



HAL
open science

Vibration d'une corde non linéaire : vers une formulation covariante

Thomas Hélie, Emmanuelle Rouhaud, David Roze

► To cite this version:

Thomas Hélie, Emmanuelle Rouhaud, David Roze. Vibration d'une corde non linéaire : vers une formulation covariante. 16ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2022, Marseille, France. hal-03658964

HAL Id: hal-03658964

<https://hal.science/hal-03658964v1>

Submitted on 28 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Motivation

Trois formulations d'un même modèle de corde (linéaire ou non) :

| type | caractéristique |
|--------------------------------------|---|
| 1. EDP : Equation des ondes | Equilibre des forces |
| 2. SHP : Système Hamiltonien à Ports | Encode le bilan de puissance |
| 3. 4D : Formulation espace-temps | Covariance : Invariance au changement d'observateur |

Objectifs. Comparer les formulations (1-3) en vue de développer :

- A : un SHP 4D
- B : des méthodes numériques préservant les invariances
→ bilan de puissance garanti & insensibilité au chgt d'observateur

1. Equation des ondes

A. Quantités et notations

| | | | | | |
|-------------|-----|----------------------------------|---------|-------------------|------------------------|
| t | [s] | : temps (\underline{e}_t) | L_0 | [m] | : longueur de la corde |
| x^1 | [m] | : abscisse (\underline{e}_1) | μ_0 | [kg/m] | : masse linéique |
| x^2 | [m] | : ordonnée (\underline{e}_2) | S_0 | [m ²] | : section transverse |
| $w(x^1, t)$ | [m] | : dépl. transverse | T_0 | [N] | : tension de la corde |

B. Cinématique et comportement

(H1) **Position** au temps t d'un point matériel $\underline{x} = (x^1, x^2)^T$ à $t = 0$:

$$\underline{\Phi}(t, \underline{x}) = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 + w(t, x^1) \end{pmatrix} \quad (\text{hyp. cinématique pour la corde})$$

(D2) **Gradient de transformation** \underline{F} :

$$\underline{F}(t, \underline{x}) = \underline{\nabla}_{\underline{x}} \underline{\Phi}(t, \underline{x}) \quad \text{avec} \quad \underline{\nabla}_{\underline{x}} \underline{\Phi} := \begin{pmatrix} \partial_{x^1} \Phi^1 & \partial_{x^2} \Phi^1 \\ \partial_{x^1} \Phi^2 & \partial_{x^2} \Phi^2 \end{pmatrix}$$

(D3) **Tenseur de déformation** \underline{E} (**Green-Lagrange**) :

$$\underline{E}(t, \underline{x}) := \underline{E}_F(\underline{F}(t, \underline{x})) \quad \text{avec} \quad \underline{E}_F : \underline{A} \mapsto \frac{1}{2}(\underline{A}^T \underline{A} - \underline{I})$$

(H4) **Densité volumique d'énergie élastique** ψ :

$$\psi(t, \underline{x}) = \psi_E(\underline{E}(t, \underline{x})) \quad \text{avec} \quad \psi_E : \underline{A} \mapsto \frac{T_0}{S_0}(\underline{A} : \underline{A})$$

(D5) **Tenseur des contraintes** $\underline{\Sigma}$ (**Piola-Kirchhoff 2**):

$$\underline{\Sigma}(t, \underline{x}) := D\psi_E(\underline{E}(t, \underline{x})) \quad \text{avec} \quad D\psi_E : \underline{A} \mapsto \begin{pmatrix} \partial_{A_{11}} & \partial_{A_{12}} \\ \partial_{A_{21}} & \partial_{A_{22}} \end{pmatrix} \psi_E$$

