Box et Jenkins (1970), et aux modèles Markoviens. Ces modèles ont un spectre régulier et des corrélations qui décroissent exponentiellement. Dans le domaine de l'inférence statistique ils ont permis d'améliorer des résultats obtenus uniquement sous l'hypothèse d'indépendance. Ainsi par exemple, les intervalles estimés ou les prédicteurs estimés sont différents de ce que l'on obtient quand les variables aléatoires sont supposées indépendantes, même si les vitesses de convergence restent les mêmes. Un exemple simple consiste à calculer l'écart type  $\bar{\sigma}$  de la moyenne empirique  $\bar{X}$  de  $n$  observations indépendantes ( $X_1, \dots, X_n$ ) supposées i.i.d., centrées et de variance  $\sigma^2$  soit  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Dans le cas d'un processus ARMA,  $\bar{\sigma}$  est proportionnel à  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , mais n'est pas forcément égal à  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Néanmoins ces modèles à "mémoire courte" ne se sont pas avérés suffisants dans le domaine de la modélisation. En effet il est arrivé que l'on modélise à l'aide de variables aléatoires indépendantes des séries qui présentaient des corrélations  $\rho(k)$  décroissant en  $|k|^{-\alpha}$  avec  $\alpha \in ]0,1[$ , donc des corrélations non sommables. Or même si les corrélations sont faibles, ce type de comportement que l'on appelle "longue mémoire" peut avoir des effets désastreux quand on fait de l'inférence statistique dès lors que l'on suppose les variables aléatoires indépendantes. Dans le cas de processus à mémoire longue, estimateurs et tests statistiques ont une vitesse de convergence plus lente que dans le cas indépendant ou dans le cas de processus à mémoire courte. Si nous reprenons l'exemple précédent, pour un processus à mémoire longue, on constate que  $\bar{\sigma}$  décroît avec une vitesse en  $n^{-\alpha/2}$  avec  $0, < \alpha < 1$ . Ainsi, on se rapproche de comportements nettement différents de ce que l'on rencontre dans le cas indépendant, et correspondant à certaines situations observées dans la pratique. L'idée alors de développer les processus à mémoire longue, s'impose naturellement. On va donc s'intéresser, tout au long de cet article, aux processus stationnaires pour lesquels la fonction de corrélation est telle que:

$$\rho(k) \sim ck^{2d-1} \text{ quand } k \rightarrow \infty, c > 0, d < \frac{1}{2}$$

où  $\sim$  représente l'équivalence asymptotique. De tels processus s'appellent processus à mémoire longue. Rappelons, pour fixer les idées, que les processus à mémoire courte comme les processus ARMA, ont une fonction d'autocorrélation qui est géométriquement bornée c'est-à-dire telle que:

$$|\rho(k)| \leq cr^{-k} \text{ pour } k = 1, 2, \dots, c > 0, 0 < r < 1$$

### III - Domaines d'applications des processus longue mémoire

Le type de comportement induit par un processus longue mémoire a été observé dans des domaines très divers depuis assez longtemps. Il en est ainsi de certains types d'erreurs relevées dans des données astronomiques (Newcomb (1886), Karl-Pearson (1902), Jeffrey (1939)), de séries de données chimiques (Student (1927)), de données agricoles (Smith (1938), Whittle (1956, 1962)), de données d'origine textile (Cox et Townsend (1948)). Mais le domaine qui a certainement été à l'origine du développement rapide de l'utilisation des séries longue mémoire en statistique revient à l'étude du "phénomène de Hurst" et relève de l'hydrologie. On peut se rapporter aux nombreux travaux de Hurst (1951), ainsi qu'à ceux plus récents de Mandelbrot et Taqqu (1979), McLeod et Hipel (1978), et surtout à l'article de revue très intéressant de Kottegoda (1977). Ce phénomène longue mémoire qui se manifeste par la présence de "cycles" de toutes périodicités se rencontre dans de nombreuses disciplines proches de la physique, (voir par exemple Taqqu (1981), Jonas-Lasinio (1977), Newman (1981), Frolich (1983)), la théorie de la turbulence avec l'étude du bruit  $\frac{1}{f}$ : Mandelbrot (1975), Helland et Van Atta (1978), l'étude des fluctuations dans les cristaux de quartz: Percival (1983), Wolf (1978). Le phénomène a été relevé en théorie des communications, Mandelbrot (1975), en météorologie, Haslett et Raftery (1989), en séismologie, Ogata et Abe (1991) ainsi que dans la nature. Il a alors été décrit à partir des fractals dans le livre de Mandelbrot (1982). Un domaine important, et non des moindres, qui est intéressé par ce type de comportement est celui de l'économie. La prise en compte du phénomène longue mémoire a permis aux économètres de disposer de processus qui prennent en compte les

basses fréquences. De tels processus permettent d'obtenir de meilleures prévisions à horizon lointain : ce qui n'est pas toujours possible à partir des processus à mémoire courte. On peut se rapporter dans ce domaine aux travaux de Mandelbrot (1961), Granger (1966, 1980), Granger et Joyeux (1980), Carlin, Dempster et Jonas (1985), Carlin et Dempster (1989), Diebold et Rukebusch (1989) et Porter-Hudak (1990).

La liste des travaux et des domaines d'application que nous avons présentée ici est loin d'être exhaustive. Elle a pour but essentiellement de montrer que les domaines d'applications de tels processus sont nombreux et prometteurs d'où l'intérêt que les chercheurs leur porte et leur développement rapide.

#### IV - Les différents types de modèles ayant un comportement longue mémoire

Les modèles les plus simples à longue mémoire sont les processus stationnaires qui ont des corrélations qui décroissent hyperboliquement.

Les deux classes les plus connues de processus stationnaires avec des corrélations décroissant lentement, sont d'une part, les accroissements de processus self-similaires, et d'autre part, les processus ARIMA fractionnaires que nous appellerons processus FARMA. Nous allons tout d'abord présenter ces deux classes de processus et ensuite quelques autres processus dérivés de ces classes, ou autres.

##### 4.1. Les processus self-similaires et les processus associés.

Ces processus ont été introduits pour la première fois en statistique par Mandelbrot et d'autres auteurs. On peut se reporter, par exemple, aux articles de Mandelbrot et Wallis (1968, 1969), Mandelbrot et Van Ness (1968). D'un point de vue probabiliste, les processus self-similaires sont bien connus et ont été étudiés depuis longtemps, voir en particulier les travaux de Kolmogorov (1940). Pour une introduction et une étude de ces modèles voir Mandelbrot (1965), Taqqu (1977, 1987), O'brien et Verwaat (1983, 1985) et Verwaat (1985), et pour une revue Carbon (1991).

On dit qu'un processus  $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$  est self-similaire, avec un paramètre de self-similarité  $H$ , si pour tout  $c > 0$ , le processus stochastique  $(Y(ct))_{t \in \mathbb{R}^+}$  est égal en distribution au processus  $(c^H Y(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ .

Hurst en 1951, puis Mandelbrot à partir de 1965 et d'autres auteurs se sont intéressés aux processus self-similaires à partir de l'étude de la statistique R/S qui joue un rôle fondamental pour modéliser certains problèmes de crues en hydrologie. Cette statistique est définie de la manière suivante. Si  $X(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}$  est une suite d'observations à temps discret, définissons la suite  $X^*(t)$  par

$$X^*(0) = 0$$

$$X^*(t) = \sum_{i=1}^t X(i)$$

et

$$X^{*2}(t) = \sum_{i=1}^t X(i)^2.$$

Alors, étant donné un entier  $d$ , on définit  $R(d)$  comme étant l'étendue de  $X(t)$  ajustée sur l'intervalle  $[0, d]$  :

$$R(d) = \max_{0 \leq u \leq d} \{X^*(u) - \frac{u}{d} X^*(d)\} - \min_{0 \leq u \leq d} \{X^*(u) - \frac{u}{d} X^*(d)\}$$

et  $S^2(d)$  est la variance empirique correspondante:

$$S^2(d) = \frac{1}{d} (X^*(d))^2 - \frac{1}{d^2} X^{*2}(d).$$

Ces deux quantités trouvent leur justification sur le plan hydrologique si l'on suppose que  $X(t)$  représente la quantité d'eau déchargée par une rivière dans un réservoir pendant une période de temps  $t$ , par exemple une année, alors  $X^*(u)$  représente la décharge totale pendant  $u$  années consécutives, et à l'horizon  $d$ , la décharge moyenne effectuée est donnée par  $\frac{1}{d} X^*(d)$ . A l'année  $u$ ,  $1 \leq u \leq d$ , la réserve d'eau dépasse la quantité  $X^*(u) - \frac{u}{d} X^*(d)$ . On peut alors définir la quantité minimum d'eau que l'on souhaite maintenir dans le réservoir par  $\left\{ X^*(u) - \frac{u}{d} X^*(d) \right\}$  et pour qu'il n'y ait pas d'inondation pendant  $d$  années consécutives, le volume du réservoir doit être au moins égal à la quantité  $R(d)$ . La statistique R/S est alors choisie car elle est robuste par changement d'échelle. C'est cette statistique que Hurst (1951) a utilisé pour étudier les crues du Nil. Cette statistique est liée aux processus self-similaires dans la mesure où si  $X^*(t)$  est un processus self-similaire alors la statistique  $R(d)$  est égale en distribution à

$d^H R(1)$ , et si  $X(t)$  est un processus stationnaire tel que  $X^2(t)$  soit ergodique et  $EX^2(t) < \infty$ , alors  $\frac{1}{d^H} \frac{R(d)}{S(d)}$  converge faiblement vers  $\frac{R(1)}{(\text{var } X(1))^{1/2}}$ , (Mandelbrot, 1975).

