



HAL
open science

Estimation à pas aléatoire du contour discontinu d'un processus ponctuel de Poisson sur le plan

Pascal Missié

► **To cite this version:**

Pascal Missié. Estimation à pas aléatoire du contour discontinu d'un processus ponctuel de Poisson sur le plan. Annales de l'ISUP, 1997, XXXXI (3), pp.47-79. hal-03658760

HAL Id: hal-03658760

<https://hal.science/hal-03658760v1>

Submitted on 4 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimation à pas aléatoire du contour discontinu d'un processus ponctuel de Poisson sur le plan

Pascal MISSIÉ

Laboratoire de Statistique et Probabilités

U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, Bât. M2

Université des Sciences et Technologies de Lille

F-59665 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Résumé : Nous considérons un processus ponctuel de Poisson sur \mathbb{R}^2 de support

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 ; 0 < y \leq \max(f(x), f(x^-))\}$$

où f est une fonction continue à droite ayant une limite à gauche en tout point, nous étudions l'estimation à pas aléatoire de f . Dans un premier temps nous étudions la convergence en moyenne d'ordre $1 \leq p < +\infty$, ensuite nous étudions l'estimation des sauts et de la hauteur des sauts, et nous étudions la convergence selon la distance de Skorokhod.

Abstract : We consider a Poisson point process on \mathbb{R}^2 of support

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 ; 0 < y \leq \max(f(x), f(x^-))\}$$

where f is a right continuous with left hand limits function. In order to estimate f we use the method with random partition. First we study the stochastic convergence to f in L_p -norm. Next we study estimates of jumps and their sizes. And we study the stochastic convergence in the Skorokhod topology.

AMS classifications : 60G55. 62G05.

Mots et phrases clés : Estimation fonctionnelle, processus ponctuel de Poisson, mesure moyenne, support d'un processus ponctuel, blocs, concomitants des statistiques d'ordre, discontinuités, distance de Skorokhod.

Key words and phrases: Functional estimation, Poisson point process, mean measure, support of point process, blocks, concomitants of order statistics, jumps, Skorokhod's metric.

1 Introduction

Le problème de l'estimation du support d'une loi de probabilité ou plus généralement d'un processus ponctuel par certaines caractéristiques a déjà une histoire longue. Lorsque le support est borné et délimité par le graphe d'une fonction, le support est complètement déterminé par cette fonction que nous appellerons contour du support ou contour d'un processus ponctuel, ce qui associe le problème de l'estimation du support d'un processus ponctuel à celui de l'estimation du contour ; Geffroy[11], le premier a étudié en 1964 le cas d'une loi de probabilité. On trouve quelques extensions de cette étude, dans Bosq[5](1971), dans un cadre topologique général. Plusieurs résultats concernant l'estimation du contour d'une loi de probabilité sont contenus dans Chevalier[7](1976), Jacob et Suquet[18](1996), Jacob et Suquet[15](1995). De nombreux travaux (Gensbitel [12] (1979), Jacob[13](1981), Jacob et Abbar[14] (1989), Abbar[1] (1990), Abbar et Suquet [2](1993), Jacob et Suquet[17](1996)) sont consacrés à ce problème pour différentes classes de processus ponctuels : à accroissements anticorrélés, de Poisson homogène ou non, de Cox. Des travaux récents (Jacob et Missié[16](1996), Missié[21](1997), Missié[22](1997)) sont consacrés à ce problème dans le cas d'un processus ponctuel de Poisson par des méthodes à pas aléatoires. Il est nécessaire de noter que dans Chevalier[7] et Gensbitel[12], il y a aussi des supports très généraux, qui ne sont pas délimités par des contours, que dans tous les travaux associant l'estimation du support à celui du contour, le contour du support est continu sauf dans Jacob[13](1981) où le contour présente des discontinuités de première espèce, dans Abbar et Suquet[2](1993) et dans Jacob et Suquet[17](1996) où le contour est une fonction mesurable de carré intégrable qui dans certains cas est en outre continu.

Cet article est consacré à l'estimation du contour discontinu du support d'un processus ponctuel de Poisson, par la méthode à pas aléatoire, et trouve sa forme en gestation dans un article de Jacob[13]. Dans Jacob et Missié[16], Missié[21] et Missié[22] nous avons étudié la convergence uniforme suivant divers modes stochastiques, d'un estimateur de type histogramme à pas aléatoire basé sur les valeurs extrêmes des points observés et d'un estimateur spline cubique à pas aléatoire, du contour continu du support d'un processus ponctuel de Poisson sur le plan. Lorsque le contour n'est pas continu contrairement aux études susmentionnées nous ne pouvons espérer obtenir une convergence uniforme stochastique. Dans ce cas on aborde l'étude de certaines propriétés de l'estimateur en dehors "du cadre L_∞ ", vis-à-vis de contours qui possèdent des discontinuités, c'est l'objet de ce travail :

Nous considérons un processus ponctuel de Poisson sur \mathbb{E}^2 de support

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 ; 0 < y \leq \max(f(x), f(x^-)) \right\}$$

où f est une fonction continue à droite ayant une limite à gauche en tout point et $f(x^-)$ la limite à gauche de f au point x .

La première partie, paragraphe 3, traite l'estimation de f par la méthode de type histogramme de la partition aléatoire en blocs, basée sur les valeurs extrêmes. Nous établissons une condition suffisante de convergence presque complète en moyenne d'ordre $1 \leq p < +\infty$. La deuxième partie, paragraphe 4, porte sur l'estimation des sauts et de la hauteur des sauts de f . Dans la troisième partie, paragraphe 5, nous établissons une condition suffisante et une condition nécessaire de convergence selon la distance de Skorokhod, généralisant les résultats de Jacob[13] au cas des partitions aléatoires.

2 Préliminaires

2.1 Notations, définitions et hypothèses

Nous considérons un processus ponctuel de Poisson N sur le plan \mathbb{R}^2 rapporté à un système d'axes rectangulaires (Ox, Oy) , défini sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Nous supposons que le support de N est défini par :

$$(1) \quad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; 0 < y \leq \max(f(x), f(x^-))\}$$

où f est une fonction continue à droite ayant une limite à gauche en tout point, $f(x^-)$ la limite à gauche de f au point x , telle que :

$$0 < m = \inf_{0 \leq x \leq 1} f(x) \leq M = \sup_{0 \leq x \leq 1} f(x) < +\infty.$$

Nous supposons que la mesure moyenne $\mu = E(N)$ de N est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur \mathbb{R}^2 et que la densité $\psi = \frac{d\mu}{d\lambda}$, vérifie :

$$(2) \quad 0 < A \leq \psi(x, y) \leq B < +\infty, \quad \forall (x, y) \in S.$$

Soient N_1, \dots, N_n n copies indépendantes de N et $N^{(n)} = N_1 + \dots + N_n$ la superposition de ces n processus ponctuels de Poisson indépendants. Nous désignons par $L^{(n)}$ l'effectif aléatoire de $N^{(n)}$ sur S :

$$L^{(n)} = N^{(n)}(S) = \sum_{i=1}^n N_i(S).$$

Soient $\ell \in \mathbb{N}$ et un entier $K(\ell)$. On partage S en $K(\ell)$ domaines aléatoires $D_{\ell, j}, j = 1, \dots, K(\ell)$, dont on précisera plus loin la construction. Soient des entiers $\nu_j(\ell) > 0$ pour $j = 1, \dots, K(\ell)$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{K(\ell)} \nu_j(\ell) = \ell + 1.$$

Il est nécessaire que $K(\ell) \leq \ell + 1$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. Nous définissons une suite d'entiers par :

$$\begin{aligned} R_0(\ell) &= 0, \\ R_j(\ell) &= R_{j-1}(\ell) + \nu_j(\ell), \quad 1 \leq j \leq K(\ell). \end{aligned}$$

Dans la suite, on donne des résultats asymptotiques pour $n \rightarrow +\infty$, sous des conditions concernant le comportement de $\nu_j(\ell)$, donc de $K(\ell)$, quand $\ell \rightarrow +\infty$. $N^{(n)}$ est un processus ponctuel de Poisson de mesure moyenne $n\mu$, on peut toujours le représenter sous la forme

$$\sum_{i=1}^{L^{(n)}} \delta_{(X_{i,n}; Y_{i,n})}$$

où $\delta_{(X_{i,n}; Y_{i,n})}$ est une mesure aléatoire de Dirac, où $L^{(n)}, (X_{1,n}; Y_{1,n}), \dots, (X_{i,n}; Y_{i,n}), \dots$ sont des variables aléatoires indépendantes, où $L^{(n)}$ est à valeurs entières et suit une loi de Poisson de paramètre $n\mu(S)$ et où les variables aléatoires $(X_{i,n}; Y_{i,n}), i = 1, \dots$, sont à valeurs dans $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$ et suivent une loi commune de densité

$$(3) \quad g(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{\mu(S)} \mathbf{1}_{\{0 < y \leq \max(f(x), f(x^-))\}} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}}.$$

Le fait remarquable est que cette loi ne dépend pas de n . Les calculs que nous aurons à faire passeront toujours par une étape de conditionnement par rapport à $\{L^{(n)} = \ell\}$. Pour $n \neq n'$, les événements $\{L^{(n)} = \ell\}$ et $\{L^{(n')} = \ell\}$ sont presque sûrement différents, ainsi que les vecteurs aléatoires

$$\left((X_{1,n}; Y_{1,n}), \dots, (X_{\ell,n}; Y_{\ell,n}) \right) \text{ et } \left((X_{1,n'}; Y_{1,n'}), \dots, (X_{\ell,n'}; Y_{\ell,n'}) \right).$$

Cependant comme les démonstrations faites sous un conditionnement tel que $\{L^{(n)} = \ell\}$ ne concerneront que les propriétés de la loi de $\left((X_{1,n}; Y_{1,n}), \dots, (X_{\ell,n}; Y_{\ell,n}) \right)$, il est commode d'introduire des variables aléatoires fictives $(X_1; Y_1), \dots, (X_\ell; Y_\ell)$ indépendantes de même loi de probabilité qui admet pour densité la fonction g définie par la formule (3). On notera N_ℓ^i le processus empirique

$$\sum_{i=1}^{\ell} \delta_{(X_i, Y_i)}$$

qui, pour tout n , a la même loi que $N^{(n)}$ conditionnée par $\{L^{(n)} = \ell\}$.

2.2 Partitions en blocs et en domaines aléatoires

En négligeant les cas de probabilité nulle puisque la loi commune aux variables aléatoires X_i , $i \in \mathbb{N}^*$, est absolument continue, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $i \neq j$, les variables aléatoires X_i et Y_j sont presque sûrement distinctes.

