



**HAL**  
open science

## Estimation d'une fonction de moments conditionnels sous des conditions locales par l'estimateur à noyau

Carlos Tenreiro

► **To cite this version:**

Carlos Tenreiro. Estimation d'une fonction de moments conditionnels sous des conditions locales par l'estimateur à noyau. Annales de l'ISUP, 1995, XXXIX (3), pp.37-56. hal-03660062

**HAL Id: hal-03660062**

**<https://hal.science/hal-03660062>**

Submitted on 5 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Pub. Inst. Stat. Univ. Paris*  
 XXXIX, fasc. 3, 1995, 37 à 56

## Estimation d'une fonction de moments conditionnels sous des conditions locales par l'estimateur à noyau

Carlos TENREIRO\*

*Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra*

*Mots clés:* Estimateurs par noyau, stationnarité, mélangeance.

*Key words and phrases:* Kernel estimators, stationarity, mixing.

*Classification AMS 1991:* 62G07, 62G05.

### RÉSUMÉ

On établit, sous des conditions locales, la convergence et la normalité asymptotique d'une classe d'estimateurs par noyau fondés sur un processus strictement stationnaire et mélangeant. Cette classe contient les estimateurs par noyau usuels de la densité et de l'espérance conditionnelle, ainsi que ceux de toute fonction suffisamment régulière de telles quantités: variance conditionnelle, coefficient d'asymétrie conditionnel, kurtosis conditionnelle,....

### ABSTRACT

We establish under local conditions the convergence and asymptotic normality of a class of kernel estimators based on a strictly stationary mixing sequence. This class contains the usual kernel estimators of the density function and of the conditional expectation, as well as those of any sufficiently regular function of these quantities: conditional variance, coefficient of conditional skewness, conditional kurtosis,....

## 1 Introduction et notations

Nous étudions dans ce papier une classe d'estimateurs à noyau qui inclut ceux de la densité, d'abord proposé par Rosenblatt [16] et étudié par Parzen [13], et de la fonction de régression, proposé indépendamment par Watson [24] et Nadaraya [12], ainsi que ceux de toute fonction suffisamment régulière de telles quantités: rapports de moments conditionnels, variance conditionnelle, kurtosis conditionnelle, coefficient d'asymétrie conditionnel,....

Nous considérons  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  un processus stochastique de dimension  $d$ , fortement stationnaire, et notons pour  $i \in \mathbb{Z}$ :

$$(1.1) \quad V_i = (X_{i+s}, \dots, X_{i+1}) \text{ et } W_i = (X_{i-s_0}, X_{i-s_1}, \dots, X_{i-s_q}),$$

où  $q \in \mathbb{N}$  et  $s, s_0, \dots, s_q \in \mathbb{N}$  sont fixés au départ avec  $0 \equiv s_0 < s_1 < \dots < s_q$  et  $s > 0$ .

\* Ce travail a bénéficié de l'appui de la JNICT et du Gouvernement Français.

On suppose que  $W_0$  admet une densité  $f$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^{d'}$  avec  $d' = d(q + 1)$ . Si  $g = (g_1, \dots, g_p)$  et  $\Phi$  sont des applications mesurables connues de  $(\mathbb{R}^d)^s$  dans  $\mathbb{R}^p$  et de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^{d'}$ , respectivement, nous nous intéressons aux estimateurs du paramètre fonctionnel  $\phi(x) = \Phi(m(g, x)f(x))$ , de la forme  $\phi_n(x) = \Phi(\bar{g}_n(x))$ , avec  $m(g, x) = E[g(V_0) | W_0 = x]$  et

$$\bar{g}_n(x) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_1(V_i) K_{1, h_1(n)}(x - W_i), \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_p(V_i) K_{p, h_p(n)}(x - W_i) \right),$$

où  $x \in \mathbb{R}^{d'}$ . Pour  $r = 1, \dots, p$ ,  $(h_r(n))$  est une suite de réels strictement positifs, tendant vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini, et  $K_{r, h_r(n)}(\cdot) = \frac{1}{h_r^{d'}(n)} K_r\left(\frac{\cdot}{h_r(n)}\right)$  où  $K_r$  est un noyau sur  $\mathbb{R}^{d'}$ , c'est-à-dire,  $K_r$  est une application de  $\mathbb{R}^{d'}$  dans  $\mathbb{R}$  intégrable, telle que  $\int_{\mathbb{R}^{d'}} K_r(x) dx = 1$ .

Nous obtenons la convergence en probabilité (ou en moyenne quadratique) de l'estimateur  $\phi_n(x)$ , pour  $x \in \mathbb{R}^{d'}$ , ainsi que la convergence des lois de dimension finie du processus empirique  $(\phi_n(x), x \in \mathbb{R}^{d'})$ . Ces résultats qu'on présente dans les Sections 3 et 4, généralisent au cas multivarié ceux de Robinson [15], sur l'estimation non paramétrique de la densité de la loi de  $W_0$  [ $g = 1$ ,  $\Phi(u) = u$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ], et de l'espérance conditionnelle  $E[h(V_0) | W_0 = x]$  [ $g = (1, h)$ ,  $\Phi(u, v) = \frac{v}{u}$ ,  $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $v \in \mathbb{R}$ ], et nous permettent d'obtenir de façon simple des résultats de convergence pour d'autres paramètres fonctionnels conditionnels.

Suivant la ligne de Robinson [15], et en utilisant une technique de démonstration classique (voir aussi Rosenblatt [18] et Bosq et Lecoutre [1]), ces résultats sont dérivés pour une sous-classe des processus  $\alpha$ -mélangeants (cf. Rosenblatt [16]), en imposant des hypothèses locales sur (des versions) des paramètres fonctionnels qu'on veut estimer, ainsi que sur d'autres paramètres liés, au lieu de conditions globales imposées par exemple dans les travaux de Yakowitz [25] et Roussas [22]. Pour cela, nous avons été conduits à utiliser dans la construction de l'estimateur à noyau, des noyaux à support borné. De plus, l'introduction d'hypothèses locales sur certains moments conditionnels croisés où intervient l'application  $g$  (voir Rosenblatt [19] pg. 199), nous permet d'utiliser des conditions sur la vitesse de convergence vers zéro des coefficients de mélange plus faibles que celles considérées dans Robinson [15], dans le cas où  $\|g\|$  n'est pas bornée. Ces hypothèses sont discutées dans la Section 2.

Diverses applications sont proposées dans la Section 5. Nous considérons le problème classique de l'estimation de la densité de probabilité de  $W_0$  qui contient comme cas particulier l'estimation de la densité marginale du processus  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$ , puis celui de l'estimation de la moyenne conditionnelle qui inclut l'estimation de la régression. Dans ce dernier cas nous justifions la pratique courante consistant à retenir dans l'estimateur de la régression un seul noyau et une seule suite. Nous terminons en énonçant des résultats sur trois autres paramètres conditionnels: la variance conditionnelle et les coefficients d'asymétrie et de kurtosis conditionnels. Si l'estimation de la variance conditionnelle peut permettre de détecter la présence éventuelle d'un effet hétéroscédastique dans la série des observations, la construction de régions ponctuelles de confiance asymptotiques

pour les deux derniers paramètres, permet de tester une conséquence de l'hypothèse de normalité de la loi conditionnelle, en comparant respectivement à 0 et à 3 les coefficients estimés d'asymétrie et de kurtosis conditionnels, et que l'on peut utiliser pour effectuer des recherches sur l'adéquation de l'hypothèse de normalité conditionnelle sur les erreurs ARCH(1) d'un processus autorégressif d'ordre un (cf. Gouriéroux [7] pg. 35-41). Remarquons que dans ce dernier cas, le fait qu'il ne s'agisse pas de vrais résidus demande des hypothèses supplémentaires sur le noyau et sur la suite  $h_n$  que celles considérées par la suite (cf. Gouriéroux, Monfort et Tenreiro [8]).

Les démonstrations des divers résultats sont rassemblées dans la Section 6.

Nous désignons par  $\mathcal{B}_x$  l'ensemble des applications bornées dans un voisinage de  $x$ ;  $\mathcal{C}_x$  l'ensemble des applications continues en  $x$ ;  $\mathcal{A}_x(\alpha)$  ( $\alpha \in ]0, 1]$ ) l'ensemble des applications  $\alpha$ -lipschitziennes en  $x$ ;  $\mathcal{D}_x(m)$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) l'ensemble des applications dont leurs composantes admettent des dérivées partielles d'ordre  $m$  continues dans  $x$ ; et  $\mathcal{B}_x(M, \delta)$  l'ensemble des applications bornées par  $M > 0$  dans un voisinage  $\delta > 0$  de  $x$ .

## 2 Hypothèses principales

En plus de la stationnarité forte, nous imposons diverses hypothèses de régularité sur le processus  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$ . Celles-ci pourront concerner son comportement asymptotique ou la régularité de ses moments conditionnels.

