

Les droites et les plans dans l'espace : quels impacts des pratiques enseignantes sur les apprentissages des élèves ?

Céline Nihoul

Université de Mons
Département de Mathématique

 UMONS

 Faculté
des Sciences

 LDAR
LABORATOIRE DE DIDACTIQUE
ANDRÉ REVUZ

EDT « Didactique des disciplines » : L'apprentissage de la géométrie
7 février 2022

Contexte du travail

- POINT DE DÉPART : cours de Mathématiques élémentaires (transition secondaire-université).

Contexte du travail

- POINT DE DÉPART : cours de Mathématiques élémentaires (transition secondaire-université).
- PUBLIC : étudiants en BAB1 des filières mathématique, informatique et physique (± 130 étudiants).

Contexte du travail

- POINT DE DÉPART : cours de Mathématiques élémentaires (transition secondaire-université).
- PUBLIC : étudiants en BAB1 des filières mathématique, informatique et physique (± 130 étudiants).
- CONSTAT d'enseignant : difficultés récurrentes des étudiants avec les droites et les plans dans l'espace (Nihoul, 2016).

Contexte du travail

- POINT DE DÉPART : cours de Mathématiques élémentaires (transition secondaire-université).
- PUBLIC : étudiants en BAB1 des filières mathématique, informatique et physique (± 130 étudiants).
- CONSTAT d'enseignant : difficultés récurrentes des étudiants avec les droites et les plans dans l'espace (Nihoul, 2016).
- OBJECTIFS DE LA RECHERCHE : Mieux **comprendre** les difficultés des étudiants et trouver comment **agir** sur l'enseignement pour prendre en compte ces difficultés et favoriser les apprentissages.

Contexte du travail

- POINT DE DÉPART : cours de Mathématiques élémentaires (transition secondaire-université).
- PUBLIC : étudiants en BAB1 des filières mathématique, informatique et physique (± 130 étudiants).
- CONSTAT d'enseignant : difficultés récurrentes des étudiants avec les droites et les plans dans l'espace (Nihoul, 2016).
- OBJECTIFS DE LA RECHERCHE : Mieux **comprendre** les difficultés des étudiants et trouver comment **agir** sur l'enseignement pour prendre en compte ces difficultés et favoriser les apprentissages.

Objectifs de cet exposé

- Décrire les apprentissages potentiels dans l'enseignement « classique ».
- Présenter l'ingénierie didactique élaborée et expérimentée.
- Comparer les apprentissages potentiels : enseignement « classique » vs ingénierie didactique.

Plan

- 1 Le cadre de la Théorie de l'Activité
- 2 Enseignement des notions de droites et de plans dans l'espace : analyses didactiques
- 3 Élaboration et expérimentation d'une ingénierie didactique
- 4 Conclusion

Plan

- 1 Le cadre de la Théorie de l'Activité
- 2 Enseignement des notions de droites et de plans dans l'espace : analyses didactiques
- 3 Élaboration et expérimentation d'une ingénierie didactique
- 4 Conclusion

Comment approcher les apprentissages des élèves ?

LEVIERS pour accéder aux apprentissages :

Comment approcher les apprentissages des élèves ?

LEVIERS pour accéder aux apprentissages :

- Mener une **étude de relief** sur les notions (Pariès et al., 2007) : croisement des résultats entre une analyse cognitive, curriculaire et historico-épistémologique.
↔ aide à mieux comprendre ce qui est en jeu dans l'enseignement du contenu.

Comment approcher les apprentissages des élèves ?

LEVIERS pour accéder aux apprentissages :

- Mener une **étude de relief** sur les notions (Pariès et al., 2007) : croisement des résultats entre une analyse cognitive, curriculaire et historico-épistémologique.
↔ aide à mieux comprendre ce qui est en jeu dans l'enseignement du contenu.
- Analyser le **travail mathématique** proposé dans les **manuels** scolaires, ressources dans lesquelles l'enseignant est absent.
↔ donne une idée du travail qu'il est possible de proposer aux élèves au regard du relief.

Comment approcher les apprentissages des élèves ?

LEVIERS pour accéder aux apprentissages :

- Mener une **étude de relief** sur les notions (Pariès et al., 2007) : croisement des résultats entre une analyse cognitive, curriculaire et historico-épistémologique.
↔ aide à mieux comprendre ce qui est en jeu dans l'enseignement du contenu.
- Analyser le **travail mathématique** proposé dans les **manuels** scolaires, ressources dans lesquelles l'enseignant est absent.
↔ donne une idée du travail qu'il est possible de proposer aux élèves au regard du relief.
- Analyser le **travail mathématique** proposé par **l'enseignant**.
↔ met en évidence le travail mathématique et le rôle de l'enseignant au regard du relief et des manuels.

Relief : les apprentissages attendus des élèves sur ces notions

Droites et plans

Relief : les apprentissages attendus des élèves sur ces notions

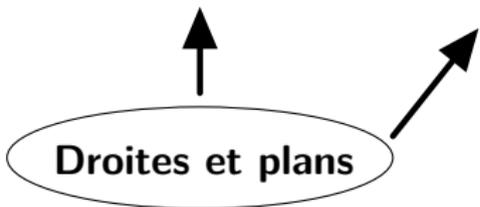
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$$



Droites et plans

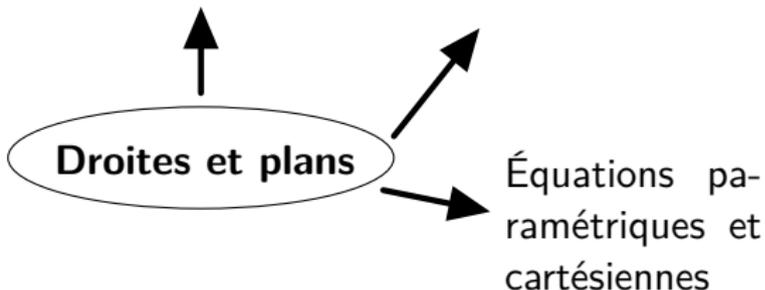
Relief : les apprentissages attendus des élèves sur ces notions