Si l'événement $\{L^{(n)} = \ell\}$ est réalisé, on désigne par

$$\left(X_1^{(\ell)}; Y_1^{(\ell)}\right), \dots, \left(X_\ell^{(\ell)}; Y_\ell^{(\ell)}\right)$$

les points de la réalisation du processus ponctuel de Poisson $N^{(n)}$, rangés selon les X_i croissantes :

$$X_1^{(\ell)}, \dots, X_\ell^{(\ell)}$$

désignent les variables aléatoires X_1, \dots, X_ℓ ordonnées en croissant, c'est-à-dire :

$$X_1^{(\ell)} < \dots < X_\ell^{(\ell)}.$$

$Y_1^{(\ell)}, \dots, Y_\ell^{(\ell)}$ sont définies par :

$$\text{si } X_i = X_j^{(\ell)} \text{ alors } Y_j^{(\ell)} = Y_i, \quad 1 \leq i, j \leq \ell.$$

Conditionnellement à $\{L^{(n)} = \ell\}$, $X_1^{(\ell)}, \dots, X_\ell^{(\ell)}$ est un échantillon ordonné de taille ℓ d'une loi de probabilité qui admet pour densité

$$(4) \quad g_1(x) = \int_0^{+\infty} g(x, y) dy = \frac{1}{\mu(S)} \left(\int_0^{\max(f(x), f(x^-))} \psi(x, y) dy \right) \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}}$$

et $Y_1^{(\ell)}, \dots, Y_\ell^{(\ell)}$ sont des concomitants des statistiques d'ordre, dont les détails peuvent être trouvés dans [9] et [10].

On partitionne l'intervalle $[0, 1]$ en $K(\ell)$ blocs de la forme :

$$\Delta_{\ell, j} = \begin{cases} \left[X_{R_{j-1}(\ell)}^{(\ell)}, X_{R_j(\ell)}^{(\ell)} \right], & j = 1, 2, \dots, K(\ell) - 1 \\ \left[X_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}^{(\ell)}, X_{R_{K(\ell)}(\ell)}^{(\ell)} \right], & j = K(\ell), \end{cases}$$

avec

$$X_{R_0(\ell)}^{(\ell)} = 0 \quad \text{et} \quad X_{R_{K(\ell)}(\ell)}^{(\ell)} = 1.$$

Donc chacun des blocs contient $\nu_j'(\ell)$ points de $X_1^{(\ell)}, \dots, X_\ell^{(\ell)}$ où

$$\nu_j'(\ell) = \begin{cases} \nu_1(\ell) - 1, \\ \nu_j(\ell), & j = 2, \dots, K(\ell). \end{cases}$$

On pose, pour tout $j = 1, 2, \dots, K(\ell)$:

$$D_{\ell,j} = \{(x, y) \in S : x \in \Delta_{\ell,j}\}.$$

Ainsi pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, on a une partition de S en domaines aléatoires $D_{\ell,j}$; $1 \leq j \leq K(\ell)$.

On pose ensuite, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$ et tout $j = 1, 2, \dots, K(\ell)$:

$$\begin{aligned} M_{\ell,j} &= \sup\{f(x) : x \in \Delta_{\ell,j}\}, & m_{\ell,j} &= \inf\{f(x) : x \in \Delta_{\ell,j}\}, \\ V_{\ell,j} &= X_{R_j(\ell)}^{(\ell)} - X_{R_{j-1}(\ell)}^{(\ell)}, & \tilde{X}_{\ell,j} &= \left\{ X_{R_{j-1}(\ell)}^{(\ell)}, X_{R_j(\ell)}^{(\ell)} \right\}. \end{aligned}$$

On pose enfin :

$$V_\ell = \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} V_{\ell,j}, \quad W_\ell = \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} V_{\ell,j}, \quad \tilde{X}^{(\ell)} = \left\{ X_{R_j(\ell)}^{(\ell)} ; 1 \leq j \leq K(\ell) \right\}.$$

2.3 Définition de l'estimateur à pas aléatoire

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$, on définit par S_ℓ^ω le support de la mesure discrète N_ℓ^ω , on pose :

$$\begin{aligned} S_{\ell,j}^\omega &= S_\ell^\omega \cap D_{\ell,j}, \quad j = 1, \dots, K(\ell), \\ U_{\ell,j}^\omega &= \max\left\{ y \mid (x, y) \in S_{\ell,j}^\omega \right\}, \quad j = 1, \dots, K(\ell). \end{aligned}$$

Nous proposons comme estimateur f_n de f , un estimateur de la même nature que l'histogramme de la partition aléatoire, basé sur les valeurs extrêmes des ordonnées des points observés dans chaque domaine aléatoire. défini par :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, K(L^{(n)})\}, \quad \forall x \in \Delta_{L^{(n)},j} \quad f_n(x) = U_{L^{(n)},j}.$$

3 Étude de la convergence dans (D, d_p)

On dira que (f_n) converge en probabilité vers f dans (D, d_p) si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\{d_p(f_n, f) > \varepsilon\} = 0.$$

de même, on dira que (f_n) converge presque complètement vers f dans (D, d_p) si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} P\{d_p(f_n, f) > \varepsilon\} < +\infty,$$

où d_p désigne la distance associée à la norme de l'espace $L^p([0, 1], dx)$ $1 \leq p < +\infty$ et $D = D([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues à droite admettant une

limite à gauche en tout point de $[0, 1]$, dont les propriétés peuvent être trouvées dans Billingsley[4].

Soit $0 < z < m$ fixé. Nous construisons une partition de $[0, 1]$ telle que :

$$\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{K_0} = 1$$

et

$$\sup\{|f(x) - f(y)| : \alpha_{i-1} \leq x < y < \alpha_i\} < \frac{z}{8}.$$

Posons :

$$J_{L^{(n)}} = \left\{1, \dots, K(L^{(n)})\right\},$$

$$I_{L^{(n)}} = \left\{j \in J_{L^{(n)}} \mid \Delta_{L^{(n)}, j} \text{ contient un point } \alpha_i\right\}$$

$$\Omega_{L^{(n)}} = J_{L^{(n)}} - I_{L^{(n)}}.$$

Posons ensuite : pour $j \in J_{L^{(n)}}$

$$M_{L^{(n)}, j} = \sup\{f(x) : x \in \Delta_{L^{(n)}, j}\}, \quad m_{L^{(n)}, j} = \inf\{f(x) : x \in \Delta_{L^{(n)}, j}\}.$$

Lemme 1 ([26], lemme 4)

Soit Z_ℓ une variable aléatoire de loi bêta de paramètres $(\nu(\ell), \ell - \nu(\ell) + 1)$, de densité

$$f_\ell(z) = \frac{1}{B(\nu(\ell), \ell - \nu(\ell) + 1)} z^{\nu(\ell)-1} (1-z)^{\ell-\nu(\ell)} \mathbf{1}_{]0,1[}(z)$$

avec

$$B(\nu(\ell), \ell - \nu(\ell) + 1) = \frac{\Gamma(\nu(\ell)) \Gamma(\ell - \nu(\ell) + 1)}{\Gamma(\ell + 1)} \text{ et où } \Gamma \text{ désigne la fonction gamma.}$$

Si

$$\nu(\ell) \longrightarrow +\infty \text{ quand } \ell \longrightarrow +\infty,$$

alors pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe des constantes réelles positives C_1 et C_2 telles que :

$$P\left\{Z_\ell \geq \frac{\nu(\ell)}{\ell(1-\varepsilon)}\right\} = O\left(e^{-C_1 \nu(\ell)}\right) \text{ et } P\left\{Z_\ell \leq \frac{\nu(\ell)}{\ell(1+\varepsilon)}\right\} = O\left(e^{-C_2 \nu(\ell)}\right).$$

Lemme 2

Si

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log \ell} \times \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty,$$

alors, pour toute constante $C > 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} K(\ell) \exp\left(-C \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell)\right) P\left(L^{(n)} = \ell\right) < +\infty.$$

Démonstration : Sans sacrifier la généralité, pour simplifier l'écriture des formules, nous poserons $\mu(S) = 1$. Il suffit de prouver que :

$$e^{-n} \sum_{\ell=1}^{+\infty} K(\ell) \exp\left(-C \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell)\right) \frac{n^\ell}{\ell!} = O(n^{-2}).$$

On majore la somme partielle :

$$\begin{aligned} e^{-n} \sum_{\ell=1}^{[\sqrt{n}]} K(\ell) \exp\left(-C \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell)\right) \frac{n^\ell}{\ell!} &\leq e^{-n} \sum_{\ell=1}^{[\sqrt{n}]} (\ell+1) \frac{n^\ell}{\ell!} \\ &\leq 2e^{-n+1} \sqrt{n} n^{\sqrt{n}} \\ &= O(e^{-\frac{n}{2}}). \end{aligned}$$

Ensuite on majore le reste :

$$e^{-n} \sum_{\ell=[\sqrt{n}]+1}^{+\infty} K(\ell) \exp\left(-C \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell)\right) \frac{n^\ell}{\ell!}.$$

En posant :

$$\min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = \varepsilon(\ell) \log \ell \quad \text{où} \quad \varepsilon(\ell) \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad \ell \rightarrow +\infty,$$

on a :

$$K(\ell) \exp\left(-C \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell)\right) \leq (\ell+1) \ell^{C\varepsilon(\ell)} = O(\ell^{-4}).$$

D'où

$$e^{-n} \sum_{\ell=[\sqrt{n}]+1}^{+\infty} K(\ell) \exp\left(-C \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell)\right) \frac{n^\ell}{\ell!} = O(n^{-2}).$$

Théorème 1

Si

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log \ell} \times \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty,$$

alors, f_n converge vers f presque complètement dans (D, d_p) lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration :

1) En utilisant les notations ci-dessus, nous obtenons l'inégalité

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p dx \\ & \leq \sum_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} V_{L^{(n)},j} \max \left[\left(M_{L^{(n)},j} - U_{L^{(n)},j} \right)^p ; \left(M_{L^{(n)},j} - m_{L^{(n)},j} \right)^p \right] \\ & \quad + \sum_{j \in J_{L^{(n)}}} V_{L^{(n)},j} M_{L^{(n)},j}^p, \end{aligned}$$

et en posant

$$B_n = \left\{ \sum_{j \in J_{L^{(n)}}} V_{L^{(n)},j} M_{L^{(n)},j}^p < \frac{z^p}{4} \right\},$$

pour $j \in J_{L^{(n)}} :$

$$\Theta_{L^{(n)},j} = \max \left[\left(M_{L^{(n)},j} - U_{L^{(n)},j} \right)^p ; \left(M_{L^{(n)},j} - m_{L^{(n)},j} \right)^p \right],$$

il s'ensuit les inclusions :

