



HAL
open science

Sur l'estimation des covariances d'un processus ARMA scalaire

Hatem Dellagi

► **To cite this version:**

Hatem Dellagi. Sur l'estimation des covariances d'un processus ARMA scalaire. Annales de l'ISUP, 1996, XXXX (2), pp.37-51. hal-03659818

HAL Id: hal-03659818

<https://hal.science/hal-03659818>

Submitted on 5 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur l'estimation des covariances d'un processus ARMA scalaire

Hatem Dellagi

LSTA, Université Paris-VI, Tour 45-55 3^e étage,
 4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

Résumé. Nous proposons des estimateurs de la fonction de covariances d'un processus ARMA scalaire, dont nous établissons la consistance ainsi que les propriétés limites de convergence en loi et presque sûre.

Covariance estimation of ARMA process

Abstract - We propose the estimators of covariance function of an ARMA process that we establish consistency and boundary properties of convergence in law and a.s.

1 Introduction

L'estimation de la fonction de covariances $\gamma(\cdot)$ d'un processus $ARMA(p, r)$ défini par l'équation

$$\Phi(B)y_t = \Theta(B)\epsilon_t$$

où $\Phi(z) = 1 - a_1z - \dots - a_pz^p$ et $\Theta(z) = 1 + b_1z + \dots + b_rz^r$ a été étudiée (cf. [1], [2]) dans un cadre restrictif où le processus ϵ_t est i.i.d. et de variance σ^2 finie.

Différentes méthodes ont été développées par Brockwell et Davis, cf[2] pour calculer la fonction de covariance qui a une forme extrêmement simple dans

le cas d'un processus MA(r) qui satisfait l'équation $y_t = \sum_{j=0}^r b_j \epsilon_{t-j}$

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^r b_j b_{j+|k|} & |k| \leq r \\ 0 & |k| > r \end{cases}$$

où $b_0 = 1$ et $b_j = 0$ $j > r$

Dans cet article nous exploitons l'estimateur décaé (ED) de la partie autorégressive d'un modèle ARMA scalaire étudié par Dellagi ([6],[7]) pour estimer la matrice de covariance $\hat{\Gamma}_n$ dans un cadre général où le bruit (ϵ_t) est un accroissement de martingales vérifiant des conditions que nous détaillerons dans la suite et telle que la variance est définie par $\sigma_k^2 = E(\epsilon_k^2) = E(\rho_{k_1}^2)$ avec

$$n^{-1} \sum_{k=1}^n \rho_k^2 \longrightarrow \sigma^2 \text{ p.s.}$$

La consistance forte est prouvée sous des hypothèses ayant l'avantage de s'exprimer en fonction des trajectoires .

L'estimation de $\gamma(\cdot)$ à partir des observations y_1, \dots, y_n joue un rôle crucial particulièrement dans les problèmes de construction d'un modèle approprié des données . La famille des processus ARMA joue un rôle clé dans la modélisation des séries temporelles, leur structure linéaire implique la très simple théorie de la prédiction linéaire.

Pour l'estimation de la variance du bruit , notre approche est basée sur une idée introduite en statistique par Szego et Grenander, cf[11] qui, par un calcul simple sur les formes de Toeplitz, conduit à la limite de $\frac{1}{n} \ln \det | \hat{\Gamma}_n |$ où $\hat{\Gamma}_n$ désigne la matrice de covariance de la moyenne mobile . Cette limite n'est autre que $\ln \sigma^2$.

Des simulations ont été faites pour confirmer ces résultats . La méthode d'estimation que nous abordons ne présente que des avantages notamment lorsqu'il s'agit d'identifier un processus ARMA scalaire dont la partie moyenne mobile a une densité spectrale strictement positive et un petit nombre de coefficients.

