



HAL
open science

On Estimation Of Monotone And Convex Boundaries

A Korostelev, L Simar, A Tsybakov

► **To cite this version:**

A Korostelev, L Simar, A Tsybakov. On Estimation Of Monotone And Convex Boundaries. Annales de l'ISUP, 1995, XXXIX (1), pp.3-18. hal-03659948

HAL Id: hal-03659948

<https://hal.science/hal-03659948>

Submitted on 5 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Pub. Inst. Stat. Univ. Paris
 XXXIX, fasc. 1, 1995, 3 à 18

ON ESTIMATION OF MONOTONE AND CONVEX BOUNDARIES

By A.P. KOROSTELEV^{*}, L.SIMAR^{**} and A.B.TSYBAKOV^{***}

Abstract

We study the problem of estimating a set G in \mathbb{R}^k (or, equivalently, estimating its boundary) given n independent identically distributed in G observations X_1, \dots, X_n . We suppose that the boundary of G can be represented as a monotone or convex function of $k-1$ arguments. We evaluate the risks of several estimators of boundaries and show that they converge with the best possible rates. A general density of X_i 's with the support G is considered, as well as the extension to the case where a small portion of "data outliers" falls out of the set G .

AMS 1991 Subject classification: 62 G05, 62 G20

Key words and phrases: monotone boundary, convex boundary, free disposal hull, data envelopment analysis, estimation of support of a density, minimax risk

Short title: Monotone and Convex Boundary Estimation

^{*} Institute of System Analysis, Russian Academy of Sciences,
 Prospect 60-let Oktyabrya 9, Moscow 117312 Russia

^{**} Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain,
 34, voie du Roman Pays, B-1348, Louvain-la-Neuve, Belgium

^{***} Université Paris VI, LSTA, 4, Pl. Jussieu, Tour 45-55, B.P.
 158, 75252 Paris, France, and Institute for Problems of Information
 Transmission, Russian Academy of Sciences

1. **Introduction.** Let $g(x_1, \dots, x_s)$ be a function of the arguments x_1, \dots, x_s , defined on the cube $[0, 1]^s$ in \mathbb{R}^s and such that $0 \leq g(x_1, \dots, x_s) \leq 1$, $s \geq 1$. The function g is called *boundary*. Define G as a closure of the $(s+1)$ -dimensional set

$$\left\{ x = (x_1, \dots, x_{s+1}) \in K: 0 \leq x_{s+1} \leq g(x_1, \dots, x_s) \right\},$$

where $K = [0, 1]^{s+1}$. We call G the set under the boundary g .

Consider the problem of estimating the boundary g (or, equivalently, the set G) given n independent identically distributed in G observations X_1, \dots, X_n .

We suppose that the boundary g is either monotone or convex function of its arguments.

The problem of estimating a convex boundary was studied already by Farrell (1957) in the context of measuring the efficiency of enterprises. He proposed the so called *data envelopment analysis* (DEA) method for estimation of g . The DEA estimator is defined as the "lowest" convex monotone nondecreasing function covering all the sample points X_i . Deprins, Simar and Tulkens (1984) developed a similar approach in the case of monotone boundaries with possible non-convexity and introduced the *free disposal hull* (FDH) estimator of the set G , which is denoted F_n and defined as follows:

$$F_n = \bigcup_{i=1}^n FD(X_i)$$

Here and later $FD(v)$ for a point $v = (v_1, \dots, v_{s+1}) \in K$ denotes the "free disposal set" related to v :

$$FD(v) = \left\{ x = (x_1, \dots, x_{s+1}) \in K: x_1 \geq v_1, \dots, x_s \geq v_s, x_{s+1} \leq v_{s+1} \right\}.$$

In other words, the free disposal hull is the set under the "lowest" monotone step function g covering all the sample points X_i . Also, it is easy to see that F_n is the nonparametric *maximum likelihood estimator* of G on the class of all sets $G \subseteq K$ with monotone boundaries, provided X_i have the uniform density on G (see Korostelev, Simar and Tsybakov (1992)). Similarly, the Farrell's DEA estimator of G , which we denote later as D_n , is the maximum likelihood estimator on the class of sets G under convex monotone

boundaries.

The study of statistical properties of FDH estimator is given in our previous paper (Korostelev, Simar and Tsybakov (1992)). We analysed the asymptotic behaviour of a risk of FDH and proposed an improvement on F_n based on the idea of "blowing up" the free disposal hull, which lead to the exact asymptotically efficient estimator.

In Korostelev, Simar and Tsybakov (1992) the risk function was defined in terms of the Hausdorff distance between sets. Here we implement another distance, namely, the Lebesgue measure of symmetric difference of sets. We evaluate the risks of FDH as well as DEA under this distance measure and show that FDH and DEA converge with the best possible rates. Unlike Korostelev, Simar and Tsybakov (1992) we consider the general setup ($s \geq 1$, non-uniform distribution of X_1). We also treat the case of possible "outliers" in the data falling out of the set G . These generalisations and also the fact that we do not use the Hausdorff metric here do not allow to extend the exact asymptotical minimaxity result of Korostelev, Simar and Tsybakov (1992). Note, that the case of convex sets G is much more delicate, and, even for $s=1$ and for the uniform distribution of X_1 , the extension of the result of Korostelev, Simar and Tsybakov (1992) is not straightforward (see Korostelev and Tsybakov (1993c)).

The problem we study here is a special case of the density support estimation problem, which was first considered by Geffroy (1964) and Rényi and Sulanke (1963, 1964). For further references see e.g. Chevalier (1976), Ripley and Rasson (1977), Devroye and Wise (1980), Korostelev and Tsybakov (1993a, 1993b, ch.7, 1993c), Mammen and Tsybakov (1992), Tsybakov (1992), Härdle, Park and Tsybakov (1993).

2. Definitions and the main result.

Denote by \mathcal{G}_{mon} the class of all sets G under the boundaries $g(x_1, \dots, x_s)$ which are monotone functions in each coordinate x_j , $j=1, \dots, s$, and such that $\text{mes}(G) \neq 0$, where $\text{mes}(G)$ denotes the Lebesgue measure of G . Quite similarly, denote $\mathcal{G}_{\text{conv}}$ the class of all sets G under the boundaries $g(x_1, \dots, x_s)$ which are convex functions of (x_1, \dots, x_s) , and such that $\text{mes}(G) \neq 0$. Define $\mathcal{G}_{\text{mc}} = \mathcal{G}_{\text{conv}} \cap \mathcal{G}_{\text{mon}}$.

Let $Q(x)$ be a continuous strictly positive function on $K=[0,1]^{s+1}$. Assume that the distribution of each independent observation $X_i \in K$, $i=1, \dots, n$, has the density

$$f_G(x) = Q(x)I(x \in G) / \int_G Q(x) dx, \quad x \in K,$$

where $I(\cdot)$ is the indicator function. Denote P_G the joint distribution of X_1, \dots, X_n when each X_i has the density f_G , and let E_G be the expectation with respect to P_G .

By an estimator \hat{G}_n of G we mean an arbitrary closed set in K measurable with respect to X_1, \dots, X_n . We study the nonparametric maximum likelihood estimators of G in the classes \mathcal{S}_{mon} , $\mathcal{S}_{\text{conv}}$ and \mathcal{S}_{mc} . If \mathcal{S} is either of these classes, the maximum likelihood estimator (MLE) is

$$\begin{aligned} G_n^* &= \operatorname{argmax}_{G \in \mathcal{S}} \prod_{i=1}^n \left\{ Q(X_i) I(X_i \in G) \left[\int_G Q(x) dx \right]^{-1} \right\} = \\ &= \operatorname{argmax}_{\substack{G \in \mathcal{S}: \\ G \supseteq \{X_1, \dots, X_n\}}} \prod_{i=1}^n \left\{ Q(X_i) \left[\int_G Q(x) dx \right]^{-1} \right\} = \operatorname{argmin}_{\substack{G \in \mathcal{S}: \\ G \supseteq \{X_1, \dots, X_n\}}} \int_G Q(x) dx, \\ &= \operatorname{argmin}_{\substack{G \in \mathcal{S}: \\ G \supseteq \{X_1, \dots, X_n\}}} \operatorname{mes}(G), \end{aligned}$$

since Q is strictly positive. In particular, we get

$$G_n^* = \begin{cases} F_n & \text{if } \mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{mon}}, \\ D_n & \text{if } \mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{mc}}. \end{cases}$$

If $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{conv}}$, the maximum likelihood estimator G_n^* is the smallest convex set containing X_1, \dots, X_n and K' where K' is the projection of K onto the space of the first s coordinates.

Also, if \mathcal{S} is either of the classes \mathcal{S}_{mon} , $\mathcal{S}_{\text{conv}}$, or \mathcal{S}_{mc} , the MLE G_n^* is a sufficient statistic. In fact, consider \mathcal{S}_{mon} , for example. If $G \in \mathcal{S}_{\text{mon}}$, the joint density of observations may be written as

$$\prod_{i=1}^n \left\{ Q(X_i) I(X_i \in G) \left[\int_G Q(x) dx \right]^{-1} \right\} = \varphi_G(F_n) h(X_1, \dots, X_n),$$

where $\varphi_G(F_n) = I\{F_n \subseteq G\} \left[\int_G Q(x) dx \right]^{-n}$, and $h(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n Q(X_i)$.

Using the factorization theorem, we see that F_n is a sufficient statistic.

The discrepancy between an estimator \hat{G}_n and the true set G is quantified as the Lebesgue measure of their symmetric difference:

$$d(G, \hat{G}_n) = \text{mes}(G \Delta \hat{G}_n).$$

Clearly, $d(\cdot, \cdot)$ is a distance on the set of all closed subsets of K .

If \mathcal{G} is one of the classes \mathcal{G}_{mon} , $\mathcal{G}_{\text{conv}}$ or \mathcal{G}_{mc} , and if $\lambda > 0$, we denote $\mathcal{G}(\lambda) = \mathcal{G} \cap \{G \subseteq K: \text{mes}(G) \geq \lambda\}$ (e.g. $\mathcal{G}_{\text{mon}}(\lambda)$, etc.). In this paper we study the asymptotical properties of G_n^* (the maximum likelihood estimator on the class \mathcal{G}) assuming that the true set G belongs to a smaller class $\mathcal{G}(\lambda)$. This restriction is of technical nature, and sometimes can be dropped, but we don't discuss this here.

For an arbitrary estimator \hat{G}_n and arbitrary $q > 0$ we define the risk function

$$R(G, \hat{G}_n, q, \psi_n) = E_G \left[\psi_n^{-q} d^q(G, \hat{G}_n) \right],$$

where $\psi_n > 0$ is an appropriate normalizing factor, namely,

$$\psi_n = \psi_n(\mathcal{G}) = \begin{cases} n^{-1/(s+1)} & \text{if } \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{mon}}, \\ n^{-2/(s+2)} & \text{if } \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{conv}} \text{ or } \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{mc}}. \end{cases}$$

The following theorem shows that FDH and DEA estimators converge with the rate $\psi_n(\mathcal{G})$ and that no other estimator can converge with a faster rate.

THEOREM 1. *Let, for some $\lambda > 0$, $\mathcal{G}(\lambda)$ be one of the classes $\mathcal{G}_{\text{mon}}(\lambda)$, $\mathcal{G}_{\text{conv}}(\lambda)$ or $\mathcal{G}_{\text{mc}}(\lambda)$ and let G_n^* be the MLE on \mathcal{G} where \mathcal{G} is \mathcal{G}_{mon} , $\mathcal{G}_{\text{conv}}$ or \mathcal{G}_{mc} respectively. Then*

$$(1) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{G \in \mathcal{G}(\lambda)} R(G, G_n^*, q, \psi_n(\mathcal{G})) \leq C, \quad \forall q \geq 1,$$

and

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \inf \sup_{\hat{G}_n \in \mathcal{G}(\lambda)} R(G, \hat{G}_n, q, \psi_n(\mathcal{G})) \geq c, \quad \forall q \geq 1,$$

where \inf denotes the infimum over all estimators and C, c are positive constants depending on q, λ and s only.

REMARK 1. Inspection of the proof of Theorem 1 shows that it holds also for the class of all convex subsets of K satisfying the condition $\text{mes}(G) \geq \lambda$, $\mathcal{G}'_{\text{conv}}(\lambda) = \left\{ G \subseteq K: G \text{ is closed convex and } \text{mes}(G) \geq \lambda \right\}$.

3. Proofs

Let \mathcal{N} be a collection of subsets of K . We say that \mathcal{N} is an ε -net with upper bracketing for a class \mathcal{G} in d -metric, if for any $G \in \mathcal{G}$ there exists $G' \in \mathcal{N}$ such that $d(G, G') \leq \varepsilon$ and $G \subseteq G'$.

The classes of sets $\mathcal{G}_{\text{mon}}, \mathcal{G}_{\text{conv}}$ and \mathcal{G}_{mc} are compacts w.r.t. the distance d . In particular, one can construct finite ε -nets with upper bracketing for these classes. The following lemma evaluates the cardinalities of such ε -nets.

LEMMA 1. For $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{mon}}, \mathcal{G}_{\text{conv}}, \mathcal{G}_{\text{mc}}$ there exist ε -nets with upper bracketing $\mathcal{N} = \mathcal{N}_+(\mathcal{G}, d, \varepsilon)$ such that

$$(3) \quad \log \text{card } \mathcal{N}_+(\mathcal{G}, d, \varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon^{-s}) & \text{if } \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{mon}}, \\ O(\varepsilon^{-s/2}) & \text{if } \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{conv}} \text{ or } \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{mc}}, \end{cases}$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$.

PROOF. For $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{mon}}$ the result follows directly from the construction of ε -net consisting of piecewise-constant monotone (in each coordinate) functions on $[0, 1]^s$ of the form

$$(4) \quad \tilde{g}(x_1, \dots, x_s) = \sum_{j=1}^{m^s} \tilde{g}_j I((x_1, \dots, x_s) \in \Delta_j),$$

where $m = \lceil 1/\varepsilon \rceil$, $\tilde{g}_j \in (0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, 1)$, and $\Delta_j, j=1, \dots, m^s$, are disjoint cubes with edge $1/m$ forming a partition of $[0, 1]^s$. Clearly, the set of all such functions is a $(s+1)/m$ -net on \mathcal{G}_{mon} in d -metric, and for

every $G \in \mathcal{G}_{\text{mon}}$ one can find a function of the form (4) such that the set G' under \tilde{g} satisfies $d(G, G') \leq (s+1)/m$ and $G \subseteq G'$. (In fact, $s+1$ is the maximal area of the surface of the graph corresponding to a monotone function g in K). The cardinality of the set of all the monotone functions of the form (4) is $O(m^s)$ (this is an easy consequence of the general result of Birman and Solomjak (1967)).