### 2.1 Mélangeance

Soit  $F_n^m$ ,  $n, m \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$  la tribu engendrée par les variables  $\{X_i, n \leq i \leq m\}$ . La dépendance entre le passé  $F_{-\infty}^0$  et le futur  $F_i^{+\infty}$ , pour  $i \in \mathbb{N}^*$ , peut être mesurée par le nombre (cf. Rosenblatt [17])

$$(2.1) \quad \alpha(i) = \sup_{\substack{A \in F_{-\infty}^0 \\ B \in F_i^{+\infty}}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|.$$

**Définition 2.2** *Le processus  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est de type  $Alpha(\gamma)$ , avec  $\gamma \in ]0, 1]$ , s'il existe  $r \in ]0, \frac{\gamma}{1+\gamma}[$  tel que*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha^r(i) < \infty.$$

Un processus de type  $Alpha(\gamma)$  pour  $\gamma \in ]0, 1]$  est évidemment  $\alpha$ -mélangeant (ou fortement mélangeant), c'est-à-dire,  $\alpha(i) \rightarrow 0$ , si  $i \rightarrow +\infty$ . La condition  $Alpha(\gamma)$  est impliquée par d'autres conditions sur la vitesse à laquelle  $\alpha(i)$  tend vers zéro. Elle l'est par exemple, si  $\alpha(i) = O(\rho^i)$  avec  $0 < \rho < 1$ , cas de certains processus ARMA multivariés ou bilinéaires réels fondés sur des bruits blancs i.i.d. (cf. Pham et Tran [14] et Mokkadem [10]) et de certains processus autorégressifs d'ordre 1, avec hétéroscédasticité conditionnelle de type ARCH, TARARCH ou  $\beta$ -ARCH (cf. Diebolt et Guégan [4]), si  $\alpha(i) =$

$O(i^r \rho^i)$  avec  $0 < \rho < 1$  et  $r > 0$ , cas des processus autorégressifs d'ordre 1, fondés sur un bruit blanc i.i.d. de Cauchy (cf. Gastwirth et Rubin [6]), si  $\alpha(i) = O(\frac{1}{i^\epsilon})$  avec  $\epsilon > 1 + \frac{1}{\gamma}$ , cas de certains processus gaussiens dont la covariance satisfait  $\text{cov}(X_0, X_i) = O(|i|^{-a})$ , avec  $a > 2 + \frac{1}{\gamma}$  (cf. Doukhan [5] pg. 59), ou si  $\alpha(i) = 0$  pour  $i > m$ , cas des processus qui admettent une représentation moyenne mobile d'ordre  $m$ , ou plus généralement des processus  $m$ -dépendants. Par contre, si  $\alpha(i) = \frac{C}{i^\epsilon}$ , avec  $C > 0$  et  $\epsilon \leq 1 + \frac{1}{\gamma}$ , la condition  $\text{Alpha}(\gamma)$  n'est pas satisfaite.

## 2.2 Moments conditionnels croisés

Etant donnés  $x_1, \dots, x_T$ ,  $T$  points de  $\mathbb{R}^{d'}$ , notons par  $\mathcal{N}_p(x_1, \dots, x_T)$ , avec  $p \in \mathbb{N}^*$ , l'ensemble des applications  $g$  de  $(\mathbb{R}^d)^s$  dans  $\mathbb{R}^p$ , pour lesquelles il existe  $M > 0$  et  $\delta > 0$  tels que:

$$E[\|g(V_i)\| \|g(V_0)\| \mid X_i = \cdot, W_0 = \cdot] f_{(X_i, W_0)}(\cdot, \cdot) \in \bigcap_{a,b=1}^T \mathcal{B}_{(\pi(x_a), x_b)}, \text{ si } 1 \leq i \leq s_q,$$

$$E[\|g(V_i)\| \|g(V_0)\| \mid W_i = \cdot, W_0 = \cdot] f_{(W_i, W_0)}(\cdot, \cdot) \in \bigcap_{a,b=1}^T \mathcal{B}_{(x_a, x_b)}(M, \delta), \text{ si } i > s_q,$$

où  $\pi(x) = x_0$ , si  $x = (x_0, x_1, \dots, x_q) \in (\mathbb{R}^d)^{q+1}$ , et  $f_{(W_i, W_0)}$  ( $i > s_q$ ) et  $f_{(X_i, W_0)}$  ( $1 \leq i \leq s_q$ ) désignent respectivement les densités de probabilité des vecteurs  $(W_i, W_0)$  et  $(X_i, W_0)$ , dont on admet l'existence. De plus, notons  $\mathcal{P}_p(x)$ , pour  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}^{d'}$ , l'ensemble des applications  $g = (g_1, \dots, g_p)$  de  $(\mathbb{R}^d)^s$  dans  $\mathbb{R}^p$ , telles que  $g_r \in \mathcal{N}_1(x)$ , pour  $r = 1, \dots, p$ .

Les deux ensembles d'indices  $i > s_q$  et  $1 \leq i \leq s_q$  considérés ci-dessus, correspondent respectivement à la situation où il n'y a pas de variables communes à  $W_i$  et  $W_0$ , et celle où on ne peut pas toujours admettre l'existence de la densité du couple  $(W_i, W_0)$ . Ce dernier cas peut être illustré lorsqu'on estime  $E[X_1 \mid X_0 = \cdot, X_{-2} = \cdot]$  où  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est un processus réel. On a  $W_i = (X_i, X_{i-2})$ , et pour  $i = s_q = 2$  il n'existe pas la densité du vecteur  $(W_i, W_0)$ .

Le principal avantage dans l'introduction de la condition précédente sur les moments conditionnels croisés est celui de permettre d'unifier la présentation des résultats des sections suivantes dans les cas où  $g$  est ou non bornée. Une telle condition apparaît comme une extension de la condition, sur les densités jointes, utilisée dans Robinson [15] pg. 191, ou de celle considérée dans Rosenblatt [19] pg. 199. Lorsqu'il existe  $R > 0$  tel que  $P(\|g(V_0)\| < R) = 1$ , ce qui est en particulier vrai si  $g$  est bornée ou si  $f_{X_0}$  est à support borné et  $g$  est continue, la condition  $g \in \mathcal{N}_p(x_1, \dots, x_T)$  se réduit en effet à  $1 \in \mathcal{N}_p(x_1, \dots, x_T)$ , c'est-à-dire, il existe  $M > 0$  et  $\delta > 0$  tels que:

$$f_{(X_i, W_0)} \in \bigcap_{a,b=1}^T \mathcal{B}_{(\pi(x_a), x_b)}, \text{ si } 1 \leq i \leq s_q,$$

$$f_{(W_i, W_0)} \in \bigcap_{a,b=1}^T \mathcal{B}_{(x_a, x_b)}(M, \delta), \text{ si } i > s_q.$$

La restriction la plus importante introduite, soit par la condition  $1 \in \mathcal{N}_p(x_1, \dots, x_T)$ , soit par  $g \in \mathcal{N}_p(x_1, \dots, x_T)$ , n'est pas le fait de demander que les applications qui y sont introduites soient bornées dans un voisinage des points signalés, mais surtout que cela soit uniforme en  $i$ . Dans le cas des processus  $m$ -dépendants et tenant compte de

l'indépendance entre les variables  $W_i$  et  $W_0$  pour  $i > s_q + m$ , la condition d'uniformité introduite par  $1 \in \mathcal{N}_p(x_1, \dots, x_T)$  est satisfaite si  $f_{W_0}$  est bornée dans un voisinage des points  $x_1, \dots, x_T$ , tandis que celle introduite par  $g \in \mathcal{N}_p(x_1, \dots, x_T)$  est satisfaite si  $m(\|g\|^2, \cdot)$  et  $f_{W_0}$  sont bornées dans un voisinage des points  $x_1, \dots, x_T$ , car pour  $i > s_q + s + m$  et  $u, v \in \mathbb{R}^{d'}$  on a:

$$\begin{aligned} E[\|g(V_i)\| \|g(V_0)\| \mid W_i = v, W_0 = u] f_{(W_i, W_0)}(v, u) \\ \leq E^{1/2}[\|g(V_i)\|^2 \mid W_i = v, W_0 = u] E^{1/2}[\|g(V_0)\|^2 \mid W_i = v, W_0 = u] f_{(W_i, W_0)}(v, u) \\ = (m(\|g\|^2, v) m(\|g\|^2, u))^{1/2} f_{W_0}(v) f_{W_0}(u). \end{aligned}$$

Lorsque qu'il existe les densités de probabilité  $f_{(V_i, W_i, V_0, W_0)}$  des vecteurs  $(V_i, W_i, V_0, W_0)$ , pour  $i > s + s_q$ , par exemple, en cas de processus gaussiens, on remarque que cette condition d'uniformité porte sur les densités jointes des vecteurs  $(V_i, W_i)$  et  $(V_0, W_0)$  pour  $i$  assez grand, car pour  $u, v \in \mathbb{R}^{d'}$  on a:

$$\begin{aligned} E[\|g(V_i)\| \|g(V_0)\| \mid W_i = v, W_0 = u] f_{(W_i, W_0)}(v, u) \\ = \int_{(\mathbb{R}^{d'})^2} \int_{(\mathbb{R}^{d'})^2} \|g(x)\| \|g(y)\| f_{(V_i, W_i, V_0, W_0)}(x, v, y, u) dx dy. \end{aligned}$$

### 2.3 Le cas Markovien

Si  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est un processus de Markov d'ordre 1, et si nous nous intéressons à l'estimation de  $\phi(x) = \Phi(E[g(X_1) \mid X_0 = x] f(x))$ , nous discutons maintenant les hypothèses  $1 \in \mathcal{N}_p(x_1, \dots, x_T)$  et  $g \in \mathcal{N}_p(x_1, \dots, x_T)$ , où  $x_1, \dots, x_T$  sont des points donnés dans  $\mathbb{R}^d$ . La condition  $1 \in \mathcal{N}_p(x_1, \dots, x_T)$ , qui se réduit à: il existe  $M > 0$  et  $\delta > 0$  tels que  $f_{(X_i, X_0)}(\cdot, \cdot) \in \bigcap_{a, b=1}^T \mathcal{B}(x_a, x_b)(M, \delta)$ , si  $i \geq 1$ , est satisfaite si  $f_{X_0}(\cdot)$  et  $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} f_{X_1 \mid X_0=x}(\cdot)$  sont bornées dans un voisinage des points  $x_1, \dots, x_T$ , où  $f_{X_1 \mid X_0=x}(\cdot)$  désigne la densité de la loi  $X_1$  conditionnée par  $X_0 = x$ . En effet, nous avons pour  $i \geq 1$  et  $u, v \in \mathbb{R}^d$ :

$$\begin{aligned} f_{(X_i, X_0)}(v, u) &= f_{X_0}(u) \int_{\mathbb{R}^d} f_{X_i \mid X_{i-1}=x}(v) f_{X_{i-1} \mid X_0=u}(x) dx \\ &\leq f_{X_0}(u) \sup_{x \in \mathbb{R}^d} f_{X_1 \mid X_0=x}(v). \end{aligned}$$