2 Identification

2.1 Données - Notations - Hypothèses.

Soit $(y_n; n \geq 0)$ un processus ARMA scalaire d'ordre p et r , associé à un bruit $(\epsilon_n; n \geq 1)$ ($ARMA(p, r)$ en abrégé) et défini par l'équation:

$$y_n = a_1 y_{n-1} + \dots + a_p y_{n-p} + \epsilon_n + b_1 \epsilon_{n-1} + \dots + b_r \epsilon_{n-r} \quad (1)$$

Il est clair que, pour des conditions initiales $(y_{-1}, \dots, y_{-p}, \epsilon_{-1}, \dots, \epsilon_{-r})$ qui sont corrélées avec $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_r, \dots$ le processus $(y_n; n \geq 0)$ est parfaitement défini. a_i pour $1 \leq i \leq p$, b_j pour $0 \leq j \leq r$ sont des paramètres inconnus. On suppose que le polynôme $\Theta(z) = \sum_{j=0}^r b_j z^j$ a toutes ses racines de module > 1 , et que la suite $(\epsilon_n; n \geq 1)$ est adaptée à une filtration $F = (\mathcal{F}_n; n \geq 1)$ et satisfait l'une des deux hypothèses suivantes:

-Hypothèse(B1): la suite $(\epsilon_n; n \geq 1)$ est un bruit blanc de variance σ^2 , c'est à dire que les v.a. (ϵ_n) sont de même loi, centrées, (ϵ_{n+1}) est indépendante de \mathcal{F}_n et $E\{\epsilon_n^2\} = \sigma^2$.

-Hypothèse(B2): la variable aléatoire (v.a.) ϵ_n est un accroissement de martingale vérifiant :

$$\begin{aligned} E\{\epsilon_{n+1}/\mathcal{F}_n\} &= 0 \\ E\{\epsilon_{n+1}^2/\mathcal{F}_n\} &= \rho_n^2 \text{ tel que } n^{-1} \sum_{k=1}^n \rho_k^2 \rightarrow \sigma^2 \text{ p.s.} \\ \sup_n E\{|\epsilon_{n+1}|^{\alpha+2}/\mathcal{F}_n\} &< \infty \text{ pour } \alpha > 0. \end{aligned}$$

Sous (B1) ou (B2) on a une loi forte pour les (ϵ_n) (voir Dellagi, [7], p.32)

$$n^{-1} \sum_{k=1}^n \epsilon_k^2 \rightarrow \sigma^2 \text{ p.s.}$$

2.2 Irréductibilité du modèle $ARMA_p(1, r)$

Posons

$Y_n = {}^t(y_n, \dots, y_{n-p+1})_{p \times 1}$, $v = {}^t(1, 0, \dots, 0)_{p \times 1}$; $B_j = b_j I_p$ pour $j = 1, \dots, r$ et

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{p-1} & a_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{p \times p}$$

I_p étant la matrice identité, alors:

$$Y_n = AY_{n-1} + \left(\sum_{j=0}^r b_j \epsilon_{n-j} \right) v. \quad (2)$$

On considère \hat{A}_n défini par:

$$\hat{A}_n S_{n-1}(r) = S_n(r+1) \quad (3)$$

avec $S_n(q) = \sum_{k=0}^{n-q} Y_{k+q} {}^t Y_k$ pour $n \geq q$

$\underline{\alpha}(M)$ et $\bar{\alpha}(M)$ dénotent le plus petit et le plus grand module des valeurs propres d'une matrice M . Et si M est hermitienne, $\lambda_{\min}(M)$, $\lambda_{\max}(M)$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de M .

Le modèle $ARMA_p(1, r)$ défini par (5) est dit **stable** si $\bar{\alpha}(A) < 1$, **instable** si $\underline{\alpha}(A) = \bar{\alpha}(A) = 1$, **explosif** si $\underline{\alpha}(A) > 1$, **non explosif** si $\bar{\alpha}(A) \geq 1$. Pour obtenir la consistance forte de \hat{A}_n dans le cas stable (et donc dans le cas général), l'hypothèse suivante est indispensable.

Le modèle $ARMA_p(1, r)$ est **irréductible** si et seulement si la variance σ^2 du bruit $(\epsilon_n; n \geq 1)$ est strictement positive et chacun des polynômes $R(z) = \sum_{j=0}^r b_j z^{r-j}$ et $\Theta(z) = \sum_{j=0}^p b_j z^j$ est premier avec le polynôme caractéristique de la matrice A qui est : $P(z) = (-1)^p (z^p - a_1 z^{p-1} - \dots - a_p)$.