Since $\mathcal{G}_{\text{mc}} \subseteq \mathcal{G}_{\text{conv}}$, it remains to prove the lemma for $\mathcal{G}_{\text{conv}}$ only. For this we follow an argument of the proof of Theorem 4.1 in Mammen and Tsybakov (1992). Let d_{∞} denote the Hausdorff distance between sets in K . Since the graphs of functions g for sets $G \in \mathcal{G}_{\text{conv}}$ have finite surface (uniformly bounded for all $G \in \mathcal{G}_{\text{conv}}$), there exists an absolute constant $\bar{C} > 0$ such that for $G \in \mathcal{G}_{\text{conv}}$, $G' \subseteq K$ we have

$$(5) \quad d_{\infty}(G, G') \leq \varepsilon \Rightarrow d(G, G') \leq \bar{C}\varepsilon,$$

Denote $\mathcal{N}_{\varepsilon}^0$ a minimal $\varepsilon/2\bar{C}$ -net on $\mathcal{G}_{\text{conv}}$ in the Hausdorff metric d_{∞} . It is proved by Dudley (1974) that

$$(6) \quad \log \text{card } \mathcal{N}_{\varepsilon}^0 = O(\varepsilon^{-s/2}), \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

For every set $G \subseteq K$ we define the ε -neighbourhood

$$\mathcal{D}_{\varepsilon}(G) = \left\{ x \in K: \rho(x, G) \leq \varepsilon \right\},$$

where ρ denotes the Euclidean distance between the point x and the set G . Denote

$$(7) \quad \mathcal{N}_{+}(\mathcal{G}_{\text{conv}}, d, \varepsilon) = \left\{ \tilde{G} = \mathcal{D}_{\varepsilon/2\bar{C}}(G'): G' \in \mathcal{N}_{\varepsilon}^0 \right\}.$$

It is easy to see that the set (7) is in fact an ε -net with upper bracketing. In fact, the set (7) is an ε/\bar{C} -net on $\mathcal{G}_{\text{conv}}$ in the Hausdorff metric. Moreover, for every $G \in \mathcal{G}_{\text{conv}}$ there exists $\tilde{G} \in \mathcal{N}_{+}(\mathcal{G}_{\text{conv}}, d, \varepsilon)$ such that $G \subseteq \tilde{G}$ and $d_{\infty}(G, \tilde{G}) \leq \varepsilon/\bar{C}$ (for example, one can take $\tilde{G} = \mathcal{D}_{\varepsilon/2\bar{C}}(G')$ where G' is the element of $\mathcal{N}_{\varepsilon}^0$ closest to G in the Hausdorff metric). In view of (5) this entails that the set (7) is an ε -net with upper bracketing for $\mathcal{G}_{\text{conv}}$ in d -metric. But

$$\text{card } \mathcal{N}_{+}(\mathcal{G}_{\text{conv}}, d, \varepsilon) = \text{card } \mathcal{N}_{\varepsilon}^0.$$

This, together with (6), proves the lemma for $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{conv}}$.

PROOF OF THEOREM 1. Let us prove the inequality (1) first.

Let \mathcal{G} be one of the classes \mathcal{G}_{mon} , $\mathcal{G}_{\text{conv}}$, \mathcal{G}_{mc} . Denote for brevity $\mathcal{N}_\varepsilon = \mathcal{N}_+(\mathcal{G}, d, \varepsilon)$ where $\mathcal{N}_+(\mathcal{G}, d, \varepsilon)$ satisfies (3). Along with G_n^* consider the following estimator

$$G_{n,\varepsilon} = \underset{G \in \mathcal{N}_\varepsilon}{\text{argmin}} \text{mes}(G),$$

$$G \supseteq \{X_1, \dots, X_n\}$$

The same reasoning as in Section 2 shows that $G_{n,\varepsilon}$ is the maximum likelihood estimator on ε -net \mathcal{N}_ε . Moreover, it is straightforward that $G_{n,\varepsilon}$ is the set of smallest Lebesgue measure among all elements of \mathcal{N}_ε that contain G_n^* . In other words, $G_{n,\varepsilon}$ is the closest to G_n^* (in the sense of d -distance) among all elements of \mathcal{N}_ε that contain G_n^* . Since \mathcal{N}_ε is an ε -net with upper bracketing on $\mathcal{G}_{\text{conv}}$ and $G_n^* \in \mathcal{G}_{\text{conv}}$, this can be expressed as

$$G_{n,\varepsilon} \supseteq G_n^*,$$

$$(8) \quad d(G_n^*, G_{n,\varepsilon}) = \text{mes}(G_{n,\varepsilon} \setminus G_n^*) \leq \varepsilon.$$

Let us estimate the risk $R(G, G_{n,\varepsilon}, q, \psi_n(\mathcal{G}(\lambda)))$. We use Lemma A.1 from the Appendix. Let us check the conditions (A.1) and (A.2) of Lemma A.1. The joint density of X_1, \dots, X_n in our case is

$$p_G(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n \left\{ Q(X_i) I(X_i \in G) \left[\int_G Q(x) dx \right]^{-1} \right\},$$

and thus the Hellinger affinity equals $\left(\int p_G p_{G'} \right)^{1/2} = J^n$, where

$$J = \frac{S(G \cap G')}{[S(G)S(G')]^{1/2}},$$

with $S(G) = \int_G Q(x) dx$. If $S(G \cap G') = 0$, then $J = 0$, and (A.1) holds. If $S(G \cap G') \neq 0$, we have

$$J \leq \left[\frac{S^2(G \cap G')}{S^2(G \cap G') + S(G \cap G') S(G \Delta G')} \right]^{1/2} = \left[1 - \frac{S(G \Delta G')}{S(G \cup G')} \right]^{1/2}.$$

Clearly, $S(G\Delta G') \geq \min_x Q(x) d(G, G')$, and $S(G \cup G') \leq \int_K Q(x) dx$. Hence,

$$(9) \quad J \leq [1 - a_0 d(G, G')]^{1/2} \leq \exp[-a_0 d(G, G')/2]$$

where $a_0 = \min_x Q(x) \left[\int_K Q(x) dx \right]^{-1} > 0$. This gives (A.1) with $\alpha=1$, $c_1=1$, $c_2=a_0 n/2$.

It remains to check (A.2), namely we will prove the fact that for every $G \in \mathcal{G}(\lambda)$ there exists $G' \in \mathcal{N}_\varepsilon$ such that $d(G, G') \leq \varepsilon$ and

$$(10) \quad P_G \left\{ c_3 p_G(X_1, \dots, X_n) \geq p_{G'}(X_1, \dots, X_n) \right\} = 0,$$

where $c_3 > 0$ does not depend on G and G' .

Since \mathcal{N}_ε is an ε -net with upper bracketing on $\mathcal{G}(\lambda)$ in d -metric, for any $G \in \mathcal{G}(\lambda)$ there exists $G' \in \mathcal{N}_\varepsilon$ such that $d(G, G') \leq \varepsilon$ and $G' \supseteq G$. Using this we have

$$\begin{aligned} p_{G'}(X_1, \dots, X_n) &= \prod_{i=1}^n \left\{ Q(X_i) I(X_i \in G') [S(G')]^{-1} \right\} \geq \\ &\geq \prod_{i=1}^n \left\{ Q(X_i) I(X_i \in G) [S(G)]^{-1} [S(G)/S(G')] \right\} = \\ &= p_G(X_1, \dots, X_n) [S(G)/S(G')]^n, \end{aligned}$$

and

$$(11) \quad [S(G)/S(G')]^n = \left[1 - \frac{S(G' \setminus G)}{S(G')} \right]^n \geq \left[1 - \frac{\max_x Q(x) \varepsilon}{S(G)} \right]^n \geq (1 - a_1 \varepsilon)^n,$$

where $a_1 = \lambda^{-1} \frac{\max_x Q(x)}{\min_x Q(x)}$. Hence (10) holds with $c_3 = (1 - a_1 \varepsilon)^n/2$. Using

this and the estimate (3) for the ε -entropy we find that the condition (A.3) of Lemma A.1 is satisfied if we choose

$$(12) \quad \varepsilon = \begin{cases} n^{-1/(s+1)} & \text{if } \mathcal{G}(\lambda) = \mathcal{G}_{\text{mon}}(\lambda), \\ n^{-2/(s+2)} & \text{if } \mathcal{G}(\lambda) = \mathcal{G}_{\text{conv}}(\lambda) \text{ or } \mathcal{G}(\lambda) = \mathcal{G}_{\text{mc}}(\lambda). \end{cases}$$

Note that $\varepsilon = \psi_n(\mathcal{G})$. Thus, Lemma A.1 yields

$$\sup_{G \in \mathcal{G}(\lambda)} R(G, G_n, \psi_n(\mathcal{G}), q, \psi_n(\mathcal{G})) = O(1), \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

This, together with (8) for $\varepsilon = \psi_n(\mathcal{G})$ proves (1).

Let us prove the lower bound (2). The proof for $\mathcal{G}_{\text{conv}}(\lambda)$ and $\mathcal{G}_{\text{mc}}(\lambda)$ is in fact contained in Mammen and Tsybakov (1992) (Theorem 5.2). In the case $\mathcal{G}(\lambda) = \mathcal{G}_{\text{mon}}(\lambda)$ we follow the proof of Theorem 7.3.1 in Korostelev and Tsybakov (1993b), with some modifications that we sketch below. Choose the functions g of the form

$$g(t, \bar{\omega}) = \lambda + \tau_1 \sum_{i=1}^s x_i + (\tau_2/m) \sum_{j=1}^M \omega_j \phi(m(t-b_j)),$$

$$m = [n^{1/(s+1)}], \quad M = m^s, \quad \bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_M), \quad \omega_j \in (0, 1), \\ t = (x_1, \dots, x_s),$$

where $\tau_1, \tau_2 > 0$, $\phi(t)$ is infinitely many times differentiable function on \mathbb{R}^s with the support $(-1/2, 1/2)^s$ such that $0 \leq \phi(t) \leq 1$, and b_j is the center of the cube Δ_j . Choose τ_1, τ_2 so that $\tau_1 + \tau_2 \leq 1 - \lambda$. Then $g(t, \bar{\omega}) \leq 1$ for $t \in [0, 1]^s$. Let $G(\bar{\omega})$ be the set under $g(t, \bar{\omega})$. Clearly, the partial derivatives of $g(t, \bar{\omega})$ are non-negative if the ratio τ_1/τ_2 is chosen large enough. Thus $G(\bar{\omega}) \in \mathcal{G}_{\text{mon}}(\lambda)$ for suitably chosen τ_1, τ_2 .

To apply the proof of Theorem 7.3.1 in Korostelev and Tsybakov (1993b) it remains to show that the squared Hellinger distance

$$H^2 = H^2 \left(f_{G(\bar{\omega}_{j0})}, f_{G(\bar{\omega}_{j1})} \right) \text{ is } O(1/n), \text{ as } n \rightarrow \infty, \text{ where}$$

$$\bar{\omega}_{j0} = (\omega_1, \dots, \omega_{j-1}, 0, \omega_{j+1}, \dots, \omega_M),$$

$$\bar{\omega}_{j1} = (\omega_1, \dots, \omega_{j-1}, 1, \omega_{j+1}, \dots, \omega_M).$$

Using the elementary inequality $1 - \sqrt{a/b} \leq |a-b|/(2\sqrt{ab})$ we find

$$H^2 = 2 \left(1 - \frac{S(G(\bar{\omega}_{j0}) \cap G(\bar{\omega}_{j1}))}{[S(G(\bar{\omega}_{j0}))S(G(\bar{\omega}_{j1}))]^{1/2}} \right) = 2 \left(1 - \left(\frac{S(G(\bar{\omega}_{j0}))}{S(G(\bar{\omega}_{j1}))} \right)^{1/2} \right) \leq \\ \leq 2\lambda^{-1} S(G(\bar{\omega}_{j1}) \setminus G(\bar{\omega}_{j0})) = O(m^{-s-1}) = O(1/n),$$

as $n \rightarrow \infty$. This proves (2) for $\mathcal{G}(\lambda) = \mathcal{G}_{\text{mon}}(\lambda)$.

4. Models with outliers

In applications related to measuring efficiency of enterprises one often deals with the data sets that are better described by a certain model with outliers, rather than by the model considered above. By outliers we mean the data points that fall beyond the boundary of G . The density of observations is thus presented as a mixture of a density supported on G and a density supported on $\bar{G} = K \setminus G$. It will be convenient to assume that the portion of outliers in a sample is roughly θ/n , where $\theta > 0$ is a constant, asymptotically equal to the "average" number of outliers. More precisely, the density of X_1 is supposed to be

$$f_G(x) = (1 - \frac{\theta}{n})Q(x)I\{x \in G\} / \int_G Q(x)dx + \frac{\theta}{n}Q_1(x)I\{x \in \bar{G}\} / \int_{\bar{G}} Q_1(x)dx,$$

where $Q_1(x)$ is a continuous strictly positive function on K . For n large the values of f_G on \bar{G} are small as compared to the values of f_G on G .

The MLE for G on a class \mathcal{G} is given by

$$G_n^* = \operatorname{argmax}_{G \in \mathcal{G}} \prod_{i: X_i \in G} \left\{ (1 - \frac{\theta}{n})Q(X_i)S(G)^{-1} \right\} \prod_{i: X_i \notin G} \left\{ \frac{\theta}{n}Q_1(X_i)S_1(G)^{-1} \right\},$$

where $S_1(G) = \int_{\bar{G}} Q_1(x)dx$. Unlike the case considered earlier, it is

difficult to describe the set G_n^* geometrically and to give an algorithm of its construction for the classes \mathcal{G} considered in this paper. However, if we define G_n^* as the MLE on a discretised version of \mathcal{G} , such as an ε -net, the construction of G_n^* is feasible, and, as we show below, its statistical properties are quite similar to those obtained in Theorem 1.