La condition  $g \in \mathcal{N}_p(x_1, \dots, x_T)$ , qui se réduit à: il existe  $M > 0$  et  $\delta > 0$  tels que  $E[\|g(X_{i+1})\| \|g(X_1)\| \mid X_i = \cdot, X_0 = \cdot] f_{(X_i, X_0)}(\cdot, \cdot) \in \bigcap_{a, b=1}^T \mathcal{B}(x_a, x_b)(M, \delta)$ , si  $i \geq 1$ , est satisfaite si les applications  $\|g\|$ ,  $E[\|g(X_1)\| \mid X_0 = \cdot]$ ,  $f_{X_0}(\cdot)$  et  $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} f_{X_1 \mid X_0=x}(\cdot)$  sont bornées dans un voisinage des points  $x_1, \dots, x_T$ . En effet, pour  $i = 1$  et  $u, v \in \mathbb{R}^d$ , il suffit de remarquer que  $E[\|g(X_{i+1})\| \|g(X_1)\| \mid X_i = v, X_0 = u] = \|g(v)\| E[\|g(X_1)\| \mid X_0 = v]$ . Pour  $i > 1$  et  $u, v \in \mathbb{R}^d$ , nous avons:

$$\begin{aligned} E[\|g(X_{i+1})\| \|g(X_1)\| \mid X_i = v, X_0 = u] f_{(X_i, X_0)}(v, u) \\ = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \|g(y)\| \|g(x)\| f_{X_{i+1} \mid X_i=v}(y) f_{X_i \mid X_1=x}(v) f_{X_1 \mid X_0=u}(x) f_{X_0}(u) dx dy \\ \leq f_{X_0}(u) \sup_{x \in \mathbb{R}^d} f_{X_1 \mid X_0=x}(v) E[\|g(X_1)\| \mid X_0 = u] E[\|g(X_1)\| \mid X_0 = v]. \end{aligned}$$

### 3 Convergence en probabilité

**Théorème 3.1** Soit  $x$  un point de  $\mathbb{R}^{d'}$ , et  $\Phi$  une application de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^{p'}$  continue en  $m(g, x)f(x)$ . On suppose:

- i)  $E\|g(V_0)\|^{2+\delta} < \infty$  pour un  $\delta > 0$ ;
- ii)  $m(g, \cdot)f(\cdot) \in \mathcal{C}_x$ ;
- iii)  $m(\|g\|^{2+\delta}, \cdot)f(\cdot) \in \mathcal{B}_x$ ;
- iv)  $g \in \mathcal{P}_p(x)$ ;
- v)  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est de type  $\text{Alpha}(\frac{\delta}{2+\delta})$ ;
- vi) pour  $r = 1, \dots, p$ ,  $h_r(n) \rightarrow 0$ ,  $nh_r^{d'}(n) \rightarrow +\infty$ , si  $n \rightarrow +\infty$ ;
- vii) pour  $r = 1, \dots, p$ , le noyau  $K_r$  est borné à support borné.

Alors

$$\phi_n(x) \rightarrow \phi(x), \text{ en probabilité, si } n \rightarrow +\infty.$$

On remarque que si  $\Phi$  est linéaire, nous pouvons, sous les conditions du théorème précédent, déduire la convergence en moyenne quadratique de  $\phi_n(x)$  vers  $\phi(x)$ , lorsque  $n$  tend vers l'infini.

### 4 Normalité asymptotique

On dit que le noyau  $K$  sur  $\mathbb{R}^{d'}$  est d'ordre  $m$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ), si:

$$\int_{\mathbb{R}^{d'}} |u|^m |K(u)| du < \infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}^{d'}} u_1^{a_1} \dots u_{d'}^{a_{d'}} K(u) du = 0,$$

pour  $0 < \sum_{i=1}^{d'} a_i < m$ ,  $a_1, \dots, a_{d'} \in \mathbb{N}$  et  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{d'})$ .

**Théorème 4.1** Soient  $x_1, \dots, x_T$ ,  $T$  points distincts de  $\mathbb{R}^{d'}$  et  $\Phi$  une application de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^{p'}$  différentiable en  $m(g, x_1)f(x_1), \dots, m(g, x_T)f(x_T)$ , dont la matrice jacobienne de taille  $(p', p)$  au point  $y$  sera désignée par  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(y)$ . Soit  $(h_n)$  une suite de nombres réels strictement positifs telle que  $h_n \rightarrow 0$  et  $nh_n^{d'} \rightarrow +\infty$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . On suppose:

- i)  $E\|g(V_0)\|^{2+\delta} < \infty$  pour un  $\delta > 0$ ;
- ii)  $m(g'g, \cdot)f(\cdot) \in \bigcap_{j=1}^T \mathcal{C}_{x_j}$ ;
- iii)  $m(\|g\|^{2+\delta}, \cdot)f(\cdot) \in \bigcap_{j=1}^T \mathcal{B}_{x_j}$ ;
- iv)  $g \in \mathcal{N}_p(x_1, \dots, x_T)$ ;
- v)  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est de type  $\text{Alpha}(\frac{\delta}{2+\delta})$ ;
- vi) pour  $r = 1, \dots, p$ ,  $h_r(n) = c_r h_n$ ,  $c_r > 0$ ;

et considérons les trois systèmes d'hypothèses:

**H<sub>1</sub>**  $m(g, \cdot)f(\cdot) \in \bigcap_{j=1}^T \mathcal{A}_{x_j}(\alpha)$ , pour un  $\alpha \in ]0, 1]$ ,  $nh_n^{d'+2\alpha} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow +\infty$ , et pour  $r = 1, \dots, p$ ,  $K_r$  est un noyau borné à support borné.

**H<sub>2</sub>**  $m(g, \cdot)f(\cdot) \in \bigcap_{j=1}^T \mathcal{D}_{x_j}(m)$ , pour un  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $nh_n^{d'+2m} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow +\infty$ , et pour  $r = 1, \dots, p$ ,  $K_r$  est un noyau d'ordre  $m$ , borné à support borné.

**H<sub>3</sub>**  $m(g, \cdot)f(\cdot) \in \bigcap_{j=1}^T \mathcal{D}_{x_j}(m)$ , pour un  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $nh_n^{d'+2m} \rightarrow 1$ ,  $n \rightarrow +\infty$ , et pour  $r = 1, \dots, p$ ,  $K_r$  est un noyau d'ordre  $m$ , borné à support borné.

a) Si l'un des systèmes d'hypothèses  $H_1$ ) ou  $H_2$ ) est satisfait, alors le vecteur ligne

$$(4.2) \quad \sqrt{nh_n^{d'}} (\phi_n(x_j) - \phi(x_j); j = 1, \dots, T),$$

converge en loi, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , vers la loi normale de moyenne zéro et de matrice de covariance

$$(4.3) \quad \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} (m(g, x_i) f(x_i)) \Sigma_{i,j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)' (m(g, x_j) f(x_j)) \right]_{i,j=1,\dots,T}$$

où pour  $i, j = 1, \dots, T$  la matrice  $\Sigma_{i,j}$  a pour éléments

$$(4.4) \quad \sigma_{r,r'}^{i,j} = m(g_r g_{r'}, x_j) f(x_j) \int_{\mathbb{R}^{d'}} K_{r,c_r}(u) K_{r',c_{r'}}(u) du \delta_{x_i - x_j},$$

pour  $r, r' = 1, \dots, p$ , où  $\delta_x$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $\{0\}$  évaluée au point  $x$ .

b) Si le système d'hypothèses  $H_3$ ) est satisfait, alors le vecteur ligne (4.2) converge en loi, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , vers la loi normale de moyenne

$$\left( \Delta^m(m(g, \cdot) f(\cdot), K, c)(x_j) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)' (m(g, x_j) f(x_j)); j = 1, \dots, T \right),$$

où pour  $x \in \mathbb{R}^{d'}$ ,

$$\begin{aligned} & \Delta^m(m(g, \cdot) f(\cdot), K, c)(x) \\ &= \left( \frac{(-c_r)^m}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{d'} \int_{\mathbb{R}^{d'}} u_{i_1} \dots u_{i_m} K_r(u) du \frac{\partial^m (m(g_r, \cdot) f(\cdot))}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}(x); r = 1, \dots, p \right), \end{aligned}$$

et dont la matrice de covariance est donnée dans (4.3).

Notons que la dynamique du processus n'intervient pas dans l'expression de la matrice de covariance asymptotique (4.3) et qu'il y a indépendance asymptotique des composantes du vecteur étudié. Ceci résulte du caractère local du paramètre fonctionnel  $\phi(\cdot)$ , mais surtout de la condition de mélange imposée au processus, comme on peut le déduire de Rosenblatt [20] pg. 84-87.

Sous certaines conditions alternatives on peut encore assurer la validité des résultats précédents (voir la démonstration du Lemme 6.5):

(1) Les hypothèses  $g \in \mathcal{P}_p(x)$  et  $g \in \mathcal{N}_p(x_1, \dots, x_T)$ , peuvent être remplacées, respectivement, par  $1 \in \mathcal{P}_p(x)$  et  $1 \in \mathcal{N}_p(x_1, \dots, x_T)$ , en admettant que le processus  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est de type  $Alpha(\frac{\delta}{4+\delta})$ . On retrouve ainsi les conditions utilisées dans Robinson [15] pg. 189.

(2) Lorsqu'il existe  $R > 0$  tel que  $P(\|g(V_0)\| < R) = 1$ , on peut prendre  $\delta$  aussi grand que l'on veut, et il suffit alors que la condition " $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est de type  $Alpha(1)$ ", soit satisfaite au lieu des hypothèses v) des théorèmes précédents.