Considérons donc un processus self-similaire  $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$  de paramètre de self-similarité  $H$ , centré, de variance finie, d'accroissements stationnaires tel que  $Y(0) = 0$ . Un tel processus sera désigné sous l'appellation H-sssi (H-self similar stationary increments). Les principales propriétés de ce processus sont :

$$(1) \quad EY^2(t) = |t|^{2H} E Y^2(1)$$

$$EY(t_1) Y(t_2) = \frac{1}{2} \{ |t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H} \} EY^2(1)$$

On se restreint au cas  $0 < H < 1$ . En effet par (1),  $H$  doit être positif, ( $EY^2(t) = |t|^{2H} \rightarrow EY^2(0) = 0$  quand  $t \rightarrow 0$ ), et par stationnarité  $H \leq 1$  car  $(EY^2(t+t))^{1/2} = 2(EY^2(t))^{1/2}$ , en utilisant l'inégalité de Minkowski, et quand on divise par  $|t|^H$  alors on a  $2^H \leq 2$  ce qui est vrai pour  $H \leq 1$ . Le cas  $H = 1$  correspond au cas dégénéré:  $Y(t) = tY(1)$ , ce cas est donc exclu.

Notons enfin que les processus H-sssi peuvent être gaussiens, non gaussiens, à variance finie ou à variance infinie.

Nous allons nous intéresser aux accroissements stationnaires de processus self-similaires.

Posons  $X(t) = Y(t) - Y(t-1)$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , et notons  $\sigma^2 = \text{var } X(t)$ . Les accroissements stationnaires  $X(t)$  ont les propriétés suivantes :

(i) la fonction de covariance  $r(k) = \text{cov}(X(t), X(t+k)) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx$  est égale à:

$$r(k) = \frac{\sigma^2}{2} \{ |k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H} \}$$

et

$$r(k) \sim H(2H-1) |k|^{2H-2} \text{ quand } k \rightarrow \infty,$$

On obtient ainsi un processus dont la fonction de covariance a un comportement longue mémoire.

(ii) La densité spectrale  $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ixk} r(k)$  est égale à

$$f(x) = 2b(H, \sigma^2) (1 - \cos x) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |2\pi j + x|^{2H-2}$$

avec  $b(H, \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \sin(\pi H) \Gamma(2H + 1)$

On peut alors distinguer trois cas :

a)  $\frac{1}{2} < H < 1$  et  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r(k) = \infty$  : la densité spectrale  $f(\cdot)$  a un pôle en zéro de la forme

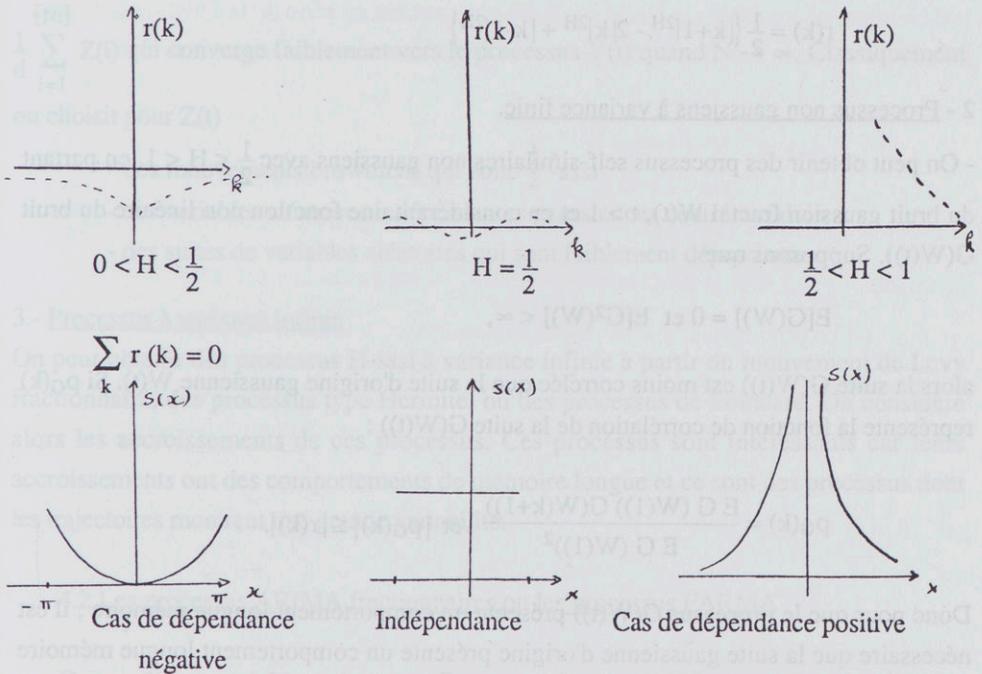
$|x|^{1-2H}$  (les basses fréquences sont si importantes que la densité spectrale est infinie à l'origine). On peut voir que  $\text{var } \bar{X}_n = \sigma^2 n^{2H-2}$ . Dans ce cas là, on dit que le processus  $X(t)$  présente une forme persistante de processus longue mémoire.

b)  $H = \frac{1}{2}$ , les variables aléatoires  $X(t)$  ne sont pas corrélées.

c)  $0 < H < \frac{1}{2}$  alors  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |r(k)| < \infty$  mais  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r(k) = 0$ . Le spectre est nul en zéro. On

dit que le processus présente une forme antipersistante de processus longue mémoire. Ce cas est peu intéressant pour les applications statistiques, mais cette situation peut se produire en particulier si l'on a trop différencié la série.

Nous pouvons visualiser les trois cas précédents à l'aide de la représentation de la fonction de covariance et de la densité spectrale du processus  $\{X(t)\}$ .



Nous donnons maintenant quelques exemples classiques de processus longue mémoire obtenus à partir de processus self similaires H - sssi

### 1.- Processus gaussiens à variance finie :

- Soit le processus gaussien de moyenne nulle et de covariance

$$EY(t_1)Y(t_2) = \frac{1}{2} \left\{ |t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H} \right\} (EY^2(1))$$

normalisé de telle manière que  $EY^2(1) = 1$ . On obtient alors le mouvement brownien fractal, noté  $B_H(t)$ , largement étudié par Mandelbrot et Van Ness (1968), il est H-sssi,

avec  $0 < H < 1$ . Si  $H = \frac{1}{2}$ , on retrouve le mouvement brownien  $B(t)$ .

- Considérons la suite des accroissements à un pas du mouvement brownien fractal

$$W(t) = B_H(t+1) - B_H(t), \quad -\infty < t < \infty$$

$\{W(t)\}$  est le bruit gaussien fractionnaire. C'est un processus stationnaire gaussien, de moyenne zéro, de variance 1, de fonction de covariance

$$r(k) = \frac{1}{2} \{ |k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H} \}$$

## 2 - Processus non gaussiens à variance finie.

- On peut obtenir des processus self-similaires non gaussiens avec  $\frac{1}{2} < H < 1$ , en partant du bruit gaussien fractal  $W(t)$ ,  $t > 1$  et en considérant une fonction non linéaire du bruit  $G(W(t))$ . Supposons que

$$E[G(W)] = 0 \text{ et } E[G^2(W)] < \infty,$$

alors la suite  $G(W(t))$  est moins corrélée que la suite d'origine gaussienne  $W(t)$ . Si  $\rho_G(k)$  représente la fonction de corrélation de la suite  $G(W(t))$  :

$$\rho_G(k) = \frac{E G(W(1)) G(W(k+1))}{E G(W(1))^2}, \text{ et } |\rho_G(k)| \leq |r(k)|.$$

Donc pour que le processus  $G(W(t))$  présente un comportement longue mémoire, il est nécessaire que la suite gaussienne d'origine présente un comportement longue mémoire particulièrement persistant. En particulier si le mouvement brownien fractal est tel que  $r(k) \sim C_1 k^{-D}$  pour  $k \rightarrow \infty$  et  $D > 0$ , alors

$$E G(W(1)) G(W(k+1)) \sim C_2 k^{-mD} \text{ pour } k \rightarrow \infty,$$

où  $m$  est le rang d'Hermite de  $G$ , (où le rang d'Hermite de  $H$  est l'index  $m \geq 1$  du premier coefficient non nul dans le développement), où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes. On obtient ainsi un comportement longue mémoire et persistant si  $0 < D < \frac{1}{m}$ . Remarquons alors que si on pose  $H = 1 - \frac{mD}{2}$ , alors  $(0 < D < \frac{1}{m}) \Leftrightarrow (\frac{1}{2} < H < 1)$ , Mandelbrot et Taqqu (1979).

- Comment d'une manière générale obtenir des suites stationnaires qui ont ce type de comportement. La démarche la plus naturelle consiste à se placer dans le domaine d'attraction d'un processus self-similaire ( $Y(t)$ ), et de prendre les accroissements de  $Y(t)$ . Pour cela on considère une suite  $Z(i)$ ,  $-\infty < i < +\infty$  et on construit la somme normalisée

$\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{[Nt]} Z(i)$  qui converge faiblement vers le processus  $Y(t)$  quand  $N \rightarrow \infty$ . Classiquement

on choisit pour  $Z(t)$

- des mouvements browniens qui sont  $\frac{1}{2}$ -sssi
- des variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées réduites
- des suites de variables aléatoires qui sont faiblement dépendantes.