If \mathcal{G} is one of the classes \mathcal{G}_{mon} , $\mathcal{G}_{\text{conv}}$ or \mathcal{G}_{mc} , and $\lambda > 0$, we denote $\mathcal{G}^*(\lambda) = \mathcal{G} \cap \left\{ G \subseteq K: 1 - \lambda \geq \operatorname{mes}(G) \geq \lambda \right\}$ (e.g. $\mathcal{G}_{\text{mon}}^*(\lambda)$), and $N_\varepsilon(\mathcal{G}) = N_+(\mathcal{G}, d, \varepsilon)$ where $N_+(\mathcal{G}, d, \varepsilon)$ satisfies (3). Obviously, $N_\varepsilon(\mathcal{G})$ contains a subset that we denote $N_\varepsilon^*(\mathcal{G}^*(\lambda))$ such that:

(i) $N_\varepsilon^*(\mathcal{G}(\lambda))$ is an ε -net with upper bracketing on $\mathcal{G}^*(\lambda)$,

(ii) $1-\lambda+\varepsilon \geq \text{mes}(G) \geq \lambda$ for $G \in N_\varepsilon^*(\mathcal{G}^*(\lambda))$,

(iii) $\log \text{card } N_\varepsilon^*(\mathcal{G}^*(\lambda)) = \begin{cases} O(\varepsilon^{-s}) & \text{if } \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{mon}}^*, \\ O(\varepsilon^{-s/2}) & \text{if } \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{conv}}^* \text{ or } \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{mc}}^*. \end{cases}$

THEOREM 2. Let, for some $\lambda > 0$, $\mathcal{G}^*(\lambda)$ be one of the classes $\mathcal{G}_{\text{mon}}^*(\lambda)$, $\mathcal{G}_{\text{conv}}^*(\lambda)$ or $\mathcal{G}_{\text{mc}}^*(\lambda)$ and let G_n^* be the MLE on ε -net $N_\varepsilon^*(\mathcal{G}^*(\lambda))$ and let \mathcal{G} is \mathcal{G}_{mon} , $\mathcal{G}_{\text{conv}}$ or \mathcal{G}_{mc} respectively. Then

$$(13) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{G \in \mathcal{G}^*(\lambda)} R(G, G_n^*, q, \psi_n(\mathcal{G})) \leq C, \quad \forall q \geq 1,$$

and

$$(14) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\hat{G}_n} \sup_{G \in \mathcal{G}^*(\lambda)} R(G, \hat{G}_n, q, \psi_n(\mathcal{G})) \geq c, \quad \forall q \geq 1,$$

where C, c are positive constants depending on q, λ and s only.

PROOF. We prove only the upper bound (13): the proof of the lower bound (14) is the same as in Theorem 1, since the parametric subfamilies of functions $g(t, \bar{\omega})$ in $\mathcal{G}(\lambda)$ are also the subfamilies of $\mathcal{G}^*(\lambda)$.

The proof of (13) is again based on Lemma A.1. Let us first check the condition (A.1) of this lemma. The joint density of X_1, \dots, X_n is now

$$p_G(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i: X_i \in G} \left\{ \left(1 - \frac{\theta}{n}\right) Q(X_i) S(G) \right\}^{-1} \prod_{i: X_i \notin G} \left\{ \frac{\theta}{n} Q_1(X_i) S_1(G) \right\}^{-1}.$$

Thus, $\int (p_G p_{G'})^{1/2} = J_1^n$

$$J_1 = \left(1 - \frac{\theta}{n}\right) \frac{S(G \cap G')}{[S(G)S(G')]^{1/2}} + \frac{\theta}{n} \frac{S_1(G \cup G')}{[S_1(G)S_1(G')]^{1/2}} + A,$$

where

$$A = \left[\left(1 - \frac{\theta}{n}\right) \frac{\theta}{n} \right]^{1/2} \left\{ \frac{\int I\{x \in G \setminus G'\} \sqrt{Q_1(x)Q(x)} dx}{[S(G)S_1(G')]^{1/2}} + \frac{\int I\{x \in G' \setminus G\} \sqrt{Q_1(x)Q(x)} dx}{[S_1(G)S(G')]^{1/2}} \right\}.$$

Now, $S(G) \geq \lambda \min_x Q(x) = s_0 > 0$, and similarly $S_1(G) \geq (\lambda - \varepsilon) \min_x Q_1(x) \geq (\lambda/2) \min_x Q_1(x) = s_1 > 0$, (if ε is small enough) for any G such that $1 - \lambda + \varepsilon \geq \text{mes}(G) \geq \lambda$. Hence

$$A \leq \left[\left(1 - \frac{\theta}{n}\right) \frac{\theta}{n} \right]^{1/2} \left\{ \sqrt{\max_x Q(x) \max_x Q_1(x)} / \sqrt{s_0 s_1} \right\} d(G, G') \leq a_2 n^{-1/2} d(G, G'),$$

and

$$\frac{\theta}{n} \frac{S_1(G \cup G')}{[S_1(G)S_1(G')]^{1/2}} \leq a_3 n^{-1},$$

where $a_2 > 0$ and $a_3 > 0$ are constants which do not depend on G and G' . Combining this with (9) we find that for $d(G, G') \geq \varepsilon$,

$$\begin{aligned} J_1 &\leq [1 - a_0 d(G, G')]^{1/2} + a_2 n^{-1/2} d(G, G') + a_3 n^{-1} \leq \\ &\leq 1 - a_0 d(G, G')/4 + a_3 n^{-1} \leq \exp(-a_0 \varepsilon/8) \end{aligned}$$

for n large enough (here we used the expression (12) for ε). Thus, the Hellinger affinity is estimated as $J_1^n \leq \exp(-na_0 \varepsilon/8)$ and the condition (A.1) holds with $\alpha=1$, $c_1=1$, $c_2=na_0/8$.

Let us check (A.2). Fix a set $G \in \mathcal{G}^*(\lambda)$. Since $\mathcal{N}_\varepsilon^*(\mathcal{G}^*(\lambda))$ is an ε -net with upper bracketing on $\mathcal{G}^*(\lambda)$ in d -metric, there exists $G' \in \mathcal{N}_\varepsilon^*(\mathcal{G}^*(\lambda))$ such that $d(G, G') \leq \varepsilon$ and $G' \supseteq G$. Consider this pair of sets (G, G') . We have

$$\begin{aligned} L &\triangleq \log \frac{p_{G'}(X_1, \dots, X_n)}{p_G(X_1, \dots, X_n)} = \sum_{i=1}^n I\{X_i \in G\} \log \left(\frac{S(G)}{S(G')} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^n I\{X_i \notin G'\} \log \left(\frac{S_1(G)}{S_1(G')} \right) + \sum_{i=1}^n I\{X_i \in G' \setminus G\} \left[\log \left(\frac{n-\theta}{\theta} \right) + \xi_i \right], \end{aligned}$$

where $\xi_i = \log \left(\frac{S_1(G)Q(X_i)}{S(G')Q_1(X_i)} \right)$ are i.i.d. bounded random variables, $|\xi_i| \leq a_5$ where $a_5 > 0$ does not depend on G and G' .

Similarly to (11) one obtains

$$(15) \quad S_1(G)/S_1(G') \geq 1 - a_4 \epsilon.$$

Using (15) and (11), (12) we get

$$(16) \quad E_G(L) \geq n \log(1 - a_1 \epsilon) \text{mes}(G) + n \log(1 - a_4 \epsilon) [1 - \text{mes}(G')] + \\ + n \left(\log \left(\frac{n - \theta}{\theta} \right) - a_5 \right) \text{mes}(G' \setminus G) \geq n \log(1 - a_6 \epsilon) \geq -2a_6 n \epsilon$$

for n large enough, where $a_6 = \max(a_1, a_4)$. Since L is a sum of i.i.d. bounded random variables and (16) holds, then the Bernstein inequality entails:

$$P_G \left(L \leq -4a_6 n \epsilon \right) \leq \exp(-a_7 n \epsilon)$$

with some $a_7 > 0$. Thus, (A.2) is satisfied with $c_3 = \exp(-4a_6 n \epsilon)$, $c_4 = \exp(-a_7 n \epsilon)$. Using this and the estimate (3) for the ϵ -entropy we conclude that the condition (A.3) is also satisfied with the choice of ϵ given in (12). This yields the theorem.

APPENDIX

We state below the special case of Lemma A.1 from Mammen and Tsybakov (1992), which we use in the proofs.

Let \mathcal{G} be a collection of subsets of K , and let $p_G(Z)$, $Z = (X_1, \dots, X_n)$, be a probability density indexed by $G \in \mathcal{G}$, where X_1, \dots, X_n are observations, $X_i \in K$.

Let \mathcal{N}_ϵ be an ϵ -net on \mathcal{G} w.r.t. the metric d , and let \hat{G}_n be the MLE on ϵ -net \mathcal{N}_ϵ :

$$\hat{G}_n = \operatorname{argmax}_{G \in \mathcal{N}_\epsilon} p_G(Z).$$

Assume that the density $p_G(Z)$ satisfies

$$(A.1) \quad \int \sqrt{p_G(Z)p_{G'}(Z)} \, dZ \leq c_1 \exp(-c_2 d(G, G')), \quad \forall G, G' \in \mathcal{N}_\epsilon,$$

and

(A.2) for every $G \in \mathcal{G}$ there exists $\tilde{G} \in \mathcal{N}_\varepsilon$ such that $d(G, \tilde{G}) \leq \varepsilon$, and

$$P_G \left\{ c_3 p_G(Z) \geq p_{\tilde{G}}(Z) \right\} \leq c_4,$$

where $c_1, c_2, c_3 > 0$ and $c_4 \geq 0$ are constants which do not depend on G, G' and \tilde{G} .

LEMMA A.1. (Mammen and Tsybakov (1992)). Assume (A.1) and (A.2). If there exist $\varepsilon > 0$ and $t_1 > 0$ such that

$$(A.3) \quad -\frac{1}{2} \log c_3 + \log(\text{card } \mathcal{N}_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} c_2 \varepsilon t, \quad t \geq t_1,$$

then

$$\sup_{G \in \mathcal{G}} E_G \left[\varepsilon^{-q} d^q(G, \hat{G}_n) \right] \leq t_1 + (D/\varepsilon)^q \left[c_1 \exp(-c_2 \varepsilon/2) + c_4 \right],$$

where $D = \sup_{G, G' \in \mathcal{G}} d(G, G')$.

$$G, G' \in \mathcal{G}$$

REFERENCES

- Birman, M.S., and Solomjak, M.Z. (1967) Piecewise-polynomial approximation of functions of the class W_p . *Mat.Sbornik* 73 295-317.
- Chevalier, J. (1976) Estimation du support et du contenu du support d'une loi de probabilité. *Ann. Inst. H.Poincaré*, sec. B. 12(4) 339-364.
- Deprins, D., Simar, L. and Tulkens, H. (1984) Measuring labor efficiency in post offices. In: *The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurements* (M. Marchand, P. Pestieau and H. Tulkens, eds). Amsterdam, North-Holland, 243-267.
- Devroye, L. and Wise, G.L. (1980) Detection of abnormal behavior via nonparametric estimation of the support. *SIAM J. Applied Math.* 38 480-488.
- Dudley, R.M. (1974) Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries. *J. Approx. Theory* 10 227-236.
- Farrell, M.J. (1957) The measurement of productive efficiency. *J. Royal Statist. Soc.*, A 120 253-281.
- Geffroy, J. (1964) Sur un problème d'estimation géométrique. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris* 13 191-220.

Härdle, W., Park, B.U. and Tsybakov, A.B. (1993) Estimation of non-sharp support boundaries. (Submitted to *J. of Multivariate Analysis*.)

Korostelev, A.P., Simar, L., Tsybakov, A.B. (1992) Efficient estimation of monotone boundaries. *Ann.Statist.*, to appear.

Korostelev, A.P. and Tsybakov, A.B. (1992) Asymptotically minimax image reconstruction problems. In: *Topics in Nonparametric Estimation*, Advances in Soviet Mathematics 12 (Khasminskii R.Z., ed.), AMS, Providence RI, 45-86.

Korostelev, A.P. and Tsybakov, A.B. (1993a) Estimation of support of a probability density and estimation of support functionals. *Problems of Information Transmission* 29 3-18.

Korostelev, A.P. and Tsybakov, A.B. (1993b) *Minimax Theory of Image Reconstruction*. Lecture Notes in Statist. V.82. Springer, N.Y. e.a.

Korostelev, A.P. and Tsybakov, A.B. (1993c) Asymptotic efficiency in estimation of a convex set. (Submitted to *Problems of Information Transmission*.)

Mammen, E. and Tsybakov, A.B. (1992) Asymptotical minimax results in image analysis for sets with smooth boundaries. Discussion Paper n.9205, Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain.

Rényi, A. and Sulanke, R. (1963) Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 2 75-84.

Rényi, A. and Sulanke, R. (1964) Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten. II. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 3 138-147.

Ripley, B.D. and Rassin, J.P. (1977) Finding the edge of a Poisson forest. *J. Appl. Prob.* 14 483-491.

Tsybakov, A.B. (1992) Multidimensional change-point problems and boundary estimation. To appear in Proceedings of the Conf. on Change-Point Problems, IMS Lecture Notes Monograph Series, Hayward, California.

Loi limite de l'estimateur à pas aléatoire de la densité moyenne continue d'un processus de Poisson et extension à un processus de Poisson aminci

Emmanuelle CRETOIS
Laboratoire Lmc / Imag
Tour IRMA
BP 53
38 041 Grenoble Cedex 9

Résumé : Nous étudions la vitesse de convergence de l'histogramme à pas aléatoire pour la densité moyenne d'un processus de Poisson ainsi que celle de l'histogramme usuel. Nous donnons ensuite des résultats similaires pour l'estimation de la fonction d'amincissement d'un processus de Poisson.

0. Introduction

L'article se compose de deux parties. La première (§1-2-3) traite de l'estimation de la densité moyenne f d'un processus de Poisson sur $[a, b]$. Au congrès des XXIV èmes journées de Statistique de Bruxelles [4], nous avons défini un estimateur à pas aléatoire f_n de f et étudié sa convergence L_1 et L_∞ .

Nous nous intéressons ici à la loi limite de cet estimateur. Après avoir rappelé la définition de l'histogramme à pas non aléatoire \hat{f}_n associé à une suite $k(n)$, nous montrons que, moyennant quelques hypothèses, la loi limite de $(f_n(x) - f(x))\sqrt{\frac{n}{k(n)f(x)}}$ est une loi normale centrée réduite. Puis, nous montrons que, sous certaines conditions, l'estimateur à pas aléatoire f_n associé aux entiers $\lambda_j(r)$ vérifie : l'espérance et la variance de $\lambda_j(N_n)^{\frac{1}{2}}(f_n(x) - f(x))$ tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini. (N_n sera défini plus loin)

La seconde partie (§4-5-6-7) porte sur l'étude de la fonction d'amincissement p de $[a, b]$ vers $[0, 1]$ d'un processus de Poisson sur $[a, b]$. Lorsque la densité moyenne du processus est connue, nous l'utilisons pour construire un estimateur (\hat{p}_n) de p à l'aide d'une partition aléatoire. Nous établissons ensuite une condition suffisante de convergence uniforme presque complète de $(\hat{p}_n - p)$ vers zéro. Lorsque la densité moyenne du processus est inconnue, nous définissons un estimateur \bar{p}_n de p et nous établissons une condition suffisante de convergence uniforme en probabilité de $\bar{p}_n - p$ vers zéro. Enfin, nous étudions la loi limite de l'estimateur \hat{p}_n .

1. Rappel du cas de l'estimateur à pas non aléatoire

Soit N un processus ponctuel de Poisson sur $[0, 1]$ de densité moyenne f . Nous supposons que f est continue, bornée et strictement positive sur $[0, 1]$. Soit une suite d'entiers $k(n)$ tendant vers l'infini avec n et un n -échantillon N_1, N_2, \dots, N_n du processus ponctuel N .

