



**HAL**  
open science

## Sur Le Probleme Inverse de l'Endroit De Premier Passage Pour des Processus Intégrés

Mario Lefebvre

► **To cite this version:**

Mario Lefebvre. Sur Le Probleme Inverse de l'Endroit De Premier Passage Pour des Processus Intégrés. Annales de l'ISUP, 1995, XXXIX (2), pp.57-69. hal-03660014

**HAL Id: hal-03660014**

**<https://hal.science/hal-03660014v1>**

Submitted on 5 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# SUR LE PROBLÈME INVERSE DE L'ENDROIT DE PREMIER PASSAGE POUR DES PROCESSUS INTÉGRÉS \*

par Mario LEFEBVRE

*École Polytechnique de Montréal*

## Résumé

Soient  $y(t)$  un processus de diffusion unidimensionnel et  $x(t)$  l'intégrale de  $y(t)$ . Soit  $T(y)$  l'instant où le processus  $y(t)$ , parti de  $y(0) = y$ , est égal à  $d$  ( $\geq 0$ ) pour la première fois. On démontre un théorème qui donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction complexe puisse être considérée comme la fonction génératrice des moments de  $x(T(y))$  pour un certain processus de diffusion  $y(t)$ . Des exemples où le théorème est utilisé pour construire des solutions à des problèmes d'endroit de premier passage sont présentés.

\* Recherche subventionnée par le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada et par le fonds FCAR du Québec.

Classification des sujets AMS (1991). Principale 60J70; secondaire 60J60.

Mots clés. Processus bidimensionnels, équation de Kolmogoroff, endroit de premier passage.

# 1 Introduction.

On considère des processus stochastiques bidimensionnels  $\xi(t) \doteq (x(t), y(t))$  définis par le système d'équations différentielles

$$dx(t) = y(t)dt, \quad (1)$$

$$dy(t) = m(y(t))dt + [2v(y(t))]^{1/2}dW(t), \quad (2)$$

où  $v(y(t)) > 0$  et  $W(t)$  est un mouvement brownien standard. Supposons que  $y(0) = y \geq d \geq 0$ . On définit

$$T(y) = \inf\{t \geq 0 : y(t) = d | y(0) = y\}. \quad (3)$$

Dans cet article, on s'intéresse à la distribution de  $x(T(y))$ . Soit

$$M(x, y; a) \doteq E\{\exp[-ax(T(y)) | x(0) = x, y(0) = y]\}, \quad (4)$$

où l'on suppose que  $a$  est un paramètre complexe dont la partie réelle est positive. Alors, sous certaines conditions de régularité sur les fonctions  $m(y)$  et  $v(y)$ , la fonction génératrice des moments  $M(x, y; a)$  satisfait à l'équation inverse de Kolmogoroff

$$v(y)M_{yy}(x, y; a) + m(y)M_y(x, y; a) - ayM(x, y; a) = 0. \quad (5)$$

De plus, la fonction  $M$  doit être telle que

$$0 < |M(x, y; a)| < |e^{-ax}| \quad \forall y > d \quad (6)$$

et doit satisfaire à la condition à la frontière

$$M(x, d; a) = e^{-ax}. \quad (7)$$

Notons que, puisque  $y(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T(y))$ ,  $x(t)$  augmente avec  $t$ , de sorte que  $x(T(y)) \geq x(0) = x$ .

Le problème de calculer explicitement la fonction  $M$  et/ou la fonction de densité de  $x(T(y))$  dans des cas particuliers importants a été considéré

récemment par Lefebvre (1989a,b) et Lachal (1991), en particulier. Ceux-ci se sont intéressés au cas où  $y(t)$  est un mouvement brownien standard et à celui où  $y(t)$  est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Dans le présent article, on considère le problème inverse; c'est-à-dire, on se pose la question suivante: sous quelles conditions une fonction complexe quelconque peut-elle être interprétée comme étant la fonction génératrice des moments d'un endroit de premier passage  $x(T(y))$  pour un certain processus de diffusion  $y(t)$ ?