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases} \quad \{(-2\alpha, \alpha, 3\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$$



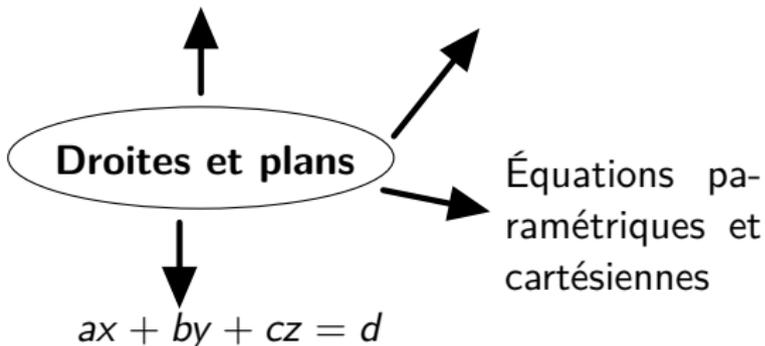
Relief : les apprentissages attendus des élèves sur ces notions

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases} \quad \{(-2\alpha, \alpha, 3\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$$



Relief : les apprentissages attendus des élèves sur ces notions

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases} \quad \{(-2\alpha, \alpha, 3\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$$



Relief : les apprentissages attendus des élèves sur ces notions

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases} \quad \{(-2\alpha, \alpha, 3\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$$