### 3 - Processus à variance infinie

On peut obtenir des processus H-sssi à variance infinie à partir du mouvement de Levy fractionnaire, des processus type Hermite, ou des processus de Poincaré. On considère alors les accroissements de ces processus. Ces processus sont intéressants car leurs accroissements ont des comportements de mémoire longue et ce sont des processus dont les trajectoires montrent une grande variabilité.

#### 4.2 Les processus ARIMA fractionnaires ou les processus FARMA

Ces modèles ont été introduits par Granger et Joyeux (1980) et par Hosking (1981). C'est une généralisation assez naturelle des modèles ARIMA (p,d,q) décrits par Box et Jenkins (1970).

Si on permet au paramètre d de prendre toutes les valeurs entre  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$ , le processus FARMA est défini par

$$(3) \quad \phi(B)(1-B)^d X(t) = \theta(B) \varepsilon(t)$$

où les variables aléatoires  $\varepsilon(t)$  sont indépendantes, identiquement distribuées gaussiennes centrées et de variance  $\sigma^2$ ,  $\phi(B)$  et  $\theta(B)$  sont deux polynômes ayant leurs racines en dehors du cercle unité, B est l'opérateur retard défini sur les v.a.  $X(t)$ , d est un réel, et le polynôme  $(1-B)^d$  a pour développement :

$$(4) \quad (1-B)^d = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d(d-1) \dots (d-j+1)}{j!} (-1)^j B^j$$

le développement  $(1-B)^d$  est fondé sur le développement en série de la fonction puissance. En se servant de la fonction  $\Gamma(\cdot)$ , on a une écriture résumée de (4) donnée par :

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-d+j) B^j}{\Gamma(-d) j!}$$

le processus ARIMA  $(p,d,q)$  correspond au cas particulier où  $d$  est un entier positif. Dans le cas où  $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ , le processus défini par (3) a les propriétés suivantes :

(i) Le processus (3) a une solution stationnaire unique donnée par

$$(5) \quad X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon(t-j) = B^{-d} \varepsilon(t)$$

où

$$\psi_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1) \Gamma(d)} = \prod_{0 \leq k \leq j} \frac{k-1+d}{k} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

(ii) le pseudo spectre  $f(x)$  a pour représentation

$$f(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-ix}|^{-2d} = \frac{\sigma^2}{2\pi} (2 \sin \frac{x}{2})^{-2d}$$

(iii) la fonction d'autocovariance est définie par :

$$r(0) = \sigma^2 \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-d)}$$

et

$$r(k) = \frac{\Gamma(h+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(h-d+1)\Gamma(d)} = \prod_{0 < k \leq h} \frac{k-1+d}{k-d} \quad h = 1, 2, \dots$$

Considérons donc un processus  $\{X(t)\}$  défini par l'équation (5). Pour de tels processus nous avons alors le classement suivant :

Soit -  $X(t)$  est stationnaire si  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$

\* à mémoire courte si  $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$

\* à mémoire longue si  $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| = \infty$

Soit -  $\{X(t)\}$  est non stationnaire si  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 = \infty$ .

Dans le cas où  $\{X(t)\}$  est un processus stationnaire défini par (3) avec pour solution (5), on peut remarquer que l'on a les approximations suivantes :

$$(i)' \quad \psi_j \sim \frac{j^{d-1}}{\Gamma(d)} \quad \text{quand } k \rightarrow \infty$$

$$(ii)' \quad f(x) \sim \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{\lambda^{2d}} \quad \text{quand } x \rightarrow 0$$

$$(iii)' \quad r(k) \sim \frac{h^{2d-1} \Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} \quad \text{quand } k \rightarrow \infty$$

Notons que la fonction de covariance de ces processus peut se calculer pas à pas à l'aide de la relation suivante:

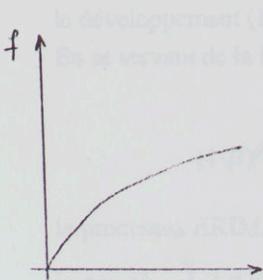
$$r(k) = r(k-1)\Gamma(k+d)/\Gamma(k-d+1).$$

Ainsi les processus fractionnaires sont stationnaires si  $d < 1/2$ ;

ils sont \* à mémoire courte si  $d \leq 0$

\* à mémoire longue si  $0 < d < \frac{1}{2}$

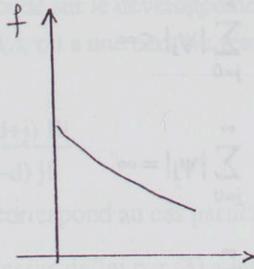
Le comportement du spectre au voisinage de  $x = 0$  permet de mieux comprendre la différence entre processus à mémoire courte et processus à mémoire longue, ou, processus non stationnaire pour lesquels le pseudo-spectre est infini en  $\lambda = 0$ .



processus fractionnaire

à mémoire courte

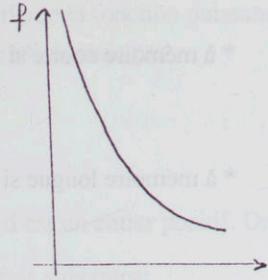
$$d < 0$$



processus ARMA

à mémoire courte

$$d = 0$$



processus

à mémoire longue (ou  
processus non stat.)

$$d > 0$$

#### 4.3 - Les processus GARMA

Une généralisation des processus FARMA a été proposée par Gray, Zhang et Woodward (1989). Ils proposent de modéliser le comportement persistant cyclique à l'aide des pôles du spectre qui ne se trouvent pas en zéro. Cela permet de prendre en compte le comportement saisonnier de mémoire longue. Ces processus sont étudiés à l'aide des polynômes de Gegenbauer  $C_n^d(u)$  définis par:

$$(1 - 2uZ + Z^2)^d = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^d(u) Z^n, \quad d \neq 0, |Z| \leq 1, |u| \leq 1.$$

On appelle processus GARMA, tout processus  $\{X(t)\}$  défini par

$$(6) \quad \phi(B)(1 - 2uB + B^2)^d \{X(t) - \mu\} = \theta(B) \varepsilon(t)$$

où les racines des polynômes  $\phi(z) = 0$  et  $\theta(z) = 0$  se trouvent en dehors du cercle unité et où  $\{\varepsilon(t)\}$  est une suite de v.a. i.i. d. gaussiennes centrées, réduites. Les propriétés de ces processus sont les suivantes :

-Le processus  $\{X(t)\}$  défini par (6) a une solution stationnaire si

$$d < \frac{1}{4} \text{ et } u = \pm 1 \quad \text{ou} \quad \text{si } 0 < d < \frac{1}{2} \text{ et } |u| < 1$$

- C'est un processus long mémoire si :

$$(i) \quad u = 1 \text{ et } 0 < d < \frac{1}{4}, \text{ alors } r(k) \sim k^{4d-1}$$

- (ii)  $u = -1$  et  $0 < d < \frac{1}{4}$ , alors  $r(k) \sim (-1)^k k^{4d-1}$
- (iii)  $|u| < 1$  et  $0 < d < \frac{1}{2}$ , alors  $r(k) \sim k^{2d-1} \sin[\pi d - kw_0]$  où  $w_0$  est la G-fréquence.

Notons que pour prendre en compte le comportement saisonnier des processus longue mémoire, Porter-Hudak (1990) suggère de considérer un modèle multiplicatif dérivé de celui de Box-Jenkins (1970), à savoir:

$$\Phi(B)(1-B)^{d_1}(1-B^s)^{d_2}X(t) = \theta(B)\varepsilon(t),$$

où  $0 < d_1 < \frac{1}{2}$  et  $0 < d_2 < \frac{1}{2}$ . L'étude théorique de ces modèles n'a pas été envisagée.

#### 4.4 - Agrégation de processus autorégressifs d'ordre 1

Granger (1980) a introduit une classe de processus présentant un comportement longue mémoire, en considérant des agrégations de processus autorégressifs d'ordre 1, avec des coefficients de régression différents et des erreurs pouvant être corrélées entre elles. Les modèles sont représentés de la manière suivante :

$$(7) \quad X_i(t) = \phi_i X_i(t-1) + C_i \varepsilon(t) + \eta_i(t) \quad t \geq 0, i = 1, 2, \dots$$

avec  $X_i(-1) = 0$ . Les bruits  $\{\varepsilon(t)\}$ ,  $\{\eta_1(t)\}$ ,  $\{\eta_2(t)\}$ ... sont indépendants entre eux, centrés, de variance respective  $\sigma^2 = V_\varepsilon(t)$  et  $\mu^2 = V_{\eta_i}(t)$ ,  $\forall i$ . Les valeurs des coefficients  $\phi_i$  et  $C_i$  résultent de tirages indépendants suivant une même loi qui est la loi d'hétérogénéité, ces tirages sont indépendants des valeurs prises par les bruits, et les variables  $\phi_i$  et  $C_i$  sont indépendantes entre elles. Les paramètres  $C_i$  sont supposés positifs, ils permettent d'introduire une hétéroscédasticité. Dans la suite,  $\phi$  désigne le vecteur constitué des coefficients  $\phi_i$ .