(D6) **Tenseur des contraintes** $\underline{\sigma}$ (**Cauchy**): **poussé-avant de** $\underline{\Sigma}$

$$\underline{\sigma}(t, \underline{x}) = \underline{\sigma}_F(\underline{F}(t, \underline{x})) \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma}_F : \underline{A} \mapsto \det(\underline{A})^{-1} \underline{A} \underline{\Sigma}_F(\underline{A}) \underline{A}^T$$

et $\underline{\Sigma}_F(\underline{A}) = D\psi_E(\underline{E}_F(\underline{A}))$

| | | | |
|---|---|--|----------|
| (D2): $\underline{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_{x^1} w & 1 \end{pmatrix}$ | (D3): $\underline{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\partial_{x^1} w)^2 & \partial_{x^1} w \\ \partial_{x^1} w & 0 \end{pmatrix}$ | (H4): $\psi = \frac{T_0}{4A} ((\partial_{x^1} w)^4 + 2(\partial_{x^1} w)^2) \approx \frac{T_0}{2S_0} (\partial_{x^1} w)^2$ | (H4-HPP) |
|---|---|--|----------|

$$\rightarrow \underline{\sigma} = \underbrace{\frac{T_0}{S_0} \begin{pmatrix} (\partial_{x^1} w)^2 & (\partial_{x^1} w)^3 + \partial_{x^1} w \\ (\partial_{x^1} w)^3 + \partial_{x^1} w & (\partial_{x^1} w)^2 \end{pmatrix}}_{\sigma_{NL}} \approx \underbrace{\frac{T_0}{S_0} \begin{pmatrix} 0 & \partial_{x^1} w \\ \partial_{x^1} w & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_{lin.}}$$

C. Equation du mouvement

Soit le déplacement $\underline{u}(t, \underline{x}) = \underline{\Phi}(t, \underline{x}) - \underline{x}$, l'équation du mouvement s'écrit

$$(\text{conserv}^\circ \text{ qt}^\epsilon \text{ de } mv^t) \quad \text{div } \underline{\sigma} = \mu_0 \partial_t^2 \underline{u}$$

$$(\text{cas grandes déf}^\circ + \text{H1}) \quad \frac{T_0}{S_0} \begin{pmatrix} 2\partial_{x^1} w \partial_{x^1}^2 w \\ 3(\partial_{x^1} w)^2 \partial_{x^1}^2 w + \partial_{x^1}^2 w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 \partial_t^2 w \end{pmatrix}$$

$$(\text{cas HPP}) \quad \frac{T_0}{S_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{x^1}^2 w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 \partial_t^2 w \end{pmatrix}$$

2. Formulation SHP

Etat interne $X(x, t)$

$$X := \begin{bmatrix} \pi := \mu_0 \partial_t w \\ \varepsilon := \partial_{x^1} w \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} [\text{Kg/s}] \text{ quantité de mouvement linéique} \\ [\text{adim}] \text{ déformation} \end{matrix}$$

Fonctionnelle d'énergie $\mathcal{H}(X)$

Pour toute fonction spatiale $X : x \mapsto X(\underline{x}) = [\pi(\underline{x}), \varepsilon(\underline{x})]^T$ dans $L^2((0, L), \mathbb{R}^2)$, on introduit la fonctionnelle d'énergie interne de la corde :

$$\mathcal{H}(X) = \int_0^L \frac{1}{2} X(\underline{x})^T W X(\underline{x}) dx_1 \quad \text{avec} \quad W = \text{diag}(1/\mu_0, T_0).$$

Système Hamiltonien à Ports

| Etat X_i | Flux $\partial_t X_i$ | Unités | Effort $\delta_{X_i} \mathcal{H}$ | Unités |
|---------------------|--|--------------------|-----------------------------------|--------|
| $X_1 = \pi$ | $\partial_t \pi = \mu_0 \partial_t^2 w$ | [N/m] | $\pi/\mu_0 = \partial_t w$ | [m/s] |
| $X_2 = \varepsilon$ | $\partial_t \varepsilon = \partial_t \partial_{x^1} w$ | [s ⁻¹] | $T_0 \partial_{x^1} w$ | [N] |

$$\text{force inert. linéiq.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_t \pi = \mu_0 \partial_t^2 w \\ \partial_t \varepsilon = \partial_t \partial_{x^1} w \end{pmatrix}}_{\text{flux}(x,t)} = \mathcal{J} \underbrace{\begin{pmatrix} \pi/\mu_0 = \partial_t w \\ T_0 \partial_{x^1} w \end{pmatrix}}_{\text{effort}(x,t)} \quad \begin{matrix} \text{vitesse de la masse} \\ \text{force de rappel} \end{matrix}$$

avec $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{x^1} \\ \partial_{x^1} & 0 \end{pmatrix}$ opérateur anti-autoadjoint.

