



**HAL**  
open science

## Appariements, polytopes et dons d'organes

Céline Comte, Fabien Mathieu, Ana Bušić

► **To cite this version:**

Céline Comte, Fabien Mathieu, Ana Bušić. Appariements, polytopes et dons d'organes. AlgoTel 2022 - 24èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications, May 2022, Saint-Rémy-Lès-Chevreuse, France. <hal-03656130>

**HAL Id: hal-03656130**

**<https://hal.science/hal-03656130v1>**

Submitted on 1 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Appariements, polytopes et dons d'organes

Céline Comte<sup>1</sup>, Fabien Mathieu<sup>2</sup> et Ana Bušić<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Université Technologique d'Eindhoven, Eindhoven, Pays-Bas

<sup>2</sup>Swapcard, Paris, France ; LINCOS, Paris, France

<sup>3</sup>Inria, Paris, France; DI ENS, CNRS, Université Paris Sciences et Lettres, Paris, France

---

Les programmes de dons croisés de reins donnent lieu à un problème d'appariement complexe pour lequel une solution optimale est inconnue. Ce problème peut être décrit par un modèle d'appariement dynamique et aléatoire où des éléments de différentes classes arrivent selon des processus de Poisson indépendants. Chaque élément représente un couple donneur-receveur où le donneur, prêt à donner un rein pour le receveur, est incompatible avec lui ; et la classe encode des propriétés du couple, telles que les groupes sanguins du donneur et du receveur, qui influencent sa compatibilité. Les contraintes d'appariement sont décrites par un graphe non-orienté dont les sommets sont les classes : deux couples ont des classes voisines dans le graphe s'ils peuvent être appariés dans le sens où chaque donneur peut donner son rein au receveur de l'autre couple. Les éléments en attente sont stockés dans une file d'attente. Nous étudions l'efficacité des politiques d'appariement, non seulement en termes de stabilité du système, mais aussi de contrôle des taux d'appariement entre différentes classes. Ce dernier point est important en vue de privilégier les appariements maximisant d'autres mesures de performance, comme la qualité de vie après la transplantation ou le taux de survie du greffon.

Cet article présente les principales contributions sur les appariements dynamiques pré-publiés et implantés par les auteurs [CMB22, Mat]. Par souci de concision, les preuves sont omises dans la présente version. La partie 1 formalise le problème et introduit l'équation de conservation qui caractérise les taux d'appariement de toute politique stable. La partie 2 présente une relation simple reliant la structure du graphe, l'équation de conservation, et la stabilité du système. Cette relation nous permet de caractériser dans la partie 3 l'ensemble des solutions de l'équation de conservation comme un polytope convexe. Finalement, la partie 4 montre que tout point du polytope est atteignable ou approchable par des politiques simples qui éliminent certaines arêtes.

**Mots-clefs :** appariement, modèle stochastique, théorie des graphes, algèbre linéaire, stabilité, taux d'appariement

---

## 1 Modèle et définitions

Considérons un problème d'appariement où des éléments de différentes classes arrivent pour être appariés avec d'autres éléments, les éléments non-appariés étant regroupés dans une file d'attente. Les appariements autorisés sont décrits par un graphe  $G = (V, E)$  non-orienté, avec  $|V| = n$  et  $|E| = m$ , dont les sommets sont les classes d'éléments. Un élément de la classe  $i$  peut être apparié avec un élément de la classe  $j$  si, et seulement si, les sommets  $i$  et  $j$  sont voisins dans le graphe. On dit alors que ces (classes d')éléments sont compatibles. Le graphe  $G$  n'a pas de boucle car seuls les couples où le donneur et le receveur sont incompatibles rejoignent le programme de don croisé d'organes. Pour chaque  $i \in V$ , les éléments de la classe  $i$  arrivent selon un processus de Poisson indépendant d'intensité  $\mu_i > 0$ . On note  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  le vecteur donnant les taux d'arrivée. Le couple  $(G, \mu)$  est appelé un *problème d'appariement*.

L'évolution du système est décrite par l'état de la file d'attente et dépend de la politique d'appariement  $\Phi$ . La politique d'appariement décrit, pour chaque élément entrant, (i) si cet élément est apparié immédiatement ou bien ajouté à la file d'attente, et (ii) dans le premier cas, avec quel élément il est apparié. Par exemple, la politique *la-plus-longue-d'abord* (*match-the-longest* en anglais) apparie chaque nouvel élément avec un élément non-couplé pris dans la classe compatible contenant le plus d'éléments non-couplés (s'il en existe un). Nous supposons que l'évolution de l'état du système définit un processus de Markov, et que cet état contient assez d'informations pour calculer le nombre d'éléments de chaque classe qui sont en attente. Le triplet  $(G, \mu, \Phi)$  est appelé un *modèle d'appariement*, et il est dit *stable* si le processus de Markov associé est positif récurrent (les détails techniques sont listés dans [CMB22]).