## 5 Applications

Les résultats que nous présentons dans les paragraphes suivants sont des conséquences du Théorème 4.1. Tenant compte du Théorème 3.1, ils nous permettent de construire des régions ponctuelles de confiance asymptotique pour les divers paramètres d'intérêt, sur lesquels nous ne considérons, par simplicité d'exposition, que des hypothèses de différentiabilité. On notera par  $\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} N(0, 1)$  la convergence en loi vers la loi normale standard sur  $\mathbb{R}$ .

### 5.1 Estimation de la densité

Considérons l'estimateur par noyau de la densité de probabilité  $f$  de  $W_0$  évaluée au point  $x \in \mathbb{R}^{d'}$ , défini, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , par

$$(5.1) \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(x - W_i)$$

où  $h_n$  est un réel strictement positif dépendant de  $n$  et  $K$  est un noyau sur  $\mathbb{R}^{d'}$ .

**Théorème 5.2** Soit  $x$  un point de  $\mathbb{R}^{d'}$ . On suppose:

- i)  $f \in \mathcal{D}_x(m)$ , pour un  $m \geq 1$ ;
- ii)  $1 \in \mathcal{N}_1(x)$ ;
- iii)  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est de type Alpha(1);
- iv)  $nh_n^{d'+2m} \rightarrow 0$  et  $nh_n^{d'} \rightarrow +\infty$ ,  $n \rightarrow +\infty$ ;
- v)  $K$  est un noyau d'ordre  $m$ , borné à support borné.

Alors

$$\sqrt{nh_n^{d'}} (f_n(x) - f(x)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} N\left(0, f(x) \int_{\mathbb{R}^{d'}} K^2(u) du\right).$$

Si on prend  $W_i = X_i$  dans (5.1),  $f_n(\cdot)$  est l'estimateur à noyau de la densité marginale du processus observé  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$ . Dans ce cas la condition  $1 \in \mathcal{N}_1(x)$ , se réduit à: il existe  $M > 0$  et  $\delta > 0$  tels que  $f_{(X_i, X_0)} \in \mathcal{B}_{(x,x)}(M, \delta)$ , pour  $i \geq 1$ .

### 5.2 Estimation de la moyenne conditionnelle

Soit  $g$  une application réelle mesurable sur  $(\mathbb{R}^{d'})^s$ . Considérons pour  $x \in \mathbb{R}^{d'}$ , l'estimateur de la moyenne conditionnelle  $m(g, x)$ , défini par

$$(5.3) \quad m_n(g, x) = \frac{\sum_{i=1}^n g(V_i) K_{1, h_1(n)}(x - W_i)}{\sum_{i=1}^n K_{2, h_2(n)}(x - W_i)},$$

où pour  $r = 1, 2$ ,  $h_r(n) = c_r h_n$ , avec  $c_r > 0$ ,  $h_n$  est un réel strictement positif dépendant de  $n$ , et  $K_r$  un noyau sur  $\mathbb{R}^{d'}$ .

**Théorème 5.4** Soit  $x$  un point de  $\mathbb{R}^{d'}$  où  $f(\cdot)$  est non nulle. On suppose:

- i)  $E|g(V_0)|^{2+\delta} < \infty$  pour un  $\delta > 0$ ;
- ii)  $f(\cdot), m(g, \cdot) \in \mathcal{D}_x(m)$ , pour un  $m \geq 1$ ;

- iii)  $m(g^2, \cdot) \in \mathcal{C}_x$ ;
- iv)  $m(|g|^{2+\delta}, \cdot) \in \mathcal{B}_x$ ;
- v)  $(1, g) \in \mathcal{N}_2(x)$ ;
- vi)  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est de type Alpha( $\frac{\delta}{2+\delta}$ );
- vii)  $nh_n^{d'+2m} \rightarrow 0$  et  $nh_n^{d'} \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$ ;
- viii)  $K_1, K_2$  sont des noyaux d'ordre  $m$ , bornés à support borné.

Alors

$$\sqrt{nh_n^{d'}} (m_n(g, x) - m(g, x)),$$

converge en loi, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , vers la loi normale de moyenne zéro et de variance

$$\frac{1}{f(x)} \left\{ m(g^2, x) \int_{\mathbb{R}^{d'}} K_{1,c_1}^2(u) du + m^2(g, x) \int_{\mathbb{R}^{d'}} [K_{2,c_2}^2(u) - 2K_{1,c_1}(u)K_{2,c_2}(u)] du \right\}.$$

Si on note par  $\sigma^2(K_{1,c_1}, K_{2,c_2})$  la variance asymptotique précédente, nous concluons facilement que  $\sigma^2(K_{1,c_1}, K_{1,c_1}) \leq \sigma^2(K_{1,c_1}, K_{2,c_2})$ . Le choix des noyaux doit être donc effectué de façon que  $K_{1,c_1} = K_{2,c_2}$ . Ainsi, d'un point de vue asymptotique, et si on se limite à la classe des estimateurs de la forme (5.3), nous pouvons dans l'estimation de  $m(g, \cdot)$  nous restreindre à ceux construits avec un seul noyau et une seule suite. Nous justifions ainsi cette pratique courante. Si on prend  $K_1 = K_2 = K$  et  $h_1(n) = h_2(n) = h_n$ , nous obtenons le résultat classique

$$\sqrt{nh_n^{d'}} (m_n(g, x) - m(g, x)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} N\left(0, \frac{\text{Var}[g(V_0) | W_0 = x]}{f(x)} \int_{\mathbb{R}^{d'}} K^2(u) du\right).$$

### 5.3 Estimation de la variance conditionnelle

Soit  $g$  une application réelle mesurable sur  $(\mathbb{R}^{d'})^s$  et considérons pour  $x \in \mathbb{R}^{d'}$ , l'estimateur de la variance conditionnelle  $\text{Var}[g(V_0) | W_0 = x]$  défini par

$$v_n(g, x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g^2(V_i) K_{h_n}(x - W_i) / f_n(x) - m_n^2(g, x)$$

où  $h_n$  est un réel strictement positif dépendant de  $n$ ,  $K$  est un noyau sur  $\mathbb{R}^{d'}$ ,  $f_n(x)$  est défini par (5.1) et  $m_n(g, x)$  est défini par (5.3) avec  $K_1 = K_2 = K$  et  $h_1(n) = h_2(n) = h_n$ .

**Théorème 5.5** Soit  $x$  un point de  $\mathbb{R}^{d'}$  où  $f(\cdot)$  est non nulle. On suppose:

- i)  $E|g(V_0)|^{4+\delta} < \infty$  pour un  $\delta > 0$ ;
- ii)  $f(\cdot), m(g, \cdot), m(g^2, \cdot) \in \mathcal{D}_x(m)$ , pour un  $m \geq 1$ ;
- iii)  $m(g^3, \cdot), m(g^4, \cdot) \in \mathcal{C}_x$ ;
- iv)  $m(|g|^{4+\delta}, \cdot) \in \mathcal{B}_x$ ;
- v)  $(1, g, g^2) \in \mathcal{N}_3(x)$ ;
- vi)  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est de type Alpha( $\frac{\delta}{4+\delta}$ );
- vii)  $nh_n^{d'+2m} \rightarrow 0$  et  $nh_n^{d'} \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$ ;
- viii)  $K$  est un noyau d'ordre  $m$ , borné à support borné.

Alors

$$\sqrt{nh_n^{d'}} (v_n(g, x) - \text{Var}[g(V_0) | W_0 = x]),$$

converge en loi, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , vers la loi normale de moyenne zéro et de variance

$$\frac{1}{f(x)} \int_{\mathbb{R}^{d'}} K^2(u) du \operatorname{Var}[(g(V_0) - m(g, x))^2 | W_0 = x].$$

#### 5.4 Estimation des coefficients d'asymétrie et de kurtosis conditionnels

Si  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est un processus réel, les coefficients d'asymétrie et de kurtosis conditionnels sont définis, pour  $x \in \mathbb{R}^{d'}$ , avec  $d' = q + 1$ , respectivement par:

$$\gamma_1(x) = \frac{E[(X_1 - E[X_1 | W_0 = x])^3 | W_0 = x]}{E^{3/2}[(X_1 - E[X_1 | W_0 = x])^2 | W_0 = x]}, \text{ et}$$

$$\gamma_2(x) = \frac{E[(X_1 - E[X_1 | W_0 = x])^4 | W_0 = x]}{E^2[(X_1 - E[X_1 | W_0 = x])^2 | W_0 = x]}.$$

Nous allons énoncer des propriétés de normalité asymptotique d'estimateurs de ces paramètres. Etant donnée la complexité des calculs dans le cas général, on se limite ici à la présentation du cas où  $E[X_1 | W_0 = x] = 0$ . Nous pouvons donc écrire:

$$\gamma_1(x) = \Psi(f(x), E[X_1^2 | W_0 = x]f(x), E[X_1^3 | W_0 = x]f(x)), \text{ et}$$

$$\gamma_2(x) = \Phi(f(x), E[X_1^2 | W_0 = x]f(x), E[X_1^4 | W_0 = x]f(x)),$$

où  $\Psi(u, v, w) = \frac{u^{1/2}w}{v^{3/2}}$  et  $\Phi(u, v, w) = \frac{uw}{v^2}$ , pour  $u, v, w \in \mathbb{R}$ . Si  $K$  est un noyau sur  $\mathbb{R}^{d'}$  et  $h_n > 0$ , considérons les estimateurs à noyau de ces paramètres donnés par:

$$\gamma_{1,n}(x) = \frac{(\sum_{j=1}^n K_{h_n}(x - W_j))^{1/2} \sum_{i=1}^n X_{i+1}^3 K_{h_n}(x - W_i)}{(\sum_{i=1}^n X_{i+1}^2 K_{h_n}(x - W_i))^{3/2}}, \text{ et}$$

$$\gamma_{2,n}(x) = \frac{\sum_{j=1}^n K_{h_n}(x - W_j) \sum_{i=1}^n X_{i+1}^4 K_{h_n}(x - W_i)}{(\sum_{i=1}^n X_{i+1}^2 K_{h_n}(x - W_i))^2}.$$