Nous posons :

$$I_{n,r} = \left[\frac{r-1}{k(n)}; \frac{r}{k(n)} \right] \quad \text{pour } r = 1, \dots, k(n) - 1$$

$$I_{n,k(n)} = \left[\frac{k(n)-1}{k(n)}; 1 \right]$$

Dans [2], M. Curioni a introduit l'estimateur de l'histogramme de f :

$$\hat{f}_n(x) = \frac{k(n) \sum_{i=1}^n N_i(I_{n,r})}{n} \quad \text{si } x \in I_{n,r}$$

et a démontré dans le cas où $k(n) = o\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)$ la convergence uniforme presque complète de $|\hat{f}_n - f|$ vers zéro.

Sous cette condition, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 1.1. : *Si la fonction f est lipschitzienne de rapport c et si la suite $k(n)$ vérifie la condition*

$$k(n)n^{-\frac{1}{3}} \rightarrow +\infty$$

alors pour tout x de $[0, 1]$, la variable aléatoire :

$$Y_n = (\hat{f}_n(x) - f(x)) \sqrt{\frac{n}{k(n)f(x)}}$$

tend en loi vers la loi normale centrée réduite $N(0, 1)$.

Démonstration : Soit $x \in [0, 1]$. Nous avons

$$Y_n = \left(\frac{\sum_{i=1}^n N_i(I_{n,r})k(n)}{n} - f(x) \right) \sqrt{\frac{n}{k(n)f(x)}} \quad \text{si } x \in I_{n,r}$$

Nous savons que les variables aléatoires indépendantes $N_i(I_{n,r})$ suivent une loi de Poisson de paramètre $\nu(I_{n,r})$ où, ν mesure moyenne de N , a pour densité f . Pour montrer le résultat, il suffit de prouver que la fonction caractéristique

de Y_n , $h_n(t) = E(e^{itY_n})$ converge vers la fonction caractéristique de $N(0, 1)$, $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Nous obtenons :

$$h_n(t) = \left(\sum_{k \geq 0} e^{it\sqrt{\frac{k(n)}{nf(x)}}} \frac{\left(\int_{I_{n,r}} f(y) dy \right)^k}{k!} e^{-\int_{I_{n,r}} f(y) dy} \right)^n$$

Après calculs et puisque $k(n) = o\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)$, nous obtenons :

$$h_n(t) = e^{it\sqrt{\frac{n}{k(n)f(x)}} \left[k(n) \int_{I_{n,r}} f(y) dy - f(x) \right] - \frac{t^2}{2} \frac{k(n)}{f(x)} \int_{I_{n,r}} f(y) dy + \varepsilon \left(k(n) \int_{I_{n,r}} f(y) dy \right)}$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction tendant vers zéro à l'infini. Considérons l'expression

$$A(n) = it\sqrt{\frac{n}{k(n)f(x)}} \left[k(n) \int_{I_{n,r}} f(y) dy - f(x) \right]$$

Nous avons :

$$|A(n)| \leq t\sqrt{\frac{n}{k(n)f(x)}} \left[k(n) \int_{I_{n,r}} |f(y) - f(x)| dy \right]$$

f étant lipschitzienne de rapport c , nous obtenons :

$$|A(n)| \leq tc\sqrt{\frac{n}{(k(n))^3 f(x)}}$$

Il suffit d'utiliser la condition $n = o((k(n))^3)$ pour montrer que pour tout t fixé, $|A(n)|$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. En remarquant que nous venons aussi de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k(n) \int_{I_{n,r}} f(y) dy = f(x)$$

nous pouvons écrire :

$$h_n(t) = e^{h_n^1(t)} \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n^1(t) = -\frac{t^2}{2}$$

et la fonction $x \rightarrow e^x$ étant continue, le résultat s'ensuit.

2. Définition de l'estimateur à pas aléatoire

Soit μ un processus ponctuel de Poisson sur $[a, b]$ de mesure moyenne ν de densité moyenne f sur $[a, b]$. Nous supposons que f est continue sur $[a, b]$. Soit une suite d'entiers $k(r)$ et, pour toute valeur de r , des entiers strictement positifs $\lambda_j(r), j = 1 \dots k(r)$ dont la somme doit être égale à $(r + 1)$. Nous disposons également d'un n -échantillon $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, du processus μ . Pour toute valeur r du nombre total de points de l'échantillon, nous définissons une partition aléatoire de la façon suivante :

- Nous ordonnons les points de l'échantillon :

$$X_0 = a \leq X_1 \leq \dots \leq X_r \leq X_{r+1} = b.$$

- Nous posons $\nu_0 = 0, \nu_j(r) = \nu_{j-1}(r) + \lambda_j(r)$ pour $j = 1 \dots k(r)$.

- Nous définissons enfin $A_j(r)$ par

$$A_j(r) = [X_{\nu_{j-1}(r)}, X_{\nu_j(r)}[\text{ pour } j = 1 \dots k(r) - 1$$

$$\text{et } A_{k(r)}(r) = [X_{\nu_{k(r)}-1}(r), b].$$

Les intervalles $A_j(r), j = 1 \dots k(r)$ forment la partition de $[a, b]$. L'estimateur de f est alors défini par

$$f_n(x) = \frac{\lambda_j(N_n)}{nl_j(N_n)} \text{ si } x \in A_j(N_n)$$

où $N_n = \sum_{i=1}^n \mu_i([a, b])$ est le nombre total de points de l'échantillon et $l_j(N_n)$ désigne la mesure de Lebesgue de $A_j(N_n)$.

3. Loi limite de l'estimateur

Théorème 3.1. *Si les deux conditions C_1 et C_2 ci-dessous sont réalisées nous avons pour tout x de $[a, b]$, j étant l'indice tel que $x \in A_j(N_n)$*

$$E \left((\lambda_j(N_n))^{\frac{1}{2}} (f_n(x) - f(x)) \right) \text{ tend vers zéro avec } \frac{1}{n}$$

$$VAR \left((\lambda_j(N_n))^{\frac{1}{2}} (f_n(x) - f(x)) \right) \text{ tend vers zéro avec } \frac{1}{n}.$$

La condition C_1 porte sur la fonction f continue sur $[a, b]$.

C_1 : f est lipschitzienne de rapport c .

La condition C_2 porte sur les $\lambda_j(r)$.

$$C_2 : \text{ il existe } \delta, \frac{1}{4} \leq \delta < \frac{1}{2} / \text{ pour tout } j = 1 \dots k(r), \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_j(r)}{r^\delta} = 1$$

Démonstration :

1 - **Notations :** Appelons Y_n la variable aléatoire :

$$Y_n = (\lambda_j(N_n))^{\frac{1}{2}} (f_n(x) - f(x))$$

Nous avons par définition :

$$f_n(x) = \frac{\lambda_j(N_n)}{nl_j(N_n)} \text{ pour } x \in A_j(N_n)$$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'écrire :

il existe un point aléatoire $y(N_n)$ tel que $\nu(A_j(N_n)) = f(y(N_n))l_j(N_n)$.

Nous pouvons alors écrire :

$$Y_n = (\lambda_j(N_n))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda_j(N_n)f(y(N_n))}{n\nu(A_j(N_n))} - f(x) \right)$$

Donc :

$$Y_n = (\lambda_j(N_n))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda_j(N_n)(f(y(N_n)) - f(x))}{n\nu(A_j(N_n))} \right) + (\lambda_j(N_n))^{\frac{1}{2}} f(x) \left(\frac{\lambda_j(N_n)}{n\nu(A_j(N_n))} - 1 \right)$$

Soit $Y_n = Y_{n,1} + Y_{n,2}$. Il suffit de montrer les quatre résultats suivants :

$$E(Y_{n,1}), E(Y_{n,2}), E((Y_{n,1})^2), E((Y_{n,2})^2)$$

tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Pour continuer, nous aurons besoin d'un lemme :

Lemme 3.2. : Si N_n est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre nC , pour tout réel δ tel que $0 < \delta < \frac{1}{2}$, la suite :

$$u_n = nP(N_n < nC(1 - n^{-\delta})) \text{ tend vers zéro avec } \frac{1}{n}$$

Preuve : Soit δ tel que $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

$$u_n = n \sum_{r < nC(1-n^{-\delta})} \frac{(nC)^r}{r!} e^{-nC}$$

D'après la formule de Stirling :

$$u_n = n \sum_{r < nC(1-n^{-\delta})} \frac{(nC)^r}{\left(\frac{r}{e}\right)^r e^{\theta_r} \sqrt{2\pi r}} e^{-nC} \text{ avec } 0 \leq \theta_r \leq \frac{1}{12r}$$

$$u_n \leq n \sum_{r < nC(1-n^{-\delta})} \frac{(nC e)^r}{r^r} e^{-nC}$$

L'étude de la fonction : $g(r) = \frac{(nC e)^r}{r^r}, r \geq 0 (g(0) = 1)$

montre qu'elle est croissante jusqu'à nC où elle atteint son maximum puis décroissante. Sur $[0, nC(1 - n^{-\delta})]$ son maximum est $g(nC(1 - n^{-\delta}))$. Nous avons donc :

$$u_n \leq n \sum_{r < nC(1-n^{-\delta})} \frac{(nC e)^{nC(1-n^{-\delta})}}{nC(1-n^{-\delta})^{nC(1-n^{-\delta})}} e^{-nC}$$

Soit :

$$u_n \leq n^2 C (1 - n^{-\delta}) \frac{(nC e)^{nC(1-n^{-\delta})}}{nC(1-n^{-\delta})^{nC(1-n^{-\delta})}} e^{-nC}$$

Finalement nous obtenons :

$$u_n \leq e^{\ln(n^2 C) + \ln(1-n^{-\delta})} e^{nC(1-n^{-\delta})(1-\ln(1-n^{-\delta}))} e^{-nC}$$

Comme $n^{-\delta}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, nous obtenons par un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1 - n^{-\delta})$:

$$u_n \leq e^{\ln(n^2 C) - n^{-\delta} - \frac{n^{-2\delta}}{2}} e^{-nCn^{-\delta} + nCn^{-\delta} - nC\frac{n^{-2\delta}}{2} + o(nn^{-2\delta})}$$

Comme $\delta < \frac{1}{2}$, nous en déduisons la convergence vers zéro de u_n . C.Q.F.D. Revenons au théorème.

2- Démonstration du premier résultat

$$Y_{n,1} = (\lambda_j(N_n))^{1/2} \left(\frac{\lambda_j(N_n)(f(y(N_n)) - f(x))}{n\nu(A_j(N_n))} \right)$$

Donc :

$$0 \leq |E(Y_{n,1})| \leq E \left((\lambda_j(N_n))^{1/2} \left(\frac{\lambda_j(N_n)|f(y(N_n)) - f(x)|}{n\nu(A_j(N_n))} \right) \right)$$

En utilisant la condition C_1 , nous obtenons :

$$0 \leq |E(Y_{n,1})| \leq E \left((\lambda_j(N_n))^{1/2} \left(\frac{\lambda_j(N_n)cl_j(N_n)}{n\nu(A_j(N_n))} \right) \right)$$

$$0 \leq |E(Y_{n,1})| \leq E \left((\lambda_j(N_n))^{1/2} \left(\frac{\lambda_j(N_n)c}{n \inf_{z \in [a,b]} f(z)} \right) \right)$$

Posons $A = \frac{c}{\inf_{z \in [a,b]} f(z)}$. Nous obtenons :

$$0 \leq |E(Y_{n,1})| \leq E \left((\lambda_j(N_n))^{3/2} \frac{A}{n} \right)$$

Comme $\lambda_j(r) \leq r + 1$ pour tout entier r , nous pouvons écrire :

$$\sum_{r < n\nu([a,b])(1-n^{-\delta})} \frac{A(\lambda_j(r))^{3/2}}{n} P(N_n = r) \leq A \frac{(n\nu([a,b])(1-n^{-\delta}) + 1)^{3/2}}{n} P(N_n < n\nu([a,b])(1-n^{-\delta}))$$

Le lemme précédent montre que cette expression tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

La condition $C_2 : \exists \delta < \frac{1}{2}, \forall j = 1 \dots k(r), \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_j(r)}{r^\delta} = 1$

implique $\forall j = 1 \dots k(r), \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_j(r)}{r^{\frac{1}{2}}} = 0$.

Pour j tel que $x \in A_j(N_n)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(\varepsilon)$, tel que :

$$n \geq n_0(\varepsilon) \implies \left[r \geq n\nu([a, b])(1 - n^{-\delta}) \implies \frac{\lambda_j(r)}{r^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon \right]$$

Nous pouvons donc écrire pour $n \geq n_0$,

$$\sum_{r \geq n\nu([a, b])(1 - n^{-\delta})} \frac{A(\lambda_j(r))^{\frac{3}{2}}}{n} P(N_n = r) <$$

$$\sum_{r \geq n\nu([a, b])(1 - n^{-\delta})} \frac{A(\varepsilon)^{\frac{3}{2}} r^{\frac{3}{4}}}{n} P(N_n = r)$$

et donc pour n suffisamment grand :

$$\sum_{r \geq n\nu([a, b])(1 - n^{-\delta})} \frac{A(\lambda_j(r))^{\frac{3}{2}}}{n} P(N_n = r) <$$

$$\sum_{r \in N^*} \frac{A(\varepsilon)^{\frac{3}{2}} r}{n} P(N_n = r) = (\varepsilon)^{\frac{3}{2}} A\nu([a, b])$$

Nous en déduisons que le premier terme de l'inégalité peut être rendu aussi petit que nous le voulons puisque ε est arbitraire. Ce premier terme tend donc vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

En rassemblant les deux résultats, il vient :

$$\sum_{r < n\nu([a, b])(1 - n^{-\delta})} \frac{A(\lambda_j(r))^{\frac{3}{2}}}{n} P(N_n = r) +$$

$$\sum_{r \geq n\nu([a, b])(1 - n^{-\delta})} \frac{A(\lambda_j(r))^{\frac{3}{2}}}{n} P(N_n = r)$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Or, ceci n'est autre que le terme :

$$E \left(\frac{A(\lambda_j(N_n))^{\frac{3}{2}}}{n} \right)$$

majorant $|E(Y_{n,1})|$. Nous en déduisons le premier résultat.