Soit $\tilde{\Theta}$ le polyôme matriciel complexe défini par $\tilde{\Theta}(z) = \sum_{j=0}^r B_j z^j$ avec $B_j = b_j I$.

$\tilde{\Theta}$ est passif si et seulement si tous les zéros de $\tilde{\Theta}$ sont à l'extérieur du cercle unité et pour tout z de module 1 $(\tilde{\Theta}^{-1} - \frac{1}{2} I_d)$ est positif. (Un polynôme $\Lambda(z)$ est positif si pour tout z de module 1 $\Lambda(z) + {}^* \Lambda(z) > 0$).

L'hypothèse d'**irréductibilité** est plus faible que les hypothèses de commandabilité et d'estimabilité introduites dans [8],[9]. Elle est aussi plus faible que l'hypothèse classique de passivité qui permet d'établir la consistance forte de l'estimateur des moindres carrés généralisés, cf[8].

2.3 Décomposition et transformation du modèle.

Dans le cas général, on peut trouver une matrice $T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$ inversible, telle que la matrice T_j soit de taille $d_j \times p$, ($d_1 + d_2 + d_3 = p$) et on ait:

$$TAT^{-1} = \text{Diag}\{A_1, A_2, A_3\} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}; \quad (4)$$

avec $\bar{\alpha}(A_1) < 1$, $\underline{\alpha}(A_2) = \bar{\alpha}(A_2) = 1$, et $\underline{\alpha}(A_3) > 1$.

Le processus $ARMA_{d_1,p}(1, r)$:

$$T_1 Y_n = A_1 T_1 Y_{n-1} + T_1 \left(\sum_{j=0}^r b_j \epsilon_{n-j} \right) v$$

est la composante **stable** du processus (Y_n).

Le processus $ARMA_{d_2,p}(1, r)$:

$$T_2 Y_n = A_2 T_2 Y_{n-1} + T_2 \left(\sum_{j=0}^r b_j \epsilon_{n-j} \right) v$$

est la composante **instable** du processus (Y_n)

Le processus $ARMA_{d_3,p}(1, r)$:

$$T_3 Y_n = A_3 T_3 Y_{n-1} + T_3 \left(\sum_{j=0}^r b_j \epsilon_{n-j} \right) v$$

est la composante **explosive** du processus (Y_n)

La définition d'irréductibilité précédente s'étend aisément au processus $ARMA(p, r)$ (y_n) défini par (1), car on peut lui associer le processus $ARMA_p(1, r)$ défini par (2).

Le modèle $ARMA(p, r)$ est irréductible, s'il en est de même du modèle $ARMA_p(1, r)$ qui lui est associé.

2.4 Transformation du modèle

Pour clore cette partie, donnons une transformation permettant de passer d'un processus $ARMA(1, r)$ à un processus autorégressif d'ordre 1 ($AR(1)$)

en abrégé).

La matrice A du processus $ARMA(1, r)$ (Y_n) défini par (2) est inversible, (car $a_p \neq 0$), posant alors comme dans [5]:

$$D_j = A^{-1}(b_j I_p + D_{j+1}) \text{ pour } 1 \leq j \leq r-1, D_r = b_r A^{-1},$$

$$\xi_n = \sum_{j=0}^{r-1} D_j \epsilon_{n-j} v; \quad \tilde{Y}_n = Y_n + \xi_n; \quad \tilde{\epsilon}_n = (I_p + D_1) \epsilon_n; \quad (5)$$

on a:

$$\tilde{Y}_{n+1} = A \tilde{Y}_n + \tilde{\epsilon}_{n+1} v. \quad (6)$$

Bien qu'elle ne soit pas observable, la transformation faisant passer de (Y_n) à (\tilde{Y}_n) a l'avantage de simplifier quelques démonstrations.

2.5 Construction des estimateurs.

On pose:

- $a = {}^t(a_1, \dots, a_p)$; $b = {}^t(b_1, \dots, b_r)$; $Y_n = {}^t(y_n, \dots, y_{n-p+1})$;
- $x_n(a) = y_n - \langle Y_n, a \rangle = e_n = \sum_{j=0}^{r-1} b_j \epsilon_{n-j}$; $S_n(q) = \sum_{k=0}^{n-q} Y_{k+q} {}^t Y_k$, pour $n \geq q$;
- $c = {}^t(c_0, \dots, c_r)$, où c_j , pour $j = 0, \dots, r$ sont les autocovariances du processus moyenne mobile (MA) (x_n).