Le processus (7) est stationnaire si  $\sum_{k=0}^{\infty} E(\phi^k)^2 < +\infty$ , dans ce cas

(i) (7) est à mémoire longue si  $\sum_{k=0}^{\infty} (E \phi^k) = +\infty$ .

(ii) (7) est à mémoire courte si  $\sum_{k=0}^{\infty} (E \phi^k) < \infty$ .

Granger dans son article privilégie les séries agrégées telles que la loi de  $\phi$  soit concentrée sur  $] -1, 1[$ . Dans ce cas là, une condition suffisante pour que le processus agrégé soit

stationnaire est que  $E\left(\frac{1}{1-\phi^2}\right) < \infty$ . Le processus agrégé est obtenu en considérant

$$X_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(t).$$

En faisant tendre  $n$  vers  $\infty$ , on obtient à la limite le processus agrégé  $\bar{X}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n(t)$

satisfaisant p. s. une relation du type suivant:

$$(8) \quad \bar{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E[\phi^k] E[C_k \varepsilon(t-k)].$$

Dans le cas particulier où le coefficient de régression  $\phi$  suit une loi bêta  $B(p, q; \alpha)$ ,  $p > 0$ ,  $q > 0$ ,  $\alpha > 0$  (qui ne charge que les valeurs positives), la représentation moyenne mobile du processus agrégé est donnée par:

$$\bar{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+k) \Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \Gamma(p+q+k)}.$$

On a alors la classification suivante :

(i) Si  $\alpha > 1$ , ou si  $\alpha = 1$  et  $q \leq \frac{1}{2}$ , le processus (8) est non stationnaire.

(ii) Si  $\alpha = 1$  et  $\frac{1}{2} < q \leq \frac{1}{2}$ , le processus (8) est stationnaire et de mémoire longue.

(iii) Si  $\alpha = 1$  et  $q < 1$ , ou si  $\alpha < 1$ , le processus (8) est stationnaire et à mémoire courte.

Notons que l'agrégation des processus moyenne mobile d'ordre 1 ne permet pas d'obtenir des processus présentant ce même type de comportement. Enfin Gonçalves et Gouriéroux (1988) ont développé un test d'homogénéité portant sur ce type de modèle.

#### 4.5 - Les processus d'Euler.

Soit une fonction  $h(t)$  définie sur  $(0, \infty)$  par

$$h(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=0}^{m_i} c_{ij} (\log t)^j t^{-\alpha_i}, \quad t \geq 1$$

et

$$h(t) = 0 \quad t < 1,$$

où  $\text{Re}(\alpha_i) \geq 0$ , où  $c_{ij}$  sont des constantes et  $\sum_{i=1}^M (m_i + 1) = k$ .

On appelle processus d'Euler d'ordre  $k$  le processus  $\{X_t\}$  défini par

$$X_t = \int_0^t h\left(\frac{t}{u}\right) \varepsilon(u) d(\log u),$$

où  $\varepsilon(t)$  est un  $M$ -bruit blanc.

Un tel processus a un comportement longue mémoire car sa fonction d'autocorrélation est asymptotiquement équivalente à  $h^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , voir Gray et Zhang (1988).

Rappelons qu'un  $M$ -bruit blanc est un bruit blanc  $M$ -stationnaire et on dit qu'un processus  $\{X_t\}$ ,  $t \in \mathbb{N}$  est faiblement  $M$ -stationnaire si et seulement si  $\{Y_u\}$  est faiblement stationnaire pour  $u \in (\infty, \infty)$ , où  $Y_u = X_t$ ,  $t = e^u$ .

#### 4.6 - Quel lien relie les coefficients $H$ et $d$ intervenant dans les processus introduit précédemment?

On peut en effet se demander si ces 2 coefficients ont un lien entre eux.

Il est facile de voir qu'un processus  $\{X(t)\}$  est une série FARMA de paramètre  $d$ ,  $\frac{1}{2} \leq d < \frac{1}{2}$  si et seulement si c'est un mouvement brownien fractal de paramètre

$$H = d + \frac{1}{2}.$$

Pour cela, il suffit de remarquer d'une part, que le mouvement brownien fractal a une densité spectrale de la forme  $f_1(\lambda H) f_u(\lambda)$ , où  $f_u(\cdot)$  est une fonction positive, continue sur  $[-\pi, \pi]$ , bornée en zéro, et où  $f_1(\lambda H)$  est la densité spectrale du bruit brownien fractal  $X(t) = Y(t) - Y(t-1)$  où  $Y(t)$  est défini par

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t (t-s)^{H-1/2} dB(s),$$

$B(t)$  étant le mouvement brownien, d'autre part que le processus FARMA  $\{X(t)\}$  défini par (2), a pour densité spectrale  $f_2(\lambda, d) f_u(\lambda)$  où  $f_u(\cdot)$  est définie précédemment et où  $f_2(\lambda, d)$  est la densité spectrale de la série fractionnaire définie par  $(1-B)^d X(t) = \varepsilon(t)$  avec  $-\frac{1}{2} \leq d < \frac{1}{2}$ . On constate alors que la densité spectrale d'un mouvement brownien fractal de paramètre  $H$  est celle d'une série fractionnaire stationnaire FARMA de paramètre  $H - \frac{1}{2}$ . Donc la fonction d'autocovariance pour ces deux processus a la même structure pour  $k$  grand. On peut aussi remarquer que la fonction d'autocovariance du processus FARMA est plus facile à calculer, ce qui rend l'utilisation de ce processus plus facile. Néanmoins le choix de l'un ou de l'autre de ces modèles découle essentiellement de considérations pratiques.

Pour la clarté de la suite de l'exposé, en fonction des différents exemples que nous venons de présenter, nous considérons donc qu'un processus stationnaire présente une dépendance à mémoire longue, soit si la densité spectrale du processus,  $f(\lambda)$ , est telle que

$$(9) \quad f(\lambda) \sim L_1(\lambda) |\lambda|^{1-2H}, \quad \frac{1}{2} \leq H < 1,$$

où  $L_1(\lambda)$  varie lentement quand  $|\lambda| \rightarrow 0$ , soit si la fonction de covariance du processus,  $r(k)$ , est telle que

$$r(k) \sim L_2(k) |k|^{2H-2}, \quad \frac{1}{2} \leq H < 1,$$

où  $L_2(k)$  varie lentement quand  $|k| \rightarrow \infty$ .

## V - Propriétés des processus longue-mémoire

Dans ce paragraphe, nous allons préciser quels sont les domaines qui ont été étudiés concernant les processus longue mémoire tant d'un point de vue probabiliste que d'un point de vue statistique. Nous n'entrerons pas dans les détails, la bibliographie est largement donnée et on peut trouver une revue, pour les propriétés probabilistes dans les papiers de Carbon et Guerre, pour les propriétés statistiques dans les papiers de Bosq et Guégan, dans ce numéro.

### 5.1 - Propriétés probabilistes

Les propriétés probabilistes concernant les processus longue mémoire ont été particulièrement développés pour les processus self - similaires, voir O'Brien et Vervaat (1983, 1985), Taquu (1979), etc.....

Les principales propriétés étudiées concernent le domaine d'attraction (Taquu (1979), Major (1982)), les lois marginales (O'Brien et Vervaat (1983), Vervaat (19985), Delhing et Taquu (1990)), les valeurs extrêmes (O'Brien et Vervaat (1985), O'Brien, Torfs et Vervaat (1988)), les lois du log-itéré (Kasahara (1990), Taquu (1977, 1979)), la représentation de Wiener - Itô (Major (1981), Taquu (1981,1990)), les processus empiriques (Delhing et Taquu (1990)). Des dérivées des processus self-similaires à partir d'autres processus ont été étudiés par exemple à partir des processus  $\alpha$ -stables (Vervaat (1987), Levy et Taquu (1987), Kasahara, Maejima et Vervaat (1988), Somorodnisky et Taquu (1990), Taquu (1987, 1990), Taquu et Volpert (1983)), des processus non gaussiens (Taquu (1987,1990), Rosenblatt (1988)), des processus de Rudin-Shapiro (Kamae et Keane (1990)).

Un autre point de vue concernant les théorèmes de la limite centrale pour des processus longue mémoire a fait l'objet de nombreuses publications. Deux types de théorèmes de la limite centrale ont été développés, des théorèmes type "Central limite" pour lesquels les sommes de variables aléatoires considérées particulièrement bien normées convergent vers des processus gaussiens, des théorèmes "non central limite" pour lesquels les convergences obtenues ne sont pas des processus gaussiens. Les problèmes étudiés par les différents auteurs peuvent se résumer de la manière suivante: étant donné une suite de variables aléatoires  $(X_i)$ , que l'on suppose généralement (mais pas toujours) gaussiennes de moyenne zéro et de fonction de covariance présentant un comportement longue

mémoire,  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r(k) = \infty$  avec  $r(k) \sim k^{-d} L(k)$  quand  $k \rightarrow \infty$  où  $0 < d < 1$  et où  $L(\cdot)$  est

une fonction qui varie lentement quand  $k \rightarrow \infty$  on s'intéresse au comportement limite des suites

$$(10) \quad \sum_{i=1}^{[N\tau]} G(X_i)$$

où  $G$  est une fonction non linéaire des variables aléatoires  $X_i$ . On peut par exemple prendre pour  $H_m$ , le  $m^{\text{ième}}$  polynôme d'Hermite. Dans ce cas on montre que:

si  $d > \frac{1}{m}$ , la somme (10) correctement normalisée converge vers le mouvement brownien,

si  $0 < d < \frac{1}{m}$ , la limite obtenue pour (10) dépend de  $m$ :

pour  $m \geq 2$  c'est un processus gaussien,

pour  $m = 2$  c'est le processus de Rosenblatt.