3 - Démonstration du second résultat

$$Y_{n,2} = (\lambda_j(N_n))^{\frac{1}{2}} f(x) \left(\frac{\lambda_j(N_n)}{n\nu(A_j(N_n))} - 1 \right)$$

Lorsque la variable aléatoire N_n est fixée, la variable aléatoire $\frac{\nu(A_j(r))}{\nu([a,b])}$ suit une loi de densité

$$f(u) = \frac{r!}{(\lambda_j(r) - 1)!(r - \lambda_j(r))!} u^{\lambda_j(r)-1} (1-u)^{r-\lambda_j(r)}$$

sur $[0, 1]$. En calculant l'espérance de son inverse, nous obtenons :

$$E \left(\frac{\nu([a,b])}{\nu(A_j(r))} \right) = \frac{r}{\lambda_j(r) - 1}$$

Il nous faut supposer que $\lambda_j(r) \geq 2$ (sinon le dénominateur serait nul) ce qui est possible puisque $\lambda_j(r)$ tend vers l'infini avec r . Nous pouvons alors écrire : $E(Y_{n,2}) =$

$$\sum_{r \in N^*} (\lambda_j(r))^{\frac{1}{2}} f(x) \left(\frac{\lambda_j(r)r}{n\nu([a,b])(\lambda_j(r) - 1)} - 1 \right) P(N_n = r)$$

Donc: $0 \leq |E(Y_{n,2})| \leq$

$$\sum_{r \in N^*} (\lambda_j(r))^{\frac{1}{2}} f(x) \left| \frac{\lambda_j(r)r}{n\nu([a,b])(\lambda_j(r) - 1)} - 1 \right| P(N_n = r)$$

Nous allons séparer le second membre de l'inégalité en trois termes et démontrer que chacun des termes tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

$$\sum_{r \in N^*} (\lambda_j(r))^{\frac{1}{2}} f(x) \left| \frac{\lambda_j(r)r}{n\nu([a,b])(\lambda_j(r) - 1)} - 1 \right| P(N_n = r) =$$

$$\sum_{r > n\nu([a,b])(1+n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^{\frac{1}{2}} f(x) \left| \frac{\lambda_j(r)r}{n\nu([a,b])(\lambda_j(r) - 1)} - 1 \right| P(N_n = r) +$$

$$\sum_{r < n\nu([a,b])(1-n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^{\frac{1}{2}} f(x) \left| \frac{\lambda_j(r)r}{n\nu([a,b])(\lambda_j(r) - 1)} - 1 \right| P(N_n = r) +$$

$$\sum_{r = n\nu([a,b])(1-n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^{\frac{1}{2}} f(x) \left| \frac{\lambda_j(r)r}{n\nu([a,b])(\lambda_j(r) - 1)} - 1 \right| P(N_n = r)$$

Etude du premier terme

La condition $C_2 : \exists \delta < \frac{1}{2}, \forall j = 1 \dots k(r), \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_j(r)}{r^\delta} = 1$

implique $\forall j = 1 \dots k(r), \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_j(r)}{r^{\frac{1}{2}}} = 0$.

Pour j tel que $x \in A_j(N_n)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(\varepsilon)$, tel que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \implies \left[r \geq n\nu([a,b])(1 - n^{-\delta}) \implies \frac{\lambda_j(r)}{r^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon \right]$$

D'après la condition C_2 , nous pouvons choisir $n_0(\varepsilon)$ de telle sorte qu'il vérifie aussi :

$$n \geq n_0(\varepsilon) \implies$$

$$\left[r \geq n\nu([a, b])(1 - n^{-\delta}) \implies \frac{\lambda_j(r)}{\lambda_j(r) - 1} \leq 1 + \frac{1}{(1 - \varepsilon)r^\delta} \right]$$

Nous avons une majoration de ce premier terme pour $n \geq n_0$ en remarquant que si $r > n\nu([a, b])$, l'expression à l'intérieur de la valeur absolue est positive :

$$\sum_{r > n\nu([a, b])(1 + n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^{\frac{1}{2}} f(x) \left| \frac{\lambda_j(r)r}{n\nu([a, b])(\lambda_j(r) - 1)} - 1 \right| P(N_n = r) \leq$$

$$\sum_{r > n\nu([a, b])(1 + n^{-\delta})} \varepsilon^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{4}} f(x) \left(\frac{r}{n\nu([a, b])} \left(1 + \frac{1}{(1 - \varepsilon)r^\delta} \right) - 1 \right) P(N_n = r)$$

En écrivant $r^{\frac{1}{4}} = \frac{r}{r^{\frac{3}{4}}}$, nous obtenons la majoration :

$$\sum_{r > n\nu([a, b])(1 + n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^{\frac{1}{2}} f(x) \left| \frac{\lambda_j(r)r}{n\nu([a, b])(\lambda_j(r) - 1)} - 1 \right| P(N_n = r) \leq$$

$$\sum_{r > n\nu([a, b])(1 + n^{-\delta})} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} r f(x)}{(n\nu([a, b])(1 + n^{-\delta}))^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{r}{n\nu([a, b])} \left(1 + \frac{1}{(1 - \varepsilon)(n\nu([a, b])(1 + n^{-\delta}))^\delta} \right) - 1 \right) P(N_n = r)$$

et nous pouvons finalement écrire

$$\sum_{r > n\nu([a, b])(1 + n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^{\frac{1}{2}} f(x) \left| \frac{\lambda_j(r)r}{n\nu([a, b])(\lambda_j(r) - 1)} - 1 \right| P(N_n = r) \leq$$

$$\sum_{r \in N^*} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} r f(x)}{(n\nu([a, b])(1 + n^{-\delta}))^{\frac{3}{4}}} =$$

$$\left(\frac{r}{n\nu([a, b])} \left(1 + \frac{1}{(1 - \varepsilon)(n\nu([a, b])(1 + n^{-\delta}))^\delta} \right) - 1 \right) P(N_n = r)$$

$$- \sum_{r \leq n\nu([a, b])(1 + n^{-\delta})} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} r f(x)}{(n\nu([a, b])(1 + n^{-\delta}))^{\frac{3}{4}}}$$

$$\left(\frac{r}{n\nu([a, b])} \left(1 + \frac{1}{(1 - \varepsilon)(n\nu([a, b])(1 + n^{-\delta}))^\delta} \right) - 1 \right) P(N_n = r)$$

Le premier terme de cette différence se calcule en utilisant le fait que : N_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\nu([a, b])$. Il vaut :

$$\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} f(x)}{(\nu([a, b])(1 + n^{-\delta}))^{\frac{3}{4}}} \left(1 + \frac{1 + \nu([a, b])}{(1 - \varepsilon)(\nu([a, b])(1 + n^{-\delta}))^{\delta}} \right) P(N_n = r)$$

Comme $\delta \geq \frac{1}{4}$ et que ε est arbitraire ce terme tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Le second terme de la différence est majoré en valeur absolue pour n grand par

$$\sum_{r < \nu([a, b])(1 - n^{-\delta})} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} r f(x)}{(\nu([a, b])(1 + n^{-\delta}))^{\frac{3}{4}}} P(N_n = r) +$$

$$\sum_{r = \nu([a, b])(1 - n^{-\delta})}^{\nu([a, b])(1 + n^{-\delta})} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} r f(x)}{(\nu([a, b])(1 + n^{-\delta}))^{\frac{3}{4}}} P(N_n = r) +$$

$$\left(\frac{1 + n^{-\delta}}{(1 - \varepsilon)(\nu([a, b])(1 + n^{-\delta}))^{\delta}} + n^{-\delta} \right) P(N_n = r)$$

Nous obtenons finalement la majoration :

$$(\varepsilon)^{\frac{1}{2}} f(x) (\nu([a, b]))^{\frac{1}{4}} P(N_n < \nu([a, b])(1 - n^{-\delta}))$$

$$+ 2f(x) (\nu([a, b]))^{\frac{1}{4}} n^{-\delta} (\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$$

Comme u_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini et que $\delta \geq \frac{1}{4}$, nous obtenons la convergence vers zéro du second terme de la différence et ainsi la convergence vers zéro du premier terme de la somme.

Etude du second terme de la somme :

Nous pouvons majorer directement ce second terme $\lambda_j(r) \leq r + 1$ donc :

$$\sum_{r < \nu([a, b])(1 - n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^{\frac{1}{2}} f(x) \left| \frac{\lambda_j(r)r}{\nu([a, b])(\lambda_j(r) - 1)} - 1 \right| P(N_n = r) \leq$$

$$f(x) (\nu([a, b])(1 - n^{-\delta}))^{\frac{1}{2}} P(N_n < \nu([a, b])(1 - n^{-\delta}))$$

En utilisant une nouvelle fois la convergence de la suite u_n vers 0 lorsque n tend vers l'infini, nous en déduisons que le second terme de la somme tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Etude du troisième terme de la somme :

Nous avons d'après les bornes de l'intervalle contenant r :

$$\sum_{r = \nu([a, b])(1 - n^{-\delta})}^{\nu([a, b])(1 + n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^{\frac{1}{2}} f(x) \left| \frac{\lambda_j(r)r}{\nu([a, b])(\lambda_j(r) - 1)} - 1 \right| P(N_n = r) \leq$$

$$\sum_{r = \nu([a, b])(1 - n^{-\delta})}^{\nu([a, b])(1 + n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^{\frac{1}{2}} f(x) \left(\frac{\lambda_j(r)(1 + n^{-\delta})}{\lambda_j(r) - 1} - 1 \right) P(N_n = r)$$

En utilisant la condition C_2 comme dans l'étude du premier terme de la somme, en gardant le même $n_0(\varepsilon)$, nous avons pour $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\sum_{r=n\nu([a,b])(1+n^{-\delta})}^{n\nu([a,b])(1+n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^{\frac{1}{2}} f(x) \left| \frac{\lambda_j(r)r}{n\nu([a,b])(\lambda_j(r)-1)} - 1 \right| P(N_n = r) \leq$$

$$\sum_{r=n\nu([a,b])(1+n^{-\delta})}^{n\nu([a,b])(1+n^{-\delta})} \varepsilon^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{4}} f(x) \left(\left(1 + \frac{1}{(1-\varepsilon)r^\delta} \right) (1+n^{-\delta}) - 1 \right) P(N_n = r)$$

et finalement:

$$\sum_{r=n\nu([a,b])(1+n^{-\delta})}^{n\nu([a,b])(1+n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^{\frac{1}{2}} f(x) \left| \frac{\lambda_j(r)r}{n\nu([a,b])(\lambda_j(r)-1)} - 1 \right| P(N_n = r) \leq$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} (n\nu([a,b])(1+n^{-\delta}))^{\frac{1}{4}} f(x)$$

$$\left(\left(1 + \frac{1}{(1-\varepsilon)(n\nu([a,b])(1+n^{-\delta}))^\delta} \right) (1+n^{-\delta}) - 1 \right)$$

Comme $\delta \geq \frac{1}{4}$, ce troisième terme tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

Nous avons montré que les trois termes de la somme tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini et donc que : $E(Y_{n,2})$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

4 - Démonstration du troisième résultat

$$Y_{n,1} = (\lambda_j(N_n))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda_j(N_n)(f(y(N_n)) - f(x))}{n\nu(A_j(N_n))} \right)$$

Donc :

$$E(Y_{n,1}^2) = E \left(\lambda_j(N_n) \left(\frac{(\lambda_j(N_n))^2 (f(y(N_n)) - f(x))^2}{n^2 (\nu(A_j(N_n)))^2} \right) \right)$$

En utilisant la condition C_1 et en reprenant la notation :

$$A = \frac{c}{\inf_{z \in [a,b]} f(z)}, \text{ nous obtenons :}$$

$$0 \leq E(Y_{n,1}^2) \leq E \left((\lambda_j(N_n))^3 \frac{A^2}{n^2} \right)$$

Comme $\lambda_j(r) \leq r + 1$, nous pouvons écrire :

$$\sum_{r < n\nu([a,b])(1+n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^3 \frac{A^2}{n^2} P(N_n = r) \leq$$

$$(n\nu([a,b])(1+n^{-\delta}) + 1)^3 \frac{A^2}{n^2} P(N_n < n\nu([a,b])(1+n^{-\delta}))$$

En utilisant la convergence vers 0 avec $\frac{1}{n}$ de u_n nous obtenons la convergence vers 0 avec $\frac{1}{n}$ de cette expression. D'après la condition C_2 , pour $n \geq n_0(\varepsilon)$, nous avons :

$$\sum_{r \geq n\nu([a,b])(1+n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^3 \frac{A^2}{n^2} P(N_n = r) \leq$$

$$\sum_{r \geq n\nu([a,b])(1-n^{-\delta})} \varepsilon^3 r^{\frac{3}{2}} \frac{A^2}{n^2} P(N_n = r)$$

Soit :

$$\sum_{r \geq n\nu([a,b])(1-n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^3 \frac{A^2}{n^2} P(N_n = r) \leq$$

$$\sum_{r \in N^*} \varepsilon^3 r^2 \frac{A^2}{n^2} P(N_n = r) = \varepsilon^3 \left((\nu([a,b]))^2 + \frac{\nu([a,b])}{n} \right)$$

Nous en déduisons que le premier terme de l'inégalité tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini puisque ε est arbitraire. En rassemblant les deux résultats, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{r < n\nu([a,b])(1-n^{-\delta})} \lambda_j(r)^3 \frac{A^2}{n^2} P(N_n = r) +$$

$$\sum_{r \geq n\nu([a,b])(1-n^{-\delta})} \lambda_j(r)^3 \frac{A^2}{n^2} P(N_n = r) = 0$$

Ceci n'est autre que le terme :

$$E \left(\frac{A^2 (\lambda_j(N_n))^3}{n^2} \right) \text{ majorant } E(Y_{n,1}^2)$$

Nous en déduisons le troisième résultat.