Un problème connexe, soit celui de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction complexe quelconque d'une seule variable puisse être considérée comme la fonction génératrice des moments d'un instant de premier passage pour un certain processus de Markoff continu et stationnaire (par rapport au temps), a été résolu par Capocelli et Ricciardi (1972). De plus, le problème de construire des densités d'instant de premier passage pour des processus de diffusion unidimensionnels a encore été l'objet de recherches récemment; voir Giorno et al. (1988) et Gutiérrez Jáimez et al. (1991).

À la section 2, un théorème qui permet de caractériser les fonctions  $M$  telles que définies en (4) est démontré. Des exemples d'applications du théorème sont présentés à la section 3 et des remarques finales sont faites à la section 4.

## 2 Caractérisation des fonctions génératrices des moments.

Notons d'abord qu'une solution du système (1), (2) peut être interprétée comme étant une solution du système d'équations intégrales

$$\xi(t) = \xi(0) + \left( \int_0^t y(s) ds, \int_0^t m(y(s)) ds + \int_0^t [2v(y(s))]^{1/2} dW(s) \right). \quad (8)$$

Ensuite, supposons que les fonctions  $m(y)$  et  $v(y)$  satisfont aux conditions suivantes:

H1: la fonction  $m(y)$  est de classe  $C^1$  et sa dérivée est bornée dans l'intervalle  $(d, \infty)$ ;

H2: la fonction positive  $v(y)$  est de classe  $C^2$  et  $v(y)$ , de même que  $v'(y)$  et  $v''(y)$ , sont bornées dans l'intervalle  $(d, \infty)$ .

Sous les hypothèses H1 et H2, l'équation intégrale (8), avec  $\xi(0) = (x, y)$ , possède une solution et celle-ci est unique (voir Fleming et Rishel (1975, pp. 117-131), par exemple). De plus, cette solution est un processus de diffusion. Enfin, sous les mêmes hypothèses, l'équation de Kolmogoroff (5) est valide et une solution de cette équation qui satisfait aux conditions (6) et (7) est la fonction génératrice des moments d'un endroit de premier passage pour un processus de diffusion bidimensionnel  $\xi(t) = (x(t), y(t))$ ,  $y(t)$  étant un processus de diffusion dont les moments infinitésimaux sont donnés par  $m(y)$  et  $2v(y)$ .

Donc, on peut affirmer qu'une condition suffisante pour qu'une fonction complexe  $M(x, y; a)$  puisse être considérée comme la fonction génératrice des moments d'un endroit de premier passage  $x(T(y))$ , où  $T(y)$  est défini en (3), est qu'elle doit être une solution de l'équation (5), en plus de satisfaire à (6) et (7), pour des fonctions  $m(y)$  et  $v(y)$  qui satisfont aux hypothèses H1 et H2. De plus, on déduit de l'équation (8) que l'on peut supposer, sans perte de généralité, que  $x(0) = 0$ .

Maintenant, en isolant  $m(y)$  dans l'équation (5), on obtient (en laissant tomber les arguments  $x (= 0)$  et  $a$  de la fonction  $M$ ):

$$m(y) = ay \frac{M(y)}{M'(y)} - v(y) \frac{M''(y)}{M'(y)}.$$

En utilisant le fait que  $m(y)$  est une fonction réelle, on peut écrire que

$$m(y) = yR_1 - v(y)R_2 \quad (9)$$

et

$$0 = yI_1 - v(y)I_2,$$

d'où l'on tire:

$$v(y) = yI_1/I_2, \quad (10)$$

où

$$R_1 \doteq \operatorname{Re}\{aM/M'\},$$

$$R_2 \doteq \operatorname{Re}\{M''/M'\},$$

et  $I_1$  et  $I_2$  sont les parties imaginaires des quantités entre accolades.

Donc, on déduit que le membre droit de l'équation (10) ne doit pas dépendre du paramètre  $a$  et doit être tel que la fonction  $v(y)$  correspondante vérifie l'hypothèse H2. Si tel est le cas, on peut alors remplacer  $v(y)$  par le membre droit de l'équation (10) dans l'équation (9). Ici aussi, la fonction  $m(y)$  ainsi définie ne doit pas dépendre de  $a$  et elle doit vérifier l'hypothèse H1.