$$\begin{aligned} \mu_0 \partial_t^2 w(x, t) &= \partial_{x^1} (T_0 \partial_{x^1} w(x, t)) && (\text{équation d'équilibre}) \\ \partial_t \partial_{x^1} w(x, t) &= \partial_{x^1} \partial_t w(x, t) && (\text{équation de lien cinématique}) \end{aligned}$$

3. Formulation espace-temps covariante

Théorie de la relativité utile en mécanique classique pour l'invariance des équations par changement d'observateur.

Cas général Coordonnées espace-temps (4D) ($x^0 = ct, x^1, x^2, x^3$), c célérité de la lumière, métrique de signature (1, -1, -1, -1).

Tenseur énergie impulsion \underline{T} : densité d'énergie espace-temps (\approx généralisation du tenseur des contraintes).

Loi de conservation valable pour tout observateur :

$$\text{div } \underline{T} = 0 \rightarrow \begin{cases} \partial_{x^0} T^{00} + \partial_{x^1} T^{01} + \partial_{x^2} T^{02} + \partial_{x^3} T^{03} = 0 \\ \partial_{x^0} T^{10} + \partial_{x^1} T^{11} + \partial_{x^2} T^{12} + \partial_{x^3} T^{13} = 0 \\ \partial_{x^0} T^{20} + \partial_{x^1} T^{21} + \partial_{x^2} T^{22} + \partial_{x^3} T^{23} = 0 \\ \partial_{x^0} T^{30} + \partial_{x^1} T^{31} + \partial_{x^2} T^{32} + \partial_{x^3} T^{33} = 0 \end{cases}$$

Cas de la corde coordonnées espace-temps ($x^0 = ct, x^1, x^2$) et pour $v \ll c$, le tenseur énergie-moment s'écrit :

$$T^{\mu\nu} \begin{pmatrix} \mu_0 \left(c^2 + \psi + \frac{v^2}{2} \right) & \frac{\sigma v}{c} & \mu_0 \left(c^2 + \psi + \frac{v^2}{2} \right) \frac{v}{c} \\ \frac{\sigma v}{c} & T^{11} & T^{12} \\ \mu_0 \left(c^2 + \psi + \frac{v^2}{2} \right) \frac{v}{c} & T^{21} & T^{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{21} & T^{22} \end{pmatrix} \approx -\frac{T_0}{S_0} \begin{pmatrix} 0 & \partial_{x^1} w \\ \partial_{x^1} w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu_0 v^2 \end{pmatrix}$$

où $v = \partial_t w$ et le signe négatif provient de la métrique.

Loi de conservation Première ligne (temps) → Bilan de puissance :

$$\mu_0 \partial_{x^0} \psi + \underline{\sigma} : \underline{\partial_{x^0} \varepsilon} = 0.$$

Deuxième et troisième lignes (espace) → PFD :

$$\mu_0 \partial_{x^0}^2 w - \frac{T_0}{S_0} \partial_{x^1}^2 w = 0$$

4. Perspectives

Généralisation de la démarche à d'autres problèmes mécaniques (hypothèses (H1) et (H4)).

Définition générale (sans coordonnées) de l'opérateur de divergence associée à tout problème conservatif (à topologie continue, discrète ou mixte)

Reformulation des Systèmes Hamiltoniens à Ports avec ces opérateurs de divergence.

Intégration des phénomènes irréversibles dans ce formalisme