5 - Démonstration du quatrième résultat

$$Y_{n,2} = (\lambda_j(N_n))^{\frac{1}{2}} f(x) \left(\frac{\lambda_j(N_n)}{n\nu(A_j(N_n))} - 1 \right).$$

En utilisant la loi de $\frac{\nu(A_j(r))}{\nu([a,b])}$, et en supposant que $\lambda_j(r) \geq 3$ (sinon le dénominateur serait nul) ce qui est possible puisque $\lambda_j(r)$ tend vers l'infini avec r . Nous pouvons écrire : $E(Y_{n,2}^2) =$

$$\sum_{r \in N^*} \left(\frac{(\lambda_j(r))^2 r(r+1)}{n^2 (\nu([a,b]))^2 (\lambda_j(r) - 1)(\lambda_j(r) - 2)} - 2 \frac{r \lambda_j(r)}{n\nu([a,b])(\lambda_j(r) - 1)} + 1 \right)$$

$$\lambda_j(r) (f(x))^2 P(N_n = r)$$

Nous devons montrer que $E(Y_{n,2}^2)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Nous pouvons écrire $E(Y_{n,2}^2)$ sous la forme :

$$\sum_{r \geq n\nu([a,b])(1-n^{-\delta})} \lambda_j(r) (f(x))^2$$

$$\left(\frac{(\lambda_j(r))^2 r(r+1)}{n^2 (\nu([a,b]))^2 (\lambda_j(r) - 1)(\lambda_j(r) - 2)} - 2 \frac{r \lambda_j(r)}{n\nu([a,b])(\lambda_j(r) - 1)} + 1 \right)$$

$$P(N_n = r) + \sum_{r < n\nu([a,b])(1-n^{-\delta})} \lambda_j(r)(f(x))^2$$

$$\left(\frac{(\lambda_j(r))^2 r(r+1)}{n^2(\nu([a,b]))^2(\lambda_j(r)-1)(\lambda_j(r)-2)} - 2 \frac{r\lambda_j(r)}{n\nu([a,b])(\lambda_j(r)-1)} + 1 \right)$$

$$P(N_n = r)$$

En remarquant que :

$$\left(\frac{(\lambda_j(r))^3 r(r+1)}{n^2(\nu([a,b]))^2(\lambda_j(r)-1)(\lambda_j(r)-2)} - 2 \frac{r(\lambda_j(r))^2}{n\nu([a,b])(\lambda_j(r)-1)} + \lambda_j(r) \right)$$

est positif (espérance d'une variable aléatoire positive), nous voyons que les deux termes sont positifs. Il suffit de les majorer par une expression qui tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

Etude du premier terme

La condition C_2 implique : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$ tel que $n \geq n_0(\varepsilon) \implies$

$$\left\{ \begin{array}{l} r \geq n\nu([a,b])(1-n^{-\delta}) \implies \\ \left. \begin{array}{l} (1-\varepsilon)r^\delta \leq \lambda_j(r) \leq (1+\varepsilon)r^\delta \\ \frac{1}{(1+\varepsilon)r^\delta} + 1 \leq \frac{\lambda_j(r)}{\lambda_j(r)-1} \leq 1 + \frac{1}{(1-\varepsilon)r^\delta} \\ \left(\frac{1}{(1+\varepsilon)r^\delta} + 1 \right)^2 \leq \frac{(\lambda_j(r))^2}{(\lambda_j(r)-1)(\lambda_j(r)-2)} \leq \left(1 + \frac{1}{(1-\varepsilon)r^\delta} \right)^2 \end{array} \right\}$$

Nous pouvons donc majorer le premier terme pour $n \geq n_0$ par :

$$\sum_{r \geq n\nu([a,b])(1-n^{-\delta})} (f(x))^2 (1+\varepsilon)r^\delta$$

$$\left(\frac{r(r+1)}{n^2(\nu([a,b]))^2} \left(1 + \frac{1}{(1-\varepsilon)r^\delta} \right)^2 - 2 \frac{r + \frac{r^{1-\delta}}{1+\varepsilon}}{n\nu([a,b])} + 1 \right) P(N_n = r)$$

Soit encore pour n assez grand par :

$$\left(\sum_{r \in N^*} - \sum_{r < n\nu([a,b])(1-n^{-\delta})} \right) \frac{(f(x))^2 (1+\varepsilon)r}{(n\nu([a,b])(1-n^{-\delta}))^{1-\delta}}$$

$$\left(\frac{r(r+1)}{n^2(\nu([a,b]))^2} \left(1 + \frac{1}{(1-\varepsilon)(n\nu([a,b])(1-n^{-\delta}))^\delta} \right)^2 \right.$$

$$\left. - 2 \frac{r + \frac{(n\nu([a,b])(1-n^{-\delta}))^{1-\delta}}{1+\varepsilon}}{n\nu([a,b])} + 1 \right) P(N_n = r)$$

N_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\nu([a,b])$

donc le premier terme de la différence équivaut à l'infini à

$$\frac{(f(x))^2 (1+\varepsilon)}{(n\nu([a,b]))^{1-\delta}}$$

$$\left((n\nu([a, b])) \left(\frac{2}{(1-\varepsilon)(n\nu([a, b]))^\delta} \right) - 2 \left(\frac{(n\nu([a, b]))^{1-\delta}}{1+\varepsilon} \right) + o(n^{1-\delta}) \right)$$

Soit finalement à : $(f(x))^2(1+\varepsilon) \circ (1)$

ε étant arbitraire, le premier terme de la différence tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Le second terme de la différence est majoré en valeur absolue pour n assez grand par :

$$\sum_{r < n\nu([a, b])(1-n^{-\delta})} \frac{(f(x))^2(1+\varepsilon)r}{(n\nu([a, b])(1-n^{-\delta}))^{1-\delta}} \left(\frac{2r^2}{n^2(\nu([a, b]))^2} + 3\frac{r}{n\nu([a, b])} + 1 \right) P(N_n = r)$$

Soit finalement par :

$$\frac{(f(x))^2(n\nu([a, b])(1-n^{-\delta}))^\delta(2(1-n^{-\delta})^2 + 3(1-n^{-\delta}) + 1)}{P(N_n < n\nu([a, b])(1-n^{-\delta}))}$$

et comme la suite u_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, il tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Le premier terme de la somme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Etude du second terme de la somme

Comme $\lambda_j(r) \leq r+1$ le second terme est majoré par :

$$\sum_{r < n\nu([a, b])(1-n^{-\delta})} (f(x))^2(r+1) \left(\frac{2r^2}{n^2(\nu([a, b]))^2} + 3\frac{r}{n\nu([a, b])} + 1 \right) P(N_n = r)$$

Soit encore par :

$$\frac{(f(x))^2(n\nu([a, b])(1-n^{-\delta}) + 1)(2(1-n^{-\delta})^2 + 3(1-n^{-\delta}) + 1)}{P(N_n < n\nu([a, b])(1-n^{-\delta}))}$$

et comme la suite u_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, il tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Le second terme de la somme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La somme tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Le quatrième résultat est démontré et ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque : la variable aléatoire $\lambda_j(N_n)$ joue le rôle de $\frac{n}{k(n)}$.

Pour l'estimateur de Muriel Curioni, nous avons :

$$\left(\frac{n}{k(n)f(x)} \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{f}_n(x) - f(x)) \text{ tend en loi vers } N(0, 1).$$

Pour l'estimateur de la partition aléatoire, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} E[(\lambda_j(N_n))^{\frac{1}{2}}(f_n(x) - f(x))] \text{ tend vers } 0 \text{ avec } \frac{1}{n} \\ \text{VAR}[(\lambda_j(N_n))^{\frac{1}{2}}(f_n(x) - f(x))] \text{ tend vers } 0 \text{ avec } \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

4. Définition du processus aminci et de l'estimateur

D'une manière générale, soit un processus de Cox sur $[a, b]$ dirigé par la mesure aléatoire M : conditionnellement à M , le processus N est un processus de Poisson de mesure moyenne M .

Pour tout borélien A de $[a, b]$, $E(N(A)) = E(M(A))$.

Nous pouvons représenter N sous la forme : $N = \sum_{i=1}^{N([a,b])} \varepsilon_{x_i}$

ε_{x_i} étant la mesure de Dirac au point x_i .

Soit alors une fonction continue sur $[a, b]$, p à valeurs dans $[0, 1]$

$$p : [a, b] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \rightarrow p(x)$$

et des variables U_i prenant leurs valeurs dans $\{0, 1\}$ vérifiant :

$$P(U_i = 1 | N) = p(x_i) \text{ pour tout } i = 1 \text{ à } N([a, b])$$

et conditionnellement à N , les U_i sont des variables indépendantes, alors le processus :

$$N' = \sum_{i=1}^{N([a,b])} U_i \varepsilon_{x_i}$$

est le processus ponctuel p -aminci de N . Etant donné le processus N , N' est donc obtenu en prenant le point x_i de N avec la probabilité $p(x_i)$ et en l'"effaçant" avec la probabilité $(1 - p(x_i))$.

Nous avons :

$$E(N') = pE(N) \text{ au sens où pour tout borélien } A \text{ de } [a, b]$$

$$E(N'(A)) = \int_A p(x)E(N)(dx)$$

Remarque : Si N est un processus de Poisson, N' est aussi un processus de Poisson.

définition de l'estimateur

Soit un processus de Poisson N sur $[a, b]$ dont nous connaissons la mesure moyenne $m = E(N)$ de densité continue $m(x)$ sur $[a, b]$. Soit aussi un n -échantillon d'un processus de Poisson p -aminci N' de N : $(N'_1, N'_2, \dots, N'_n)$. Le problème est d'estimer la fonction $p(x)$.

Posons $N_n = \sum_{i=1}^n N'_i([a, b])$ et considérons $A_j(N_n), j = 1 \dots k(N_n)$ la partition aléatoire associée aux N_n points de l'échantillon, à la suite $k(r)$ d'entiers, et aux entiers $\lambda_j(r), j = 1 \dots k(r)$. Nous définissons l'estimateur de p par :

$$\hat{p}_n(x) = \frac{\lambda_j(N_n)}{nm(A_j(N_n))} \text{ pour } x \in A_j(N_n)$$

$\hat{p}_n(x)$ peut être supérieur à 1. Pour éviter cela, nous pouvons le remplacer par $\inf(\hat{p}_n(x), 1)$.

5. Etude de la convergence de l'estimateur

Introduisons les fonctions :

$$r_n(x) = \frac{\lambda_j(N_n)}{nm'(A_j(N_n))} \text{ et } v_n(x) = \frac{m'(A_j(N_n))}{m(A_j(N_n))} \text{ si } x \in A_j(N_n)$$

m' étant la mesure moyenne du processus N' de densité $m(x)p(x)$ sur $[a, b]$.

5.1. Condition suffisante de convergence uniforme presque complète de r_n vers 1

Théorème 5.1.: *Pour que, pour toute fonction p continue à valeurs dans $[0, 1]$, la fonction r_n converge uniformément presque complètement vers 1, il*

suffit que :
$$\frac{\inf_{j=1 \dots k(r)} \lambda_j(r)}{\ln(r)} \rightarrow +\infty \quad r \rightarrow +\infty$$

Démonstration : Nous allons montrer que la condition est suffisante pour que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait :

$$P \left(\sup_{x \in [a, b]} |r_n(x) - 1| > \varepsilon \right) \text{ est le terme général d'une série convergente.}$$

Nous avons :

$$P \left(\sup_{x \in [a, b]} |r_n(x) - 1| > \varepsilon \right) = P \left(\sup_{j=1 \dots k(N_n)} \left| \frac{\lambda_j(N_n)}{nm'(A_j(N_n))} - 1 \right| > \varepsilon \right)$$

et pour tout réel strictement positif ε_1

$$\begin{aligned} P \left(\sup_{x \in [a, b]} |r_n(x) - 1| > \varepsilon \right) &\leq \sup_{r \geq [\sqrt{n}]} \\ &P \left(\bigcup_{j=1 \dots k(r)} \left\{ \left| \frac{\lambda_j(r)}{nm'(A_j(r))} - 1 \right| > \varepsilon \right\} / \left\{ \left| \frac{r+1}{nm'([a, b])} - 1 \right| \leq \varepsilon_1 \right\} \right) \\ &+ P \left(\frac{N_n + 1}{nm'([a, b])} > \varepsilon_1 \right) + P(N_n < [\sqrt{n}]) \end{aligned}$$

En choisissant n assez grand ($n \geq n_0$) pour que $\frac{1}{nm'([a, b])} \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$

et en posant $X_j(r) = \frac{m'(A_j(r))}{m'([a, b])}$ nous avons :

$$P \left(\sup_{x \in [a, b]} |r_n(x) - 1| > \varepsilon \right) \leq \sup_{r \geq [\sqrt{n}]} \sum_{j=1 \dots k(r)}$$

$$P \left(\left\{ \left| \frac{\lambda_j(r)(r+1)}{nm'([a, b])(r+1)} - X_j(r) \right| > \varepsilon X_j(r) \right\} / \left\{ \left| \frac{r+1}{nm'([a, b])} - 1 \right| \leq \varepsilon_1 \right\} \right) \\ + P \left(\frac{N_n}{nm'([a, b])} > \frac{\varepsilon_1}{2} \right) + P(N_n < [\sqrt{n}])$$

En utilisant le fait que la variable N_n suit une loi de Poisson de paramètre $nm'([a, b])$ et est minorée presque complètement par $[\sqrt{n}]$, nous obtenons : il suffit de montrer que :

$$\sup_{r \geq [\sqrt{n}]} (r+1) \sup_{j=1 \dots k(r)} P \left(X_j(r) < \frac{\lambda_j(r)}{r+1} \left(\frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon} \right) \right) + \\ P \left(X_j(r) > \frac{\lambda_j(r)}{r+1} \left(\frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon} \right) \right)$$

est le terme général d'une série convergente .

Pour le premier terme , prenons pour ε_1 le nombre $\frac{\varepsilon}{2}$ et appelons a, b, a', b' les réels :

$$a' = \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}, b' = \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}, a = \min(a', 1), b = \min(b', 1)$$

Rappelons que la variable $X_j(r)$ suit la même loi que $\frac{T_j(r)}{T_{r+1}}$ où les $T_j(r)$ suivent des lois $\Gamma(\lambda_j(r))$ et T_{r+1} suit $\Gamma(r+1)$.

Ecrivons les inclusions :

$$\left\{ T_j(r) < \frac{\lambda_j(r)}{r+1} T_{r+1}(1-a) \right\} \subseteq \\ \left\{ T_j(r) < \lambda_j(r)(1-a) \left(1 + \frac{a}{2} \right) \right\} \cup \left\{ T_{r+1} > (r+1) \left(1 + \frac{a}{2} \right) \right\} \\ \left\{ T_j(r) > \frac{\lambda_j(r)}{r+1} T_{r+1}(1+b) \right\} \subseteq \\ \left\{ T_j(r) > \lambda_j(r)(1+b) \left(1 - \frac{b}{2} \right) \right\} \cup \left\{ T_{r+1} < (r+1) \left(1 - \frac{b}{2} \right) \right\}$$

Ceci permet, en utilisant le lemme 0 de Saab Abou-Jaoudé (cf : [3]) d'obtenir la majoration du premier terme :

$$\sup_{r \geq [\sqrt{n}]} (r+1) \sup_{j=1 \dots k(r)} \left[\beta \left(\frac{a}{2} \right)^{r+1} + \delta \left(\frac{b}{2} \right)^{r+1} + \beta(c)^{\lambda_j(r)} + \delta(d)^{\lambda_j(r)} \right]$$

où $c = \frac{b(1-b)}{2}$, $d = \frac{a(1-a)}{2}$ et $\beta(\alpha)$ et $\delta(\alpha) \in]0, 1[$ si $\alpha > 0$.