On notera par *id* l'application identité dans  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 5.6** Soit  $x$  un point de  $\mathbb{R}^{d'}$  où  $f(\cdot)$  et  $E[X_1^2 | W_0 = \cdot]$  sont non nulles. On suppose:

- i)  $E|X_1|^{6+\delta} < \infty$  pour un  $\delta > 0$ ;
- ii)  $f(\cdot), E[X_1^2 | W_0 = \cdot], E[X_1^3 | W_0 = \cdot] \in \mathcal{D}_x(m)$ , pour un  $m \geq 1$ ;
- iii)  $E[X_1^5 | W_0 = \cdot], E[X_1^6 | W_0 = \cdot] \in \mathcal{C}_x$ ;
- iv)  $E[|X_1|^{6+\delta} | W_0 = \cdot] \in \mathcal{B}_x$ ;
- v)  $(1, id^2, id^3) \in \mathcal{N}_3(x)$ ;
- vi)  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est de type  $\text{Alpha}(\frac{\delta}{6+\delta})$ ;
- vii)  $nh_n^{d'+2m} \rightarrow 0$  et  $nh_n^{d'} \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$ ;
- viii)  $K$  est un noyau d'ordre  $m$ , borné à support borné.

Alors

$$\sqrt{nh_n^{d'}} (\gamma_{1,n}(x) - \gamma_1(x)),$$

converge en loi, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , vers la loi normale de moyenne zéro et de variance

$$\frac{1}{f(x)} \int_{\mathbb{R}^{d'}} K^2(u) du \left\{ \frac{E[X_1^6 | W_0 = x]}{E^3[X_1^2 | W_0 = x]} - 3 \frac{E[X_1^5 | W_0 = x]}{E^{5/2}[X_1^2 | W_0 = x]} \gamma_1(x) + \frac{1}{4} (9\gamma_2(x) - 1) \gamma_1^2(x) \right\}.$$

**Théorème 5.7** Soit  $x$  un point de  $\mathbb{R}^{d'}$  où  $f(\cdot)$  et  $E[X_1^2 | W_0 = \cdot]$  sont non nulles. On suppose:

- i)  $E|X_1|^{8+\delta} < \infty$  pour un  $\delta > 0$ ;
- ii)  $f(\cdot)$ ,  $E[X_1^2 | W_0 = \cdot]$ ,  $E[X_1^4 | W_0 = \cdot] \in \mathcal{D}_x(m)$ , pour un  $m \geq 1$ ;
- iii)  $E[X_1^6 | W_0 = \cdot]$ ,  $E[X_1^8 | W_0 = \cdot] \in \mathcal{C}_x$ ;
- iv)  $E[|X_1|^{8+\delta} | W_0 = \cdot] \in \mathcal{B}_x$ ;
- v)  $(1, id^2, id^4) \in \mathcal{N}_3(x)$ ;
- vi)  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est de type Alpha( $\frac{\delta}{8+\delta}$ );
- vii)  $nh_n^{d'+2m} \rightarrow 0$  et  $nh_n^{d'} \rightarrow +\infty$ ,  $n \rightarrow +\infty$ ;
- viii)  $K$  est un noyau d'ordre  $m$ , borné à support borné.

Alors

$$\sqrt{nh_n^{d'}} (\gamma_{2,n}(x) - \gamma_2(x)),$$

converge en loi, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , vers la loi normale de moyenne zéro et de variance

$$\frac{1}{f(x)} \int_{\mathbb{R}^{d'}} K^2(u) du \left\{ \frac{E[X_1^8 | W_0 = x]}{E^4[X_1^2 | W_0 = x]} - 4 \frac{E[X_1^6 | W_0 = x]}{E^3[X_1^2 | W_0 = x]} \gamma_2(x) - \gamma_2^2(x) + 4\gamma_2^3(x) \right\}.$$

Pour  $x \in \mathbb{R}^{d'}$  fixé, les résultats suivants nous permettent de fonder des tests sur les coefficients d'asymétrie et de kurtosis conditionnels, sous l'hypothèse de normalité de la loi conditionnelle de  $X_1$  sachant que  $W_0 = x$ . Soit  $f_n(x)$  défini par (5.1).

**Corollaire 5.8** Dans les conditions du Théorème 5.6, et sous l'hypothèse de normalité de la loi de  $X_1$  conditionnée par  $W_0 = x$ , on a

$$\sqrt{nh_n^{d'}} \frac{\gamma_{1,n}(x)}{\sqrt{15 \int_{\mathbb{R}^{d'}} K^2(u) du}} \sqrt{f_n(x)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} N(0, 1).$$

**Corollaire 5.9** Dans les conditions du Théorème 5.7, et sous l'hypothèse de normalité de la loi de  $X_1$  conditionnée par  $W_0 = x$ , on a

$$\sqrt{nh_n^{d'}} \frac{\gamma_{2,n}(x) - 3}{\sqrt{24 \int_{\mathbb{R}^{d'}} K^2(u) du}} \sqrt{f_n(x)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} N(0, 1).$$

## 6 Démonstrations

Dans les lemmes suivants nous présentons quelques propriétés asymptotiques de l'estimateur à noyau  $\bar{g}_n(\cdot)$ , que nous utilisons pour dériver les résultats de convergence 3.1 et 4.1 pour l'estimateur  $\phi_n(\cdot)$ . On commence cependant par énoncer sans démonstration, deux résultats préliminaires. Le premier est à l'origine de l'introduction des hypothèses

sur les moments conditionnels croisés. Le deuxième établit la vitesse de convergence vers zéro du reste d'ordre  $n$  de la série  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^t(i)$ , pour  $t > \frac{\gamma}{1+\gamma}$ , où  $\alpha(i)$  est le coefficient de mélange d'ordre  $i$  d'un processus de type  $Alpha(\gamma)$ .

**Lemme 6.1** Soient  $x$  un point de  $\mathbb{R}^t$ ,  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une famille d'applications intégrables de  $\mathbb{R}^t$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $\varphi$  une application de  $\mathbb{R}^t$  dans  $\mathbb{R}$  intégrable à support borné. Si  $\sup_{i \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^t} |g_i(y)| dy < \infty$ , et on admet que les applications  $g_i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , sont par rapport à  $i$ , uniformément bornées dans un voisinage  $\delta > 0$  de  $x$ , alors lorsque  $h \rightarrow 0$ , on a

$$\sup_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{h^t} \int_{\mathbb{R}^t} g_i(y) \varphi\left(\frac{x-y}{h}\right) dy = O(1).$$

**Lemme 6.2** Soit  $\gamma \in ]0, 1]$ , fixé. Soit  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  un processus stochastique fortement stationnaire dont le coefficient de mélange est défini par (2.1). Les propositions suivantes sont équivalentes:

- i)  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est de type  $Alpha(\gamma)$ ;
- ii) étant donnés  $s, t > 0$  avec  $\frac{t}{1+s} = \frac{\gamma}{1+\gamma}$ , il existe  $\eta > 0$  tel que

$$n^{s+\eta} \sum_{i=n}^{+\infty} \alpha^t(i) \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Notons pour  $x \in \mathbb{R}^{d'}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\bar{g}_n(x) = (g_{1,n}(x), \dots, g_{p,n}(x))$ , où pour  $r = 1, \dots, p$ ,

$$(6.3) \quad g_{r,n}(x) = \frac{1}{nh_r^{d'}(n)} \sum_{i=1}^n g_r(V_i) K_r\left(\frac{x - W_i}{h_r(n)}\right),$$

avec  $V_i$  et  $W_i$ , pour  $i \in \mathbb{Z}$ , définis par (1.1). Le lemme suivant, nous permet de préciser, pour  $x, y \in \mathbb{R}^{d'}$  et  $r, r' = 1, \dots, p$ , le comportement asymptotique de la covariance

$$(6.4) \quad \begin{aligned} & cov(g_{r,n}(x), g_{r',n}(y)) \\ &= \frac{1}{nh_r^{d'}(n)} \left( h_{r'}^{-d'}(n) E[g_{r,x}(Z_0) g_{r',y}(Z_0)] \right. \\ & \left. + h_r^{-d'}(n) \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \{E[g_{r,x}(Z_i) g_{r',y}(Z_0)] + E[g_{r',y}(Z_i) g_{r,x}(Z_0)]\} \right), \end{aligned}$$

où  $Z_i = (V_i, W_i)$ , et

$$g_{r,x}(Z_i) = g_r(V_i) K_r\left(\frac{x - W_i}{h_r(n)}\right) - E\left[g_r(V_i) K_r\left(\frac{x - W_i}{h_r(n)}\right)\right].$$

L'étude du terme de covariance de l'égalité (6.4) nous conduit à l'introduction de conditions sur la vitesse de convergence vers zéro du coefficient de mélange et aussi à l'imposition de conditions de régularité sur certains moments conditionnels croisés. Ces conditions nous permettent de conclure que le terme de variance de l'égalité précédente est plus significatif que celui de covariance.

