



**HAL**  
open science

## Vibration d'une corde non linéaire : vers une formulation covariante

Thomas Hélie, Emmanuelle Rouhaud, David Roze

► **To cite this version:**

Thomas Hélie, Emmanuelle Rouhaud, David Roze. Vibration d'une corde non linéaire : vers une formulation covariante. 16ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2022, Marseille, France. hal-03658964

**HAL Id: hal-03658964**

**<https://hal.science/hal-03658964v1>**

Submitted on 28 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Motivation

Trois formulations d'un même modèle de corde (linéaire ou non) :

type	caractéristique
1. EDP : Equation des ondes	Equilibre des forces
2. SHP : Système Hamiltonien à Ports	Encode le bilan de puissance
3. 4D : Formulation espace-temps	Covariance : Invariance au changement d'observateur

Objectifs. Comparer les formulations (1-3) en vue de développer :

- A : un SHP 4D
- B : des méthodes numériques préservant les invariances  
→ bilan de puissance garanti & insensibilité au chgt d'observateur

## 1. Equation des ondes

### A. Quantités et notations

$t$	[s]	: temps ( $\underline{e}_t$ )	$L_0$	[m]	: longueur de la corde
$x^1$	[m]	: abscisse ( $\underline{e}_1$ )	$\mu_0$	[kg/m]	: masse linéique
$x^2$	[m]	: ordonnée ( $\underline{e}_2$ )	$S_0$	[m <sup>2</sup> ]	: section transversale
$w(x^1, t)$	[m]	: dépl. transverse	$T_0$	[N]	: tension de la corde

### B. Cinématique et comportement

(H1) **Position** au temps  $t$  d'un point matériel  $\underline{x} = (x^1, x^2)^T$  à  $t = 0$ :

$$\underline{\Phi}(t, \underline{x}) = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 + w(t, x^1) \end{pmatrix} \quad (\text{hyp. cinématique pour la corde})$$

(D2) **Gradient de transformation**  $\underline{F}$  :

$$\underline{F}(t, \underline{x}) = \underline{\nabla}_{\underline{x}} \underline{\Phi}(t, \underline{x}) \quad \text{avec} \quad \underline{\nabla}_{\underline{x}} \underline{\Phi} := \begin{pmatrix} \partial_{x^1} \Phi^1 & \partial_{x^2} \Phi^1 \\ \partial_{x^1} \Phi^2 & \partial_{x^2} \Phi^2 \end{pmatrix}$$

(D3) **Tenseur de déformation**  $\underline{E}$  (**Green-Lagrange**) :

$$\underline{E}(t, \underline{x}) := \underline{E}_F(\underline{F}(t, \underline{x})) \quad \text{avec} \quad \underline{E}_F : \underline{A} \mapsto \frac{1}{2}(\underline{A}^T \underline{A} - \underline{I})$$

(H4) **Densité volumique d'énergie élastique**  $\psi$  :

$$\psi(t, \underline{x}) = \psi_E(\underline{E}(t, \underline{x})) \quad \text{avec} \quad \psi_E : \underline{A} \mapsto \frac{T_0}{S_0}(\underline{A} : \underline{A})$$

(D5) **Tenseur des contraintes**  $\underline{\Sigma}$  (**Piola-Kirchhoff 2**):

$$\underline{\Sigma}(t, \underline{x}) := D\psi_E(\underline{E}(t, \underline{x})) \quad \text{avec} \quad D\psi_E : \underline{A} \mapsto \begin{pmatrix} \partial_{A_{11}} & \partial_{A_{12}} \\ \partial_{A_{21}} & \partial_{A_{22}} \end{pmatrix} \psi_E$$

(D6) **Tenseur des contraintes**  $\underline{\sigma}$  (**Cauchy**): **poussé-avant de**  $\underline{\Sigma}$

$$\underline{\sigma}(t, \underline{x}) = \underline{\sigma}_F(\underline{F}(t, \underline{x})) \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma}_F : \underline{A} \mapsto \det(\underline{A})^{-1} \underline{A} \underline{\Sigma}_F(\underline{A}) \underline{A}^T$$

et  $\underline{\Sigma}_F(\underline{A}) = D\psi_E(\underline{E}_F(\underline{A}))$