Nous avons donc démontré le théorème suivant.

**Théorème 2.1** *Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction complexe  $M$  puisse être interprétée comme étant la fonction génératrice des moments d'un endroit de premier passage,  $x(T(y))$ , pour un processus de diffusion bidimensionnel  $(x(t), y(t))$  défini par le système (1), (2) sont qu'elle doit satisfaire aux conditions (6) et (7) (où l'on suppose que  $x = 0$ ) et que les fonctions  $v(y)$  et  $m(y)$  définies par les équations (10) et (9), respectivement, ne doivent pas dépendre du paramètre  $a$  et doivent vérifier les hypothèses H1 et H2.*

#### Remarques.

1) Dans le cas où  $y = \infty$  est une frontière inaccessible pour le processus  $y(t)$ , c'est-à-dire une frontière que le processus a une probabilité nulle d'atteindre en un temps fini, le fait que  $m'(y)$ ,  $v(y)$ ,  $v'(y)$  et  $v''(y)$  ne soient pas bornées à l'infini (ce qui est nécessaire, selon les hypothèses H1 et H2) ne devrait pas causer de problème véritable.

2) Si l'on décide d'isoler la fonction  $v(y)$  dans l'équation (5), plutôt que  $m(y)$ , les équations (10) et (9) sont remplacées par

$$m(y) = yIm_1/Im_2 \quad (11)$$

et

$$v(y) = yRe_1 - m(y)Re_2, \quad (12)$$

où

$$Re_1 \doteq Re\{aM/M''\},$$

$$Re_2 \doteq Re\{M'/M''\},$$

et les  $Im_i$  sont les parties imaginaires correspondantes, pour  $i = 1, 2$ . Cependant, les équations (10) et (9) nous semblent plus faciles à utiliser en pratique.

À la section suivante, nous allons donner des exemples où le théorème ci-dessus est utilisé pour construire des solutions explicites à des problèmes d'endroit de premier passage pour des processus de diffusion intégrés.

### 3 Exemples d'utilisation du théorème.

En premier lieu, on peut mentionner que les solutions déjà connues aux problèmes du type considéré ci-dessus nous permettent de vérifier la validité du théorème dans ces cas particuliers. En effet, dans le cas où  $y(t)$  est un mouvement brownien standard, la fonction  $M(y; a)$  est donnée (voir Lefebvre (1989a)) par

$$M(y; a) = Ai(a^{1/3}y)/Ai(a^{1/3}d),$$

où  $Ai$  est une fonction d'Airy. De même, dans le cas où  $y(t)$  est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, on trouve (voir (Lefebvre (1989b)) que

$$M(y; a) = \exp[(y^2 - d^2)/4]U(c, y + 2a)/U(c, d + 2a),$$

où  $U$  est la fonction de Whittaker (voir Abramowitz et Stegun (1965, p. 687)) et  $c \doteq -[a^{1/2} + (1/2)]$ . Toutefois, les calculs requis pour obtenir les fonctions

$v(y)$  et  $m(y)$  à l'aide des équations (10) et (9) (ou (12) et (11)), sont lourds lorsque la fonction  $M(y; a)$  est donnée par une fonction spéciale comme ci-dessus. Notons qu'on pourrait avoir recours à un logiciel mathématique, comme *Mathematica* par exemple, pour obtenir  $v(y)$  et  $m(y)$ . Cependant, nous préférons donner des exemples plus simples, où les calculs se font directement. Étant donné que, dans les applications, il est souvent nécessaire de remplacer une solution exacte exprimée à l'aide de fonctions spéciales par une solution approximative donnée par des fonctions élémentaires, il nous semble préférable de présenter des exemples où la fonction  $M(y; a)$  est assez simple et de voir à quel processus de diffusion  $y(t)$  correspond la fonction choisie.