**Lemme 6.5** Soient  $x, y \in \mathbb{R}^{d'}$ , et  $(h_n)$  une suite de nombres réels strictement positifs telle que  $h_n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$ . On suppose: i)  $E\|g(V_0)\|^{2+\delta} < \infty$ , pour un  $\delta > 0$ ; ii)  $m(g'g, \cdot)f(\cdot) \in \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y$ ; iii)  $m(\|g\|^{2+\delta}, \cdot)f(\cdot) \in \mathcal{B}_x \cap \mathcal{B}_y$ ; iv)  $g \in \mathcal{N}_p(x, y)$ ; v)  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est de type Alpha( $\frac{\delta}{2+\delta}$ ); vi) pour  $r = 1, \dots, p$ ,  $h_r(n) = c_r h_n, c_r > 0$ , et les noyaux  $K_r$ , sont bornés à support borné. Alors, pour  $r, r' = 1, \dots, p$ :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n^{-d'} E[g_{r,x}(Z_0)g_{r',y}(Z_0)] = m(g_r g_{r'}, x)f(x) \int_{\mathbb{R}^{d'}} K_r\left(\frac{u}{c_r}\right) K_{r'}\left(\frac{u}{c_{r'}}\right) du \delta_{x-y}.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n^{-d'} \sum_{i=1}^{+\infty} |E[g_{r,x}(Z_i)g_{r',y}(Z_0)]| = 0.$$

**Démonstration:** Le comportement asymptotique du terme de variance s'obtient en utilisant la démarche classique employée par Bosq et Lecoutre [1] pg. 87. Pour obtenir b), nous majorons le terme général de la série en utilisant soit l'inégalité de Davydov [3], soit l'hypothèse  $g \in \mathcal{N}_p(x, y)$ . Ainsi, on a pour  $i > s + s_q$ , d'après le Lemme 6.1 et l'hypothèse iii):

$$\begin{aligned} & |E[g_{r,x}(Z_i)g_{r',y}(Z_0)]| \\ & \leq 8\alpha^{\frac{\delta}{2+\delta}}(i - s - s_q) E^{\frac{1}{2+\delta}} \left| g_r(V_i) K_r\left(\frac{x - W_i}{h_r(n)}\right) \right|^{2+\delta} E^{\frac{1}{2+\delta}} \left| g_{r'}(V_0) K_{r'}\left(\frac{y - W_0}{h_{r'}(n)}\right) \right|^{2+\delta} \\ & = O\left(\alpha^{\frac{\delta}{2+\delta}}(i - s - s_q)(h_n^{d'})^{\frac{2}{2+\delta}}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, on a pour  $i \geq 1$ :

$$|E[g_{r,x}(Z_i)g_{r',y}(Z_0)]| = \left| E \left[ g_r(V_i) K_r\left(\frac{x - W_i}{h_r(n)}\right) g_{r'}(V_0) K_{r'}\left(\frac{y - W_0}{h_{r'}(n)}\right) \right] \right| + O(h_n^{2d'}).$$

Le Lemme 6.1, et les hypothèses iv) et vi), nous permettent d'obtenir les développements suivants:

$$\begin{aligned} & \sup_{i > s_q} \left| E \left[ g_r(V_i) K_r\left(\frac{x - W_i}{h_r(n)}\right) g_{r'}(V_0) K_{r'}\left(\frac{y - W_0}{h_{r'}(n)}\right) \right] \right| \\ & \leq \sup_{i > s_q} \int_{\mathbb{R}^{d'} \times \mathbb{R}^{d'}} E[|g_r(V_i)| |g_{r'}(V_0)| |W_i = u, W_0 = v] f_{(W_i, W_0)}(u, v) \\ & \quad \times |K_r|\left(\frac{x - u}{h_r(n)}\right) |K_{r'}|\left(\frac{y - v}{h_{r'}(n)}\right) dudv \\ & = O(h_n^{2d'}), \end{aligned}$$

et, en notant  $\varphi_r(u) = \sup_{x_1, \dots, x_q \in \mathbb{R}^d} |K_r(u, x_1, \dots, x_q)|$ , pour  $u \in \mathbb{R}^d$ , et  $x = (x_0, x_1, \dots, x_q)$ , on a pour  $1 \leq i \leq s_q$ :

$$\begin{aligned} & \left| E \left[ g_r(V_i) K_r\left(\frac{x - W_i}{h_r(n)}\right) g_{r'}(V_0) K_{r'}\left(\frac{y - W_0}{h_{r'}(n)}\right) \right] \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}} E[|g_r(V_i)| |g_{r'}(V_0)| |X_i = u, W_0 = v] f_{(X_i, W_0)}(u, v) \\ & \quad \times \varphi_r\left(\frac{x_0 - u}{h_r(n)}\right) |K_{r'}|\left(\frac{y - v}{h_{r'}(n)}\right) dudv \\ & = O(h_n^{d'+d}). \end{aligned}$$

En résumé, on a, uniformément en  $i$ , que  $|E[g_{r,x}(Z_i)g_{r',y}(Z_0)]|$  est un  $O(h_n^{d'+d})$ , si  $1 \leq i \leq s_q$ , et un  $O(h_n^{2d'})$ , si  $i > s_q$ .

D'après les majorations précédentes et en désignant par  $[x]$  la partie entière de  $x$ , on a pour  $0 < \xi < 1$ :

$$\begin{aligned} & h_n^{-d'} \sum_{i=1}^{+\infty} |E[g_{r,x}(Z_i)g_{r',y}(Z_0)]| \\ &= \sum_{i=1}^{s_q} h_n^{-d'} |E[g_{r,x}(Z_i)g_{r',y}(Z_0)]| + \sum_{i=s_q+1}^{[(h_n^{d'})^{\xi-1}] + s + s_q - 1} h_n^{-d'} |E[g_{r,x}(Z_i)g_{r',y}(Z_0)]| \\ & \quad + \sum_{i=[(h_n^{d'})^{\xi-1}] + s + s_q}^{+\infty} h_n^{-d'} |E[g_{r,x}(Z_i)g_{r',y}(Z_0)]| \\ &= O\left(h_n^d + (h_n^{d'})^\xi + \sum_{i=[(h_n^{d'})^{\xi-1}] + s + s_q}^{+\infty} \frac{\alpha^{\frac{\delta}{2+\delta}}(i)}{(h_n^{d'})^{\frac{\delta}{2+\delta}}}\right). \end{aligned}$$

La conclusion découle maintenant d'après l'hypothèse v), et le Lemme 6.2, qui assurent l'existence de  $\eta > 0$  tel que  $n^{\frac{\delta}{2+\delta} + \eta} \sum_{i=n}^{+\infty} \alpha^{\frac{\delta}{2+\delta}}(i)$  converge vers zéro, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Il suffit donc de prendre  $\xi = \eta / (\frac{\delta}{2+\delta} + \eta)$ . ■

Les lemmes suivants permettent d'établir la normalité asymptotique du vecteur aléatoire  $\sqrt{nh_n^{d'}}(\bar{g}_n(x_j) - m(g, x_j)f(x_j); j = 1, \dots, T)$ . La démonstration suivante est fondée sur la démonstration correspondante, donnée par Rosenblatt [18] pour l'estimateur de la densité.

**Lemme 6.6** *Sous les conditions du Théorème 4.1, on a*

$$\sqrt{nh_n^{d'}}(\bar{g}_n(x_j) - E[\bar{g}_n(x_j)]; j = 1, \dots, T) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} N(0, \Sigma),$$

où  $\Sigma = [\Sigma_{i,j}]_{i,j=1,\dots,T}$ , et  $\Sigma_{i,j}$  est définie par (4.4).

**Démonstration:** Si  $C' = (C_1, \dots, C_{pT})$  est un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^{pT}$ , et en désignant par  $V_n$  le vecteur ligne  $\sqrt{nh_n^{d'}}(\bar{g}_n(x_j) - E[\bar{g}_n(x_j)]; j = 1, \dots, T)$ , nous allons montrer que  $V_n C'$  converge en loi, lorsque  $n$  tend vers l'infini, vers la loi normale de moyenne zéro et de variance  $C' \Sigma C$ . On a

$$V_n C' = \sum_{i=1}^n S_{n,i},$$

où pour  $i = 1, \dots, n$ ,

$$S_{n,i} = \sum_{r=1}^p \sum_{j=1}^T \frac{C_{(j-1)p+r}}{c_r^{d'/2}} \frac{1}{(nh_r^{d'}(n))^{1/2}} g_{r,x_j}(Z_i).$$

Soient  $r(n) = r$ ,  $m(n) = m$  et  $k(n) = k$  des suites de nombres entiers convergeant vers l'infini, telles que:

$$(6.7) \quad \frac{m}{r} \rightarrow +\infty, \text{ et } k = \left[ \frac{n}{m+r} \right],$$

où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ . Considérons la décomposition

$$\sum_{i=1}^n S_{n,i} = \sum_{l=1}^k (A_l + B_l) + H,$$

où pour  $r'(n) = r' = r(n) + s + s_q - 1$ :

$$A_l = \sum_{i=(l-1)(m+r')+1}^{lm+(l-1)r'} S_{n,i}, \quad B_l = \sum_{i=lm+(l-1)r'+1}^{l(m+r')} S_{n,i} \text{ et } H = \sum_{i=k(m+r')+1}^n S_{n,i}.$$

La convergence en moyenne quadratique vers zéro des variables  $\sum_{l=1}^k B_l$  et  $H$ , correspondantes aux paquets de taille petite de la décomposition précédente, réduit le problème à l'étude de la loi asymptotique de la somme  $\sum_{l=1}^k A_l$ .