(D2): $\underline{F} =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_{x^1} w & 1 \end{pmatrix}$	(D3): $\underline{E} =$ $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\partial_{x^1} w)^2 & \partial_{x^1} w \\ \partial_{x^1} w & 0 \end{pmatrix}$	(H4): $\psi =$ $\frac{T_0}{4A} ((\partial_{x^1} w)^4 + 2(\partial_{x^1} w)^2) \approx \frac{T_0}{2S_0} (\partial_{x^1} w)^2$	(H4-HPP)
--	--	---	----------

$$\rightarrow \underline{\sigma} = \underbrace{\frac{T_0}{S_0} \begin{pmatrix} (\partial_{x^1} w)^2 & (\partial_{x^1} w)^3 + \partial_{x^1} w \\ (\partial_{x^1} w)^3 + \partial_{x^1} w & (\partial_{x^1} w)^2 \end{pmatrix}}_{\sigma_{NL}} \approx \underbrace{\frac{T_0}{S_0} \begin{pmatrix} 0 & \partial_{x^1} w \\ \partial_{x^1} w & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_{lin.}}$$

### C. Equation du mouvement

Soit le déplacement  $\underline{u}(t, \underline{x}) = \underline{\Phi}(t, \underline{x}) - \underline{x}$ , l'équation du mouvement s'écrit

$$(\text{conserv}^\circ \text{ qt}^\epsilon \text{ de } mv^t) \quad \text{div } \underline{\sigma} = \mu_0 \partial_t^2 \underline{u}$$

$$(\text{cas grandes déf}^\circ + \text{H1}) \quad \frac{T_0}{S_0} \begin{pmatrix} 2\partial_{x^1} w \partial_{x^1}^2 w \\ 3(\partial_{x^1} w)^2 \partial_{x^1}^2 w + \partial_{x^1}^2 w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 \partial_t^2 w \end{pmatrix}$$

$$(\text{cas HPP}) \quad \frac{T_0}{S_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{x^1}^2 w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 \partial_t^2 w \end{pmatrix}$$

## 2. Formulation SHP

**Etat interne**  $X(x, t)$

$$X := \begin{bmatrix} \pi := \mu_0 \partial_t w \\ \varepsilon := \partial_{x^1} w \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} [\text{Kg/s}] \text{ quantité de mouvement linéique} \\ [\text{adim}] \text{ déformation} \end{matrix}$$

**Fonctionnelle d'énergie**  $\mathcal{H}(X)$

Pour toute fonction spatiale  $X : x \mapsto X(\underline{x}) = [\pi(\underline{x}), \varepsilon(\underline{x})]^T$  dans  $L^2((0, L), \mathbb{R}^2)$ , on introduit la fonctionnelle d'énergie interne de la corde :

$$\mathcal{H}(X) = \int_0^L \frac{1}{2} X(\underline{x})^T W X(\underline{x}) dx_1 \quad \text{avec} \quad W = \text{diag}(1/\mu_0, T_0).$$

**Système Hamiltonien à Ports**

Etat $X_i$	Flux $\partial_t X_i$	Unités	Effort $\delta_{X_i} \mathcal{H}$	Unités
$X_1 = \pi$	$\partial_t \pi = \mu_0 \partial_t^2 w$	[N/m]	$\pi/\mu_0 = \partial_t w$	[m/s]
$X_2 = \varepsilon$	$\partial_t \varepsilon = \partial_t \partial_{x^1} w$	[s <sup>-1</sup> ]	$T_0 \partial_{x^1} w$	[N]

$$\text{force inert. linéiq.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_t \pi = \mu_0 \partial_t^2 w \\ \partial_t \varepsilon = \partial_t \partial_{x^1} w \end{pmatrix}}_{\text{flux}(x,t)} = \mathcal{J} \underbrace{\begin{pmatrix} \pi/\mu_0 = \partial_t w \\ T_0 \partial_{x^1} w \end{pmatrix}}_{\text{effort}(x,t)} \quad \begin{matrix} \text{vitesse de la masse} \\ \text{force de rappel} \end{matrix}$$

avec  $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{x^1} \\ \partial_{x^1} & 0 \end{pmatrix}$  opérateur anti-autoadjoint.