Donc, nous obtenons la majoration :

$$\sup_{r \geq [\sqrt{n}]} (r+1) \left[\beta \left(\frac{a}{2} \right)^{r+1} + \delta \left(\frac{b}{2} \right)^{r+1} + \beta(c)^{\inf_{j=1}^{k(r)} \lambda_j(r)} + \delta(d)^{\inf_{j=1}^{k(r)} \lambda_j(r)} \right]$$

Utilisons maintenant l'hypothèse $\frac{\inf_{j=1 \dots k(r)} \lambda_j(r)}{\ln(r)} \rightarrow +\infty$ $r \rightarrow +\infty$

et choisissons un nombre M tel que

$$\ln \left(\frac{1}{\beta(c)} \right) M - 1 > 2$$

$$\ln \left(\frac{1}{\delta(d)} \right) M - 1 > 2$$

Par hypothèse, il existe r_0 tel que si $r \geq r_0$, nous avons

$$\inf_{j=1 \dots k(r)} \lambda_j(r) > M \ln(r)$$

Donc, pour n assez grand, $n \geq (r_0)^2$, nous avons

$$r \geq [\sqrt{n}] \implies \inf_{j=1 \dots k(r)} \lambda_j(r) > M \ln(r)$$

Nous obtenons donc la majoration suivante :

$$\sup_{r \geq [\sqrt{n}]} (r+1) \left[\beta \left(\frac{a}{2} \right)^{r+1} + \delta \left(\frac{b}{2} \right)^{r+1} + \beta(c)^{M \ln(r)} + \delta(d)^{M \ln(r)} \right]$$

qui est le "sup à partir de racine carrée de n " de quatre fonctions qui sont toutes décroissantes pour r assez grand. (calcul simple) Donc, nous avons la majoration

$$([\sqrt{n}]+1) \left[\beta \left(\frac{a}{2} \right)^{[\sqrt{n}]+1} + \delta \left(\frac{b}{2} \right)^{[\sqrt{n}]+1} + [\sqrt{n}]^{-M \ln(\frac{1}{\beta(c)})} + [\sqrt{n}]^{-M \ln(\frac{1}{\delta(d)})} \right]$$

Les deux premiers termes de la somme tendent sans difficulté vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Quant aux troisième et quatrième termes ils sont équivalents à l'infini respectivement à :

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}(\ln(\frac{1}{\beta(c)})M-1)}} \text{ et } \frac{1}{n^{\frac{1}{2}(\ln(\frac{1}{\delta(d)})M-1)}}$$

termes généraux de séries convergentes.

5.2. Condition suffisante de convergence uniforme presque complète de $v_n - p$ vers zéro

Théorème 5.2. : Pour que, pour toute fonction p continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $[0, 1]$, $v_n - p$ converge uniformément vers zéro presque complètement il suffit que :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{j=1 \dots k(r)} \frac{\lambda_j(r)}{r+1} = 0$$

Démonstration : Il s'agit de montrer que si la condition est réalisée, pour tout réel strictement positif ε , $P\left(\sup_{x \in [a,b]} |v_n(x) - p(x)| > \varepsilon\right)$ est le terme général d'une série convergente.

Nous avons :

$$P\left(\sup_{x \in [a,b]} |v_n(x) - p(x)| > \varepsilon\right) \leq \\ P\left(\sup_{x \in [a,b]} \frac{\int_{A_j(N_n)} |p(y) - p(x)| m(y) dy}{m(A_j(N_n))} > \varepsilon\right)$$

p est une fonction continue sur $[a, b]$ compact, donc p est uniformément continue sur $[a, b]$. Il existe donc un réel strictement positif η tel que :

$$|x - y| \leq \eta \implies |p(x) - p(y)| \leq \varepsilon$$

D'autre part, nous pouvons écrire :

$$P\left(\sup_{x \in [a,b]} |v_n(x) - p(x)| > \varepsilon\right) \leq \\ P\left(\sup_{x \in [a,b]} \frac{\int_{A_j(N_n)} |p(y) - p(x)| m(y) dy}{m(A_j(N_n))} > \varepsilon | E\right) P(E) + \\ P\left(\sup_{x \in [a,b]} \frac{\int_{A_j(N_n)} |p(y) - p(x)| m(y) dy}{m(A_j(N_n))} > \varepsilon | E^c\right) P(E^c)$$

où E désigne l'évènement :

$$E = \left\{ \bigcap_{j=1 \dots k(N_n)} \{l(A_j(N_n)) \leq \eta\} \right\}$$

$l(A_j(N_n))$ mesure de Lebesgue de $A_j(N_n)$.

De part le choix de η , nous avons :

$$P\left(\sup_{x \in [a,b]} \frac{\int_{A_j(N_n)} |p(y) - p(x)| m(y) dy}{m(A_j(N_n))} > \varepsilon | E\right) = 0 \text{ et donc}$$

$$P\left(\sup_{x \in [a,b]} |v_n(x) - p(x)| > \varepsilon\right) \leq$$

$$P\left(\sup_{x \in [a,b]} \frac{\int_{A_j(N_n)} |p(y) - p(x)| m(y) dy}{m(A_j(N_n))} > \varepsilon | E^c\right) P(E^c) \leq P(E^c)$$

Utilisons la définition de l'évènement E . Nous obtenons :

$$P\left(\sup_{x \in [a,b]} |v_n(x) - p(x)| > \varepsilon\right) \leq$$

$$P\left(\bigcup_{j=1 \dots k(N_n)} \{l(A_j(N_n)) > \eta\}\right)$$

En utilisant le fait que $p(x)$ est, ainsi que la densité $m(x)$ de la mesure m , continue et strictement positive sur $[a, b]$, pour une certaine constante k nous avons :

$$P \left(\sup_{x \in [a, b]} |v_n(x) - p(x)| > \varepsilon \right) \leq$$

$$P \left(\bigcup_{j=1 \dots k(N_n)} \left\{ \frac{m(A_j(N_n))}{m([a, b])} > k \right\} \right)$$

En utilisant les propriétés de la variable N_n , nous pouvons écrire

$$P \left(\sup_{x \in [a, b]} |v_n(x) - p(x)| > \varepsilon \right) \leq$$

$$\sup_{r \geq [\sqrt{n}]} \sum_{j=1 \dots k(r)} P \left(\left\{ \frac{m(A_j(r))}{m([a, b])} > k \right\} \right) + P(N_n < [\sqrt{n}])$$

Le second terme de la somme tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Nous savons que $\frac{m(A_j(r))}{m([a, b])}$ suit la même loi que la variable aléatoire $\frac{T_j(r)}{T_{r+1}}$ si $T_j(r)$ suit une loi $\Gamma(\lambda_j(r))$ et T_{r+1} suit $\Gamma(r+1)$. De plus, nous avons l'inclusion, pour tout ε' de $]0, 1[$:

$$\{T_j(r) > kT_{r+1}\} \subseteq$$

$$\{\{T_j(r) > kT_{r+1}\} \cap \{T_{r+1} \geq (r+1)(1-\varepsilon')\}\} \cup \{T_{r+1} < (r+1)(1-\varepsilon')\}$$

Donc, nous pouvons écrire :

$$P\{T_j(r) > kT_{r+1}\} \leq$$

$$P\{T_j(r) > k(r+1)(1-\varepsilon')\} + P\{T_{r+1} < (r+1)(1-\varepsilon')\}$$

D'après le lemme 0, le second terme de cette somme est majoré par $\delta(\varepsilon')^{r+1}$ où $\delta(\varepsilon')$ est un élément de $]0, 1[$. Notons pour tout $j = 1 \dots k(r)$:

$$\varepsilon_j(r) = \frac{\lambda_j(r)}{r+1} \text{ et } \bar{\varepsilon}(r) = \sup_{j=1 \dots k(r)} \varepsilon_j(r)$$

Par hypothèse du théorème, nous avons

$$\bar{\varepsilon}(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

Soit $k' > 0$. Il existe r_1 tel que $r \geq r_1$ implique

$$\bar{\varepsilon}(r) < \frac{k'}{2}$$

Nous avons alors pour tout $j = 1 \dots k(r)$

$$\varepsilon_j(r) < \frac{k'}{2}$$

donc

$$k' > \varepsilon_j(r) + \frac{k'}{2} \text{ et } (r+1)k' > \lambda_j(r) \left(1 + \frac{k'}{2\varepsilon_j(r)}\right)$$

Prenons pour k' : $k' = k(1 - \varepsilon')$

Alors $r \geq r_1$ implique

$$P\{T_j(r) > k(r+1)(1 - \varepsilon')\} \leq P\left\{T_j(r) > \lambda_j(r) \left(1 + \frac{\eta}{2\varepsilon_j(r)}\right)\right\}$$

En utilisant le lemme 0, nous obtenons

$$P\{T_j(r) > k(r+1)(1 - \varepsilon')\} \leq \sqrt{\frac{\lambda_j(r)}{2\pi}} \left(1 + \frac{\eta}{2\varepsilon_j(r)}\right)^{(\lambda_j(r)-1)} e^{-\lambda_j(r)\frac{\eta}{2\varepsilon_j(r)}}$$

En étudiant au voisinage de zéro la fonction : $y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$, nous avons la majoration

$$P\{T_j(r) > k(r+1)(1 - \varepsilon')\} \leq \sqrt{\frac{\lambda_j(r)}{2\pi}} \left(\left(1 + \frac{\eta}{2\bar{\varepsilon}(r)}\right)^{\bar{\varepsilon}} e^{-\frac{\eta}{2}}\right)^{r+1}$$

Soit $a \in]\varepsilon^{\frac{\eta}{2}}, 1[$. Il existe r_2 tel que $r \geq r_1$ et $r \geq r_2$ implique

$$P\{T_j(r) > k(r+1)(1 - \varepsilon')\} \leq \sqrt{\frac{\lambda_j(r)}{2\pi}} a^{r+1}$$

Soit :

$$P\{T_j(r) > k(r+1)(1 - \varepsilon')\} \leq \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}(r)(r+1)}{2\pi}} a^{r+1}$$

$$\sup_{r \geq [\sqrt{n}]} \sum_{j=1}^{k(r)} P\{T_j(r) > kT_{r+1}\} \leq$$

$$\sum_{r \geq [\sqrt{n}]} (r+1) \left((\delta(\varepsilon'))^{r+1} + \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}(r)(r+1)}{2\pi}} a^{r+1} \right)$$

Nous en déduisons le résultat annoncé, à savoir la convergence presque complète de v_n vers p uniformément sur $[a, b]$.

5.3. Conclusion :

En remarquant que

$$\hat{p}_n(x) = r_n(x)v_n(x)$$

et en écrivant :

$$\hat{p}_n(x) - p(x) = r_n(x)v_n(x) - v_n(x) + v_n(x) - p(x)$$

nous déduisons des résultats ci-dessus le théorème :

Théorème 5.3. : Pour que, pour toute fonction uniformément continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $[0, 1]$, l'estimateur \hat{p}_n converge uniformément presque complètement vers p , il suffit que :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{j=1 \dots k(r)} \frac{\lambda_j(r)}{r+1} = 0 \text{ et } \lim_{r \rightarrow +\infty} \inf_{j=1 \dots k(r)} \frac{\lambda_j(r)}{\ln(r)} = +\infty$$

6. Cas où m est inconnue

N : processus de Poisson de mesure moyenne m de densité f sur $[a, b]$

N' : processus de Poisson de mesure moyenne m' de densité pf sur $[a, b]$

On suppose connu un n -échantillon $N'_{1}, N'_{2}, \dots, N'_{n}$ du processus N' et un n -échantillon N_1, N_2, \dots, N_n du processus N sur $[a, b]$ tels que $N'_{1}, N'_{2}, \dots, N'_{n}, N_1, N_2, \dots, N_n$ soient 2 à 2 indépendants.

Donnons-nous des entiers $\lambda_j(r')$ pour $j = 1 \dots k(r')$ et fixons $R'_{1n} = \sum_{i=1 \dots n} N'_{i}([a, b])$ à r' . Nous construisons la partition aléatoire $\{A_j(r'), j = 1 \dots k(r')\}$ de $[a, b]$ de la manière habituelle à l'aide des entiers $\lambda_j(r')$ et des r' points $X'_{11}, X'_{12}, \dots, X'_{1r'}$ de $N'_{1}, N'_{2}, \dots, N'_{n}$. Considérons la variable aléatoire :

$$\lambda_j(r') = \sum_{i=1}^n N_i(A_j(r'))$$

Lorsque $A_j(r')$ est fixé, elle suit une loi de Poisson de paramètre $n m(A_j(r'))$. L'estimateur de la fonction $p(x)$ sur $[a, b]$ est défini par :

$$\bar{p}_n(x) = \frac{\lambda'_j(R'_{1n})}{\lambda_j(R'_{1n})} \text{ pour } x \in A_j(R'_{1n})$$

Rappelons qu'une condition suffisante pour que :

$$\hat{p}_n(x) = \frac{\lambda'_j(R'_{1n})}{n m(A_j(R'_{1n}))} \text{ pour } x \in A_j(R'_{1n})$$

converge presque complètement uniformément vers p sur $[a, b]$ est que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{j=1 \dots k(r)} \frac{\lambda_j(r)}{r+1} = 0 \text{ et } \lim_{r \rightarrow +\infty} \inf_{j=1 \dots k(r)} \frac{\lambda_j(r)}{\ln(r)} = +\infty$$

Théorème 6.1. : Si les conditions suffisantes de convergence uniforme presque complète sur $[a, b]$ de $\hat{p}_n - p$ vers zéro, ainsi que la condition :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{k(r)}{\inf_{j=1 \dots k(r)} \lambda_j(r)} = 0$$

sont réalisées alors $\bar{p}_n - p$ converge uniformément en probabilité vers zéro sur $[a, b]$.

La dernière condition est compatible avec les deux autres : en effet, par construction :

$k(r) \inf_{j=1 \dots k(r)} \lambda_j(r) \leq r + 1 \leq k(r) \sup_{j=1 \dots k(r)} \lambda_j(r)$ et

$$\frac{r+1}{\left(\sup_{j=1 \dots k(r)} \lambda_j(r)\right)^2} \leq \frac{k(r)}{\inf_{j=1 \dots k(r)} \lambda_j(r)} \leq \frac{r+1}{\left(\inf_{j=1 \dots k(r)} \lambda_j(r)\right)^2}$$

et les deux premières conditions imposent

$$\frac{k(r)}{\inf_{j=1 \dots k(r)} \lambda_j(r)} = o\left(\frac{r+1}{(\ln(r))^2}\right) \text{ et } \frac{k(r)}{\inf_{j=1 \dots k(r)} \lambda_j(r)} = \infty\left(\frac{1}{r+1}\right)$$

ce qui n'est pas contradictoire avec la dernière condition.

Démonstration : Comme les deux premières conditions sont réalisées, il suffit de montrer que $\bar{p}_n - \hat{p}_n$ converge uniformément vers zéro en probabilité sur $[a, b]$.