L'établissement de Théorèmes central limite concerne les travaux de Rosenblatt (1961), 1981), Dobrushin (1979), Taqqu (1975,1979), Major (1981), Breuer (1983). Pour le cas des processus limite non gaussiens: Yagima (1989), Avram et Taqqu (1987), Dobrushin et Major (1979), Fox et Taqqu (1985).

Si le coefficient de normalisation tend vers l'infini plus vite que  $N^{1/2}$  alors on montre que la limite n'est pas gaussienne. L'utilisation des polynômes de Appell à la place des polynômes d'Hermite conduit aussi à des processus limites non gaussiens.

Dans le cas des processus FARMA un théorème limite a été établi par Akonom et Gouriéroux (1988). Ils considèrent des processus FARMA non stationnaires définis par l'équation (3) avec  $d > \frac{1}{2}$ , et où  $\{\varepsilon(t)\}$  est un processus bruit blanc de variance  $\sigma^2$  avec

des moments d'ordre  $p$  plus grands que  $\max(\frac{1}{d - \frac{1}{2}}, 2)$ . A partir de ce processus on

construit le processus suivant:

$$(11) \quad X_T^*(r) = \frac{1}{T^{d-1/2}} X(tr) \quad , \quad r \in [0,1]$$

Le processus (11) converge faiblement vers le processus  $\frac{\sigma \theta(1)}{\theta(1) \Gamma(d)} \int_0^r (r-s)^{d-1} dW(s)$ ,  $r \in [0,1]$ , où  $W$  est le mouvement brownien sur  $[0,1]$ .

Une remarque s'impose concernant le processus (11), en effet si  $d > \frac{1}{2}$  le processus est non stationnaire et avant toute étude, il est souhaitable de se ramener à un processus stationnaire. Deux cas peuvent se présenter :

(i) Si  $\frac{1}{2} < d < 1$ , le processus considéré est-il vraiment lié à un modèle ayant un comportement longue mémoire? Il y a nécessité de se ramener à l'étude de la densité avant de procéder à l'étude limite de sommes partielles de tels processus.

(ii) Si  $d > 1$ , alors  $d = n + \alpha$  où  $n \in \mathbb{N}$

(a) Si  $\alpha < \frac{1}{2}$ , alors  $n$  représente la saisonnalité du processus et ce processus a été étudié par Granger et Joyeux (1980) et Hosking (1981).

(b) Si  $\alpha > \frac{1}{2}$ , on se ramène au cas (ii).

L'étude limite de sommes partielles de processus FARMA non stationnaires, quoique intéressante en elle-même, ne semble donc pas d'un intérêt pratique immédiat.

## 5.2 - Propriétés statistiques

Les principales propriétés statistiques des processus à longue mémoire concernent l'estimation de la moyenne et de la variance du processus, l'estimation des paramètres  $d$  et  $H$ , l'estimation des paramètres des modèles FARMA, les prévisions, les tests.

Plaçons nous dans le cadre général d'un processus stationnaire présentant une dépendance à mémoire longue caractérisée par le fait que sa densité spectrale  $f(x)$  est définie par (9).

a - En ce qui concerne l'estimation de la moyenne du processus les estimateurs considérés sont l'estimateur des moindres carrés noté LSE ou le BLUE (best linear unbiased estimation), Adenstedt (1974). On montre que le LSE ne perd pas beaucoup d'efficacité par rapport au BLUE (Beran et Kunsh (1985), Samarov et Taqqu (1988)). Comparée aux M-estimateurs  $T_n$  définis par

$$\sum_{i=1}^n \psi(X_i - T_n) = 0,$$

la moyenne empirique est asymptotiquement équivalente aux estimateurs  $T_n$  dans le sens où

$$\frac{\text{var } \bar{X}_n}{\text{Var } T_n} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad (\text{Var } \bar{X}_n)^{1/2} |X_n - T_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 0.$$

Cette situation est très différente de ce qui se passe dans le cas indépendant.

b - l'estimation de la variance  $\sigma^2 = \text{var}(X(t))$  est obtenue à partir de l'estimateur

classique  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ . Pour ces processus longue mémoire cet estimateur n'est pas très bon et présente un large biais. Il perd donc beaucoup d'efficacité, Percival (1985). Pour  $H \geq \frac{3}{4}$ , l'efficacité est même nulle, sa vitesse de convergence étant plus lente que  $n^{-1/2}$ . Le problème reste ouvert pour ce qui est de trouver un estimateur efficace et convergent de  $\sigma^2$ .

c - Les modèles de régression avec bruit à longue mémoire ont été beaucoup étudié. Considérons donc le modèle défini par les équations

$$Y(t) = \beta X'(t) + \varepsilon(t)$$

On s'intéresse à l'estimation du paramètre  $\beta$ . Deux paramètres sont retenus: l'estimateur des moindres carrés  $\widehat{\beta}_{\text{LSE}}$  et le BLUE  $\widehat{\beta}_{\text{BLUE}}$ , (Yagima (1988,1991), Kunsh, Beran et Hampel (1990), Sowell (1990)). Dans le cas où il y a une tendance polynomiale, la vitesse de convergence des deux estimateurs est plus lente que dans le cas indépendant (le facteur de proportionnalité est de l'ordre de  $n^{H-1/2}$ ). L'efficacité de  $\widehat{\beta}_{\text{LSE}}$  est inférieure à 1, c'est seulement une fonction de  $L_1(0)$ . Par contre si on estime les composantes saisonnières, la vitesse de convergence est la même que dans le cas indépendant, et  $\widehat{\beta}_{\text{LSE}}$  est asymptotiquement efficace.

d - L'estimation du paramètre  $H$  a été faite à partir de la statistique  $R/S$ , Hurst (1951), Mandelbrot et Wallis (1969), Mandelbrot et Taquq (1979). L'estimateur obtenu est assez robuste et se comporte bien asymptotiquement, mais il perd beaucoup d'efficacité comparé à l'estimateur du maximum de vraisemblance. Une approche empirique a été proposée par Granger et Joyeux (1980), à partir de simulations, plusieurs valeurs de  $d$  sont comparées. Une approche bayérienne a été faite par Carlin, Dempster et Jonas (1989), Carlin et Dempster (1989). La normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance a été obtenue par Yagima (1985). Dans le cas d'un FARMA, le problème a été traité par Li et McLeod (1986). D'autres approches ont été envisagées: approximation de Whittle (Fox et Taquq, (1986), Taquq (1986), et Dalhaus (1989), approche spectrale, Janacek (1982), Kashyap et Eom (1988). Si l'estimateur obtenu l'est à partir d'un modèle erroné, trois possibilités sont envisagées : soit le modèle d'origine est non gaussien, voir Avram (1988), Terrin et Taquq (1989), Giraitis (1989), Fox et Taquq (1986), soit le problème provient de la forme du spectre et de la présence de pics dans les hautes fréquences, voir Geweke et Porter-Hudak (1983), Graf-Hampel et Tacier (1984) avec l'utilisation du périodogramme, soit la fonction  $L_1(\cdot)$  est non stationnaire, voir Kunsh (1986). En effet une pente négative du spectre près de zéro indique une tendance sur les données plutôt qu'un phénomène longue mémoire. Le problème est de savoir comment différencier ces modèles. Des algorithmes d'estimation dans le cas du maximum de vraisemblance ont été proposés par Sowell (1990).

e - L'estimation des paramètres des modèles FARMA par le maximum de vraisemblance a été étudiée par Yagima (1989). La normalité asymptotique est obtenue .

f - Les tests ont été jusqu'à présent peu étudiés: on trouve deux tests portant sur la statistique  $R/S$  par Mandelbrot et Wallis (1969), Davies et Hurst (1987). Un test basé sur les corrélations pour détecter le phénomène longue mémoire par Robinson (1990), un test d'adéquation basé sur la statistique du Portmanteau établi par Beran (1990), des tests pour les processus agrégés basés sur les multiplicateurs de Lagrange par Gonzales et Gouviéroux (1988).

g - Des prévisions ont été calculées empiriquement pour des processus FARMA par Granger et Joyeux (1980), puis de manière théorique, quand les paramètres sont supposés connus par Peiris et Peirera (1988).

h - Des théorèmes de la limite centralé pour des fonctions de répartition empirique, les U-statistiques et les statistiques de Von-Mises pour des processus longue mémoire ont été établis par Delhing et Taqqu (1989). Dans le même article, ils étudient la loi du Log-itéré.

## VI - Perspectives

Un grand nombre de questions restent posées concernant ces processus.

### D'un point de vue probabiliste.

- Il faudrait construire des modèles H-sssi en termes plus simples, trouver d'autres processus présentant ce type de comportement (en particulier à partir de processus non linéaires), en étudier la stationnarité et l'inversibilité.

- Pour les processus déjà construits, des propriétés restent à préciser, l'ergodicité, le mélange, l'existence de moments et de moments exponentiels, le comportement asymptotique des distributions, l'étude des lois marginales.

### D'un point de vue statistique

- Il faut construire des tests d'identification pour de tels modèles, définir des critères d'identifiabilité, type Akaike, voir Beran (1990).