Un premier exemple où les calculs requis pour obtenir  $v(y)$  et  $m(y)$  se font directement est celui pour lequel (voir Lefebvre (1990))

$$M(y; a) = K_0(2\sqrt{ay})/K_0(2\sqrt{ad}) \quad (13)$$

pour  $y \geq d > 0$ , où  $K_0$  est une fonction de Bessel modifiée. En utilisant les formules (voir Abramowitz et Stegun (1965, p. 376))

$$K'_0(z) = -K_1(z)$$

et

$$K'_1(z) = -K_0(z) - \frac{1}{z}K_1(z),$$

on trouve que  $v(y) = y^2$  et  $m(y) = y$ . Ainsi, la fonction  $M(y; a)$  définie en (13) correspond au processus de diffusion unidimensionnel  $y(t)$  qui est parfois appelé un mouvement brownien géométrique, ou encore un processus lognormal (voir Karlin et Taylor (1981, p. 175)). Il faut maintenant vérifier si la condition (6) (avec  $x = 0$ ), de même que les hypothèses H1 et H2 sont satisfaites. Dans le cas de la condition (6), on peut supposer, maintenant que les moments infinitésimaux  $m(y)$  et  $2v(y)$  ont été calculés, que  $a$  est en fait un paramètre réel positif. La condition (6), avec  $x = 0$ , devient alors

$$0 < M(y; a) < 1 \quad \forall y > d.$$



Or, la fonction  $K_0(x)$  est réelle et décroissante pour  $x > 0$ . Alors, la fonction  $M(y; a)$  donnée en (13) satisfait à cette condition. De plus,  $m(y) = y$  satisfait à l'hypothèse H1. Cependant, la fonction  $v(y) = y^2$ , de même que sa dérivée, ne sont pas bornées dans l'intervalle  $(d, \infty)$ , de sorte que l'hypothèse H2 n'est pas respectée. Toutefois, en utilisant les formules dans Karlin et Taylor (1981, section 15.6), on montre facilement que  $y = \infty$  est une frontière naturelle, et donc inaccessible, pour le processus  $y(t)$ . Par conséquent, le fait que  $v(y)$  et  $v'(y)$  ne soient pas bornées dans l'intervalle  $(d, \infty)$  peut être négligé.

Notons que  $y = 0$  est également une frontière naturelle pour le mouvement brownien géométrique défini ci-dessus, de sorte que l'on aurait pu considérer le problème où  $0 < y \leq d$ . Dans ce cas, la solution obtenue est (voir Lefebvre (1990))

$$M(y; a) = I_0(2\sqrt{ay})/I_0(2\sqrt{ad}),$$

où  $I_0$  est une autre fonction de Bessel modifiée. Cette fois-ci, l'hypothèse H2 est vérifiée puisque les fonctions  $v(y) = y^2$  et  $v'(y) = 2y$  sont bornées dans l'intervalle  $(0, d)$ .

Considérons maintenant la fonction

$$M(y; a) = \exp[a(d - y)] \quad \text{pour } y \geq d.$$

On obtient immédiatement de l'équation (10) que  $v(y) \equiv 0$ . Puisque  $v(y)$  doit être une fonction strictement positive (car si  $v(y) \equiv 0$  le problème entier devient déterministe), on doit conclure qu'il n'y a aucun processus de diffusion  $y(t)$  pour lequel la fonction  $M(y; a) = \exp[a(d - y)]$  puisse être interprétée comme étant égale à  $E\{\exp[-ax(T(y))]|x(0) = 0, y(0) = y\}$ .

En fait, un problème qui arrive plus fréquemment lorsque l'on calcule les fonctions  $v(y)$  et  $m(y)$  qui correspondent à la fonction  $M(y; a)$  choisie est que  $v(y)$  et  $m(y)$  dépendent souvent du paramètre  $a$ , ce qui contredit une des conditions de validité du théorème 2.1.