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p dx > \frac{z^p}{2} \right\} & \subseteq \left\{ \sum_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} V_{L^{(n)},j} \Theta_{L^{(n)},j} > \frac{z^p}{4} \right\} \cup \bar{B}_n \\ & \subseteq \left\{ \max_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} \Theta_{L^{(n)},j} \times \sum_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} V_{L^{(n)},j} > \frac{z^p}{4} \right\} \cup \bar{B}_n. \end{aligned}$$

D'autre part, l'oscillation de f sur les blocs $\Delta_{L^{(n)},j}$, $j \in \Omega_{L^{(n)}}$, est inférieure à $z/8$ et $\sum_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} V_{L^{(n)},j} \leq 1$. Nous en déduisons l'inclusion :

$$\left\{ \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p dx > \frac{z^p}{2} \right\} \subseteq \left(\bigcup_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} \left\{ \left(M_{L^{(n)},j} - U_{L^{(n)},j} \right)^p > \frac{z^p}{4} \right\} \right) \cup \bar{B}_n.$$

Puisque, pour tout $j \in \Omega_{L^{(n)}}$

$$A_{L^{(n)},j}(z) = \Delta_{L^{(n)},j} \times \left[M_{L^{(n)},j} - \frac{z}{4} ; M_{L^{(n)},j} - \frac{z}{8} \right]$$

est contenu dans le support S et que

$$\sum_{j \in J_{L^{(n)}}} V_{L^{(n)},j} M_{L^{(n)},j}^p \leq K_0 M^p V_{L^{(n)}}.$$

Nous obtenons finalement

$$\left\{ \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p dx > \frac{z^p}{2} \right\} \\ \subseteq \left(\bigcup_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \right\} \right) \cup \left\{ V_{L^{(n)}} \geq \frac{z^p}{4K_0 M^p} \right\}.$$

La convergence presque complète de $d_p(f_n, f)$ vers 0 résulte donc de la convergence presque complète de $V_{L^{(n)}}$ vers 0 et de la convergence de la série

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} P \left(\bigcup_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \right\} \right).$$

2) On examine d'abord la convergence presque complète de $V_{L^{(n)}}$ vers 0 :

Soit g_1 la densité des variables aléatoires X_i étant donné $\{L^{(n)} = \ell\}$. D'après les formules (2) et (4), g_1 est strictement positive sur $[0, 1]$. La fonction de répartition G_1 de g_1 est donc continue monotone, ainsi que la fonction inverse G_1^{-1} . Notons ζ le module de continuité de G_1^{-1} . En posant :

$$\tau_{\ell,j} = G_1 \left(X_{R_j(\ell)}^{(\ell)} \right) - G_1 \left(X_{R_{j-1}(\ell)}^{(\ell)} \right), \quad 1 \leq j \leq K(\ell),$$

pour tout $0 < \delta < 1$, on a :

$$P\{V_{L^{(n)}} > \zeta(\delta)\} \leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{K(\ell)} P\{V_{\ell,j} > \zeta(\delta)\} P\{L^{(n)} = \ell\} \\ \leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{K(\ell)} P\{\tau_{\ell,j} > \delta\} P\{L^{(n)} = \ell\}.$$

Pour établir la convergence presque complète vers 0 de $V_{L^{(n)}}$, il suffit d'après le lemme 2, de montrer qu'il existe une constante positive $C = C(\delta)$ telle que :

$$\sum_{j=1}^{K(\ell)} P\{\tau_{\ell,j} > \delta\} = O \left(K(\ell) \exp \left(-C \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \right) \right).$$

Or, la variable aléatoire $\tau_{\ell,j}$ suit une loi bêta de paramètres $(\nu_j(\ell); \ell - \nu_j(\ell) + 1)$, donc d'après le lemme 1 :

$$\sum_{j=1}^{K(\ell)} P\{\tau_{\ell,j} > \delta\} = O \left(K(\ell) \exp \left(-C \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \right) \right).$$

3) On montre maintenant la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P \left(\bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \right\} \right).$$

On a :

$$\begin{aligned} P \left(\bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \right\} \right) \\ \leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{K(\ell)} P \left\{ N'_{\ell}(A_{\ell,j}(z)) = 0 \right\} P(L^{(n)} = \ell). \end{aligned}$$

Pour tout $j = 1, \dots, K(\ell)$, il y a $\nu_j(\ell) - 1$ points ordonnés entre

$\left(X_{R_{j-1}(\ell)}, Y_{R_{j-1}(\ell)} \right)$ et $\left(X_{R_j(\ell)}, Y_{R_j(\ell)} \right)$, à savoir :

$$\left(X_{R_{j-1}(\ell)+1}, Y_{R_{j-1}(\ell)+1} \right), \dots, \left(X_{R_j(\ell)-1}, Y_{R_j(\ell)-1} \right).$$

La loi de probabilité conjointe de ces points, conditionnée par $X_{R_{j-1}(\ell)} = x_{R_{j-1}(\ell)}$ et $X_{R_j(\ell)} = x_{R_j(\ell)}$, est celle d'un échantillon ordonné de taille $\nu_j(\ell) - 1$ d'une loi de probabilité qui admet pour densité :

$$(6) \quad h_j(x, y) = \begin{cases} \frac{g(x, y)}{G_1(x_{R_j(\ell)}) - G_1(x_{R_{j-1}(\ell)})} & \text{si } (x, y) \in]x_{R_{j-1}(\ell)}, x_{R_j(\ell)}[\times \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part, les vecteurs aléatoires

$$\left(\left(X_{R_{j-1}(\ell)+1}^{(\ell)}, Y_{R_{j-1}(\ell)+1}^{(\ell)} \right), \dots, \left(X_{R_j(\ell)-1}^{(\ell)}, Y_{R_j(\ell)-1}^{(\ell)} \right) \right)_{1 \leq j \leq K(\ell)}$$

sont indépendants conditionnellement à

$$\left(X_{R_1(\ell)}^{(\ell)} = x_{R_1(\ell)}, \dots, X_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}^{(\ell)} = x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)} \right)$$

et, conditionnellement à $\tilde{X}_{\ell,j}$, les variables aléatoires

$$N'_{\ell}(A_{\ell,j}(z)), \quad j = 1, \dots, K(\ell)$$

sont indépendantes et de lois binomiales $B(\nu_j(\ell) - 1, p_{\ell,j})$, $1 \leq j \leq K(\ell)$ où

$$p_{\ell,j} = \int_{A_{\ell,j}(z)} h_j(x, y) dx dy, \quad j = 1, \dots, K(\ell).$$

On a donc

$$\begin{aligned} P\left\{N'_\ell(A_{\ell,j}(z)) = 0\right\} &= E\left(P\left\{N'_\ell(A_{\ell,j}(z)) = 0\right\} / \tilde{X}_{\ell,j}\right) \\ &= E\left\{(1 - p_{\ell,j})^{\nu_j(\ell)-1}\right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (7) \quad P\left(\bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})} \left\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0\right\}\right) \\ \leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{K(\ell)} E\left\{(1 - p_{\ell,j})^{\nu_j(\ell)-1}\right\} P(L^{(n)} = \ell). \end{aligned}$$

Etudions maintenant le paramètre $p_{\ell,j}$; $1 \leq j \leq K(\ell)$:

D'après les formules (3), (4) et (6), on a : pour $j = 1, \dots, K(\ell)$

$$p_{\ell,j} = \frac{\int_{x_{R_{j-1}(\ell)}}^{x_{R_j(\ell)}} \left(\int_{M_{\ell,j}^{-\frac{1}{4}}}^{M_{\ell,j}^{-\frac{1}{8}}} \psi(x, y) dy \right) dx}{\int_{x_{R_{j-1}(\ell)}}^{x_{R_j(\ell)}} \left(\int_0^{\max(f(x), f(x^-))} \psi(x, y) dy \right) dx}.$$

Donc, d'après les inégalités (2), on obtient : pour tout $j = 1, \dots, K(\ell)$

$$(8) \quad \frac{A}{BM} \frac{z}{8} \leq p_{\ell,j} \leq \frac{B}{Am} \frac{z}{8}.$$

D'après le lemme 2 et l'inégalité (7), pour établir la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})} \left\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0\right\}\right)$$

il suffit de montrer qu'il existe une constante positive $C = C(z)$ telle que

$$\sum_{j=1}^{K(\ell)} E\left\{(1 - p_{\ell,j})^{\nu_j(\ell)-1}\right\} = O\left(K(\ell) \exp\left(-C \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell)\right)\right).$$

Or, d'après les inégalités (8),

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{K(\ell)} E \left\{ \left(1 - p_{\ell,j} \right)^{\nu_j(\ell)-1} \right\} &\leq \sum_{j=1}^{K(\ell)} E \left\{ \exp \left(-p_{\ell,j} (\nu_j(\ell) - 1) \right) \right\} \\ &= O \left(K(\ell) \exp \left(-C \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \right) \right) \end{aligned}$$

avec $C = \frac{A}{BM} \frac{z}{8}$. ■

4 Estimation d'un saut et de la hauteur d'un saut du contour

Nous traitons le cas d'une discontinuité, la généralisation à un nombre fini de discontinuités est justiciable d'un traitement similaire à celui que nous proposons ci-dessous, avec des complications d'écriture que nous préférons éviter pour alléger la rédaction. Nous supposons que f est uniformément continue sur $[0, s_0[$ et $[s_0, 1]$ et présente un saut de hauteur c_0 en s_0 .

Posons :

$$H_j = \left| f_n \left(X_{R_j(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \right) - f_n \left(\left(X_{R_j(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \right)^- \right) \right|, \quad j = 1, \dots, K(L^{(n)}) - 1,$$

$$S_n = X_{R_s(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}, \text{ de telle sorte que : } \forall j = 1, \dots, K(L^{(n)}) - 1, H_s \geq H_j.$$

$$c_n = H_{s-1} + H_s + H_{s+1} = H_n^{-1} + H_n^0 + H_n^1.$$

Si S_n n'est pas déterminé de façon unique, on fera un choix arbitraire parmi les abscisses possibles.

Théorème 2

Si

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log \ell} \times \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty,$$

alors S_n converge vers s_0 presque complètement et c_n converge vers c_0 presque complètement lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration :

1) Examinons d'abord la convergence presque complète de S_n vers s_0 .