$$\begin{aligned} \mu_0 \partial_t^2 w(x, t) &= \partial_{x^1} (T_0 \partial_{x^1} w(x, t)) && \text{(équation d'équilibre)} \\ \partial_t \partial_{x^1} w(x, t) &= \partial_{x^1} \partial_t w(x, t) && \text{(équation de lien cinématique)} \end{aligned}$$

## 3. Formulation espace-temps covariante

**Théorie de la relativité** utile en mécanique classique pour l'invariance des équations par changement d'observateur.

**Cas général** Coordonnées espace-temps (4D) ( $x^0 = ct, x^1, x^2, x^3$ ),  $c$  célérité de la lumière, métrique de signature (1, -1, -1, -1).

Tenseur énergie impulsion  $\underline{T}$  : densité d'énergie espace-temps ( $\approx$  généralisation du tenseur des contraintes).

Loi de conservation valable pour tout observateur :

$$\text{div } \underline{T} = 0 \rightarrow \begin{cases} \partial_{x^0} T^{00} + \partial_{x^1} T^{01} + \partial_{x^2} T^{02} + \partial_{x^3} T^{03} = 0 \\ \partial_{x^0} T^{10} + \partial_{x^1} T^{11} + \partial_{x^2} T^{12} + \partial_{x^3} T^{13} = 0 \\ \partial_{x^0} T^{20} + \partial_{x^1} T^{21} + \partial_{x^2} T^{22} + \partial_{x^3} T^{23} = 0 \\ \partial_{x^0} T^{30} + \partial_{x^1} T^{31} + \partial_{x^2} T^{32} + \partial_{x^3} T^{33} = 0 \end{cases}$$

**Cas de la corde** coordonnées espace-temps ( $x^0 = ct, x^1, x^2$ ) et pour  $v \ll c$ , le tenseur énergie-moment s'écrit :

$$T^{\mu\nu} \begin{pmatrix} \mu_0 \left( c^2 + \psi + \frac{v^2}{2} \right) & \frac{\sigma v}{c} & \mu_0 \left( c^2 + \psi + \frac{v^2}{2} \right) \frac{v}{c} \\ \frac{\sigma v}{c} & T^{11} & T^{12} \\ \mu_0 \left( c^2 + \psi + \frac{v^2}{2} \right) \frac{v}{c} & T^{21} & T^{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{21} & T^{22} \end{pmatrix} \approx -\frac{T_0}{S_0} \begin{pmatrix} 0 & \partial_{x^1} w \\ \partial_{x^1} w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu_0 v^2 \end{pmatrix}$$

où  $v = \partial_t w$  et le signe négatif provient de la métrique.

**Loi de conservation** Première ligne (temps)  $\rightarrow$  Bilan de puissance :

$$\mu_0 \partial_{x^0} \psi + \underline{\sigma} : \underline{\partial_{x^0} \varepsilon} = 0.$$

Deuxième et troisième lignes (espace)  $\rightarrow$  PFD :

$$\mu_0 \partial_{x^0}^2 w - \frac{T_0}{S_0} \partial_{x^1}^2 w = 0$$

## 4. Perspectives

**Généralisation** de la démarche à d'autres problèmes mécaniques (hypothèses (H1) et (H4)).

**Définition générale** (sans coordonnées) de l'opérateur de divergence associée à tout problème conservatif (à topologie continue, discrète ou mixte)

**Reformulation** des Systèmes Hamiltoniens à Ports avec ces opérateurs de divergence.

**Intégration** des phénomènes irréversibles dans ce formalisme