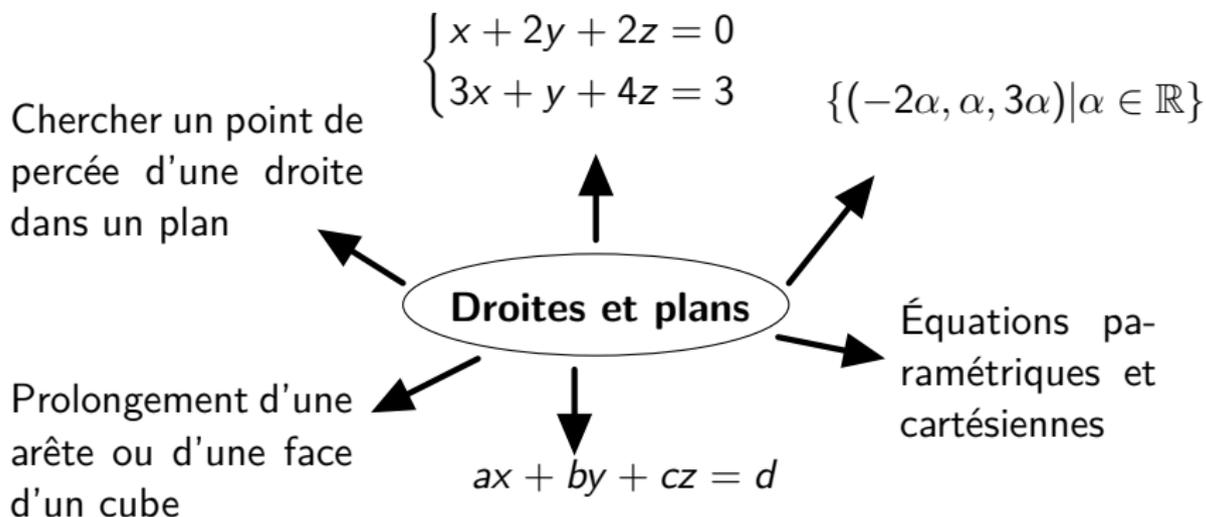
Droites et plans

Prolongement d'une arête ou d'une face d'un cube

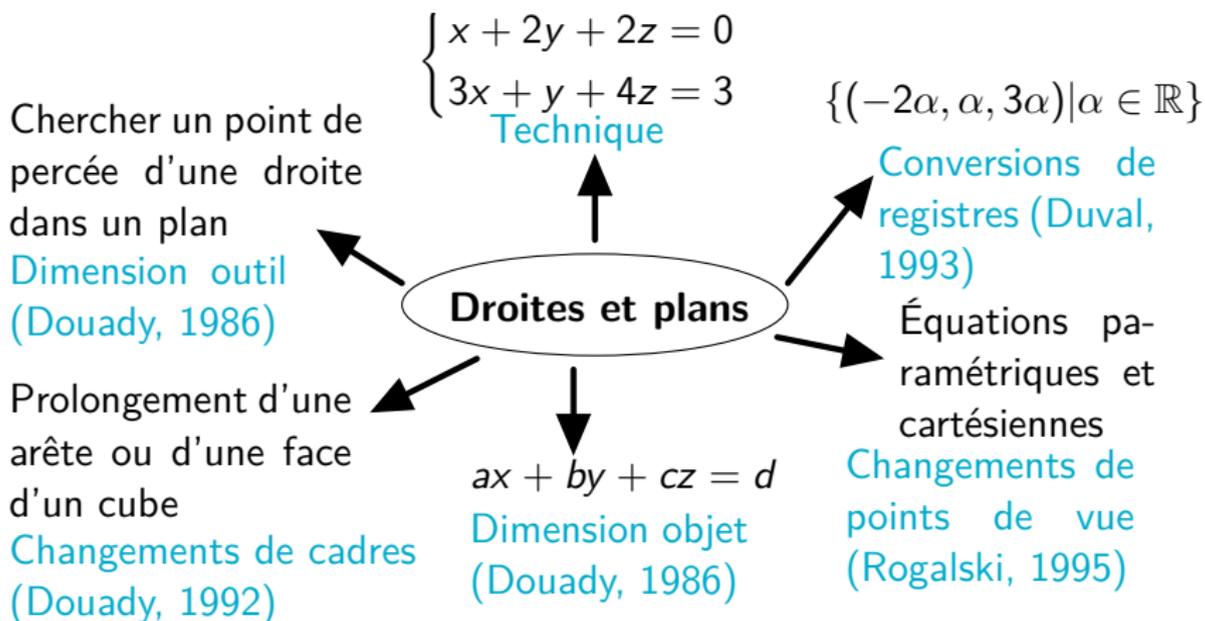
$$ax + by + cz = d$$

Équations paramétriques et cartésiennes

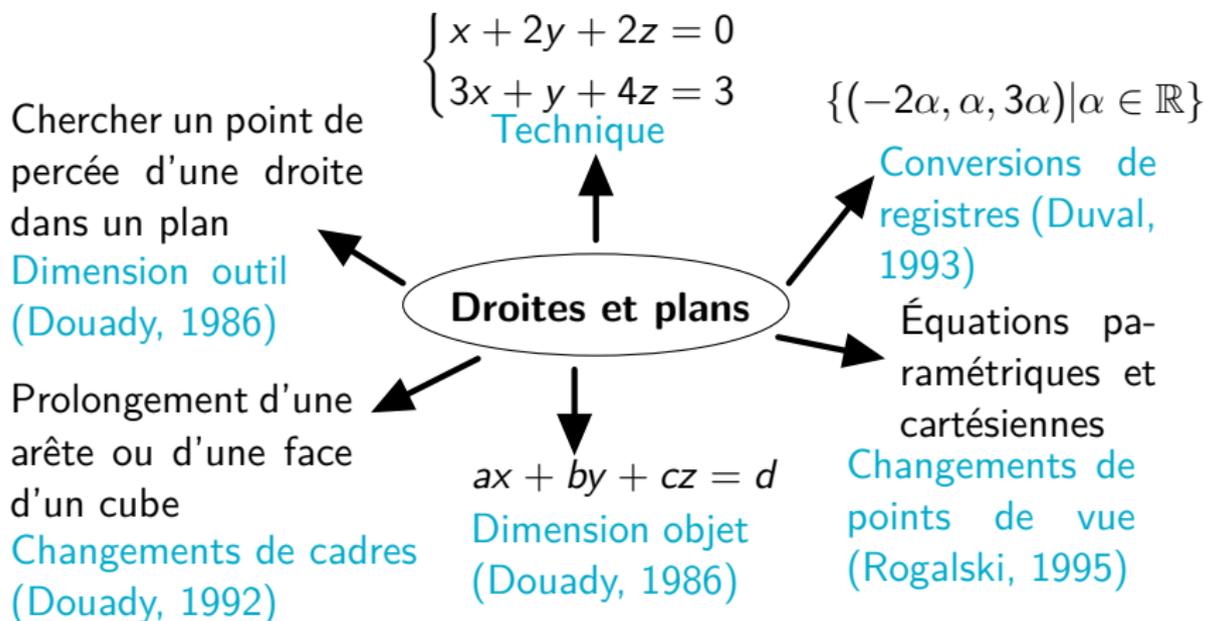
Relief : les apprentissages attendus des élèves sur ces notions



Relief : les apprentissages attendus des élèves sur ces notions



Relief : les apprentissages attendus des élèves sur ces notions



⇒ Une certaine disponibilité des connaissances dans leur D.O.O. et une certaine flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue sont attendues.

Comment étudier le travail mathématique ?

- **OUTILS THÉORIQUES** : les activités des élèves, considérées dans notre cadre théorique (TA) comme un intermédiaire pour caractériser les apprentissages (Robert & Rogalski, 2002).

Comment étudier le travail mathématique ?

- **OUTILS THÉORIQUES** : les activités des élèves, considérées dans notre cadre théorique (TA) comme un intermédiaire pour caractériser les apprentissages (Robert & Rogalski, 2002).
- **MÉTHODOLOGIE** : comparer les activités attendues (*a priori*) des élèves et celles effectives (*a posteriori*).

Comment étudier le travail mathématique ?

- **OUTILS THÉORIQUES** : les activités des élèves, considérées dans notre cadre théorique (TA) comme un intermédiaire pour caractériser les apprentissages (Robert & Rogalski, 2002).
- **MÉTHODOLOGIE** : comparer les activités attendues (*a priori*) des élèves et celles effectives (*a posteriori*).
- Distinguer deux phases : les moments de cours et les exercices (outils différents).

Comment étudier le travail mathématique ?

- **OUTILS THÉORIQUES** : les activités des élèves, considérées dans notre cadre théorique (TA) comme un intermédiaire pour caractériser les apprentissages (Robert & Rogalski, 2002).
- **MÉTHODOLOGIE** : comparer les activités attendues (*a priori*) des élèves et celles effectives (*a posteriori*).
- Distinguer deux phases : les moments de cours et les exercices (outils différents).
- Du côté de L'ENSEIGNANT : son discours.

Hypothèses théoriques

- La qualité de ses interventions peut influencer les activités des élèves (Abboud-Blanchard et al., 2017).
- Il essaie durant les moments de cours de faire progresser les connaissances des élèves en restant « proche » d'eux, c'est-à-dire en activant des connexions entre les mots et le travail déjà fait (Bridoux et al., 2016).

Le travail mathématique lors des moments de cours

Analyse *a priori* - basée sur l'étude de relief

- Le texte du savoir et sa mise en forme.
- Les traitements internes (cadres, registres, points de vue) et la dimension outil-objet.
- Les occasions de proximités (Robert & Vandebrouck, 2014) entre les connaissances nouvelles et les connaissances anciennes des élèves ou le travail qu'ils ont déjà fait.