Pour tout n , notons j_0 l'entier tel que $s_0 \in \Delta_{L^{(n)}, j_0}$.

Posons : pour $0 < z < \frac{c_0}{9}$ et pour $j = 1, \dots, K(L^{(n)})$:

$$D_{L^{(n)}, j}(z) = \left\{ (x, y) \in D_{L^{(n)}, j} : y \geq M_{L^{(n)}, j} - z \right\},$$

$$E_{L^{(n)}, j}(z) = \left\{ N^{(n)} \left(D_{L^{(n)}, j}(z) \right) = 0 \right\}.$$

Soit η une fonction de $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall z > 0 \text{ si } |x - y| < \eta(z) \text{ alors } |f(x) - f(y)| < z.$$

Considérons les événements

$$A_n = \left\{ \begin{array}{l} \text{l'oscillation de } f \text{ est inférieure à } \frac{z}{2} \text{ sur } \Delta_{L^{(n)},j}, j \neq j_0, \\ \text{sur } \left[X_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}, s_0 \right] \text{ et sur } \left[s_0, X_{R_{j_0}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \right] \end{array} \right\}$$

et

$$B_n = \left\{ V_{L^{(n)}} < \eta\left(\frac{z}{2}\right) \right\}.$$

Si l'événement $\left(\bigcap_{j \neq j_0} \bar{E}_{L^{(n)},j} \right) \cap A_n$ est réalisé : pour tout couple $(j, j+1)$ tel que $j \neq j_0$ et $j+1 \neq j_0$, nous avons $\forall x \in \Delta_{L^{(n)},j}, \forall y \in \Delta_{L^{(n)},j+1}$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - M_{L^{(n)},j}| + |M_{L^{(n)},j} - M_{L^{(n)},j+1}| + |M_{L^{(n)},j+1} - f_n(y)| \\ &\leq z + |M_{L^{(n)},j} - M_{L^{(n)},j+1}| + z \\ &\leq z + \left| M_{L^{(n)},j} - f\left(X_{R_j(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right) \right| + \left| f\left(X_{R_j(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right) - M_{L^{(n)},j+1} \right| + \\ &\leq z + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + z \\ &= 3z \\ &< \frac{c_0}{3}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le bloc $\Delta_{L^{(n)},j_0}$, sans sacrifier la généralité, supposons que $f(s_0) < f(s_0^-)$ et posons :

$$m'_{L^{(n)},j_0,z} = \inf \left\{ f(x) : X_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \leq x < s_0 \right\}$$

et

$$M'_{L^{(n)},j_0,z} = \sup \left\{ f(x) : s_0 \leq x < X_{R_{j_0}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \right\}.$$

Si l'événement A_n est réalisé, nous avons :

$$\begin{aligned} m'_{L^{(n)},j_0,z} - M'_{L^{(n)},j_0,z} &= \left(m'_{L^{(n)},j_0,z} - f(s_0^-) \right) + \left(f(s_0^-) - f(s_0) \right) \\ &\quad + \left(f(s_0) - M'_{L^{(n)},j_0,z} \right) \\ &\geq -\frac{z}{2} + c_0 - \frac{z}{2} \\ &> -\frac{c_0}{18} + c_0 - \frac{c_0}{18} = \frac{8}{9} c_0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
 M_{L^{(n)},j_0-1} - M_{L^{(n)},j_0+1} &= (M_{L^{(n)},j_0-1} - m'_{L^{(n)},j_0,z}) + (m'_{L^{(n)},j_0,z} - M'_{L^{(n)},j_0,z}) \\
 &\quad + (M'_{L^{(n)},j_0,z} - M_{L^{(n)},j_0+1}) \\
 &\geq \left(m_{L^{(n)},j_0-1} - f\left(X_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right) \right) + (m'_{L^{(n)},j_0,z} - M'_{L^{(n)},j_0,z}) \\
 &\quad + \left(f\left(X_{R_{j_0}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right) - M_{L^{(n)},j_0+1} \right) \\
 &\geq -\frac{z}{2} + \frac{8c_0}{9} - \frac{z}{2} \\
 &> -\frac{c_0}{18} + \frac{8c_0}{9} - \frac{c_0}{18} = \frac{7}{9}c_0
 \end{aligned}$$

puis, si l'événement $\left(\bigcap_{j \neq j_0} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right) \cap A_n$ est réalisé, pour tout $x \in \Delta_{L^{(n)},j_0-1}$ et $y \in \Delta_{L^{(n)},j_0+1}$:

$$\begin{aligned}
 f_n(x) - f_n(y) > f_n(x) - M_{L^{(n)},j_0+1} &> M_{L^{(n)},j_0-1} - z - M_{L^{(n)},j_0+1} \\
 &> \frac{7c_0}{9} - \frac{c_0}{9} \\
 &= \frac{2}{3}c_0
 \end{aligned}$$

et puis, pour tout $u \in \Delta_{L^{(n)},j_0}$, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
 \max\left\{|f_n(x) - f_n(u)|; |f_n(u) - f_n(y)|\right\} &\geq \frac{1}{2}\left(|f_n(x) - f_n(u)| + |f_n(u) - f_n(y)|\right) \\
 &\geq \frac{1}{2}\left(f_n(x) - f_n(y)\right) \\
 &> \frac{c_0}{3}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \left(\bigcap_{j \neq j_0} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right) \cap A_n &\subseteq \left\{S_n = X_{R_{j_0}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right\} \cup \left\{S_n = X_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right\} \\
 &= \left\{|S_n - s_0| < V_{L^{(n)},j_0}\right\}
 \end{aligned}$$

et l'inclusion :

$$\left(\bigcap_{j \neq j_0} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right) \cap A_n \cap B_n \subseteq \left\{|S_n - s_0| < \eta\left(\frac{\tilde{z}}{2}\right)\right\}.$$

L'événement A_n étant réalisé, l'oscillation de f est inférieure à $\frac{z}{2}$ sur $\Delta_{L^{(n)},j}$, $j \neq j_0$: On constate que pour tout $j = 1, \dots, K(L^{(n)})$ et $j \neq j_0$

$$A_{L^{(n)},j}(z) = \Delta_{L^{(n)},j} \times \left[M_{L^{(n)},j} - z, M_{L^{(n)},j} - \frac{z}{2} \right]$$

est contenu dans le support S . Nous obtenons alors les inclusions :

$$\begin{aligned} \left\{ |S_n - s_0| \geq \eta\left(\frac{z}{2}\right) \right\} &\subseteq \left(\bigcup_{j \neq j_0} E_{L^{(n)},j}(z) \right) \cup \bar{A}_n \cup \bar{B}_n \\ &\subseteq \left(\bigcup_{j \neq j_0} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \right\} \right) \cup \bar{A}_n \cup \bar{B}_n. \end{aligned}$$

D'autre part, en considérant les événements suivants :

$$\begin{aligned} D_n &= \left\{ \text{l'oscillation de } f \text{ sur } \Delta_{L^{(n)},j}, j \neq j_0 \text{ est supérieure à } \frac{z}{2} \right\}, \\ F_n &= \left\{ \text{l'oscillation de } f \text{ sur } [X_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}, s_0[\text{ est supérieure à } \frac{z}{2} \right\}, \\ G_n &= \left\{ \text{l'oscillation de } f \text{ sur } [s_0, X_{R_{j_0}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}[\text{ est supérieure à } \frac{z}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Nous avons alors l'inclusion :

$$\bar{A}_n \subseteq D_n \cup F_n \cup G_n.$$

De plus, comme f est uniformément continue sur $\Delta_{L^{(n)},j}$, $j \neq j_0$ sur $[X_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}, s_0[$ et sur $[s_0, X_{R_{j_0}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}[$, $0 < z < \frac{c_0}{9}$ est arbitrairement choisi : nous avons les inclusions

$$\left\{ V_{L^{(n)}} < \eta\left(\frac{z}{2}\right) \right\} \subset \bar{D}_n, \quad \left\{ s_0 - X_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} < \eta\left(\frac{z}{2}\right) \right\} \subset \bar{F}_n$$

et

$$\left\{ X_{R_{j_0}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} - s_0 < \eta\left(\frac{z}{2}\right) \right\} \subset \bar{G}_n.$$

Nous en déduisons :

$$(9) \quad \bar{A}_n \subset D_n \cup F_n \cup G_n \subset \bar{B}_n$$

puis

$$\left\{ |S_n - s_0| \geq \eta\left(\frac{z}{2}\right) \right\} \subseteq \left(\bigcup_{j \neq j_0} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \right\} \right) \cup \left\{ V_{L^{(n)}} \geq \eta\left(\frac{z}{2}\right) \right\}.$$

Ainsi la convergence presque complète de S_n vers s_0 résulte de la convergence presque complète vers 0 de $V_{L^{(n)}}$ et de la convergence de la série

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} P \left(\bigcup_{j \neq j_0} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \right\} \right).$$

L'étude de la convergence presque complète de $V_{L^{(n)}}$ vers 0 lorsque n tend vers l'infini et de la convergence de la série (10) est analogue en tout point à celle présentée dans la deuxième partie et la troisième partie de la démonstration du théorème 1. Il suffit donc de reprendre les calculs. Nous obtenons donc :

$$V_{L^{(n)}} \longrightarrow 0 \quad \text{presque complètement quand } n \longrightarrow +\infty$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P \left(\bigcup_{j \neq j_0} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \right\} \right) < +\infty.$$

2) Examinons ensuite la convergence presque complète de c_n vers c_0 .

Remarquons que si, l'événement $\left\{ |S_n - s_0| < V_{L^{(n)},j_0} \right\}$, est réalisé alors

$$S_n = X_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \quad \text{ou} \quad S_n = X_{R_{j_0}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}.$$

Nous considérons, sans sacrifier la généralité, que $S_n = X_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}$.