Soit donc $\varepsilon > 0$.

$$P\left(\sup_{x \in [a, b]} |\bar{p}_n(x) - \hat{p}_n(x)| > \varepsilon\right) = \sum_{r \in \mathbb{N}} P\left(\sup_{j=1 \dots k(r)} \frac{\lambda_j(r)}{\lambda_j(r)} \left|1 - \frac{\lambda_j(r)}{nm(A_j(r))}\right| > \varepsilon\right) P(R_n = r)$$

$$P\left(\sup_{x \in [a, b]} |\bar{p}_n(x) - \hat{p}_n(x)| > \varepsilon\right) \leq \sum_{r \geq [\sqrt{n}]} \sum_{j=1}^{k(r)} P\left(\frac{\lambda_j(r)}{\lambda_j(r)} \left|1 - \frac{\lambda_j(r)}{nm(A_j(r))}\right| > \varepsilon\right) P(R_n = r) + P(R_n < [\sqrt{n}])$$

Le dernier terme de la somme tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Le premier terme de la somme est majoré par :

$$\sum_{r \geq [\sqrt{n}]} \sum_{j=1}^{k(r)} P\left(\left\{\frac{\lambda_j(r)}{\lambda_j(r)} \left|1 - \frac{\lambda_j(r)}{nm(A_j(r))}\right| > \varepsilon\right\} \cap \left\{|\lambda_j(r) - nm(A_j(r))| \leq \frac{nm(A_j(r))}{2}\right\}\right)$$

$$P(RI_n = rI) + \sum_{rI \geq [\sqrt{n}]} \sum_{j=1}^{k(rI)} \left\{ |\lambda_j(rI) - nm(A_j(rI))| > \frac{nm(A_j(rI))}{2} \right\} P(RI_n = rI)$$

Soit encore par :

$$\sum_{rI \geq [\sqrt{n}]} \sum_{j=1}^{k(rI)} P \left(\frac{\lambda_j(rI)2}{nm(A_j(rI))} \left| 1 - \frac{\lambda_j(rI)}{nm(A_j(rI))} \right| > \varepsilon \right) P(RI_n = rI) +$$

$$\sum_{rI \geq [\sqrt{n}]} \sum_{j=1}^{k(rI)} \left\{ |\lambda_j(rI) - nm(A_j(rI))| > \frac{nm(A_j(rI))}{2} \right\} P(RI_n = rI)$$

En fixant $A_j(rI)$ et en utilisant la loi de $\lambda_j(rI)$, nous obtenons la majoration :

$$\sum_{rI \geq [\sqrt{n}]} \sum_{j=1}^{k(rI)} \int_{\text{domaine de } A_j(rI)} \frac{1}{nm(A_j(rI))} \frac{4(\lambda_j(rI))^2}{\varepsilon^2(nm(A_j(rI)))^2} P(d(A_j(rI)))$$

$$P(RI_n = rI) + \sum_{rI \geq [\sqrt{n}]} \sum_{j=1}^{k(rI)} \int_{\text{domaine de } A_j(rI)} \frac{4}{nm(A_j(rI))} P(d(A_j(rI))) P(RI_n = rI)$$

Nous avons :

$$\frac{1}{m(A_j(rI))} \leq \frac{\sup_{x \in [a, b]} p(x)}{mI(A_j(rI))} \leq \frac{1}{mI(A_j(rI))}$$

et

$$\frac{mI(A_j(rI))}{mI([a, b])} \text{ suit une loi } \frac{T_{\lambda_j(rI)}}{T_{rI+1}}$$

Cette majoration vaut donc en calculant :

$$\sum_{rI \geq [\sqrt{n}]} \sum_{j=1}^{k(rI)}$$

$$\frac{1}{(nm'([a, b]))^3} \frac{4r'(r'+1)(r'+2)(\lambda_j(r'))^2}{\varepsilon^2(\lambda_j(r')-1)(\lambda_j(r')-2)(\lambda_j(r')-3)}$$

$$P(R'_n = r') + \sum_{r' \geq [\sqrt{n}]} \sum_{j=1}^{k(r')}$$

$$\frac{4r'}{nm'([a, b])(\lambda_j(r')-1)} P(R'_n = r')$$

Nous obtenons donc, d'après la dernière condition, pour tout $\eta > 0$, pour n assez grand, la majoration suivante

$$\sum_{r' \in \mathbb{N}} \frac{\eta 64 r'(r'+1)(r'+2)}{6\varepsilon^2 (nm'([a, b]))^3} P(R'_n = r') +$$

$$\sum_{r' \in \mathbb{N}} \frac{4\eta r'}{nm'([a, b])} P(R'_n = r')$$

Le calcul montre alors, puisque η est arbitraire que : $P \left(\sup_{x \in [a, b]} |\bar{p}_n(x) - \hat{p}_n(x)| > \varepsilon \right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

7. Etude de la loi limite de l'estimateur

Théorème 7.1. : Si les deux conditions sont réalisées :

(a) $\forall x, y \in [a, b], |p(x) - p(y)| \leq K |x - y|$, K constante

(b) $\forall j = 1 \dots k(r) \exists \delta, \frac{1}{4} \leq \delta < \frac{1}{2}$ tel que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_j(r)}{r^\delta} = 1$

alors la variable aléatoire :

$$(\lambda_j(N_n))^{1/2} [\hat{p}_n(x) - p(x)]$$

où j est l'indice tel que $j \in A_j(N_n)$, a non seulement son espérance mais aussi sa variance qui tendent vers 0.

Démonstration

$$(\lambda_j(N_n))^{1/2} [\hat{p}_n(x) - p(x)] =$$

$$(\lambda_j(N_n))^{1/2} \left[\frac{\lambda_j(N_n)}{nm(A_j(N_n))} - p(x) \right]$$

et nous pouvons écrire (m' étant la mesure moyenne de N') :

$$(\lambda_j(N_n))^{1/2} [\hat{p}_n(x) - p(x)] =$$

$$(\lambda_j(N_n))^{1/2} \left[\frac{\lambda_j(N_n) - nm'(A_j(N_n))}{nm(A_j(N_n))} + \frac{m'(A_j(N_n))}{m(A_j(N_n))} - p(x) \right]$$

a) Etude du premier terme de la somme :

$$Z_n = (\lambda_j(N_n))^{1/2} \left[\frac{\lambda_j(N_n) - nm'(A_j(N_n))}{nm'(A_j(N_n))} \right]$$

$$Z_n = X_n * Y_n \text{ où :}$$

$$X_n = \frac{m'(A_j(N_n))}{m(A_j(N_n))}$$

$$Y_n = (\lambda_j(N_n))^{1/2} \left(\frac{\lambda_j(N_n)}{nm'(A_j(N_n))} - 1 \right)$$

Lors de l'étude de la loi limite de l'estimateur à pas aléatoire, nous avons démontré que la variable aléatoire : $Y_{n,2} = Y_n(m(x)p(x))$ vérifiait: $E(Y_{n,2})$ et $E(Y_{n,2}^2)$ tendent vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

Donc $E(Y_n)$ et $E(Y_n^2)$ tendent vers 0 avec $\frac{1}{n}$

Remarquons que p étant une fonction à valeurs dans $[0, 1]$, $0 \leq X_n \leq 1$, et nous avons : $0 \leq |E(X_n)| \leq 1$ et $0 \leq E(X_n^2) \leq 1$

Par conséquent: $|E(Z_n)| \leq (E(X_n^2))^{1/2} (E(Y_n^2))^{1/2}$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

$E(Z_n^2) \leq E(Y_n^2)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

b) Etude du second terme de la somme

Ce second terme peut s'écrire :

$$(\lambda_j(N_n))^{1/2} \frac{1}{m(A_j(N_n))} \int_{A_j(N_n)} (p(y) - p(x))m(y)dy$$

En utilisant la condition (a) nous pouvons majorer sa valeur absolue par:

$$(\lambda_j(N_n))^{1/2} Kl(A_j(N_n))$$

Soit encore par :

$$(\lambda_j(N_n))^{1/2} B \frac{m'(A_j(N_n))}{m'([a, b])}$$

avec $B = \frac{Km'([a, b])}{\inf_{y \in [a, b]} m'(y)}$

Or $\frac{m'(A_j(r))}{m'([a, b])}$ suit la même loi que la différence entre deux points d'un $(r+1)$ échantillon d'une loi uniforme sur $[0, 1]$ séparés par $\lambda_j(r) - 2$ autres points.

Donc, nous pouvons calculer :

$$E \left((\lambda_j(N_n))^{1/2} B \frac{m'(A_j(N_n))}{m'([a, b])} \right) = \sum_{r \in N^*} \frac{B(\lambda_j(r))^{3/2}}{r+1} P(N_n = r)$$

Nous pouvons écrire cette somme sous la forme :

$$\sum_{r < nm'([a, b])(1-n^{-\delta})} \frac{B(\lambda_j(N_n))^{3/2}}{r+1} P(N_n = r) +$$

$$\sum_{r \geq nm'([a, b])(1-n^{-\delta})} \frac{B(\lambda_j(N_n))^{3/2}}{r+1} P(N_n = r)$$

Comme $\lambda_j(r) \leq r + 1$, nous pouvons majorer le premier terme de la somme par:

$$\sum_{r < nm'([a,b])(1-n^{-\delta})} B(r+1)^{\frac{1}{2}} P(N_n = r)$$

et finalement par :

$$(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}))^{\frac{1}{2}} BP(N_n < nm'([a,b])(1-n^{-\delta}))$$

D'après le lemme démontré au paragraphe 3, la suite : $u_n = nP(N_n < nm'([a,b])(1-n^{-\delta}))$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Nous obtenons la convergence vers zéro du premier terme de la somme lorsque n tend vers l'infini.

La condition (b) implique $\frac{\lambda_j(r)}{r^{\frac{1}{2}}}$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Pour n assez grand, nous pouvons majorer le second terme de la somme par :

$$\sum_{r \geq nm'([a,b])(1-n^{-\delta})} B \frac{r^{\frac{3}{4}}}{r+1} P(N_n = r)$$

et finalement par :

$$\sum_{r \geq nm'([a,b])(1-n^{-\delta})} \frac{BrP(N_n = r)}{(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}))^{\frac{1}{4}}(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}) + 1)}$$

C'est à dire par :

$$\left(\sum_{r \in N^*} - \sum_{r < nm'([a,b])(1-n^{-\delta})} \right) \frac{BrP(N_n = r)}{(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}))^{\frac{1}{4}}(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}) + 1)}$$

Le premier terme de la différence vaut, puisque N_n suit une loi de Poisson de paramètre $nm'([a,b])$:

$$\frac{Bnm'([a,b])}{(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}))^{\frac{1}{4}}(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}) + 1)}$$

et tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$

Le second terme de la différence est majoré par :

$$\frac{Bnm'([a,b])(1-n^{-\delta})}{(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}))^{\frac{1}{4}}(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}) + 1)}$$

Il tend aussi vers zéro avec $\frac{1}{n}$. L'espérance du second terme de la somme tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Si nous appelons T_n ce second terme, nous avons de même :

$$E(T_n^2) \leq E \left(\lambda_j(N_n) B \left(\frac{m'(A_j(N_n))}{m'([a,b])} \right)^2 \right)$$

qui vaut :

$$\sum_{r \in N^*} (\lambda_j(r))^2 \frac{B^2(\lambda_j(r) - 1)}{r(r+1)} P(N_n = r)$$

Nous pouvons écrire cette somme sous la forme :

$$\sum_{r < nm'([a,b])(1-n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^2 \frac{B^2(\lambda_j(r) - 1)}{r(r+1)} P(N_n = r) +$$

$$\sum_{r \geq nm'([a,b])(1-n^{-\delta})} (\lambda_j(r))^2 \frac{B^2(\lambda_j(r) - 1)}{r(r+1)} P(N_n = r)$$

Comme $\lambda_j(r) \leq r + 1$, nous pouvons majorer le premier terme de la somme par :

$$\sum_{r < nm'([a,b])(1-n^{-\delta})} B^2(r+1)P(N_n = r)$$

et finalement par :

$$(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}) + 1)B^2P(N_n < nm'([a,b])(1-n^{-\delta}))$$

D'après le lemme démontré au paragraphe 3, la suite : $u_n = nP(N_n < nm'([a,b])(1-n^{-\delta}))$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Nous obtenons la convergence vers zéro du premier terme de la somme lorsque n tend vers l'infini.

La condition (b) implique $\frac{\lambda_j(r)}{r^{\frac{1}{2}}}$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Pour n assez grand, nous pouvons majorer le second terme de la somme par :

$$\sum_{r \geq nm'([a,b])(1-n^{-\delta})} B^2 \frac{r^{\frac{1}{2}}}{r+1} P(N_n = r)$$

et finalement par :

$$\sum_{r \geq nm'([a,b])(1-n^{-\delta})} \frac{B^2 r P(N_n = r)}{(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}))^{\frac{1}{2}}(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}) + 1)}$$

C'est à dire par :

$$\left(\sum_{r \in N^*} - \sum_{r < nm'([a,b])(1-n^{-\delta})} \right) \frac{B^2 r P(N_n = r)}{(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}))^{\frac{1}{2}}(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}) + 1)}$$

Le premier terme de la différence vaut, puisque N_n suit une loi de Poisson de paramètre $nm'([a,b])$:

$$\frac{B^2 nm'([a,b])}{(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}))^{\frac{1}{2}}(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}) + 1)}$$

et tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$

Le second terme de la différence est majoré par :

$$\frac{B^2 nm'([a,b])(1-n^{-\delta})}{(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}))^{\frac{1}{2}}(nm'([a,b])(1-n^{-\delta}) + 1)}$$

Il tend aussi vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Le second terme de la somme tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Donc $E(T_n^2)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

c) conclusion

Nous avons

$$E(Z_n + T_n) = E(Z_n) + E(T_n) \text{ tend vers } 0 \text{ avec } \frac{1}{n}.$$

$$E((Z_n + T_n)^2) \leq E(Z_n^2) + E(T_n^2) + 2(E(Z_n^2))^{1/2}(E(T_n^2))^{1/2} \text{ tend vers } 0 \text{ avec } \frac{1}{n}.$$

Le théorème est démontré.

Remarque : Tous les résultats concernant la partition aléatoire peuvent être étendus au cas d'un processus de Cox sur $[a, b]$ dont la mesure aléatoire qui le dirige prend ses valeurs dans un espace de mesures $E_c = \{m : m([a, b]) = c\}$, c étant une constante positive fixée.

Pour $c = 1$, il s'agit donc des processus de Cox dirigé par une mesure de probabilité aléatoire.

Pour le montrer, il suffit de conditionner par rapport à la mesure directrice.

bibliographie:

- [1] Alan F. KARR " *Inference for thinned point processes with application to Cox processes* " 1985 (Journal of multivariate analysis , tome 16 , pages 368 - 392)
- [2] Muriel CURIONI " *Estimation de la densité des processus de Poisson non homogènes* " Thèse de doctorat 3ème cycle 1977
- [3] Saab ABOU-JAOUDE " *La convergence L_1 et L_∞ de certains estimateurs d'une densité de probabilité* " thèse de doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie 1979
- [4] Emmanuelle CRETOIS " *Estimation de la densité moyenne d'un processus ponctuel de Poisson par des méthodes aléatoires* " Congrès des XXIVèmes Journées de Statistiques - Bruxelles - Mai 1992
- [5] Nadia BENSALID, Rapport technique 141 - L.S.T.A. - Juin 1991