Le travail mathématique lors des moments de cours

Analyse *a priori* - basée sur l'étude de relief

- Le texte du savoir et sa mise en forme.
- Les traitements internes (cadres, registres, points de vue) et la dimension outil-objet.
- Les occasions de proximités (Robert & Vandebrouck, 2014) entre les connaissances nouvelles et les connaissances anciennes des élèves ou le travail qu'ils ont déjà fait.

Analyse *a posteriori*

- Les déroulements en classe : texte du savoir, les traitements internes, la dimension outil-objet.
- Les proximités tentées (ou non) dans le discours de l'enseignant en classe.

Le travail mathématique lors des exercices

Analyse *a priori* - basée sur l'étude de relief

- Les tâches prescrites.
- Les adaptations des connaissances (Robert, 1998) telles que l'organisation des raisonnements, les mises en relations, les choix de méthodes, les traitements internes,...

Le travail mathématique lors des exercices

Analyse *a priori* - basée sur l'étude de relief

- Les tâches prescrites.
- Les adaptations des connaissances (Robert, 1998) telles que l'organisation des raisonnements, les mises en relations, les choix de méthodes, les traitements internes,...

Analyse *a posteriori*

- La chronologie des tâches effectives.
- La nature du travail imposé (recherche, discussion, correction, collectif, individuel, ...).
- Les aides (Robert, 2007) proposées par l'enseignant dans son discours en classe.

Dans cet exposé ...

■ Étude de terrain :

- Analyse de plusieurs manuels pour la Belgique francophone (Nihoul, 2018) : *Espace math* (2004), *Actimath* (2015), *CQFD* (2014), *CQFD* (2019).
- Analyse des scénarios d'enseignement proposés par 5 enseignants et de leurs déroulements en classe.

■ Aujourd'hui, focus sur :

- un manuel : *CQFD* (2019).
- un enseignant : P_1 .
- un extrait de moments de cours et un extrait de la phase d'exercices.

Plan

- 1 Le cadre de la Théorie de l'Activité
- 2 Enseignement des notions de droites et de plans dans l'espace : analyses didactiques
- 3 Élaboration et expérimentation d'une ingénierie didactique
- 4 Conclusion

Le manuel *CQFD*

Les moments de cours

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \begin{cases} x - x_A = \lambda \cdot x_u + \mu \cdot x_v \\ y - y_A = \lambda \cdot y_u + \mu \cdot y_v \\ z - z_A = \lambda \cdot z_u + \mu \cdot z_v \end{cases}$$

Exemple

Équations paramétriques du plan π comprenant les trois points $A(1 ; 3 ; 7)$, $B(5 ; 2 ; 1)$ et $C(7 ; 8 ; 9)$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda + 6\mu \\ y = 3 - \lambda + 5\mu \\ z = 7 - 6\lambda + 2\mu \end{cases}$$

Le manuel CQFD

Les moments de cours

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \begin{cases} x - x_A = \lambda \cdot x_u + \mu \cdot x_v \\ y - y_A = \lambda \cdot y_u + \mu \cdot y_v \\ z - z_A = \lambda \cdot z_u + \mu \cdot z_v \end{cases}$$

Exemple

Équations paramétriques du plan π comprenant les trois points $A(1 ; 3 ; 7)$, $B(5 ; 2 ; 1)$ et $C(7 ; 8 ; 9)$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda + 6\mu \\ y = 3 - \lambda + 5\mu \\ z = 7 - 6\lambda + 2\mu \end{cases}$$

ANALYSE A PRIORI :

- Pas de lien explicite entre le point théorique et l'exemple : occasion de proximité.
- Choix : deux vecteurs directeurs non colinéaires.
- Pas d'explication sur la non colinéarité des vecteurs : occasion de proximité.
- Mise en jeu de connaissances du cadre de la GV.
- Changement de cadres de la GV vers la GA pour le point de vue paramétrique : occasion de proximité.

Le manuel *CQFD*

Les exercices

- c. Déterminer le point de percée, dans le plan $\pi \equiv 2x - y + 3z - 2 = 0$, de la droite comprenant les points $A(-2; 1; 2)$ et $B(0; 3; 2)$.

Le manuel *CQFD*

Les exercices

- c. Déterminer le point de percée, dans le plan $\pi \equiv 2x - y + 3z - 2 = 0$, de la droite comprenant les points $A(-2; 1; 2)$ et $B(0; 3; 2)$.

ANALYSE A PRIORI :

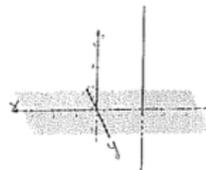
- Organisation du raisonnement : déterminer un vecteur directeur de la droite, écrire une EP de la droite, résoudre un système.
- Connaissances mobilisées : point de percée, vecteurs, EP de droite, systèmes.
- Traitements internes : conversion de registres, changements de cadres.

L'enseignant P_1

Les moments de cours (1/2)

- Si $x_v = 0$, $y_v = 0$ et $z_v \neq 0$, alors $d \equiv \begin{cases} x = x_a \\ y = y_a \end{cases}$

On obtient un système analogue si $x_v \neq 0$, $y_v = 0$ et $z_v = 0$
et si $x_v = 0$, $y_v \neq 0$ et $z_v = 0$.

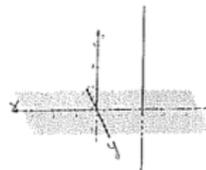


L'enseignant P_1

Les moments de cours (1/2)

- Si $x_v = 0$, $y_v = 0$ et $z_v \neq 0$, alors $d \equiv \begin{cases} x = x_a \\ y = y_a \end{cases}$

On obtient un système analogue si $x_v \neq 0$, $y_v = 0$ et $z_v = 0$
et si $x_v = 0$, $y_v \neq 0$ et $z_v = 0$.



ANALYSE A PRIORI :

- Liens à effectuer entre le point théorique (EP) et le cas particulier : occasion de proximités.
- Absence d'explications concernant les conversions de registres : occasion de proximités.
- Mise en jeu de connaissances du cadre de la GV.
- Pas de lien possible avec les connaissances des cadres de la GS et de la GA (vu après).