Si l'événement $\left(\bigcap_{j \neq j_0} \bar{E}_{L^{(n)},j} \right) \cap A_n$ est réalisé, nous avons alors :

$$\forall x \in \Delta_{L^{(n)},j_0-2}, \quad \forall y \in \Delta_{L^{(n)},j_0-1}$$

$$\begin{aligned} H_n^{-1} &= |f_n(x) - f_n(y)| \\ &\leq |f_n(x) - M_{L^{(n)},j_0-2}| + |M_{L^{(n)},j_0-2} - M_{L^{(n)},j_0-1}| + |M_{L^{(n)},j_0-1} - f_n(y)| \\ &\leq z + |M_{L^{(n)},j_0-2} - M_{L^{(n)},j_0-1}| + z \\ &\leq z + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + z. \\ &= 3z. \end{aligned}$$

Posons :

$$D'_{L^{(n)},j_0}(z) = \left\{ (x, y) \in D_{L^{(n)},j_0} : y \geq M'_{L^{(n)},j_0,z} - z \right\}$$

et

$$E'_{L^{(n)},j_0}(z) = \left\{ N^{(n)}(D'_{L^{(n)},j_0}(z)) = 0 \right\}.$$

Si l'événement $(\bigcap_{j \neq j_0} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)) \cap \bar{E}'_{L^{(n)},j_0}(z) \cap A_n$ est réalisé, nous obtenons alors :

$$\forall v \in \Delta_{L^{(n)},j_0-1}, \forall u \in \Delta_{L^{(n)},j_0}, \forall w \in \Delta_{L^{(n)},j_0+1}$$

$$\begin{aligned} H_n^0 + H_n^1 &= |f_n(v) - f_n(u)| + |f_n(u) - f_n(w)| \\ &= |(f_n(v) - M_{L^{(n)},j_0-1}) + (M_{L^{(n)},j_0-1} - f(X_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})})) \\ &\quad + (f(X_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}) - f(s_0^-)) + (f(s_0^-) - f_n(u))| \\ &\quad + |(f_n(u) - f(s_0)) + (f(s_0) - f(X_{R_{j_0}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})})) \\ &\quad + (f(X_{R_{j_0}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}) - M_{L^{(n)},j_0+1}) + (M_{L^{(n)},j_0+1} - f_n(w))| \\ &\leq z + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + |f(s_0^-) - f_n(u)| + |f_n(u) - f(s_0)| + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + z \\ &= 4z + |f(s_0^-) - f_n(u)| + |f_n(u) - f(s_0)|. \end{aligned}$$

L'événement A_n étant réalisé, d'après la première partie, on a :

$$m'_{L^{(n)},j_0,z} - M'_{L^{(n)},j_0,z} > \frac{8}{9} c_0 > 0$$

ce qui entraîne :

$$f(s_0^-) \geq m'_{L^{(n)},j_0,z} > M'_{L^{(n)},j_0,z}$$

et en outre l'événement $\bar{E}'_{L^{(n)},j_0,z}(z)$ étant réalisé, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &|f(s_0^-) - f_n(u)| + |f_n(u) - f(s_0)| \\ &\leq |f(s_0^-) - M'_{L^{(n)},j_0,z}| + |M'_{L^{(n)},j_0,z} - f_n(u)| \\ &\quad + |f_n(u) - M'_{L^{(n)},j_0,z}| + |M'_{L^{(n)},j_0,z} - f(s_0)| \\ &= (f(s_0^-) - M'_{L^{(n)},j_0,z}) + 2|f_n(u) - M'_{L^{(n)},j_0,z}| \\ &\quad + (M'_{L^{(n)},j_0,z} - f(s_0)) \\ &= (f(s_0^-) - f(s_0)) + 2|f_n(u) - M'_{L^{(n)},j_0,z}| \\ &= c_0 + 2|f_n(u) - M'_{L^{(n)},j_0,z}| \\ &\leq c_0 + 2z. \end{aligned}$$

Donc si l'événement $(\bigcap_{j \neq j_0} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)) \cap \bar{E}'_{L^{(n)},j_0}(z) \cap A_n$ est réalisé, nous avons :

$$H_n^0 + H_n^1 \leq 6z + c_0$$

ainsi donc

$$c_n = H_n^{-1} + H_n^0 + H_n^1 \leq 9z + c_0.$$

D'autre part, si l'événement $\left(\bigcap_{j \neq j_0} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right) \cap A_n$ est réalisé :

$\forall x \in \Delta_{L^{(n)},j_0-2}, \forall v \in \Delta_{L^{(n)},j_0-1}, \forall u \in \Delta_{L^{(n)},j_0}, \forall y \in \Delta_{L^{(n)},j_0+1}$

$$\begin{aligned}
 c_0 &= f(s_0^-) - f(s_0) \\
 &= |(f_n(x) - f_n(v)) + (f_n(v) - f_n(u)) \\
 &\quad + (f_n(u) - f_n(y)) + (f_n(y) - f(s_0)) + (f(s_0^-) - f_n(x))| \\
 &\leq H_n^{-1} + H_n^0 + H_n^1 + |f_n(y) - f(s_0)| + |f(s_0^-) - f_n(x)| \\
 &\leq c_n + |f_n(y) - M_{L^{(n)},j_0+1}| + \left| M_{L^{(n)},j_0+1} - f\left(X_{R_{j_0}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right) \right| \\
 &\quad + \left| f\left(X_{R_{j_0}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right) - f(s_0) \right| + |f(s_0^-) - f_n(u)| \\
 &\leq c_n + z + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + |f(s_0^-) - f_n(x)| \\
 &\leq c_n + 2z + \left| f(s_0^-) - f\left(X_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right) \right| \\
 &\quad + \left| f\left(X_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right) - M_{L^{(n)},j_0-2} \right| + |M_{L^{(n)},j_0-2} - f_n(x)| \\
 &\leq c_n + 2z + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + z \\
 &= c_n + 4z.
 \end{aligned}$$

Nous en déduisons : pour tout $0 < z < \frac{c_0}{9}$

$$\left(\bigcap_{j \neq j_0} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right) \cap \bar{E}'_{L^{(n)},j_0}(z) \cap A_n \subset \left\{ |c_n - c_0| < 9z \right\}.$$

Comme l'événement A_n est réalisé, nous avons

$$A_{L^{(n)},j_0}(z) = \Delta_{L^{(n)},j_0} \times \left[M'_{L^{(n)},j_0,z} - z, M'_{L^{(n)},j_0,z} - \frac{z}{2} \right]$$

qui est contenu dans le support S , de plus en utilisant l'inclusion (9), nous obtenons finalement

$$\left\{ |c_n - c_0| \geq 9z \right\} \subset \left(\bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \right\} \right) \cup \left\{ V_{L^{(n)}} \geq \eta\left(\frac{z}{2}\right) \right\}.$$

Donc la convergence presque complète de c_n vers c_0 , résulte de la convergence presque complète vers 0 de $V_{L^{(n)}}$ et de la convergence de la série

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} P \left(\bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \right\} \right).$$

L'étude de la convergence presque complète de $V_{L^{(n)}}$ vers 0 lorsque n tend vers l'infini et de la convergence de la série (11) est analogue en tout point à celle

présentée dans la deuxième partie et la troisième partie de la démonstration du théorème 1. Il suffit donc de reprendre les calculs. Nous obtenons donc :

$$V_{L^{(n)}} \longrightarrow 0 \quad \text{presque complètement quand } n \longrightarrow +\infty$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P \left(\bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \right\} \right) < +\infty.$$

5 Convergence dans (D, d_S)

d_S désigne la distance de Skorokhod sur D définie à l'aide de la classe Ξ des fonctions continues, strictement croissantes de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$ et pour tous Φ et Ψ éléments de Ξ , on pose :

$$d_S(\Phi, \Psi) =$$

$$\inf \left\{ \varepsilon > 0 / \exists \varphi \in \Xi / |\varphi(x) - x| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |\Phi(x) - \Psi(\varphi(x))| \leq \varepsilon, \forall x \in [0, 1] \right\}.$$

L'idée d'utiliser la convergence au sens de Skorokhod peut paraître surprenante a priori, son intérêt est de nous amener à construire un nouvel estimateur de f qui, pour des valeurs de n assez grandes, ne donne pas des valeurs aberrantes en ordonnées, sous la contrepartie d'accepter une légère imprécision en abscisse. De plus, cela nous amène à considérer une notion de convergence assez réaliste, puisque, dans un premier temps, l'estimateur que nous allons définir ne convergera pas vers f elle-même, mais vers une certaine boule de centre f et de rayon fixé à l'avance, dans l'espace D muni de la métrique de Skorokhod d_S .

5.1 Construction de l'estimateur

z_0 étant un nombre positif fixé, nous construisons un estimateur $f_n^{z_0}$ de f de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{sur } \Delta_{L^{(n)},1}, \quad f_n^{z_0}(x) &= U_{L^{(n)},1}, \\ \text{sur } \Delta_{L^{(n)},2}, \quad f_n^{z_0}(x) &= \begin{cases} U_{L^{(n)},2} & \text{si } |U_{L^{(n)},1} - U_{L^{(n)},2}| < \frac{z_0}{4} \\ U_{L^{(n)},1} & \text{si } |U_{L^{(n)},1} - U_{L^{(n)},2}| \geq \frac{z_0}{4}. \end{cases} \\ \text{sur } \Delta_{L^{(n)},j} \text{ pour } j &= 3, \dots, K(\ell), \end{aligned}$$

$$f_n^{z_0}(x) = \begin{cases} U_{L^{(n)},j} & \text{si } |U_{L^{(n)},j-1} - U_{L^{(n)},j}| < \frac{z_0}{4} \\ & \text{ou si } f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)},j-2} \text{ sur } \Delta_{L^{(n)},j-1} \\ U_{L^{(n)},j-1} & \text{si } |U_{L^{(n)},j-1} - U_{L^{(n)},j}| \geq \frac{z_0}{4} \\ & \text{et si } f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)},j-1} \text{ sur } \Delta_{L^{(n)},j-1}. \end{cases}$$

5.2 Notations

Posons :

$$z = \frac{z_0}{12},$$

$$J_{L^{(n)}} = \{1, \dots, K(L^{(n)})\},$$

$$I_{L^{(n)}} = \left\{ j \in J_{L^{(n)}} / \text{il existe } \alpha_i ; i = 1, \dots, K_0 - 1 \text{ tel que } \alpha_i \in \Delta_{L^{(n)},j} \right\},$$

$$\Omega_{L^{(n)}} = J_{L^{(n)}} - I_{L^{(n)}},$$

$$D_{L^{(n)},j}(z) = \left\{ (x, y) \in D_{L^{(n)},j} : y \geq M_{L^{(n)},j} - z \right\}, j \in J_{L^{(n)}}.$$

Considérons les événements :

$$A_n = \left\{ \begin{array}{l} \text{les points } \alpha_i \text{ sont séparés par au moins trois blocs} \\ \Delta_{L^{(n)},j}, j \in J_{L^{(n)}} \end{array} \right\}.$$

$$B_n = \left\{ V_{L^{(n)}} \leq \frac{z_0}{2} \right\},$$

$$C_n = \left\{ \text{Card}(I_{L^{(n)}}) = K_0 - 1 \right\},$$

$$E_{L^{(n)},j}(z) = \left\{ N^{(n)}(D_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \right\}, j \in J_{L^{(n)}}.$$

Afin d'aérer la rédaction de l'étude de la convergence de l'estimateur, nous faisons une remarque et nous donnons la construction d'un élément φ de Ξ qui nous permettra de montrer la convergence de l'estimateur.