Soit maintenant  $(L_n)$  une suite de nombres positifs convergeant vers l'infini, et considérons pour  $i = 1, \dots, n$ , la décomposition:

$$S_{n,i} = \sum_{r=1}^p \sum_{j=1}^T \frac{C_{(j-1)p+r}}{c_r^{d'/2}} \frac{1}{(nh_r^{d'}(n))^{1/2}} \{g'_{r,x_j}(Z_i) + g''_{r,x_j}(Z_i)\} = S'_{n,i} + S''_{n,i},$$

où pour  $r = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, T$ :

$$g'_{r,x_j}(Z_i) = g_r(V_i) \mathbb{I}_{|g_r(V_i)| \leq L_n} K_r \left( \frac{x_j - W_i}{h_r(n)} \right) - E \left[ g_r(V_0) \mathbb{I}_{|g_r(V_0)| \leq L_n} K_r \left( \frac{x_j - W_0}{h_r(n)} \right) \right] \text{ et}$$

$$g''_{r,x_j}(Z_i) = g_{r,x_j}(Z_i) - g'_{r,x_j}(Z_i).$$

Soient encore, pour  $l = 1, \dots, k$ :

$$A'_l = \sum_{i=(l-1)(m+r')+1}^{lm+(l-1)r'} S'_{n,i}, \text{ et } A''_l = A_l - A'_l.$$

La variable aléatoire  $\sum_{l=1}^k A'_l$ , converge en moyenne quadratique vers zéro, lorsque  $n$  tend vers l'infini. En effet, il suffit de montrer que pour  $r = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, T$ , on a

$$E \left[ \frac{1}{(nh_r^{d'}(n))^{1/2}} \sum_{l=1}^k V_l^j \right]^2 \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty,$$

où pour  $l = 1, \dots, k$ ,

$$V_l^j = \sum_{i=(l-1)(m+r')+1}^{lm+(l-1)r'} g''_{r,x_j}(Z_i).$$

Pour cela, et d'après le Lemme 6.5 b), on a besoin de montrer que  $h_r^{-d'}(n) E(g''_{r,x_j}(Z_0))^2$  est négligeable. D'après l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev et le Lemme 6.1, on a:

$$\begin{aligned} & h_r^{-d'}(n) E(g''_{r,x_j}(Z_0))^2 \\ &= \frac{1}{h_r^{d'}(n)} \int_{\mathbb{R}^{d'}} E[g_r^2(V_0) \mathbb{I}_{|g_r(V_0)| > L_n} | W_0 = z] K_r^2 \left( \frac{x_j - z}{h_r(n)} \right) f(z) dz + O(h_r^{d'}(n)) \\ &\leq \frac{1}{L_n^\delta h_r^{d'}(n)} \int_{\mathbb{R}^{d'}} m(|g_r|^{2+\delta}, z) K_r^2 \left( \frac{x_j - z}{h_r(n)} \right) f(z) dz + O(h_r^{d'}(n)), \\ &= O\left(\frac{1}{L_n^\delta}\right) + O(h_r^{d'}(n)) = o(1). \end{aligned}$$



Il suffira donc d'étudier la loi limite de la variable  $\sum_{l=1}^k A'_l$ . D'après Robinson [15] (pg. 199), soient:

$$m(n) = [n^{\frac{1}{2}} \eta_n] \text{ et } r(n) = [n^{\frac{1}{2}} \eta_n^2],$$

où  $\eta_n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$ , avec  $\eta_n > \max(n^{-\frac{1}{24}}, \epsilon_n^{\frac{1}{4}})$ , et  $\epsilon_n = \sup_{j \geq n} j^2 \alpha(j) \downarrow 0$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Les conditions (6.7) sont évidemment satisfaites. Avec ce choix, les variables  $A'_l, l = 1, \dots, k$ , peuvent être considérées comme des variables indépendantes. En effet (d'après Rosenblatt [18] pg. 207, et le Lemme 1.2 de Ibragimov [9]):

$$\begin{aligned} \left| E \left( \exp \left( it \sum_{l=1}^k A'_l \right) \right) - \prod_{l=1}^k E \left( \exp(it A'_l) \right) \right| &\leq \sum_{j=1}^{k-1} 4\alpha(1 - s_q + r' - s) \\ &= 4(k(n) - 1)\alpha(r(n)), \\ &= O(\eta_n^{-5} \epsilon_{r(n)}) = O(\eta_n^{-5} \epsilon_{n^{1/4}}) \\ &= O(\epsilon_n^{\frac{5}{4}}) = o(1). \end{aligned}$$

La normalité asymptotique de  $\sum_{l=1}^k A'_l$  découlera maintenant de l'application du théorème de limite centrale de Liapounov (cf. [11] pg. 168). Pour cela, nous allons établir que:

$$(6.8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{l=1}^k E[A'_l]^2 = C' \Sigma C \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{l=1}^k E[A'_l]^4 = 0.$$

Nous avons:

$$\begin{aligned} kE[A_1]^2 &= \sum_{r_1, r_2=1}^p \sum_{j_1, j_2=1}^T \frac{C_{(j_1-1)p+r_1} C_{(j_2-1)p+r_2}}{(c_{r_1} c_{r_2})^{d'/2}} \\ &\quad \times kE \left[ \frac{1}{(nh_{r_1}^{d'}(n))^{1/2}} \sum_{i=1}^m g_{r_1, x_{j_1}}(Z_i) \frac{1}{(nh_{r_2}^{d'}(n))^{1/2}} \sum_{j=1}^m g_{r_2, x_{j_2}}(Z_j) \right] \\ &= \sum_{r_1, r_2=1}^p \sum_{j_1, j_2=1}^T \frac{C_{(j_1-1)p+r_1} C_{(j_2-1)p+r_2}}{(c_{r_1} c_{r_2})^{d'/2}} \frac{1}{(h_{r_1}(n) h_{r_2}(n))^{d'/2}} \\ &\quad \times \left\{ \frac{km}{n} E[g_{r_1, x_{j_1}}(Z_0) g_{r_2, x_{j_2}}(Z_0)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{km}{n} \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{i}{m}\right) \{ E[g_{r_1, x_{j_1}}(Z_i) g_{r_2, x_{j_2}}(Z_0)] + E[g_{r_2, x_{j_2}}(Z_i) g_{r_1, x_{j_1}}(Z_0)] \} \right\}. \end{aligned}$$

Comme  $\frac{km}{n} \rightarrow 1, n \rightarrow +\infty$ , le Lemme 6.5 a) permet d'écrire:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} kE[A_1]^2 = \sum_{r_1, r_2=1}^p \sum_{j_1, j_2=1}^T C_{(j_1-1)p+r_1} C_{(j_2-1)p+r_2} \sigma_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} = C' \Sigma C.$$

De plus, en utilisant la même démarche et l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev, on conclut que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} kE[A'_l]^4 = 0$ , ce qui permet d'obtenir la première des conditions (6.8).

Finalement, on a

$$\left( \sum_{l=1}^k E[A'_l]^4 \right)^{1/4} \leq \sum_{r=1}^p \sum_{j=1}^T \frac{|C_{(j-1)p+r}|}{|c_r|^{d'/2}} \left( kE \left[ \frac{1}{(nh_r^{d'}(n))^{1/2}} \sum_{i=1}^m g'_{r, x_j}(Z_i) \right]^4 \right)^{1/4},$$

et pour  $r = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, T$ , considérons la décomposition:

$$\begin{aligned} kE \left[ \frac{1}{(nh_r^{d'}(n))^{1/2}} \sum_{i=1}^m g'_{r,x_j}(Z_i) \right]^4 \\ = \frac{k}{(nh_r^{d'}(n))^2} \sum_{i_1} \left\{ E[g'_{r,x_j}(Z_{i_1})]^4 \right. \\ + \sum_{i_1 \neq i_2} E[g'_{r,x_j}(Z_{i_1})g'_{r,x_j}(Z_{i_2})(g'_{r,x_j}(Z_{i_1}) + g'_{r,x_j}(Z_{i_2}))] \\ + \sum_{i_1 \neq i_3 \neq i_2} \left( E[g'_{r,x_j}(Z_{i_1})g'_{r,x_j}(Z_{i_2})g'_{r,x_j}(Z_{i_3})] \right. \\ \left. + \sum_{\substack{i_1 \neq i_4 \neq i_2 \\ i_4 \neq i_3}} E[g'_{r,x_j}(Z_{i_1})g'_{r,x_j}(Z_{i_2})g'_{r,x_j}(Z_{i_3})g'_{r,x_j}(Z_{i_4})] \right) \left. \right\}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse  $g \in \mathcal{N}(x_1, \dots, x_T)$ , nous concluons que  $E[g'_{r,x_j}(Z_0)]^4 = O(L_n^2 h_r^{d'}(n))$ , et  $\sup_{i > s_q} E[g'_{r,x_j}(Z_i)g'_{r,x_j}(Z_0)]^2 = O(L_n^2 h_r^{d'}(n))$ , et donc:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^k E[A_l^4] &= O\left(\frac{k}{(nh_r^{d'}(n))^2} L_n^2 (mh_r^{d'}(n) + m^2 h_r^{3d'/2}(n) + m^4 h_r^{2d'}(n))\right) \\ &= O\left(L_n^2 \frac{m^3}{n}\right) + o(1) \\ &= O(L_n^2 \eta_n^3) + o(1). \end{aligned}$$

Pour obtenir la deuxième condition de (6.8), il suffit maintenant de choisir  $L_n$  tel que  $L_n^2 \eta_n^3 = o(1)$ . ■

L'emploi de noyaux bornés à support borné nous permettra de préciser la vitesse de convergence vers zéro du biais  $E[\bar{g}_n(\cdot)] - m(g, \cdot)f(\cdot)$ , en utilisant des hypothèses locales sur le paramètre fonctionnel  $m(g, \cdot)f(\cdot)$ .

**Lemme 6.9** Pour  $j = 1, \dots, T$ , le vecteur ligne  $\sqrt{nh_n^{d'}}(E[\bar{g}_n(x_j)] - m(g, x_j)f(x_j))$ , converge vers zéro, lorsque  $n$  tend vers l'infini, si l'un des systèmes d'hypothèses  $H_1$ ) ou  $H_2$ ) est satisfait, et vers  $\Delta^m(m(g, \cdot)f(\cdot), K, c)(x_j)$ , si le système d'hypothèses  $H_3$ ) est satisfait.