- Dans le domaine de l'estimation, il reste à obtenir des résultats asymptotiques, étudier les estimateurs des moments d'ordre supérieur, des paramètres des modèles.

- La prédiction est peu étudiée, elle ne l'est pas quand les paramètres sont inconnus.

- L'estimation de la densité spectrale pour les processus longue mémoire n'est pas étudiée.

### Certains modèles sont peu ou pas étudiés

- Des modèles de séries chronologiques non linéaires. Peut-il y avoir une "différenciation" fractionnaire pour ces modèles? La définition de processus longue mémoire s'applique-t-elle dans ces cas là?

- Les modèles à longue mémoire non gaussiens. Ce sont en général des modèles à variance infinie. Ces modèles sont peu étudiés. Quelle représentation faut-il utiliser pour ces modèles ?

On peut se faire une idée plus précise des résultats existants pour ces modèles à partir du tableau suivant, (les x indiquent qu'il existe déjà des résultats dans la littérature, même partiels).

processus propriétés	self- similaires	mvt.brow. fractal	FARMA	GARMA	agrégation AR(1)	régression bruit l.m.
densité spectrale	x	x	x	x	x	x
fonct. d'autoc.	x	x	x	x	x	x
fonct. auto. part.						
solution station.	x	x	x	x	x	x
inversib.						
ergodicité	x	x				x
T.C.L.	x	x	x			
T.N.C.L.	x					
estimation	x	x	x			x
tests					x	x
prévisions			x			
identificat.						

Annexe

Nous présentons ici une revue commentée sur les processus longue mémoire et self-similaires. Elle n'est évidemment pas exhaustive et peut être complétée par les bibliographies relatives à chacun des sujets abordés par les autres articles de la revue.

## 1 - Introduction au problème.

Mandelbrot (1969).

## 2 - Présentation des processus self-similaires.

Mandelbrot (1965). Mandelbrot et Van Ness (1968). O'Brien et Vervaat (1983,1985). Taquq ( 1977, 1987, 1990, 1988). Vervaat (1985). Surgailis (1982).

## 3 - Etude de certains modèles.

- *Mouvement brownien fractal.*

Cox (1989). Mandelbrot (1965, 1971, 1975, 1985). Mandelbrot et Van Ness (1968). Mandelbrot et Taquq (1979). Mandelbrot et Wallis (1969b). Taquq (1990). Percival (1985).

- *FARMA*

Akonom (1988). Fox et Taquq (1986). Granger et Joyeux (1980). Hosking (1981). Mandelbrot (1967). Mandelbrot et Wallis (1969a). Percival (1985).

- *Agrégation de processus autorégressifs.*

Gonçalves et Gouriéroux (1988). Gouriéroux et Peaucelle (1988).

- *Processus fractionnaires généralisés.*

Gray, Zhang et Woodward (1989).

## 4 - Propriétés probabilistes des modèles précédents.

- *Théorèmes Limite (fonctionnelle non linéaires de processus gaussiens)*

Mandelbrot (1971). Dobrushin et Major (1979). Taquq (1975, 1979). Ho et Sun (1987, 1990a, 1990b). Major (1980, 1981). Yagima (1989). Fox et Taquq (1985). Delhing et Taquq (1989). Avram et Taquq (1987). Davidson et Cox (1989). Cox (1989). Rosenblatt (1961, 1981). Akonom et Gouriéroux (1987). Akonom (1988). Breuer (1983). Jeon et Sun (1990). Surgailis (1982). Sinai (1976).

- *Processus self-similaire - Domaine d'attraction*

Major (1982). Taquq (1979)

- *Processus self-similaires - Etudes des distributions marginales*

- O'Brien et Vervaat (1983). Vervaat (1985). Delhing et Taqu (1990).
- *Processus self-similaires - Processus Ponctuels - Valeurs extrêmes*
- O'Brien et Vervaat (1985). O'Brien, Torfs et Vervaat (1988). Taqu et Levy (1982).
- *Processus self-similaires et Processus  $\alpha$ -stables*
- Vervaat (1987). Levy et Taqu (1987). Kasahara, Maejima et Vervaat (1988). Somorodnisky et Taqu (1990). Taqu (1987, 1990). Taqu et Volpert (1983). Taqu et Levy (1982).
- *Processus self-similaires non gaussiens*
- Taqu (1977, 1990). Rosenblatt (1985).
- *Processus self-similaires - Processus de Rudin-Shapiro*
- Kamae et Keane (1990).
- *Loi du log itérée pour des processus self-similaires*
- Taqu (1977, 1979).
- *Pocessus self-similaires exprimés en termes d'intégrales de Wiener-Itô*
- Major (1981). Taqu (1981, 1990).
- 5 - Etude statistique des processus précédents
- *estimation de  $\mu$  et  $\sigma$ .*
- Adenstedt (1974). Beran et Kunsch (1985, 1990). Samarov et Taqu (1988). Granger (1988). Kunsh, Beran et Hampet (1989). Hall, Hart (1989). Yagima (1988, 1990). Sowell (1990). Percival (1985).
- *estimation de  $H$  et de  $d$*
- Akonom et Gouriéroux (1987). Granger et Joyeux (1980). Hurst (1951). Kashyap et Eom (1988). Li et McLeod (1986). Mandelbrot et Wallis (1969a et b). Mandelbrot et Taqu (1979). Sowell (1990). Yagima (1985, 1988, 1991). Geweke et Porter-Hudak (1983). Graft, Hampel et Tacier (1984). Janacek (1982). Carlin, Dempster, Jonas (1986). Carlin, Dempster (1989). Mandelbrot et Wallis (1969a, b). Mandelbrot (1971). Laurance et Kottogoda (1977). Mandelbrot et Taqu (1979). Beran (1990a). Gox et Taqu (1986). Dalhaus (1989).
- *Tests*
- Beran (1989a, 1990). Davies, Hart (1987). Robinson (1990). Kunsh, Beran, Hampel (1990). Sowell (1990). Li et McLeod (1986). Gouriéroux et Peaucelle (1988).
- *U-statistiques*

Delhing, Taqu (1988)

- *Approche non paramétrique*

Robinson (1990). Percival (1985). Bosq (1989). Hall et Hart (1990).

- *Prédiction*

Granger, Joyeux (1980). Hosking (1981). Peiris, Perera (1988). Peiris (1987).

- *Estimation des paramètres*

Yagima (1989). Li et McLeod (1986). Fox et Taqu (1986). Dalhaus (1989).

- *Processus de cointégration*

Diebold et Rudebusch (1989). Gouriéroux et Peaucelle (1988). Gonçalves et Gouriéroux (1988). Sowell (1990).

## 6 - Applications

- *Données économiques*

Carlin, Dempster (1989). Carlin, Dempster et Jonas (1985). Granger (1966, 1980). Mandelbrot (1969). Porter-Hudak (1990). Granger et Joyeux (1980). Diebold et Rudebusch (1989).

- *Données biologiques, géophysiques, météorologiques, hydrologiques*

Mandelbrot et Wallis (1968). Hurst (1951). Haslett et Raftery (1989). Spolia, Chander, O'Connor (1990). Kawrance et Kottegoda (1977). Wallis et Matalas (1970). Mandelbrot et Taqu (1979). McLeod et Hipel (1978).

- *Données astronomiques*

Newcomb (1886). Jeffrey (1939).

- *Données chimiques*

Student (1927).

- *Données agricoles*

Smith (1938). Whittle (1956).

- *Données Textiles*

Cox, Townsend (1948).

- *Données linguistiques*

Burrough (1981).

- *Simulations*

Mandelbrot et Wallis (1969b). Mejia, Rodriguez-Iturbe et Dawdi (1972). McLeod et Hipel (1978).

Bibliographie

- Adenstedt R.K. (1974). On large-sample estimation for the mean of a stationary random sequence. *Annals of Stat.* Vol. 2. 6. 1095-1107.
- Akonom J. (1988). *Processus transformés d'un ARIMA ou d'un processus de Wiener. Problèmes d'estimation.* Thèse d'état. Lille.
- Akonom J., Gouriéroux C. (1987). A functional limit theorem for the fractional processes. *Cepremap.* n° 8801.
- Avram F., Taqqu M.S. (1987). Noncentral limit theorems and Appell polynomials. *Annals of Proba.* Vol. 15. 2. 767-775.
- Beran J. (1989a) A test of location for data with slowly decaying serial correlations. *Biometrika.* 76. 261-269.
- Beran J. (1989b). M-estimators of location for data with slowly decaying serial correlations. Preprint. Texas A&M University.
- Beran J. (1989c). Akaike's model choice criterion, long-range dependence and approximate maximum likelihood estimation. Preprint. Texas A&M University.
- Beran J. (1990a). Statistical methods for data with long-range dependence. Tech. report. Texas A&M. University. n° 116.
- Beran J. (1990b). Goodness of fit test for time series with long-range dependence. Preprint. Texas A&M University.
- Beran J., Ghosh S. (1989) Goodness of fit test and long range dependence. Preprint.
- Beran J., Kunsch H.R. (1985) Location estimators for processes with long range dependence. Research report n° 40. Zurich.
- Beran J., Kunsch H.R. (1990). Long-range dependence and linear regression with special reference to ANOVA. Comm. presented at the IMA workshop on "New Directions in Time Series Analysis". Minneapolis. July 1990.
- Bosq D. (1989). Nonparametric estimation of a nonlinear filter using a density estimator with a zero-one "explosive" behaviour in  $R^d$ . *Statistics and decisions.* 7. 229-241.
- Breuer P. (1983). Central limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian fields. *Journ. of Mult. Analysis.* Vol. 13. 3. 425-441.
- Brockwell P.J., Davies R.A. (1987) *Time series. Theory and Methods.* Springer Verlag in Statistics. New York.