Si l'on modifie quelque peu la fonction  $M(y; a)$  ci-dessus en posant:

$$M(y; a) = \exp[\sqrt{a}(d - y)], \tag{14}$$

on trouve que

$$v(y) = y$$

et

$$m(y) = 0.$$

Puisque  $y = \infty$  est une frontière inaccessible pour le processus de diffusion  $y(t)$  dont les moments infinitésimaux sont  $m(y) = 0$  et  $2v(y) = 2y$ , et puisque l'hypothèse H1 et la condition (6) sont vérifiées, on peut affirmer que la fonction  $M(y; a)$  définie en (14) est la fonction génératrice des moments de  $x(T(y))$  pour le processus de diffusion défini par

$$dy(t) = \sqrt{2y(t)}dW(t).$$

Notons que ce processus, à une constante multiplicative près, est connu sous le nom du "carré de Bessel" de dimension 0 (voir Revuz et Yor (1994, chap. XI)).

Deux autres fonctions du type exponentiel que l'on peut considérer sont les suivantes:

$$M_1(y; a) = \exp[\sqrt{a}(d^2 - y^2)] \quad \text{pour } y \geq d > 0 \quad (15)$$

et

$$M_2(y; a) = \exp[2\sqrt{a}(d^{1/2} - y^{1/2})] \quad \text{pour } y \geq d \geq 0. \quad (16)$$

Des calculs élémentaires nous donnent:

$$m_1(y) = -y^{-2} \quad \text{et} \quad v_1(y) = y^{-1}$$

dans le cas de la fonction  $M_1$ , tandis qu'avec  $M_2$  on obtient:

$$m_2(y) = y/2 \quad \text{et} \quad v_2(y) = y^2.$$

Les fonctions  $m_1(y)$  et  $v_1(y)$  ci-dessus satisfont aux hypothèses H1 et H2, respectivement, et la condition (6) est également vérifiée. Alors la fonction  $M_1(y; a)$  définie en (15) est bien une fonction génératrice des moments pour un endroit de premier passage  $x(T(y))$ .

Le second exemple ci-dessus est, à notre avis, plus intéressant. On voit que les moments infinitésimaux que l'on a calculés sont semblables à ceux du mouvement brownien géométrique considéré auparavant. En fait, si  $X(t)$  est un mouvement brownien dont la moyenne infinitésimale est égale à  $\mu$  et la variance infinitésimale à  $\sigma^2$ , alors le mouvement brownien géométrique, défini par

$$Y(t) = \exp[X(t)],$$

possède des moments infinitésimaux donnés par (voir Karlin et Taylor (1981, p. 175))

$$\mu_Y(y) = [\mu + (1/2)\sigma^2]y$$

et

$$\sigma_Y^2(y) = \sigma^2 y^2.$$

Ainsi, on déduit de ce qui précède que la fonction  $M_2(y; a)$  définie en (13) correspond au cas où  $\mu = 0$  et  $\sigma^2 = 2$ , tandis que celle définie en (16) est telle que  $\sigma^2 = 2$  mais  $\mu = -1/2$ . Il est clair que dans ce cas aussi le processus  $y(t)$  possède une frontière inaccessible en  $y = \infty$ , et on peut conclure comme précédemment que  $M_2$  est une fonction génératrice des moments d'un endroit de premier passage pour un processus intégré.

Un autre exemple avec une fonction élémentaire est celui où

$$M_3(y; a) = (d/y)^{\sqrt{a}} \quad \text{pour } y \geq d > 0.$$

Cette fois-ci, on trouve que

$$m_3(y) = y^2 \quad \text{et} \quad v_3(y) = y^3.$$

Étant donné que  $y = \infty$  est une frontière inaccessible pour le processus de diffusion  $y(t)$  dont les paramètres infinitésimaux sont  $y^2$  et  $2y^3$ , la fonction  $M_3$  est aussi valide, puisque la condition (6) est satisfaite.