1) Si a est connu:

Alors pour $j = 0, \dots, r$,

$$\tilde{c}_{n,j}(a) = n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k x_{k+j}$$

sont des estimateurs fortement consistant des autocovariances de (x_n) définies par :

$$c_j = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{k=j}^r b_k b_{k-j} & \text{sous (B1)} \\ \sigma_{n-j}^2 \sum_{k=j}^r b_k b_{k-j} & \text{sous (B2)} \end{cases} \quad (7)$$

avec:

$$\sigma_k = E(\epsilon_k^2) = E(\rho_{k-1}^2).$$

2) Si a est inconnu:

On propose alors les estimateurs:

$$\hat{c}_{n,j} = \tilde{c}_{n,j}(\hat{a}_n) = n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k(\hat{a}_n) x_{k+j}(\hat{a}_n) \quad (8)$$

pour $j = 0, \dots, r$.

où \hat{a}_n est l'estimateur empirique décalé (E.D.) de a défini cf[8] par:

$${}^t S_{n-1}(r) \hat{a}_n = \sum_{k=0}^{n-r-1} Y_k y_{k+r+1}. \quad (9)$$

${}^t M$ est la transposée de la matrice M).

3) Estimation des b_i et de σ^2

Lorsque le processus $(x_n(a))$ est stable et le bruit (ϵ_n) est blanc, Azencott et Dacunha-Castelle cf[1] proposent de résoudre le système (7) où les c_j sont connus, et $\sigma^2, b_1, \dots, b_r$ sont inconnus, un tel système a en général un nombre fini de solutions distinctes. Pour avoir l'unicité, ils supposent que les racines du polynôme $\Theta(z)$ sont toutes de module ≥ 1 . ce qui correspond à l'hypothèse d'irréductibilité du modèle.

Dans le cas général, lorsque le modèle ARMA(p,r) est irréductible, le polynôme $\Theta(z)$ a toutes ses racines de module > 1 et le bruit (ϵ_n) est i.i.d., on propose d'estimer la variance σ^2 du bruit à partir de la matrice de covariance $\hat{\Gamma}_n$ du processus moyenne mobile (x_n) . Soit:

$$\hat{\sigma}_n^2 = [\det(\hat{\Gamma}_n)]^{1/n}.$$

C'est une conséquence du résultat suivant, dû à Grenander et Szegő cf[11]:

$$\lim \frac{1}{k} \ln [\det \Gamma_k] = \ln \sigma^2$$

où $\sigma^2 = E |x_n - p_{n-1}(x_n)|^2$ est l'erreur de prédiction à un pas du processus stationnaire (x_n) .

Ayant estimé σ^2 , on peut alors avoir une solution unique en b_1, \dots, b_r , du système (7) en résolvant les $(r-1)$ dernières équations et en choisissant les solutions b_i ; $i = 1, \dots, r$ telles que le polynôme $\Theta(z)$ ait ses racines à l'extérieur du cercle unité.

3 Consistance forte des estimateurs.

3.1 Estimation de la matrice de covariance de la moyenne mobile (x_n)

Notre résultat général est le suivant. D'après les remarques faites au paragraphe précédent, on ne peut espérer la consistance forte de l'estimateur $\hat{\Gamma}_k$ de la matrice de covariance de la moyenne mobile sans l'hypothèse d'irréductibilité. Pour une matrice M , ($\|M\|$ dénote la norme: $\|M\| = \sqrt{\lambda_{\max}(M * M)}$).

Théorème 1 Si le modèle $ARMA(p, r)$ défini par (1) est irréductible, alors:
1) l'estimateur $\hat{\Gamma}_n$ de Γ défini par (8) et (9) est fortement consistant. En outre, presque sûrement:

2) Sous (B1), $\|\hat{\Gamma}_n - \Gamma\| = o(n^{-1}a(\ln n))^{1/2}$, pourvu que la fonction a soit croissante vers ∞ et telle que $\int_2^\infty [a(t)]^{-1} dt < \infty$ (par exemple $a(t) = t^{1+\gamma}$ pour $\gamma > 0$).