**Démonstration:** Pour  $r = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, T$ , le biais  $E[g_{r,n}(x_j)] - m(g_r, x_j)f(x_j)$  admet les développements suivants, selon le système d'hypothèses considéré. Sous  $H_1$ ) et pour  $n$  assez grand, on a:

$$|E[g_{r,n}(x_j)] - m(g_r, x_j)f(x_j)| = O\left(\int_{\mathbb{R}^{d'}} |yh_r(n)|^\alpha |K_r(y)| dy\right) = O(h_r^\alpha(n)).$$

Sous  $H_2$ ) ou  $H_3$ ), un développement de Taylor de  $m(g_r, \cdot)f(\cdot)$  dans un voisinage de  $x_j$  nous conduit à (voir aussi Bosq et Lecoutre [1] pg. 88):

$$E[g_{r,n}(x_j)] - m(g_r, x_j)f(x_j)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^{d'}} K_r(u) [m(g_r, x_j - uh_r(n))f(x_j - uh_r(n)) - m(g_r, x_j)f(x_j)] du \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d'}} K_r(u) \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!} h_r^j(n) \sum_{i_1, \dots, i_j=1}^{d'} u_{i_1} \dots u_{i_j} \frac{\partial^j (m(g_r, \cdot)f(\cdot))}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j}}(x_j) \right\} du \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^{d'}} K_r(u) \left\{ \frac{(-1)^m}{(m-1)!} h_r^m(n) \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{d'} u_{i_1} \dots u_{i_m} \right. \\
&\quad \quad \left. \times \int_0^1 \frac{\partial^m (m(g_r, \cdot)f(\cdot))}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}(x_j - h_r(n)ut)(1-t)^{m-1} dt \right\} du.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de la convergence dominée, et les conditions imposées sur le noyau  $K_r$ , on obtient

$$\begin{aligned}
&E[g_{r,n}(x_j)] - m(g_r, x_j)f(x_j) \\
&= h_r^m(n) \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{d'} \int_{\mathbb{R}^{d'}} u_{i_1} \dots u_{i_m} K_r(u) du \frac{\partial^m (m(g_r, \cdot)f(\cdot))}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}(x_j) + o(h_r^m(n)).
\end{aligned}$$

Les hypothèses sur la suite  $(h_n)$  nous permettent maintenant d'obtenir le résultat annoncé. ■

Etablissons finalement la démonstration des Théorèmes de convergence 3.1 et 4.1:

**Démonstration du Théorème 3.1:** D'après le Lemme de Bochner (voir Parzen [13] et Cacoullou [2]) et en suivant la démonstration du Lemme 6.5, on obtient pour  $x \in \mathbb{R}^{d'}$  (cf. Bosq et Lecoutre [1] pg. 62), la convergence en moyenne quadratique de  $\bar{g}_n(x)$  vers  $m(g, x)f(x)$ , si  $n \rightarrow +\infty$ , à partir de la convergence correspondante de chacun des estimateurs  $g_{r,n}(x)$  vers  $m(g_r, x)f(x)$ , si  $n \rightarrow +\infty$ , pour  $r = 1, \dots, p$ . En tenant en compte les égalités  $\phi_n(x) = \Phi(\bar{g}_n(x))$  et  $\phi(x) = \Phi(m(g, x)f(x))$ , où  $\Phi$  est continue en  $m(g, x)f(x)$ , on conclut d'après le Théorème de Slutsky (cf. [11] pg. 169) que  $\phi_n(x)$  converge en probabilité vers  $\phi(x)$ , lorsque  $n$  tend vers l'infini. ■

**Démonstration du Théorème 4.1:** On a:

$$\begin{aligned}
&(\phi_n(x_j) - \phi(x_j); j = 1, \dots, T) \\
&= (\Phi(\bar{g}_n(x_j)) - \Phi(m(g, x_j)f(x_j)); j = 1, \dots, T) \\
&= (\Phi(\bar{g}_n(x_1)), \dots, \Phi(\bar{g}_n(x_T))) - (\Phi(m(g, x_1)f(x_1)), \dots, \Phi(m(g, x_T)f(x_T))) \\
&= \Phi^*(\bar{g}_n(x_1), \dots, \bar{g}_n(x_T)) - \Phi^*(m(g, x_1)f(x_1), \dots, m(g, x_T)f(x_T)),
\end{aligned}$$

où  $\Phi^*$  définie par  $\Phi^*(y_1, \dots, y_T) = (\Phi(y_1), \dots, \Phi(y_T))$ , pour  $y_1, \dots, y_T \in \mathbb{R}^p$ , est différentiable en  $(m(g, x_j)f(x_j); j = 1, \dots, T)$ , puisque par hypothèse  $\Phi$  est différentiable dans les points  $m(g, x_1)f(x_1), \dots, m(g, x_T)f(x_T)$ .

Si l'un des systèmes d'hypothèses  $H_1$ ) ou  $H_2$ ) est satisfait, on conclut, en tenant en compte des Lemmes 6.6 et 6.9 que le vecteur  $\sqrt{nh_n^{d'}}(\phi_n(x_j) - \phi(x_j); j = 1, \dots, T)$  converge, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , vers la loi normale de moyenne zéro et de matrice de covariance

(cf. [11], Corollaire 7, pg. 167):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} (m(g, x_j) f(x_j); j = 1, \dots, T) \Sigma \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} \right)' (m(g, x_j) f(x_j); j = 1, \dots, T) \\ &= \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} (m(g, x_j) f(x_j)) \Sigma_{i,j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)' (m(g, x_j) f(x_j)) \right]_{i,j=1,\dots,T} \end{aligned}$$

De façon analogue, si le système d'hypothèses  $H_3$ ) est satisfait, le vecteur en étude converge, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , vers la loi normale de moyenne

$$\begin{aligned} & \left( \Delta^m(m(g, \cdot) f(\cdot), K, c)(x_j); j = 1, \dots, T \right) \\ & \quad \times \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} \right)' (m(g, x_j) f(x_j); j = 1, \dots, T) \\ &= \left( \Delta^m(m(g, \cdot) f(\cdot), K, c)(x_j) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)' (m(g, x_j) f(x_j)); j = 1, \dots, T \right), \end{aligned}$$

et de matrice de covariance définie ci-dessus. ■

**Remerciements:** Nous tenons à remercier sincèrement Monsieur le Professeur Christian Gouriéroux qui a suggéré le sujet de ce travail, et avec qui nous avons eu le plaisir de discuter sur les étapes successives qui nous ont conduit au présent article, ainsi que le referee pour les améliorations qu'il a apportées au manuscrit.

## Bibliographie

- [1] Bosq, D. et Lecoutre, J-P. (1987). *Théorie de l'Estimation Fonctionnelle*. Economica, Paris.
- [2] Cacoullos, T. (1966). Estimation of a multivariate density. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **18**, 179-189.
- [3] Davydov, YU.A. (1968). Convergence of distributions generated by stationary stochastic processes. *Theory Probab. Appl.*, **13**, 691-696.
- [4] Diebolt, J. et Guégan, D. (1990). Probabilistic properties of the general nonlinear markovian process of order one and applications to time series modelling. *Rapport Technique 125*, CNRS.
- [5] Doukhan, P. (1994). *Mixing: properties and examples*. Lect. Notes in Statist., 85, Springer-Verlag, New-York.
- [6] Gastwirth, J.L. et Rubin, H. (1975). The asymptotic distribution theory of the empirical CDF for mixing processes. *Ann. Statist.*, **3**, 809-824.
- [7] Gouriéroux, C. (1992). *Modeles ARCH et Applications Financières*. Economica, Paris.
- [8] Gouriéroux, C., Monfort, A. et Tenreiro, C. (1994). Kernel M-estimators: nonparametric diagnostics for structural models. Document de travail 9405, CEPREMAP, Paris.
- [9] Ibragimov, I.A. (1962). Some limit theorems for stationary processes. *Theory Probab. Appl.*, **7**, 349-382.
- [10] Mokkadem, A. (1990). Propriétés de mélange des processus autorégressifs polynomiaux. *Ann. Inst. H. Poincaré*, **26**, 219-260.
- [11] Monfort, A. (1980). *Cours de Probabilités*. Economica, Paris.
- [12] Nadaraya, E.A. (1964). On estimating regression. *Theory Probab. Appl.*, **10**, 186-190.

- [13] Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Statist.*, **33**, 1065-1076.
- [14] Pham, T.D. et Tran, L.T. (1985). Some mixing properties of time series models. *Stochastic Process. Appl.*, **19**, 297-303.
- [15] Robinson, P.M. (1983). Nonparametric estimators for time series. *J. Time Series Anal.*, **4**, 185-207.
- [16] Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some non-parametric estimates of a density function. *Ann. Math. Statist.*, **27**, 832-837.
- [17] Rosenblatt, M. (1956). A central limit theorem and a strong mixing condition. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, **42**, 43-47.
- [18] Rosenblatt, M. (1970). Density estimates and Markov sequences. In: *Proc. First International Symposium on Nonparametric Techniques, Indiana University*, ed. Madan Puri, 199-210.
- [19] Rosenblatt, M. (1985). *Stationary Sequences and Random Fields*. Birkhäuser, Boston.
- [20] Rosenblatt, M. (1991). *Stochastic Curve Estimation*. NSF-CBMS Regional Conference Series in Probability and Statistics, Institute of Mathematical Statistics, Hayward.
- [21] Roussas, G.G. (1969). Nonparametric estimation in Markov processes. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **21**, 73-87.
- [22] Roussas, G.G. (1990). Asymptotic normality of the kernel estimate under dependence conditions: application to hazard rate. *J. Statist. Plann. Inference*, **25**, 81-104.
- [23] Tenreiro, C. (1994). Estimation non paramétrique d'une fonction de moments conditionnels sous des conditions locales. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **318**, 1149-1152.
- [24] Watson, G.S. (1964). Smooth regression analysis. *Sankhya A*, **26**, 359-372.
- [25] Yakowitz, S.J. (1985). Nonparametric density estimation prediction and regression for Markov processes. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **80**, 215-221.

---

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Apartado 3008, 3000 Coimbra, Portugal.