- Burrough P.A. (1981) Fractal dimension of landscapes and other environmental data. *Nature*. 294. 240-242.
- Carbon M. (1991) Introduction aux processus self-similaires. Publ. IRMA. Lille. Vol.25. n°1.
- Carlin J.B., Dempster A.P. (1989). Sensitivity analysis of seasonal adjustments: Empirical Case studies. *J.A.S.A.* Vol. 84. 405. 6-32.
- Carlin J.B., Dempster A.P., Jonas A.B. (1985) On methods and models for bayesian time series analysis. *J. Econometrics*. 30. 67-70.
- Cassandro M., Jona-Lasinio G. (1978) Critical behaviour and probability theory. *Adv. in Phys.* 27. 913-941.
- Cox D.R. (1981). Statistical Analysis of Time Series: some recent developments. *Scand. Journ. Statist.* 8. 93-115.
- Cox D.R. (1984). Long-range dependence: A Review. Proceedings 50th Anniversary conference Iowa State Statistical Laboratory. 55-74.
- Cox D. R. (1989). Long-range dependence, nonlinearity and time irreversibility. Presented at the Workshop on "Nonlinear Time Series Analysis" in Edinburg. July 1989.
- Cox D.R., Townsend M.W.H. (1948) The use of the correlogram in measuring yarn irregularity. *Proceedings of the Royal Soc. of Edinb. A.* 63. 290-311.
- Cox J.T., Greven A. (1990). On the long term behaviour of some finite particle systems. *Proba. Th. Fields.* 85. 195-237.
- Dalhaus R. (1989). Efficient parameter estimation for self-similar processes. *Annals of Stat.* Vol. 17. 4. 1749-1766.
- Damerau F.J., Mandelbrot B.B. (1973) Tests of the degree of word clustering in samples of written english. *Linguistics*. 102. 58-75.
- Davies R.B., Harte D.S. (1987) Tests for Hurst effect. *Biometrika*. 74. 95-102.
- Davison A.C., Cox D.R. (1989). Some simple properties of some random variables having long range dependence. *Proc. Roy. Soc. London. A.* 424. 255-262.
- Davidov Yu. (1990). Absolute continuity for distributions of functionals of self-similar processes. Comm. Presented at the IMA Workshop on "New Directions on Time Series Analysis" in Minneapolis. July 1990.
- Dehling H., Taquq M.S. (1989). The empirical process of some long-range dependent sequences with an application to U-statistics. *Annals of Stat.* Vol. 17. 4. 1767-1783.

- Delhing H., Taqqu M.S. (1990). Estimating the marginal distribution in a long-range dependent model. Comm. Presented at the IMA Workshop on "New Directions on Time Series Analysis" in Minneapolis. July 1990.
- Diebold F.X., Rudebusch G.D. (1989) Long-memory and Persistence in Aggregate output. *Journ of Monetary Economics*. 24.
- Dobrushin R.L., Major P. (1979). Non-central limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian fields. *Z.W.V.G.* 50. 27-52.
- Fox R., Taqqu M. S. (1985) Non-central limit theorems for quadratic forms in random variables having long-range dependence. *Annals of Proba.* Vol. 13. n° 2. 428-446.
- Fox R., Taqqu M. S. (1986). Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series. *Annals. of Stat.* Vol. 14. 2. 517-532.
- Gay R., Heyde C.C. (1990) On a class of random field models with allows long range dependence. *Biometrika*. 77. 401-403.
- Geweke J., Porter-Hudak S. (1983). The estimation and application of long memory time series models. *J.T.S.A.* Vol. 4. 4. 221-238.
- Giraitis L. (1985) Central limit theorems for functionals of a linear process. *Lithuanian Mathematical Journal*. Vol. 25. n°1. 43-57.
- Gonçalves E., Gouriéroux C. (1988). Agrégation de processus autorégressifs d'ordre 1. *Annales d'économie et de statistiques*. n° 12. 128-149.
- Gouriéroux C., Monfort A. (1990) *Series temporels et modèles dynamiques*. Economica. Paris.
- Gouriéroux C., Peaucell I. (1988) Detecting a long-run relationship. *Cepremap*. n° 8909.
- Graf H., Hampel F.R., Tacier J.D. (1984). The problem of unsuspected serial correlations. *Lecture notes in Statistics*. n° 26. 127-145.
- Granger C.W.J. (1966) The typical spectral shape of an economic variable. *Econometrica*. 34. 150-161.
- Granger C.W.J. (1980). Long-memory relationship and the agregation of dynamics models. *Journ. of Econometrics*. 14. 227-238.
- Granger C.W.J.(1988). Models that generate trends. *J.T.S.A.* Vol. 9. 4. 329-343.
- Granger C.W.J., Joyeux R. (1980). An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *J.T.S.A.* Vol. 1.1. 15-29.
- Gray H.L., Zhang N.F. (1988). On a class of nonstationary processes. *J.T.S.A.* Vol. 9. 2. 133-154.

- Gray H.L., Zhang N.F., Woodward W.A. (1989). On generalized fractional processes. J.T.S.A. Vol. 10. 3. 233-257.
- Hall P., Hart J.D. (1990) Nonparametric regression with long range dependence. Stoch. Proc. and their Appl. 36. 339-351.
- Haslett J., Raftery A.E. (1989). Space-time modelling with long-memory dependence: assessing Ireland's wind Power resource. Appl. Stat. 38. 1. 1-50.
- Ho H.C., Sun T.C. (1987) A central limit theorem for non-instantaneous filters of a stationary gaussian process. Journ. of Multivar. Analysis. Vol. 22. n°1. 144-155.
- Ho H.C., Sun T.C. (1990a) Limiting distributions of nonlinear vector functions of stationary gaussian processes. Annals of Proba. Vol. 18. n°3. 1159-1173.
- Ho H.C., Sun T.C. (1990b) A mixture type limit theorem for nonlinear functions of gaussian sequences. Manuscript. Academia Sinica, Taipei and Wayne State University, Detroit.
- Hosking J.R.M. (1981). Fractional differencing. Biometrika. 68. 1. 165-176.
- Hurst H.E. (1951) Long term storage capacity reservoirs. Trans. Amer. Soc. Civil Engineers. 116. 770-799.
- Janacek G.J. (1982). Determining the degree of differencing for time series via log-spectrum. J.T.S.A. Vol. 3.3. 177-183.
- Jeffrey H. (1939) Theory of Probability. Oxford. Clarenton Press.
- Jeon T.I., Sun T.C. (1990) A central limit theorem for nonlinear vector functionals of vector gaussian processes. tech. Report. n°745. I.M.A. Minneapolis.
- Kamae T., Keane M. (1990). A class of deterministic self-affine processes. Japan Journal of Appl. Math. Vol. 7 n°. 2. 183-195.
- Kasahara Y. (1988). Log-fractional stable processes. Stoch. Proc. and their Appl. 30. 329-339.
- Kashyap R.L., Eom K.B.(1988). Estimating in long-memory Time Series Models. J.T.S.A. Vol. 9. 1. 35-41.
- Kleines V. (1974) The Hurst phenomenon: a puzzle? Water Ressources Research. 10. 675-688.
- Kunsh H.R. (1986) Discrimination between monotonic trends and lonf-range dependence. Preprint.
- Kunsch. H.R., Beran J. , Hampel F.R. (1990) Robustness against dependence contrast versus constants. Tech. report. A&M University and Zurich University.

- Lacey M.T. (1990). On central limit theorems, modulus of continuity and Diophantine Type for certain irrational rotations. Tech. report. Indiana University.
- Lacey M.T. (1990). On weak convergence to self-similar processes with spectral representation in dynamical systems. Tech. report. Indiana University.
- Lacey M.T. (1990). On weak convergence in dynamical systems to self-similar processes with moving average representation. Tech. report. Indiana University.
- Lawrance A.J., Kottegoda N.T. (1977). Stochastic modelling of riverflow time series. *J.R.S.S. A.* 140. 1-47.
- Levy J.B., Taquq M.S. (1987). On renewal processes having stable inter-renewal intervals and stable rewards. *Ann. Sc. Math. Québec.* Vol. 11. n° 1. 95-110.
- Li W.K., McLeod A.I. (1986). Fractional time series modelling. *Biometrika.* 73. 1. 217-221.
- Major P. (1980). Limit theorems for sums of strongly dependent random variables. *Saint Flour. C.N.R.S.* n° 307.
- Major P. (1981). Limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian sequences. *Z.W.V.G.* 57. 129-158.
- Major P. (1982). On renormalizing Gaussian fields. *Z.W.V.G.* 59. 515-533.
- Major P. (1988). On the tail behaviour of the distribution function of Multiple Stochastic Integrals. *Prob. Th. Rel. Fields.* 78. 419-435.
- Mandelbrot B. (1965). Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi; application à la climatologie de H.E. Hurst. *C.R.A.S.* t. 260. 3274-3277.
- Mandelbrot B.B. (1969) Long-run linearity, locally Gaussian process, H-spectra and infinite variance. *Intern Economic Review.* 10. 82-111.
- Mandelbrot B. B. (1971) When can price be arbitrated efficiently? A limit to the validity of the random walk and Martingale models. *Reviews of Economics and Statistics.* LXII. 225-236.
- Mandelbrot B. (1975). Limit theorems on the self normalized range for weakly and strongly dependent processes. *Z.W.V.G.* 31. 271-285.
- Mandelbrot B.B. (1985) Fractional Brownian motions and fractional gaussian noises. *Encyclopedia of Statistical Sciences.* Vol. 5.186-189.
- Mandelbrot B., Taquq M.S. (1979). Robust R/S analysis of long-run serial correlation. 42nd. Session of the I.S.I. Manila. 4-14.
- Mandelbrot B., Van Ness J.W. (1968). Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review.* Vol. 10. 4. 422-437.