5.3 Remarque

Fixons une partition de $[0, 1]$:

$$\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{K_0} = 1$$

telle que l'oscillation de f sur chaque intervalle $[\alpha_{i-1}, \alpha_i[$ soit inférieure à $\frac{z}{2}$.
Si l'événement $A_n \cap C_n$ est réalisé, alors :

Soit deux blocs consécutifs $\Delta_{L^{(n)},j}$ et $\Delta_{L^{(n)},j+1}$ ne contiennent aucun point $\alpha_i ; i = 1, \dots, K_0 - 1$.

Soit l'un des deux blocs consécutifs $\Delta_{L^{(n)},j}$ ou $\Delta_{L^{(n)},j+1}$ contient un point α_i ; $i = 1, \dots, K_0 - 1$.

Et si en outre l'événement $\bigcap_{j \in J_{L^{(n)}}} \bar{E}_{L^{(n)},j}$ est réalisé et si nous considérons deux blocs $\Delta_{L^{(n)},j}$ et $\Delta_{L^{(n)},j+1}$ ne contenant pas de point α_i ; $i = 1, \dots, K_0 - 1$:

$$\begin{aligned} |U_{L^{(n)},j} - U_{L^{(n)},j+1}| &\leq \left(M_{L^{(n)},j} - U_{L^{(n)},j} \right) + \sup_{(x,y) \in \Delta_{L^{(n)},j} \times \Delta_{L^{(n)},j+1}} |f(x) - f(y)| \\ &\quad + \left(M_{L^{(n)},j+1} - U_{L^{(n)},j+1} \right) \\ &\leq z + \sup_{(x,y) \in \Delta_{L^{(n)},j} \times \Delta_{L^{(n)},j+1}} |f(x) - f(y)| + z. \end{aligned}$$

Comme $\Delta_{L^{(n)},j} \cup \Delta_{L^{(n)},j+1}$ est contenu dans un intervalle $[\alpha_{i-1}, \alpha_i[$; $i = 1, \dots, K_0$ et pour tout $i = 1, \dots, K_0$ l'oscillation de f sur $[\alpha_{i-1}, \alpha_i[$ est inférieure à $\frac{z_0}{2}$, on a :

$$|U_{L^{(n)},j} - U_{L^{(n)},j+1}| \leq z + \frac{z}{2} + z < 3z = \frac{z_0}{4}.$$

Ainsi par construction de l'estimateur $f_n^{z_0}$:

$$\forall x \in \Delta_{L^{(n)},j+1}, \quad f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)},j+1}.$$

On constate donc que : les blocs $\Delta_{L^{(n)},j}$, $j \in J_{L^{(n)}}$ sur lesquels $f_n^{z_0} \neq U_{L^{(n)},j}$ sont parmi les blocs $\Delta_{L^{(n)},j}$ ou $\Delta_{L^{(n)},j+1}$, avec $j \in I_{L^{(n)}}$.

5.4 Définition d'un élément φ de Ξ

Nous avons fixé une partition de $[0, 1]$:

$$\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{K_0} = 1$$

telle que l'oscillation de f sur chaque intervalle $[\alpha_{i-1}, \alpha_i[$ soit inférieure à $\frac{z_0}{2}$.

Définissons l'élément φ de la façon suivante :

Si $\Delta_{L^{(n)},s} = \left[X_{R_{s-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}, X_{R_s(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \right]$ est un bloc sur lequel $f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)},s-1}$, contenant un point $\alpha_s \in \left\{ \alpha_1, \dots, \alpha_{K_0-1} \right\}$, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \left(X_{R_{s-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \right) = X_{R_{s-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \\ \varphi \left(X_{R_s(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \right) = \alpha_s \\ \varphi \left(X_{R_{s+1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \right) = X_{R_{s+1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \end{array} \right.$$

et on définit φ par interpolation linéaire sur $\Delta_{L^{(n)},s}$ et $\Delta_{L^{(n)},s+1}$.

Si $\Delta_{L^{(n)},t+1} = \left[X_{R_t(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}, X_{R_{t+1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \right]$ est un bloc sur lequel

$f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)},t}$ tel que $\Delta_{L^{(n)},t}$ contienne un point $\alpha_t \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{K_0-1}\}$, on pose :

$$\begin{cases} \varphi\left(X_{R_{t-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right) = X_{R_{t-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \\ \varphi\left(X_{R_{t+1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right) = \alpha_t \\ \varphi\left(X_{R_{t+2}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right) = X_{R_{t+2}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \end{cases}$$

φ est ensuite définie par interpolation linéaire sur $\Delta_{L^{(n)},t}$, $\Delta_{L^{(n)},t+1}$ et $\Delta_{L^{(n)},t+2}$. Sur les blocs où φ n'est pas encore définie, on pose : $\varphi(t) = t$.

5.5 Convergence de l'estimateur

Notons $B(z_0)$ la boule de centre f de rayon z_0 dans l'espace métrique (D, d_S) .

On dira que $(f_n^{z_0})$ converge en probabilité vers $B(z_0)$ si, et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left\{f_n^{z_0} \notin B(z_0)\right\} = 0.$$

On dira que $(f_n^{z_0})$ converge presque complètement vers $B(z_0)$ si, et seulement si :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\left\{f_n^{z_0} \notin B(z_0)\right\} < +\infty.$$

5.6 Condition suffisante de convergence presque complète

Théorème 3

Pour que l'estimateur $(f_n^{z_0})$ converge presque complètement vers $B(z_0)$ dans (D, d_S) , il suffit que :

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log \ell} \times \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty.$$

Démonstration :

1) Nous allons montrer l'inclusion

$$\left(\bigcap_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right) \cap A_n \cap B_n \cap C_n \subseteq \left\{d_S(f_n^{z_0}, f) \leq z_0\right\}.$$

Pour cela, il suffit de montrer que si l'événement

$$\left(\bigcap_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right) \cap A_n \cap B_n \cap C_n$$

est réalisé, la fonction φ définie au paragraphe 5.4 est telle que :

$$(12) \quad \sup_{0 \leq x \leq 1} |\varphi(x) - x| \leq z_0$$

et

$$(13) \quad \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| \leq z_0.$$

Supposons que l'événement $\left(\bigcap_{j \in \Omega_{L(n)}} \bar{E}_{L(n),j}(z)\right) \cap A_n \cap B_n \cap C_n$ soit réalisé. D'après la définition de φ , nous obtenons :

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |\varphi(x) - x| \leq 2V_{L(n)}.$$

L'événement B_n étant réalisé, nous en déduisons :

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |\varphi(x) - x| \leq z_0.$$

Montrons ensuite que la seconde condition (13) est vérifiée :

Premier cas :

Si $\Delta_{L(n),s} = [X_{R_{s-1}(L(n))}^{(L(n))}, X_{R_s(L(n))}^{(L(n))}]$ est un bloc sur lequel $f_n^{z_0} = U_{L(n),s-1}$ et contenant un point $\alpha_s \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{K_0-1}\}$, nous avons défini la fonction φ par :

$$\begin{cases} \varphi\left(X_{R_{s-1}(L(n))}^{(L(n))}\right) = X_{R_{s-1}(L(n))}^{(L(n))} \\ \varphi\left(X_{R_s(L(n))}^{(L(n))}\right) = \alpha_s \\ \varphi\left(X_{R_{s+1}(L(n))}^{(L(n))}\right) = X_{R_{s+1}(L(n))}^{(L(n))} \end{cases}$$

φ est ensuite définie par interpolation linéaire sur $\Delta_{L(n),s}$ et $\Delta_{L(n),s+1}$.

Soit x un point de $\Delta_{L(n),s}$. Nous avons $\varphi(x) \in [X_{R_{s-1}(L(n))}^{(L(n))}, \alpha_s[$,

$$\begin{aligned} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| &\leq |U_{L(n),s-1} - M_{L(n),s-1}| + |M_{L(n),s-1} - f(\varphi(x))| \\ &\leq (M_{L(n),s-1} - U_{L(n),s-1}) + \sup_{y \in \Delta_{L(n),s-1}} |f(y) - f(\varphi(x))|. \end{aligned}$$

Comme l'événement $\bar{E}_{L(n),s-1}(z)$ est réalisé et l'oscillation de f sur l'intervalle $[\alpha_{s-1}, \alpha_s[$ est inférieure à $\frac{z}{2}$, nous obtenons :

$$\sup_{x \in \Delta_{L(n),s}} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| \leq z + \frac{z}{2} = \frac{z_0}{12} + \frac{z_0}{24} = \frac{z_0}{8}.$$

Soit maintenant x un point de $\Delta_{L^{(n)}, s+1}$. Nous avons :

$\varphi(x) \in \left[\alpha_s, X_{R_{s+1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \right]$ et comme $f_n^{z_0} = U_{L^{(n)}, s-1}$ sur $\Delta_{L^{(n)}, s}$, par construction de l'estimateur $f_n^{z_0} : f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)}, s+1}$,

$$\begin{aligned} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| &\leq |U_{L^{(n)}, s+1} - M_{L^{(n)}, s+1}| + |M_{L^{(n)}, s+1} - f(\varphi(x))| \\ &\leq \left(M_{L^{(n)}, s+1} - U_{L^{(n)}, s+1} \right) + \sup_{y \in \Delta_{L^{(n)}, s+1}} |f(y) - f(\varphi(x))|. \end{aligned}$$

Nous savons que l'événement $\bar{E}_{L^{(n)}, s+1}(z)$ est réalisé et que l'oscillation de f sur l'intervalle $[\alpha_s, \alpha_{s+1}]$ est inférieure à $\frac{z}{2}$, nous obtenons :

$$\sup_{y \in \Delta_{L^{(n)}, s+1}} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| \leq z + \frac{z}{2} = \frac{z_0}{12} + \frac{z_0}{24} = \frac{z_0}{8}.$$

Deuxième cas :

Si $\Delta_{L^{(n)}, t+1} = \left[X_{R_t(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}, X_{R_{t+1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \right]$ est un bloc sur lequel $f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)}, t}$ tel que $\Delta_{L^{(n)}, t}$ contienne un point α_t . Nous avons défini φ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi\left(X_{R_{t-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right) = X_{R_{t-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \\ \varphi\left(X_{R_{t+1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right) = \alpha_t \\ \varphi\left(X_{R_{t+2}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}\right) = X_{R_{t+2}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})} \end{array} \right.$$

φ est définie par interpolation linéaire sur $\Delta_{L^{(n)}, t}$, $\Delta_{L^{(n)}, t+1}$ et $\Delta_{L^{(n)}, t+2}$.