Sous (B2), $\|\hat{\Gamma}_n - \Gamma\| = O(n^{-1} \ln n)^{1/2}$.

corolaire 1 Sous les hypothèses du théorème, $\hat{\sigma}_n$, défini par (10) est un estimateur fortement consistant de la variance du bruit (ϵ_n).

3.2 Comportement asymptotique presque-sûre de $S_n(r)$ dans le cas général.

lemme 1 . Si le modèle $ARMA_p(1, r)$ défini par (4) est irréductible, alors pour tout $0 \leq j \leq r$, il existe deux suites (Φ_n^j) et (Ψ_n^j) de matrices aléatoires inversibles telles que p.s.:

$$\Phi_n^j S_{n-1}(j) * \Psi_n^j \longrightarrow I.$$

Démonstration. La preuve de ce lemme est analogue à celle du lemme 1 cf[7]. nous rappelons brièvement les étapes:

1) On considère la décomposition du modèle $ARMA_p(1, r)$ définie par (4). Pour cela, posant:

$$Y_n^j = T_j Y_n; \quad j = 1, 2, 3$$

on a:

$$Y_n^j = A_j Y_{n-1}^j + e_n^j v; \quad e_n^j = \sum_{l=0}^r T_j B_l \tilde{\epsilon}_{n-l}.$$

avec $B_l = b_l I_p$.

Au processus $ARMA_{d_2,p}(1, r)$ instable (Y_n^2), associons le processus $AR_{d_2}(1)$ (\tilde{Y}_n^2) défini comme en (8) et (9) par:

$$\tilde{Y}_{n+1}^2 = A_2 \tilde{Y}_n^2 + T_2 \tilde{\epsilon}_{n+1} v; \quad \tilde{Y}_n^2 = Y_n^2 + T^2 \xi_n;$$

ξ_n et $\tilde{\epsilon}_n$ étant défini comme en (5). Alors d'après cf[7], notant

$$\tilde{S}_{2,n} = \sum_{k=0}^n \tilde{Y}_k^2 * \tilde{Y}_k^2; \quad \Lambda_n = \text{Diag}\{n^{-1/2}(\Gamma_j^1)^{-1}, \tilde{S}_{2,n-j-1}^{-1/2} A_2^{-j}\} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix},$$

Γ_j^1 est la matrice définie par:

$$\Gamma_j^1 = \sum_0^\infty A_1^k N_1 * A_1^k; \quad N_1 = \sum_{i=0}^j A_1^i \left(\sum_{l=0}^j A_1^{j-l} T_1 B_l \right) \Gamma * (T_1 B_i) \quad (10)$$

$$\Delta_n = \text{Diag}\{n^{-1/2} I_{d_1}, \tilde{S}_{2,n-j-1}^{-1/2}\} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix};$$

on a p.s.:

$$\Lambda_n S_{n-1}(j) * \Delta_n \longrightarrow I_{d_1+d_2}. \quad (11)$$

pour tout $0 \leq j \leq r$.

2) Par ailleurs, le processus (Y_n^3) étant $ARMA_{d_3,p}(1, r)$ explosif et régulier, d'après le théorème 2 cf [7], si η_3 est la limite au sens p.s. de ($A_3^{-n} Y_n^3$), la matrice $G_3 = \sum_{k=1}^\infty A_3^{-k} \eta_3 * \eta_3 * A_3^{-k}$ est p.s. inversible et par conséquent les matrices suivantes sont bien définies:

$$\Phi_n^j = \text{Diag}\{\Lambda_n, G_3^{-1/2} A_3^{-n} T_3\};$$

$$\Psi_n^j = \text{Diag}\{\Delta_n, G_3^{-1/2} A_3^{-(n-j)} T_3\}.$$

Compte tenu de (11) et du théorème 2 de cf[7] qui implique:

$$A_3^{-n} (T_3 S_{n-1}(j) * T_3) * A_3^{-(n-j)} \longrightarrow I_{d_3} \text{ p.s.},$$

On montre comme dans cf[7]; que p.s.:

$$\Lambda_n S_{n-1}(j) * T_3 * A_3^{-(n-j)} \longrightarrow 0$$

$$A_3^{-n} T_3 S_{n-1}(j) * \Delta_n \longrightarrow 0$$

pour tout $0 \leq j \leq r$.