L'enseignant P_1

Les moments de cours (2/2)

Extrait (1'20")

Donc $x = x_A$... donc la coordonnée en x est fixée. Donc votre droite varie mais tout en étant fixée $x = x_A$. Donc je vous ai représenté le dessin juste à côté.

L'enseignant P_1

Les moments de cours (2/2)

Extrait (1'20")

Donc $x = x_A$... donc la coordonnée en x est fixée. Donc votre droite varie mais tout en étant fixée $x = x_A$. Donc je vous ai représenté le dessin juste à côté.

ANALYSE A POSTERIORI :

- Pas de lien entre le point théorique et le cas particulier : occasion de proximité manquée.
- Peu d'explications sur les conversions de registres : tentative de proximité entre les équations et la droite.
- Aucun rapprochement tenté avec les connaissances des élèves en GV.
- Les élèves écoutent et ne prennent pas de notes.

L'enseignant P_1

Les exercices (1/2)

Exercice fin de chapitre

On donne une droite $d \equiv x - 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Écrire une équation cartésienne du plan π perpendiculaire à d qui passe par le point $A(1, -1, 0)$.

L'enseignant P_1

Les exercices (1/2)

Exercice fin de chapitre

On donne une droite $d \equiv x - 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Écrire une équation cartésienne du plan π perpendiculaire à d qui passe par le point $A(1, -1, 0)$.

ANALYSE A PRIORI :

- Organisation du raisonnement : traduire la perpendicularité, identifier un vecteur directeur de la droite, écrire une EC du plan.
- Connaissances mobilisées : SEC de droites, EC de plans, positions relatives.
- Traitements internes : conversion de registres.

L'enseignant P_1

Les exercices (2/2)

ANALYSE A POSTERIORI (5'30) :

- Nature du travail : recherche/correction collective.
- Un élève lit l'énoncé. L'enseignant écrit les informations importantes au tableau.
- Jeu de questions/réponses entre l'enseignant et les élèves.
- Prise en charge par l'enseignant d'une adaptation des connaissances : vecteur directeur de la droite, EC du plan.
- Les activités des élèves sont minorées : écouter, calculer.

Premiers résultats sur le travail mathématique

- Les 5 séquences étudiées sont similaires entre elles et aux manuels scolaires.

Premiers résultats sur le travail mathématique

- Les 5 séquences étudiées sont similaires entre elles et aux manuels scolaires.
- Présence des cadres de la GS, GV et GA dans toutes les séquences MAIS : les jeux de cadres restent ponctuels et souvent entre GV et GA.

Premiers résultats sur le travail mathématique

- Les 5 séquences étudiées sont similaires entre elles et aux manuels scolaires.
- Présence des cadres de la GS, GV et GA dans toutes les séquences MAIS : les jeux de cadres restent ponctuels et souvent entre GV et GA.
- Présence des registres algébrique, de la langue naturelle, graphique et ensembliste MAIS le registre ensembliste est principalement travaillé pour les ensembles de solutions de systèmes.

Premiers résultats sur le travail mathématique

- Les 5 séquences étudiées sont similaires entre elles et aux manuels scolaires.
- Présence des cadres de la GS, GV et GA dans toutes les séquences MAIS : les jeux de cadres restent ponctuels et souvent entre GV et GA.
- Présence des registres algébrique, de la langue naturelle, graphique et ensembliste MAIS le registre ensembliste est principalement travaillé pour les ensembles de solutions de systèmes.
- Présence des points de vue paramétrique et cartésien MAIS leur articulation s'effectue principalement dans le sens paramétrique/cartésien.

Premiers résultats sur le travail mathématique

- Les 5 séquences étudiées sont similaires entre elles et aux manuels scolaires.
- Présence des cadres de la GS, GV et GA dans toutes les séquences MAIS : les jeux de cadres restent ponctuels et souvent entre GV et GA.
- Présence des registres algébrique, de la langue naturelle, graphique et ensembliste MAIS le registre ensembliste est principalement travaillé pour les ensembles de solutions de systèmes.
- Présence des points de vue paramétrique et cartésien MAIS leur articulation s'effectue principalement dans le sens paramétrique/cartésien.
- Peu d'explications sont proposées sur les traitements internes à réaliser dans les documents MAIS elles sont prises en compte par le discours de l'enseignant en classe (proximités, aides).
⇒ Pas d'impact sur les activités des élèves.

Premiers résultats sur le travail mathématique

- Les 5 séquences étudiées sont similaires entre elles et aux manuels scolaires.
- Présence des cadres de la GS, GV et GA dans toutes les séquences MAIS : les jeux de cadres restent ponctuels et souvent entre GV et GA.
- Présence des registres algébrique, de la langue naturelle, graphique et ensembliste MAIS le registre ensembliste est principalement travaillé pour les ensembles de solutions de systèmes.
- Présence des points de vue paramétrique et cartésien MAIS leur articulation s'effectue principalement dans le sens paramétrique/cartésien.
- Peu d'explications sont proposées sur les traitements internes à réaliser dans les documents MAIS elles sont prises en compte par le discours de l'enseignant en classe (proximités, aides).
⇒ Pas d'impact sur les activités des élèves.
- Les conditions de travail et les aides procédurales apportées par les enseignants minorent les activités des élèves prévues *a priori*.

Les apprentissages potentiels des élèves

Les activités possibles des élèves

- Développer une certaine disponibilité des notions dans leur dimension objet.
⇒ La dimension outil n'est presque jamais abordée (1/5P).
- Effectuer certains traitement internes : des jeux entre les cadres de GV et GA, des conversions entre les registres algébrique, de la langue naturelle, graphique et (ensembliste), des changements de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien.