- Mandelbrot B., Wallis J.R. (1968). Noah, Joseph and operational hydrology. *Water Ressources Research*. Vol. 4.5. 909-918.
- Mandelbrot B., Wallis J.R. (1969a). Robustness of the rescaled Range R/S in the measurement of noncyclic long-run statistical dependence. *Water Ressources Research*. Vol. 5.5. 967-988.
- Mandelbrot B.B., Wallis J.R. (1969b) Computer experiments with fractional gaussian noises. Part 1, 2, 3. *Water Ressources Research*. Vol 5. n°1. 228-267.
- McLeod A.I, Hipel K.W. (1978) Preservation of the rescaled Adjusted Range. A reassessment of the Hurst Phenomenon. *Water. Research. Res.* Vol. 14; 3. 491-508.
- Mejia J.M., Rodriguez-Iturbe I, Dawdy D.R. (1972) Streamflow simulation. The broben line Process as a Potential Model for Hydrologic Simulation. *Water Research Res.* Vol. 8. 4. 931-941.
- Newcomb S. (1886) A generalized theory of the combination of observations so as to obtain the best result. *Amer. J. Math.* 8. 343-366.
- O'Brien G.L., Vervaat W. (1983). Marginal distributions of self-similar processes with stationary increments. *Z.W.V.G.* 811. 1-10.
- O'Brien G.L., Vervaat W. (1983). Self-similar processes with stationary increments generated by point processes. *Annals. of Prob.* Vol. 13.1. 28-52.
- O'Brien G.L., Torfs P.J., Vervaat W. (1990). Stationary self-similar extremal processes. To appear in *Theor. Prob. Rel. Fields*.
- Ogata Y., Abe K. (1991) Some Statistical Features of the Long-term Variation of the Global and Regional Seismic Activity. *Inst. Stat. Review.* 59. 2. 139-161.
- Peiris M.S. (1987) A note on the predictors of differenced sequences. *Austr. J. Statis.* 29. 1. 42-48.
- Peiris M.S., Perera B.J.C. (1988). On prediction with fractionally differenced ARIMA processes. *J.T.S.A.* Vol. 9. 3. 215-220.
- Percival D.B. (1985) On the sample mean and variance of a long-memory process. tech. report. n°69. Univ. of Washington.
- Porter-Hudak S. (1990). An application to the seasonal fractionally differenced model to the monetary aggregates. *J.A.S.A.* Vol. 85. 410. 338-344.
- Robinson P.M. (1990). Nonparametric function estimation for long-memory time series, in nonparametric and semi-parametric methods in Econometrics and Statistics. (W. Barnett and Als. eds.). CUP. Fothcoming.

- Robinson P.M. (1990) Testing for strong serial correlation and dynamics conditional heteroskedasticity in multiple regression. *Journal of Econometrics*. Forthcoming.
- Rosenblatt M. (1961) Independence and dependence. *Proc. 4th. Berkeley Symp. Math. Stat. Probab.* 411-443. Berkeley. University of California Press.
- Rosenblatt M. (1981) Limit theorems for Fourier Transforms of functionals of Gaussian sequences. *Z. W. V. G.* 55. 123-132.
- Rosenblatt M. (1985) *Stationary sequences and random fields*. Birkhausen.
- Samarov A., Taqqu M.S. (1988). On the efficiency of the sample mean in long-memory noise. *J.T.S.A.* Vol. 9.2. 191-200.
- Samorodnitsky G., Taqqu M.S. (1990).  $1.\alpha$ -self similar  $\alpha$ -stable processes with stationary increments. Tech. report. Boston University.
- Sinai Yu. G. (1976) Self-similar probability distributions. *Theor. of Prob. and its Appl.* Vol XXI. 1. 64-80.
- Smith H.F. (1938) An empirical law describing heterogeneity in the yields of agricultural crops. *J. Agric. Sci.* 28. 1-23.
- Sowell F. (1990a). The fractional unit root distribution. *Econometrica* Vol. 58. n° 2. 495-505.
- Sowell F (1990b). Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models. Tech. report. Carnegie Mellon University.
- Sowell F. (1990c). Modelling the long-run behaviour of time series. Comm. Presented at the IMA Workshop on "New Directions on Time Series Analysis" in Minneapolis. July 1990.
- Spolia S.K., Chander S., O'Connor K.M. (1980). An autocorrelation approach for parameter estimation of fractional order equal-root autoregressive models using hypergeometric functions. *Journ. of Hydrology.* 47. 1-47.
- Student (1927) Errors of routine analysis. *Biometrika.* 19. 151-164.
- Surgailis D. (1982) Zones of attraction of self-similar. Multiple integrals. *Lithuanian Mathematical Journal.* Vol. 22. n°3. 215-340.
- Taqqu M.S. (1975). Weak convergence to fractional brownian motion and to the Rosenblatt processes. *Z.W.V.G.* 31. 287-302.
- Taqqu M.S. (1977) Law of iterated logarithm for sums of nonlinear functions of Gaussian variables that exhibit a long-range dependence. *Z.W.V.G.* 40. 203-238.
- Taqqu M.S. (1979). Self-similar processes and related ultra violet and infrared catastrophes. *Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. Hungary.* 1057-1096.

- Taqqu M.S. (1986). A bibliography guide to self-similar processes and long-range dependence, in E. Eberlein and Taqqu eds. "dependence in Probability and Statistics". Birhauser.
- Taqqu m.S. (1987). Toeplitz matrices and estimation of time series with long-range dependence. Bernouilli. Vol. 1. 75-83.
- Taqqu M. S. (1988) Self-similar processes. Encyclopedia of Statistical Sciences. Vol. 9. 352-357.
- Taqqu M.S. (1987). Random processes with long-range dependence and high variability. Journ. of Geophys. Research. Vol. 92. 9683-9686.
- Taqqu M.S. (1990). Self-similar processes. Forthcoming in Encyclopedia of Statistical Sciences.
- Taqqu M.S. (1990). Self-similar processes and long-range dependence in time series. An overview. Comm. Presented at the IMA Workshop on "New Directions on Time Series Analysis" in Minneapolis. July 1990.
- Taqqu M. S., Levy J.B. (1985) Using renewal processes to generate long range dependence and high variability, in Dependance in Proba. and Stat. Ernst Eberlein and Taqqu eds. 73-90.
- Taqqu M.S., Volpert R. (1983) Infinite variance self-similar processes subordinate to a Poisson measure. Z.W.V.G. 62. 53-72.
- Vervaat W; (1985). Sample path properties of self-similar processes with stationary increments. Annals of Proba. Vol. 13. 1. 1-27.
- Verwaat W. (1987). Properties of general self-similar processes 46th. session of the I.S.I. Tokyo.
- Wallis J.R., Matalas N.C. (1970). small sample properties of H and K-estimators of the Hurst coefficient h. Water ressources Research. Vol 6. 6. 1583-1594.
- Whittle P. (1956) On the variation of yield variance with plot size. Biometrika. 43. 337-343.
- Yagima Y. (1985). On estimation of long-memory time series models. Austral. Journ. Stat. 27.3.303-320.
- Yagima Y. (1988). On estimation of the regression model with long-memory stationary errors. Annals of Stat. Vol. 16. 2. 791-807.
- Yagima Y. (1989). A central limit theorem of Fourier transforms of strongly dependent stationary processes. J.T.S.A. Vol. 10.4. 375-383.

Yagima Y. (1991). Asymptotic properties of the LSE in a regression model with long-memory stationary processes. *Annals of Stat.* Vol. 19, n°1. 158-177.

## PROCESSUS SELF-SIMILAIRES

par

Michel CARON

**Résumé.** Dans cet article, nous exposons en revue les propriétés générales des processus self-similaires, en insistant sur les processus self-similaires à accroissements stationnaires. Nous indiquons aussi quelques propriétés des lois marginales et des trajectoires. Un dernier paragraphe est consacré à l'estimation du coefficient de self-similarité.

**Mots-clés :** Processus self-similaires - Processus gaussien - Théorème de Doobier - Mouvement brownien - Processus stationnaires - Processus à accroissements stationnaires - Processus stables - Processus ponctuel fractionnaire - Densité spectrale - Processus à mémoire longue - Processus ARMA fractionnaires - Processus d'Herrault - Processus unipériodique - Processus de Poincaré.

**Classification AMS :** 60G11

Laboratoire de Statistique et Probabilités - Bât. M2

U.S.T.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Université des Sciences et Techniques de Lille - Flandres Artois

59655 Villeneuve d'Ascq - Cedex (France)