3.3 Démonstration du théorème 1

La matrice $\hat{\Gamma}_n$ est définie par:

$$\hat{\Gamma}_n = \begin{pmatrix} \hat{c}_{n,0} & \cdots & \hat{c}_{n,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hat{c}_{n,r} & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \hat{c}_{n,0} & \cdots & \hat{c}_{n,r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{c}_{n,r} & \cdots & \hat{c}_{n,0} \end{pmatrix} \quad (12)$$

montrons que pour tout $j = 0, \dots, r$, p.s.

$$\|c_{n,j} - c_j\| \rightarrow 0.$$

D'après (2):

$${}^t S_{n-1}(r)(\hat{a}_n - a) = \sum_{l=0}^r \left[\sum_{k=0}^{n-r-1} b_l c_{k+r+1-l} \right] Y_k.$$

Et d'après (2), on a pour tout $0 \leq j \leq r$:

$$\begin{aligned} n\hat{C}_{n,j} &= \sum_{k=1}^{n-j} (y_k - \langle Y_{k-1}, \hat{a}_n \rangle) (y_{k+j} - \langle Y_{k+j-1}, \hat{a}_n \rangle) \\ &= \sum_{k=1}^{n-j} (e_k - \langle Y_{k-1}, \hat{a}_n - a \rangle) (e_{k+j} - \langle Y_{k+j-1}, \hat{a}_n - a \rangle) \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} n\hat{C}_{n,j} - \sum_{k=1}^{n-j} e_k e_{k+j} &= \sum_{k=1}^{n-j} \langle Y_{k-1}, \hat{a}_n - a \rangle \langle Y_{k+j-1}, \hat{a}_n - a \rangle \\ &\quad - \left[\sum_{k=1}^{n-j} e_k {}^t Y_{k+j-1} + \sum_{k=1}^{n-j} e_{k+j} {}^t Y_{k-1} \right] (\hat{a}_n - a) \\ &= U_{n,j}^1 - U_{n,j}^2 \end{aligned} \quad (13)$$

avec:

$$U_{n,j}^1 = {}^t(\hat{a}_n - a) \left(\sum_{k=1}^{n-j} Y_{k-1} {}^t Y_{k+j-1} \right) (\hat{a}_n - a) = {}^t(\hat{a}_n - a) {}^t S_n(j) (\hat{a}_n - a)$$

et:

$$U_{n,j}^2 = \sum_{l=0}^r \sum_{k=1}^{n-j} b_l (e_{k-l} {}^t Y_{k+j-1} + e_{k+j-l} {}^t Y_{k-1}) (\hat{a}_n - a).$$

D'après le lemme, pour tout $0 \leq j \leq r$, il existe deux matrices aléatoires inversibles $(\tilde{\Phi}_n^j)$ et $(\tilde{\Psi}_n^j)$ vérifiant:

$$\tilde{\Phi}_n^j {}^t S_n(j) {}^t \tilde{\Psi}_n^j \longrightarrow I_p \text{ p.s.}$$

D'autre part, en écrivant:

$$U_{n,j}^1 = {}^t(\hat{a}_n - a)[\tilde{\Phi}_n^j]^{-1}(\tilde{\Phi}_n^j {}^t S_n(j) {}^t \tilde{\Psi}_n^j) {}^t[\tilde{\Psi}_n^j]^{-1}(\hat{a}_n - a).$$

Montrons que p.s. : ${}^t(\hat{a}_n - a)[\tilde{\Phi}_n^j]^{-1} = o(n)$

et que p.s. : ${}^t[\tilde{\Psi}_n^j]^{-1}(\hat{a}_n - a) = o(n)$

Posons :

$$J_{d_1} = \begin{pmatrix} I_{d_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

une matrice de taille pd_1

$$J_{d_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{d_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

une matrice de taille pd_2

$$J_{d_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{d_3} \end{pmatrix}$$

une matrice de taille pd_3

où I_{d_j} est la matrice identité de taille $d_j d_j$.