Nouvel objectif

- **RÉSULTAT** : les apprentissages potentiels des élèves semblent être minorés par rapport à ceux attendus d'eux.
- **SUITE DU TRAVAIL** : élaborer une séquence d'enseignement de « type ingénierie didactique » (Robert, 2011) pour tenter de favoriser les apprentissages des élèves sur ces notions.

Plan

- 1 Le cadre de la Théorie de l'Activité
- 2 Enseignement des notions de droites et de plans dans l'espace : analyses didactiques
- 3 Élaboration et expérimentation d'une ingénierie didactique
- 4 Conclusion

Activité d'introduction 1

Recherchez graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans \mathbb{R}^2 .

$$(S_1) \begin{cases} x + 5 = 2x + 3 \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} 2y + 5x = 1 \\ 3x = 1 - 3y \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$$

Activité d'introduction 1

Recherchez graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans \mathbb{R}^2 .

$$(S_1) \begin{cases} x + 5 = 2x + 3 \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} 2y + 5x = 1 \\ 3x = 1 - 3y \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$$

- **ACTIVITÉS ATTENDUES** : considérer un ensemble de couples, représenter l'ensemble, identifier les objets, chercher les intersections éventuelles des objets, écrire l'ensemble des solutions.

Activité d'introduction 1

Recherchez graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans \mathbb{R}^2 .

$$(S_1) \begin{cases} x + 5 = 2x + 3 \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} 2y + 5x = 1 \\ 3x = 1 - 3y \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$$

- **ACTIVITÉS ATTENDUES** : considérer un ensemble de couples, représenter l'ensemble, identifier les objets, chercher les intersections éventuelles des objets, écrire l'ensemble des solutions.
- **GESTION** : discussion collective, tentatives de proximités par l'enseignant avec ce que les élèves connaissent ou ont déjà faits.

Activité d'introduction 2

En vous inspirant de ce qui a été fait au point 1, trouvez l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans \mathbb{R}^3 .

$$(S_1) \begin{cases} x + 5 = 2x + 3 \\ 4z - 3 = 2z + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} x + 5 = 2x + 3 \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} x = \frac{y}{2} = z - 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{4} \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$(S_6) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 6x + 9y + 12z = 8 \end{cases}$$

Activité d'introduction 2

En vous inspirant de ce qui a été fait au point 1, trouvez l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans \mathbb{R}^3 .

$$(S_1) \begin{cases} x + 5 = 2x + 3 \\ 4z - 3 = 2z + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} x + 5 = 2x + 3 \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} x = \frac{y}{2} = z - 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{4} \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$(S_6) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 6x + 9y + 12z = 8 \end{cases}$$

- **ACTIVITÉS ATTENDUES** : considérer un ensemble de triplets, représenter l'ensemble, identifier les objets, chercher les intersections éventuelles des objets, écrire l'ensemble des solutions.

Activité d'introduction 2

En vous inspirant de ce qui a été fait au point 1, trouvez l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans \mathbb{R}^3 .

$$(S_1) \begin{cases} x + 5 = 2x + 3 \\ 4z - 3 = 2z + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} x + 5 = 2x + 3 \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} x = \frac{y}{2} = z - 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{4} \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$(S_6) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 6x + 9y + 12z = 8 \end{cases}$$

- **ACTIVITÉS ATTENDUES** : considérer un ensemble de triplets, représenter l'ensemble, identifier les objets, chercher les intersections éventuelles des objets, écrire l'ensemble des solutions.
- **GESTION** : discussion collective entrecoupée de phases de recherche individuelle, tentatives de proximités par l'enseignant avec ce que les élèves connaissent ou ont déjà fait (AI1, GS, GV).

Déroulement en classe : moments de cours

Système d'équations cartésiennes de droites (14'30")

$$(S_4) \quad x = \frac{y}{2} = z - 2$$

Déroulement en classe : moments de cours

Système d'équations cartésiennes de droites (14'30")

$$(S_4) \quad x = \frac{y}{2} = z - 2$$

- Connaissances des élèves : EP de droites.

Déroulement en classe : moments de cours

Système d'équations cartésiennes de droites (14'30")

$$(S_4) \quad x = \frac{y}{2} = z - 2$$

- Connaissances des élèves : EP de droites.
- Objectifs : introduire les SEC de droites et articuler les points de vue.

Déroulement en classe : moments de cours

Système d'équations cartésiennes de droites (14'30")

$$(S_4) \quad x = \frac{y}{2} = z - 2$$

- Connaissances des élèves : EP de droites.
- Objectifs : introduire les SEC de droites et articuler les points de vue.
- Appui sur la description de la droite trouvée par les élèves $\{(x, 2x, x + 2) | x \in \mathbb{R}\}$.

Déroulement en classe : moments de cours

Système d'équations cartésiennes de droites (14'30")

$$(S_4) \quad x = \frac{y}{2} = z - 2$$

- Connaissances des élèves : EP de droites.
- Objectifs : introduire les SEC de droites et articuler les points de vue.
- Appui sur la description de la droite trouvée par les élèves $\{(x, 2x, x + 2) | x \in \mathbb{R}\}$.
- Appui sur les connaissances des élèves pour déterminer une EP de la droite.

Déroulement en classe : moments de cours

Système d'équations cartésiennes de droites (14'30")

$$(S_4) \quad x = \frac{y}{2} = z - 2$$

- Connaissances des élèves : EP de droites.
- Objectifs : introduire les SEC de droites et articuler les points de vue.
- Appui sur la description de la droite trouvée par les élèves $\{(x, 2x, x + 2) | x \in \mathbb{R}\}$.
- Appui sur les connaissances des élèves pour déterminer une EP de la droite.
- Appui sur les connaissances des élèves en GV pour éliminer le paramètre.