Finalement, un dernier exemple est le suivant:

$$M_4(y; a) = (1 + y)^{-\sqrt{a}} \quad \text{pour } y \geq 0.$$

On a alors:

$$m_4(y) = y(1 + y) \quad \text{et} \quad v_4(y) = y(1 + y)^2.$$

Le même raisonnement que dans le cas précédent nous permet de conclure que  $M(y; a)$  est la fonction génératrice des moments de l'endroit de premier passage  $x(T(y))$  pour le processus  $y(t)$  défini par

$$dy(t) = y(t)[1 + y(t)]dt + [y(t)]^{1/2}[1 + y(t)]dW(t).$$

#### 4 Conclusion.

Dans cette note, nous avons considéré le problème de construire des solutions explicites à des problèmes d'endroit de premier passage pour des processus de diffusion intégrés. Nous avons démontré un théorème qui donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction complexe quelconque puisse être considérée comme la fonction génératrice des moments d'un tel endroit de premier passage. De plus, le théorème a été utilisé pour construire plusieurs exemples de fonctions complexes qui peuvent effectivement être associées à un certain processus de diffusion unidimensionnel. On s'est limité à des exemples où la fonction choisie était relativement simple, principalement à cause du fait que, comme mentionné ci-haut, il est souvent nécessaire dans les applications de remplacer une solution exacte exprimée à l'aide de fonctions spéciales par une solution approximative donnée par des fonctions élémentaires.

Pour démontrer le théorème, on s'est inspiré de l'article de Capocelli et Ricciardi (1972) qui donne une méthode pour construire des fonctions génératrices des moments d'instant de premier passage pour des processus de diffusion unidimensionnels. Une généralisation de leurs résultats peut être envisagée au cas des processus de diffusion bidimensionnels. Cependant, il faudra se limiter à des cas particuliers des processus bidimensionnels car l'équation de Kolmogoroff qui correspond à l'équation (5), en deux dimensions, contient cinq fonctions inconnues: les deux moyennes infinitésimales

et les trois moments infinitésimaux d'ordre 2 (si l'on suppose que les deux processus ne sont pas nécessairement indépendants).

## Références

ABRAMOWITZ, M. et STEGUN, I. A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York.

CAPOCELLI, R. M. et RICCIARDI, L. M. (1972). On the inverse of the first passage time probability problem. *J. Appl. Probab.* **9** 270-287.

FLEMING, W. H. et RISHEL, R. W. (1975). *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer-Verlag, Berlin.

GIORNO, V., NOBILE, A. G. et RICCIARDI, L. M. (1988). A new approach to the construction of first-passage-time densities. *Cybernet. Syst.* **88** 375-381.

GUTIÉRREZ JÁIMEZ, R., JUAN GONZALEZ, A. et ROMÁN ROMÁN, P. (1991). Construction of first-passage-time densities for a diffusion process which is not necessarily time-homogeneous. *J. Appl. Probab.* **28** 903-909.

KARLIN, S. et TAYLOR, H. (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York.

LACHAL, A. (1991). Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien. *Ann. I.H.P. sect. B* **27** 385-405.

LEFEBVRE, M. (1989a). First-passage densities of a two-dimensional process. *SIAM J. Appl. Math.* **49** 1514-1523.

LEFEBVRE, M. (1989b). Moment generating function of a first hitting place for the integrated Ornstein-Uhlenbeck process. *Stoch. Proc. and their Appl.* **32** 281-287.

LEFEBVRE, M. (1990). Hitting lines at minimal cost with a Gaussian process. *Automatica* **26** 435-436.

REVUZ, D. et YOR, M. (1994). *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, Berlin.

Département de mathématiques appliquées  
École Polytechnique de Montréal  
C. P. 6079, Succursale Centre-ville  
Montréal, CANADA H3C 3A7

# A GENERAL FAMILY OF PROBABILITY DISTRIBUTIONS

Gilbert SAFORA

Conservatoire National des Arts et Métiers

Chaire de Statistique Appliquée

292, Rue Saint-Martin

75141 Paris, Cedex 03

FRANCE

Vasile PREDA

University of Bucharest

Mathematics Faculty

14, Academiei str.

Bucharest - ROMANIA

## Abstract

A new family of probability distributions is defined and Bayes estimation, Fisher information, Shannon entropy, an information differential metric and a James estimator are studied. This family is an extension of some families considered in statistics. Also some procedures to obtain the moment and maximum likelihood estimates are given.

## 1. Introduction.

The purpose of this paper is to define a new family of compound probability distributions and to stated some theoretical results and procedures of this family. This family of probability distributions is an extension of the families