on a alors :

$$n^{1/2} \Gamma_r^1 = ({}^t J_{d_1})(\Phi_n^j)^{-1} J_{d_1}$$

$$A_2^r \tilde{S}_{2,n-j-1}^{1/2} = ({}^t J_{d_2})(\Phi_n^j)^{-1} J_{d_2}$$

$$A_3^{n-r} G_3^{1/2} = ({}^t J_{d_3})(\Phi_n^j)^{-1} J_{d_3}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \| {}^t(\hat{a}_n - a)(\Phi_n^j)^{-1} \|^2 &= \| {}^t(\hat{a}_n - a)({}^t J_{d_1})^{-1} n^{1/2} \Gamma_r^1 J_{d_1}^{-1} \|^2 \\ &+ \| {}^t(\hat{a}_n - a)({}^t J_{d_2})^{-1} A_2^r \tilde{S}_{2,n-j-1}^{1/2} (J_{d_2})^{-1} \|^2 \\ &+ \| {}^t(\hat{a}_n - a)({}^t J_{d_3})^{-1} A_3^{n-r} G_3^{1/2} (J_{d_3})^{-1} \|^2 \end{aligned}$$

D'après l'étude des cas stable, instable et explosif cf[2], et la consistance forte de l'estimateur \hat{a}_n , on a p.s :

$$\begin{aligned} \|\hat{a}_n - a\| &= o(n) \\ \|(\hat{a}_n - a) ({}^t J_{d_1})^{-1} n^{1/2} \Gamma_1^r (J_{d_1})^{-1} \|^2 &= o(n) \\ \|(\hat{a}_n - a) ({}^t J_{d_2})^{-1} A_2^j \tilde{S}_{2,n-j-1}^{1/2} (J_{d_2})^{-1} \|^2 &= \begin{cases} O(\ln n)^{2/2+\delta} & \delta > 0 \text{ sous (B1)} \\ 0 & \delta = 0 \text{ sous (B2)} \end{cases} \end{aligned}$$

car on a p.s :

$$\| (\hat{a}_n - a) \tilde{S}_{2,n-j-1}^{1/2} \|^2 \leq \| (\hat{a}_n - a) \tilde{S}_{2,n-r-1}^{1/2} \|^2 \| \tilde{S}_{2,n-r-1}^{-1} \tilde{S}_{2,n-j-1} \|^2$$

avec $\| \tilde{S}_{2,n-r-1}^{-1} \tilde{S}_{2,n-j-1} \| \rightarrow 1$ p.s.

D'autre part :

$$\| (\hat{a}_n - a) ({}^t J_{d_3})^{-1} A_3^{n-j} G_3^{1/2} (J_{d_3})^{-1} \|^2 = o(n) \text{ p.s.}$$

car :

$$(\hat{a}_n - a) A^{n-j} G^{1/2} = o(n^{1/2}) \text{ p.s.}$$

D'où :

$$\| (\hat{a}_n - a) (\Phi_n^j)^{-1} \| = o(n^{1/2}) \text{ p.s.}$$

Par le même raisonnement on a aussi :

$$\| (\hat{a}_n - a) ({}^t \Psi_n^j)^{-1} \| = o(n^{1/2}) \text{ p.s.}$$

on en déduit :

$$n^{-1} U_{n,j} \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

Par ailleurs, en écrivant :

$$\| U_{n,j}^2 \| \leq \| \tilde{\Psi}_n^j \sum_{l=0}^r \sum_{k=1}^{n-j} b_l (\epsilon_{k-l} {}^t Y_{k+j-1} + \epsilon_{k+j-l} {}^t Y_{k-1}) \| \| (\tilde{\Psi}_n^j)^{-1} \| \| \hat{a}_n - a \|.$$

D'après le théorème 1 (cas général) cf[7], le théorème 2 cf[8] sur la convergence des martingales vectorielles, et le fait que p.s. $\| (\Psi_n^j)^{-1} (\hat{a}_n - a) \| = o(n^{-1/2})$, on a p.s. :

$$U_{n,j}^2 = o(n).$$

On en déduit que pour tout $j = 0, \dots, r$, p.s. :

$$\hat{C}_{n,j} - n^{-1} \sum_{k=1}^{n-j} e_k e_{k+j} \rightarrow 0.$$

Par conséquent; pour n assez grand:

$$\hat{\Gamma}_n - \Gamma \rightarrow 0. \text{ p.s.}$$

D'où le 1) du théorème. Le 2) est une conséquence du théorème 1 cf [7] et le théorème 2 cf [6].