Déroulement en classe : moments de cours

Système d'équations cartésiennes de droites (14'30")

$$(S_4) \quad x = \frac{y}{2} = z - 2$$

- Connaissances des élèves : EP de droites.
- Objectifs : introduire les SEC de droites et articuler les points de vue.
- Appui sur la description de la droite trouvée par les élèves $\{(x, 2x, x + 2) | x \in \mathbb{R}\}$.
- Appui sur les connaissances des élèves pour déterminer une EP de la droite.
- Appui sur les connaissances des élèves en GV pour éliminer le paramètre.
- Recherche d'un point et d'un vecteur directeur dans l'écriture cartésienne.

Déroulement en classe : moments de cours

Système d'équations cartésiennes de droites (14'30")

$$(S_4) \quad x = \frac{y}{2} = z - 2$$

- Connaissances des élèves : EP de droites.
- Objectifs : introduire les SEC de droites et articuler les points de vue.
- Appui sur la description de la droite trouvée par les élèves $\{(x, 2x, x + 2) | x \in \mathbb{R}\}$.
- Appui sur les connaissances des élèves pour déterminer une EP de la droite.
- Appui sur les connaissances des élèves en GV pour éliminer le paramètre.
- Recherche d'un point et d'un vecteur directeur dans l'écriture cartésienne.
- Généralisation d'un SEC de droites.

Déroulement en classe : moments de cours

Système d'équations cartésiennes de droites (14'30")

$$(S_4) \quad x = \frac{y}{2} = z - 2$$

- Connaissances des élèves : EP de droites.
- Objectifs : introduire les SEC de droites et articuler les points de vue.
- Appui sur la description de la droite trouvée par les élèves $\{(x, 2x, x + 2) | x \in \mathbb{R}\}$.
- Appui sur les connaissances des élèves pour déterminer une EP de la droite.
- Appui sur les connaissances des élèves en GV pour éliminer le paramètre.
- Recherche d'un point et d'un vecteur directeur dans l'écriture cartésienne.
- Généralisation d'un SEC de droites.
- Suite à une question : particularisation du résultat à l'exemple traité.

Déroulement en classe : moments de cours

Système d'équations cartésiennes de droites (14'30")

$$(S_4) \quad x = \frac{y}{2} = z - 2$$

- Connaissances des élèves : EP de droites.
- Objectifs : introduire les SEC de droites et articuler les points de vue.
- Appui sur la description de la droite trouvée par les élèves $\{(x, 2x, x + 2) | x \in \mathbb{R}\}$.
- Appui sur les connaissances des élèves pour déterminer une EP de la droite.
- Appui sur les connaissances des élèves en GV pour éliminer le paramètre.
- Recherche d'un point et d'un vecteur directeur dans l'écriture cartésienne.
- Généralisation d'un SEC de droites.
- Suite à une question : particularisation du résultat à l'exemple traité.

⇒ Nombreuses proximités tentées avec les connaissances déjà-là et les activités réalisées par les élèves.

Exemple d'exercices proposés (1/2)

Exercice 8 (10'30")

Donnez une équation paramétrique du plan α sachant qu'il passe par le point $P(3, 4, 5)$ et dont un vecteur normal est $(2, 6, 4)$.

Exemple d'exercices proposés (1/2)

Exercice 8 (10'30")

Donnez une équation paramétrique du plan α sachant qu'il passe par le point $P(3, 4, 5)$ et dont un vecteur normal est $(2, 6, 4)$.

- Organisation du raisonnement : écrire une EC du plan, introduire deux paramètres, écrire une EP du plan.
- Connaissances mobilisées : EP et EC de plans.
- Traitements internes : conversion de registres, changement de points de vue.

Exemple d'exercices proposés (1/2)

Exercice 8 (10'30")

Donnez une équation paramétrique du plan α sachant qu'il passe par le point $P(3, 4, 5)$ et dont un vecteur normal est $(2, 6, 4)$.

- Organisation du raisonnement : écrire une EC du plan, introduire deux paramètres, écrire une EP du plan.
- Connaissances mobilisées : EP et EC de plans.
- Traitements internes : conversion de registres, changement de points de vue.
- Les élèves ne parviennent pas à passer du système d'EP à une EP du plan.

Exemple d'exercices proposés (1/2)

Exercice 8 (10'30")

Donnez une équation paramétrique du plan α sachant qu'il passe par le point $P(3, 4, 5)$ et dont un vecteur normal est $(2, 6, 4)$.

- Organisation du raisonnement : écrire une EC du plan, introduire deux paramètres, écrire une EP du plan.
- Connaissances mobilisées : EP et EC de plans.
- Traitements internes : conversion de registres, changement de points de vue.
- Les élèves ne parviennent pas à passer du système d'EP à une EP du plan.
- Aide : l'enseignant s'appuie sur un exercice précédent.

Exemple d'exercices proposés (1/2)

Exercice 8 (10'30")

Donnez une équation paramétrique du plan α sachant qu'il passe par le point $P(3, 4, 5)$ et dont un vecteur normal est $(2, 6, 4)$.

- Organisation du raisonnement : écrire une EC du plan, introduire deux paramètres, écrire une EP du plan.
- Connaissances mobilisées : EP et EC de plans.
- Traitements internes : conversion de registres, changement de points de vue.
- Les élèves ne parviennent pas à passer du système d'EP à une EP du plan.
- Aide : l'enseignant s'appuie sur un exercice précédent.
- Activités possibles conformes à celles prévues *a priori*.

Exemple d'exercices proposés (2/2)

Exercice 22 (30' + 13')

Déterminez synthétiquement et analytiquement le point de percée de la droite EF dans le plan BCD .

Exemple d'exercices proposés (2/2)

Exercice 22 (30' + 13')

Déterminez synthétiquement et analytiquement le point de percée de la droite EF dans le plan BCD .

- Nature du travail : discussion collective pour la partie synthétique, recherche individuelle pour la partie analytique puis correction collective.