Soit x un point de $\Delta_{L^{(n)}, t} \cup \Delta_{L^{(n)}, t+1}$.

Nous avons : $\varphi(x) \in \left[X_{R_{t-1}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}, \alpha_t \right]$

$$\begin{aligned} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| &\leq |U_{L^{(n)}, t} - U_{L^{(n)}, t-1}| + |U_{L^{(n)}, t-1} - M_{L^{(n)}, t-1}| \\ &\quad + |M_{L^{(n)}, t-1} - f(\varphi(x))| \\ &\leq |U_{L^{(n)}, t} - U_{L^{(n)}, t-1}| + \left(M_{L^{(n)}, t-1} - U_{L^{(n)}, t-1} \right) \\ &\quad + \sup_{y \in \Delta_{L^{(n)}, t-1}} |f(y) - f(\varphi(x))|. \end{aligned}$$

Comme $f_n^{z_0} = U_{L^{(n)}, t}$ sur $\Delta_{L^{(n)}, t+1}$ par construction de l'estimateur $f_n^{z_0}$, nous avons : $f_n^{z_0} = U_{L^{(n)}, t}$ sur $\Delta_{L^{(n)}, t}$ et d'autre part par construction de l'estimateur $f_n^{z_0}$: sur $\Delta_{L^{(n)}, t}$ $f_n^{z_0} = U_{L^{(n)}, t}$

$$\text{si } |U_{L^{(n)}, t} - U_{L^{(n)}, t-1}| < 3z = \frac{z_0}{4} \text{ ou si } f_n^{z_0} = U_{L^{(n)}, t-2} \text{ sur } \Delta_{L^{(n)}, t-1}.$$

Or $\Delta_{L^{(n)}, t-2}$ et $\Delta_{L^{(n)}, t-1}$ sont deux blocs consécutifs qui ne contiennent aucun point α_i ; $i = 1, \dots, K_0 - 1$. Donc d'après la remarque paragraphe 5.3 :

$$|U_{L^{(n)}, t-2} - U_{L^{(n)}, t-1}| < \frac{z_0}{4}.$$

Par conséquent

$$f_n^{z_0} = U_{L^{(n)}, t-1} \quad \text{sur} \quad \Delta_{L^{(n)}, t-1}$$

et donc

$$|U_{L^{(n)}, t} - U_{L^{(n)}, t-1}| < 3z.$$

Puisque l'événement $\bar{E}_{L^{(n)}, t-1}(z)$ est réalisé et l'oscillation de f sur $[\alpha_{t-1}, \alpha_t[$ est inférieure à $\frac{z}{2}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \Delta_{L^{(n)}, t} \cup \Delta_{L^{(n)}, t+1}} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| &\leq 3z + z + \frac{z}{2} \\ &= \frac{z_0}{4} + \frac{z_0}{12} + \frac{z_0}{24} = \frac{3}{8} z_0. \end{aligned}$$

Soit maintenant x un point de $\Delta_{L^{(n)}, t+2}$. Nous avons :

$\varphi(x) \in [\alpha_t, X_{R_{t+2}(L^{(n)})}^{(L^{(n)})}]$ et, comme $f_n^{z_0} = U_{L^{(n)}, t}$ sur $\Delta_{L^{(n)}, t+1}$, par construction de l'estimateur $f_n^{z_0}$ nous avons : $f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)}, t+2}$

$$\begin{aligned} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| &\leq |U_{L^{(n)}, t+2} - M_{L^{(n)}, t+2}| + |M_{L^{(n)}, t+1} - f(\varphi(x))| \\ &\leq (M_{L^{(n)}, t+2} - U_{L^{(n)}, t+2}) + \sup_{y \in \Delta_{L^{(n)}, t+2}} |f(y) - f(\varphi(x))|. \end{aligned}$$

Puisque l'événement $\bar{E}_{L^{(n)}, t+2}(z)$ est réalisé et l'oscillation de f sur $[\alpha_t, \alpha_{t+1}[$ est inférieure à $\frac{z}{2}$. Nous obtenons :

$$\sup_{x \in \Delta_{L^{(n)}, t+2}} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| \leq z + \frac{z}{2} = \frac{z_0}{12} + \frac{z_0}{24} = \frac{z_0}{8}.$$

Troisième cas :

Sur les intervalles où φ n'est pas encore définie, nous avons posé $\varphi(x) = x$. Soit x appartenant à l'un de ces intervalles $\Delta_{L^{(n)}, j}$. Nous avons :

$$f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)}, j} \quad \text{et} \quad \varphi(x) \in \Delta_{L^{(n)}, j}.$$

Donc

$$\begin{aligned} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| &\leq |U_{L^{(n)}, j} - M_{L^{(n)}, j}| + |M_{L^{(n)}, j} - f(x)| \\ &\leq (M_{L^{(n)}, j} - U_{L^{(n)}, j}) + \sup_{y \in \Delta_{L^{(n)}, j}} |f(y) - f(x)|. \end{aligned}$$

L'événement $\bar{E}_{L^{(n)},j}(z)$ étant réalisé puisque ces intervalles $\Delta_{L^{(n)},j}$ ne contiennent aucun point α_i , $i = 1, \dots, K_0 - 1$ et l'oscillation de f sur ces intervalles $\Delta_{L^{(n)},j}$ est inférieure à $\frac{z}{2}$. Nous obtenons :

$$\sup_{y \in \Delta_{L^{(n)},j}} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| \leq z + \frac{z}{2} = \frac{z_0}{12} + \frac{z_0}{24} = \frac{z_0}{8}.$$

Donc, si l'événement $\left(\bigcap_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right) \cap A_n \cap B_n \cap C_n$ est réalisé, alors l'événement $\left\{d_S(f_n^{z_0}, f) \leq z_0\right\}$ est réalisé.

2) Nous déduisons de ce qui précède l'inclusion

$$\left\{d_S(f_n^{z_0}, f) > z_0\right\} \subseteq \left(\bigcup_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} E_{L^{(n)},j}(z)\right) \cup \bar{A}_n \cup \bar{B}_n \cup \bar{C}_n.$$

Posons $\varepsilon = \min\{(\alpha_i - \alpha_{i-1}) : 1 \leq i \leq K_0\}$. Nous obtenons alors les inclusions :

$$A_n \supset \left\{V_{L^{(n)}} < \frac{\varepsilon}{3}\right\} \quad \text{et} \quad C_n \supset \bigcap_{j=1}^{K(L^{(n)})} \left\{V_{L^{(n)},j} < \varepsilon\right\} = \left\{V_{L^{(n)}} < \varepsilon\right\}.$$

D'autre part : pour tout $j \in \Omega_{L^{(n)}}$, l'oscillation de f sur $\Delta_{L^{(n)},j}$ est inférieure à $\frac{z}{2}$. On constate que : pour tout $j \in \Omega_{L^{(n)}}$

$$A_{L^{(n)},j}(z) = \Delta_{L^{(n)},j} \times \left[M_{L^{(n)},j} - z, M_{L^{(n)},j} - \frac{z}{2}\right]$$

est contenu dans le support S . Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} & \left\{d_S(f_n^{z_0}, f) > z_0\right\} \\ & \subseteq \left(\bigcup_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} \left\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0\right\}\right) \cup \left\{V_{L^{(n)}} > \min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{z_0}{2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Donc la convergence presque complète de $f_n^{z_0}$ vers $B(z_0)$ résulte de la convergence presque complète de $V_{L^{(n)}}$ vers 0 et de la convergence de la série

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\bigcup_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} \left\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0\right\}\right)$$

L'étude de la convergence presque complète de $V_{L^{(n)}}$ vers 0 lorsque n tend vers l'infini et de la convergence de la série (14) est analogue en tout point à

celle présentée dans la deuxième et la troisième parties de la démonstration du théorème 1. Il suffit donc de reprendre les calculs. Nous obtenons donc :

$$V_{L^{(n)}} \longrightarrow 0 \quad \text{presque complètement quand } n \longrightarrow +\infty$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P \left(\bigcup_{j \in \Omega_{L^{(n)}}} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \right\} \right) < +\infty.$$

5.7 Condition nécessaire de convergence en probabilité

Cette étude nous a semblé très complexe dans le cas où f est quelconque, aussi nous supposons que f est une fonction constante :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = a, \quad a > 0.$$

Dans ce cas particulier, nous établissons une condition nécessaire qui est analogue à celle obtenue pour la convergence uniforme en probabilité de l'estimateur f_n vers f , dans Missié[21]. Cela n'a rien de surprenant si on se rappelle que la convergence au sens de Skorokhod d'une suite de fonctions (F_n) vers une fonction continue F équivaut à la convergence uniforme, et si on considère que $f_n^{z_0}$ est peu différent de f_n .

Théorème 4

Une condition nécessaire pour que $f_n^{z_0}$ converge vers f en probabilité dans (D, d_S) est que :

$$\sup_{\ell \geq 1} \frac{1}{\log(\ell + 1)} \times \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty.$$

Démonstration :

Soit $0 < z_0 < a$ fixé, supposons que :

- $d_S(f_n^{z_0}, f)$ converge en probabilité vers 0 avec $\frac{1}{n}$
- il existe un nombre $0 < \alpha < +\infty$ tel que

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{\log(\ell + 1)} \times \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \leq \alpha < +\infty.$$

Nous allons montrer que nous arrivons à une contradiction. Supposons que sur deux blocs consécutifs $\Delta_{L^{(n)},j-1}$ et $\Delta_{L^{(n)},j}$ se réalisent les événements :

$$\{a - U_{L^{(n)},j-1} > z_0\} \quad \text{et} \quad \{a - U_{L^{(n)},j} > z_0\}.$$