Conséquence

Soit le processus $(Y_n)ARMA_p(1, r)$ défini par (2). On suppose que les ϵ_i sont r -indépendants. On propose un prédicteur à un pas de Y_n en posant:

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{A}_n Y_n$$

D'où:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} &= AY_n + e_{n+1}v - \hat{A}_n Y_n \\ &= -(\hat{A}_n - A)Y_n + e_{n+1}v \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} &\| \sum_{k=0}^{n-1} (Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1})^t (Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} {}^t e_{k+1} e_{k+1} {}^t v v \| = \\ &\| (\hat{A}_n - A) \sum_1^n Y_k^t Y_k^t (\hat{A}_n - A) - (\hat{A}_n - A) \sum_{k=0}^{n-1} Y_k^t e_{k+1} - {}^t ((\hat{A}_n - A) \sum_{k=0}^{n-1} Y_k {}^t e_{k+1}) \| \end{aligned}$$

D'après la démonstration du théorème précédent on a pour $j = 0$:

$$U_{n,0}^1 = (\hat{A}_n - A)^t S_n(0) (\hat{A}_n - A) = o(n) \text{ p.s.}$$

$$U_{n,0}^2 = (\hat{A}_n - A) \sum_{k=0}^{n-1} Y_k^t e_{k+1} + {}^t ((\hat{A}_n - A) \sum_{k=0}^{n-1} Y_k^t e_{k+1}) = o(n) \text{ p.s.}$$

On en déduit que:

$$1/n \sum_{k=0}^{n-1} (Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1})^t (Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1}) \rightarrow c_0 = (1 + b_1^2 + \dots + b_r^2) \sigma^2 \text{ p.s.}$$

pour r et b_i , $i = 1, \dots, r$ suffisamment petits ce prédicteur devient intéressant.

REFERENCES

- [1]-R.Azencott., D.Dacunha-Castelle Séries d'observations irrégulières.(1984).
- [2]-Brockwell P.A. et Davis A., 1993. Time Series Theory and Methods, Springer-Verlag in statistics.
- [3]-Box G.,Jenkins G. Time series Analysis. Holden Day, (1976).
- [4]-Chen,H.F.and Guo,L.,Strong consistency of parameter estimates for discrete-time stochastic systems.J.Sys.Sci. & Math.Scis, 5:2 (1985).
- [5]-Chen,H.F.and Guo,L.,Simultaneous estimation of both the zero of regression function and parameters in noise.J.Sys.Sci. & Math.Scis, 7:2 (1987).
- [6]-Dellagi.W. Sur l'estimation de la partie autorégressive d'un modèle ARMA vectoriel stable.C.R.Acad.Paris,t 312,Serie I,p 883-886,1991.
- [7]-Dellagi.W. Sur l'estimation de la partie autorégressive d'un modèle ARMA vectoriel général. (Thèse de l'Université Paris XI.1991).
- [8]-Duflo.M. Méthodes récursives aléatoires. Masson, 1990
- [9]-M.Duflo. R.Sénoussi. A.Touati. Sur la loi des grands nombres pour les martingales vectorielles et l'estimateur des moindres carrés d'un modèle de régression. Ann.I.H.P. Vol 26.N°4,1990.
- [10]-M.Duflo.R.Sénoussi.A.Touati. Propriétés asymptotiques presque-sûres de l'estimateur des moindres carrés d'un modèle autorégressif. Ann.I.II.P. Vol 27. N°1,1991.
- [11]-U.Grenander. et .M.Rosenblatt.Statistical analysis of stationary time series.1983.

[12]-Lai.T.L., Wei.C.Z.Asymptotic properties of general autoregressive models and strong consistency of least squares estimates of their parameters. J.multivariate analysis 13, 1-23.(1983).

[13]-Subba Rao.T,Gabr.M.M. An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series Models. (1984).