Exemple d'exercices proposés (2/2)

Exercice 22 (30' + 13')

Déterminez synthétiquement et analytiquement le point de percée de la droite EF dans le plan BCD .

- Nature du travail : discussion collective pour la partie synthétique, recherche individuelle pour la partie analytique puis correction collective.
- Organisation du raisonnement : déterminer un plan auxiliaire, déterminer l'intersection de deux plans, déterminer l'intersection de deux droites, déterminer des EP et EC de la droite et du plan, résoudre un système.
- Connaissances mobilisées : point de percée, positions relatives, vecteurs, systèmes, EP et EC de droites et de plans.

Exemple d'exercices proposés (2/2)

Exercice 22 (30' + 13')

Déterminez synthétiquement et analytiquement le point de percée de la droite EF dans le plan BCD .

- Nature du travail : discussion collective pour la partie synthétique, recherche individuelle pour la partie analytique puis correction collective.
- Organisation du raisonnement : déterminer un plan auxiliaire, déterminer l'intersection de deux plans, déterminer l'intersection de deux droites, déterminer des EP et EC de la droite et du plan, résoudre un système.
- Connaissances mobilisées : point de percée, positions relatives, vecteurs, systèmes, EP et EC de droites et de plans.
- Traitements internes : conversions de registres, changements de cadres.

Exemple d'exercices proposés (2/2)

Exercice 22 (30' + 13')

Déterminez synthétiquement et analytiquement le point de percée de la droite EF dans le plan BCD .

- Nature du travail : discussion collective pour la partie synthétique, recherche individuelle pour la partie analytique puis correction collective.
- Organisation du raisonnement : déterminer un plan auxiliaire, déterminer l'intersection de deux plans, déterminer l'intersection de deux droites, déterminer des EP et EC de la droite et du plan, résoudre un système.
- Connaissances mobilisées : point de percée, positions relatives, vecteurs, systèmes, EP et EC de droites et de plans.
- Traitements internes : conversions de registres, changements de cadres.
- Exercice laissé à la charge des élèves et ne pose pas de difficulté particulière.

Exemple d'exercices proposés (2/2)

Exercice 22 (30' + 13')

Déterminez synthétiquement et analytiquement le point de percée de la droite EF dans le plan BCD .

- Nature du travail : discussion collective pour la partie synthétique, recherche individuelle pour la partie analytique puis correction collective.
- Organisation du raisonnement : déterminer un plan auxiliaire, déterminer l'intersection de deux plans, déterminer l'intersection de deux droites, déterminer des EP et EC de la droite et du plan, résoudre un système.
- Connaissances mobilisées : point de percée, positions relatives, vecteurs, systèmes, EP et EC de droites et de plans.
- Traitements internes : conversions de registres, changements de cadres.
- Exercice laissé à la charge des élèves et ne pose pas de difficulté particulière.
- Activités possibles conformes à celles prévues *a priori*.

Les apprentissages potentiels des élèves

Les activités possibles des élèves

- Développer une certaine disponibilité des notions dans les dimensions outil et objet.
- Effectuer des traitements internes : jeux de cadres GS et GA, jeux de cadres GV et GA, des conversions entre les registres algébrique, de la langue naturelle, dessin, graphique et ensembliste, des changements de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien et dans le sens cartésien/paramétrique.

Les apprentissages potentiels des élèves

Les activités possibles des élèves

- Développer une certaine disponibilité des notions dans les dimensions outil et objet.
- Effectuer des traitements internes : jeux de cadres GS et GA, jeux de cadres GV et GA, des conversions entre les registres algébrique, de la langue naturelle, dessin, graphique et ensembliste, des changements de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien et dans le sens cartésien/paramétrique.

MAIS

- Le travail dans le registre ensembliste est encore problématique : trop ponctuel et non porteur de sens.
- L'articulation des points de vue dans le sens cartésien/paramétrique est fragile : problématique dans les questionnaires mais réalisée en toute autonomie en classe.

Plan

- 1 Le cadre de la Théorie de l'Activité
- 2 Enseignement des notions de droites et de plans dans l'espace : analyses didactiques
- 3 Élaboration et expérimentation d'une ingénierie didactique
- 4 Conclusion

Comparaison des apprentissages potentiels des élèves : enseignement classique vs ingénierie.

- Disponibilité des notions dans leur dimension : objet, outil.
- Jeux de cadres : GV et GA, GS et GA.
- Conversions de registres : algébrique, langue naturelle, graphique, ensembliste, dessin.
- Articulation des points de vue : paramétrique/cartésien, cartésien/paramétrique.

Comparaison des apprentissages potentiels des élèves : enseignement classique vs ingénierie.

- Disponibilité des notions dans leur dimension : objet, outil.
- Jeux de cadres : GV et GA, GS et GA.
- Conversions de registres : algébrique, langue naturelle, graphique, ensembliste, dessin.
- Articulation des points de vue : paramétrique/cartésien, cartésien/paramétrique.

⇒ Les apprentissages des élèves à la suite de l'ingénierie se rapprochent des apprentissages attendus pour ces notions.

Bilan de la recherche

- **OBJECTIFS** : déterminer les apprentissages potentiels des élèves sur les notions de droites et de plans dans l'espace et trouver comment les favoriser.
- Un questionnaire sur les apprentissages des élèves m'a amenée à
 - réaliser une étude de relief sur les notions.
 - étudier les pratiques enseignantes et leur impact sur les activités des élèves.
 - élaborer une séquence d'enseignement de type ingénierie didactique.
- La séquence élaborée semble bien favoriser les apprentissages des élèves (vs enseignement classique) même si des difficultés persistent.
- **LIMITE** : séquence expérimentée qu'une seule fois sur un petit nombre d'élèves.
- **PERSPECTIVES** :
 - Expérimenter plusieurs fois la séquence (varier les conditions).
 - Proposer une formation aux enseignants sur ces notions.