Comme $f_n^{z_0}$ est égale à $U_{L^{(n)},j}$ ou $U_{L^{(n)},j-1}$ sur $\Delta_{L^{(n)},j}$, nous avons dans tous les cas :

$$a - f_n^{z_0} > z_0 \quad \text{sur} \quad \Delta_{L^{(n)},j}$$

et comme

$$\forall \varphi \in \Xi, \quad \forall x \in [0, 1], \quad f(x) = f(\varphi(x)) = a,$$

nous en déduisons :

$$\bigcup_{j=2}^{K(L^{(n)})} \left\{ N^{(n)}(D_{L^{(n)}, j-1}(z_0)) = 0, N^{(n)}(D_{L^{(n)}, j}(z_0)) = 0 \right\} \subset \left\{ d_S(f_n^{z_0}, f) > z_0 \right\},$$

puis, pour simplifier l'écriture, en supposant $K(L^{(n)})$ pair pour tout n :

$$\bigcup_{j=1}^{\frac{K(L^{(n)})}{2}} \left\{ N^{(n)}(D_{L^{(n)}, 2j-1}(z_0)) = 0, N^{(n)}(D_{L^{(n)}, 2j}(z_0)) = 0 \right\} \subset \left\{ d_S(f_n^{z_0}, f) > z_0 \right\}.$$

Posons : pour tout $j = 1, \dots, \frac{K(L^{(n)})}{2}$

$$A_{L^{(n)}, 2j}(z_0) = (\Delta_{L^{(n)}, 2j-1} \cup \Delta_{L^{(n)}, 2j}) \times [a - z_0, a].$$

Les $A_{L^{(n)}, 2j}(z_0)$; $j = 1, \dots, \frac{K(L^{(n)})}{2}$ sont deux à deux disjoints et contenus dans S . Nous en déduisons :

$$\bigcup_{j=1}^{\frac{K(L^{(n)})}{2}} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)}, 2j}(z_0)) = 0 \right\} \subset \left\{ d_S(f_n^{z_0}, f) > z_0 \right\}.$$

L'hypothèse

$$d_S(f_n^{z_0}, f) \rightarrow 0 \quad \text{en probabilité quand } n \rightarrow +\infty,$$

entraîne

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\{d_S(f_n^{z_0}, f) > z_0\} = 0.$$

Cependant,

$$\begin{aligned} P\{d_S(f_n^{z_0}, f) > z_0\} &\geq \sum_{\ell=1}^{+\infty} P\left(\bigcup_{j=1}^{\frac{K(\ell)}{2}} \left\{ N'_\ell(A_{\ell, 2j}(z_0)) = 0 \right\}\right) P(L^{(n)} = \ell) \\ &\geq \inf_{\ell \geq 1} P\left(\bigcup_{j=1}^{\frac{K(\ell)}{2}} \left\{ N'_\ell(A_{\ell, 2j}(z_0)) = 0 \right\}\right). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que si l'hypothèse du théorème n'est pas vérifiée, c'est-à-dire

$$(16) \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{\log(\ell + 1)} \times \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \leq \alpha < +\infty,$$

alors, cet infimum est strictement positif, ce qui contredit (15).

Conditionnellement à $\tilde{X}^{(\ell)}$, les variables aléatoires $N'_\ell(A_{\ell,2j}(z_0))$, $j = 1, \dots, K(\ell)$, sont indépendantes de lois binomiales $B(\nu_j(\ell) - 1, p_{\ell,j})$, $1 \leq j \leq K(\ell)$, où, d'après les inégalités (8), pour tout $1 \leq j \leq K(\ell)$:

$$p_{\ell,j} \leq \frac{B}{Aa} z_0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{j=1}^{\frac{K(\ell)}{2}} \left\{N'_\ell(A_{\ell,2j}(z_0)) = 0\right\}\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{j=1}^{\frac{K(\ell)}{2}} \left\{N'_\ell(A_{\ell,2j}(z_0)) > 0\right\}\right) \\ &= 1 - E\left(P\left(\bigcap_{j=1}^{\frac{K(\ell)}{2}} \left\{N'_\ell(A_{\ell,2j}(z_0)) > 0\right\} / \tilde{X}^{(\ell)}\right)\right) \\ &= 1 - E\left(\prod_{j=1}^{\frac{K(\ell)}{2}} \left[1 - (1 - p_{\ell,j})^{\nu_j(\ell)-1}\right]\right). \end{aligned}$$

Soit $z_0 > 0$ assez petit tel que $0 < \frac{2B}{Aa} z_0 < 1$, d'après l'inégalité classique : $e^{-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$ pour $0 < x < 1$, on obtient

$$1 - (1 - p_{\ell,j})^{\nu_j(\ell)-1} \leq 1 - \exp\left(-\frac{2Bz_0}{Aa} (\nu_j(\ell) - 1)\right).$$

Pour tout $1 \leq j \leq \frac{K(\ell)}{2}$

$$\nu_j(\ell) - 1 \leq \max_{1 \leq j \leq \frac{K(\ell)}{2}} \nu_j(\ell) \leq \alpha \log(\ell + 1).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\frac{K(\ell)}{2}} \left[1 - (1 - p_{\ell,j})^{\nu_j(\ell)-1}\right] &\leq \left[1 - \exp\left(-\frac{2Bz_0\alpha}{Aa} \log(\ell + 1)\right)\right]^{\frac{K(\ell)}{2}} \\ &= \left[1 - (\ell + 1)^{-\frac{2Bz_0\alpha}{Aa}}\right]^{\frac{K(\ell)}{2}} \\ &\leq \exp\left[-\frac{K(\ell)}{2} (\ell + 1)^{-\frac{2Bz_0\alpha}{Aa}}\right]. \end{aligned}$$

Cependant, on a :

$$K(\ell) \times \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \geq \ell + 1.$$

Donc

$$\alpha K(\ell) \log(\ell + 1) \geq \ell + 1.$$

Si bien que

$$\prod_{j=1}^{\frac{K(\ell)}{2}} \left[1 - (1 - p_{\ell,j})^{\nu_j(\ell)-1} \right] \leq \exp \left[-\frac{(\ell + 1)^{1 - \frac{2Bz_0\alpha}{Aa}}}{2\alpha \log(\ell + 1)} \right].$$

Prenant $z_0 > 0$ assez petit pour que $\frac{2Bz_0\alpha}{Aa} > \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\prod_{j=1}^{\frac{K(\ell)}{2}} \left[1 - (1 - p_{\ell,j})^{\nu_j(\ell)-1} \right] \leq \exp \left[-\frac{(\ell + 1)^{\frac{1}{2}}}{4\alpha \log(\ell + 1)^{\frac{1}{2}}} \right] \leq e^{-\frac{1}{4\alpha}}.$$

D'où finalement, pour tout ℓ entier non nul tel que

$$\frac{1}{\log(\ell + 1)} \times \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \leq \alpha$$

on obtient

$$P \left(\bigcup_{j=1}^{\frac{K(\ell)}{2}} \left\{ N'_{\ell}(A_{\ell,2j}) = 0 \right\} \right) > 1 - e^{-\frac{1}{4\alpha}}.$$

Références

- [1] H. ABBAR, Un estimateur spline du contour du support d'une répartition ponctuelle aléatoire, *Statistique et Analyse de données*, Vol. 15, No 3 (1990), 1-19.
- [2] H. ABBAR et Ch. SUQUET, Estimation L^2 du contour du support d'un processus ponctuel de Poisson homogène sur le plan, *Pub. IRMA Lille*, 31 - II (1993).
- [3] S. ABOU-JAOUDE, La convergence L_1 et L_∞ de certains estimateurs d'une densité de probabilité, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), (1977).
- [4] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*, Wiley, (1968).

- [5] **D. BOSQ**, Contribution à la théorie de l'estimation fonctionnelle, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), (1971).
- [6] **D. BOSQ** et **J.P. LECOUTRE**, Théorie de l'estimation fonctionnelle, *Economica*, (1987).
- [7] **J. CHEVALIER**, Estimation du support et du contour d'une loi de probabilité, *Ann. Inst. Henri Poincaré, B*, Vol 12, 4 (1976), 339-364.
- [8] **E. CRETOIS**, Utilisation de la méthode des pas aléatoires en estimation dans les processus ponctuels, Thèse de l'Université de Rouen, (1994).
- [9] **H. A. DAVID** and **J. GALAMBOS**, The asymptotic theory of concomitants of order statistics, *J. Appl. Prob.* 11 (1974), 762-770.
- [10] **H. A. DAVID**, **M. N. O'CONNELL** and **S. S. YANG**, Distribution and expected value of the rank of a concomitant of an order statistics, *The Annals of Statistics*, Vol. 5, No 1 (1977), 216-223.
- [11] **J. GEFFROY**, Sur un problème d'estimation géométrique, *Pub. ISUP XXII*, fasc. 1 (1964), 31-70.
- [12] **M. H. GENSBITEL**, Contribution à l'étude statistique des répartitions ponctuelles, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), (1979).
- [13] **P. JACOB**, Estimation du contour discontinu d'un processus ponctuel sur le plan, *Pub. ISUP XXIX*, 3-4 (1981), 1-25.
- [14] **P. JACOB** and **H. ABBAR**, Estimating the edge of a Cox process area, *Cahiers du Centre de Recherche Opérationnelle*, Vol. 31 (1989), 3-4.
- [15] **P. JACOB** and **Ch. SUQUET**, Regression and asymptotical location of a multivariate sample, *Pub. IRMA Lille*, 37 - III (1995).
- [16] **P. JACOB** et **P. MISSIÉ**, Estimation à pas aléatoire du contour d'un processus ponctuel de Poisson, *Pub. Inst. Stat. Paris XXXX*, fasc. 2 (1996), 53-74.
- [17] **P. JACOB** and **Ch. SUQUET**, Estimating the edge of a Poisson process by orthogonal series, *J. Statist. Planning Inf.* 46 (1996), 215-235.
- [18] **P. JACOB** and **Ch. SUQUET**, Regression and edge estimation, *Statistics and Probability letters* 27 (1996), 11-15.
- [19] **O. KALLENBERG**, *Random measures*, Academic press, (1983).
- [20] **A.F. KARR**, *Point process and their statistical inference*, Dekker, (1986).

- [21] **P. MISSIÉ**, Estimation à pas aléatoire du contour du support d'un processus ponctuel de Poisson sur le plan, Pub. IRMA de Lille, 40 - XIV (1997).
- [22] **P. MISSIÉ**, Estimation spline à pas aléatoire du contour du support d'un processus ponctuel de Poisson sur le plan, A paraître dans les publications de L'ISUP, (1997).
- [23] **R. PYKE**, Spacings, J. Roy. Statist. Soc. Série B, 27, No 3 (1965), 395-449.
- [24] **A. RENYI** and **R. SULANKE**, Über die konvexe Hülle von zufällig gewählten punkten II, Z. Wahr. 3 (1964), 138-148.
- [25] **B.D. RIPLEY** and **J.P. RASON**, Finding the edge of a Poisson forest. Journal of a Applied Probability, 14 (1977), 483-491.
- [26] **J. VAN RYZIN**, A histogram method of density estimation. Comm. Statist. 2 (1973), 493-502.