Étant donné un modèle d'appariement stable, le taux d'appariement  $\lambda_k$  le long d'une arête  $k \in E$  d'extrémités  $i$  et  $j$  compte le nombre moyen d'appariements entre les classes  $i$  et  $j$  par unité de temps. Notre objectif est de caractériser l'ensemble des vecteurs  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  de taux d'appariement qui peuvent être atteints par des politiques stables. Dans la partie 3, nous caractérisons le polytope convexe des vecteurs de taux d'appariement qui vérifient l'équation de conservation suivante :

$$A\lambda = \mu, \tag{1}$$

où  $A$  est la matrice d'incidence du graphe  $G$ . Cette équation de conservation stipule simplement que, dans un modèle stable, le taux d'arrivée  $\mu_i$  d'une classe  $i$  doit être égal au taux de départ de cette classe, donné par la somme des taux d'appariement  $\lambda_k$  le long des arêtes  $k$  qui sont incidentes au sommet  $i$ . Dans la partie 4, nous montrons sur plusieurs exemples que l'intérieur de cet ensemble est atteignable par ces politiques stables, et nous identifions des politiques qui s'approchent de la bordure de cet ensemble.

## 2 Surjectivité, injectivité, bijectivité... et stabilité

L'ensemble des solutions de l'équation (1) dépend du graphe  $G$  via l'application linéaire  $y \in \mathbb{R}^m \mapsto Ay \in \mathbb{R}^n$ . Le graphe  $G$  est dit *surjectif* (resp. *injectif*, *bijectif*) si cette application linéaire est surjective (resp. injective, bijective). Le graphe  $G$  est dit *strictement surjectif* (resp. *strictement injectif*) s'il est surjectif mais pas injectif (resp. injectif mais pas surjectif). Ces propriétés, illustrées dans la figure 1, sont étroitement liées à la structure du graphe  $G$  :

**Proposition 1** *Un graphe connexe  $G$  est surjectif si, et seulement si,  $G$  n'est pas biparti; injectif si, et seulement si,  $G$  contient au plus un cycle de longueur impaire et aucun cycle de longueur paire; bijectif si, et seulement si,  $G$  contient exactement un cycle de longueur impaire et aucun cycle de longueur paire. Un graphe non-connexe  $G$  est surjectif (resp. injectif, bijectif) si et seulement si chacune de ses composantes connexes est surjective (resp. injective, bijective).*

À noter que, si  $G$  est surjectif, alors  $n \leq m$ ; s'il est injectif, alors  $n \geq m$ ; s'il est bijectif, alors  $n = m$ .

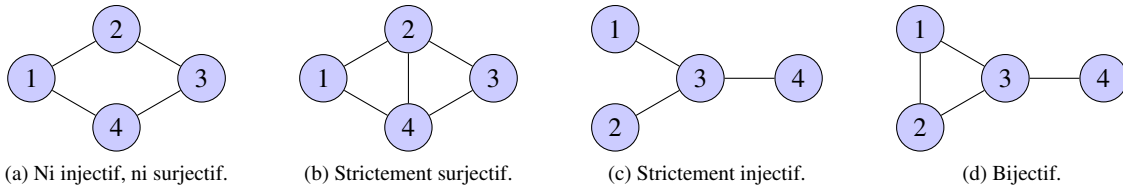


FIGURE 1 : Exemples élémentaires de graphes injectifs (ou pas) et surjectifs (ou pas).

La surjectivité du graphe  $G$  est fortement liée à des propriétés de stabilité. Un graphe  $G$  (resp. un problème d'appariement  $(G, \mu)$ ) est dit *stabilisable* s'il existe un vecteur  $\mu \in \mathbb{R}_{>0}^n$  et une politique  $\Phi$  tels que (resp. une politique  $\Phi$  telle que) le modèle d'appariement  $(G, \mu, \Phi)$  est stable. Il est connu qu'un graphe connexe est stabilisable si, et seulement si, il est non-biparti [MM16], résultat que la surjectivité étend naturellement aux graphes non-connexes : un graphe est stabilisable si, et seulement si, il est surjectif. L'équation de conservation (1) permet de formuler une autre caractérisation de la stabilité :

**Proposition 2** *Soit  $G$  un graphe surjectif et  $\mu \in \mathbb{R}_{>0}^n$ . Le problème d'appariement  $(G, \mu)$  est stabilisable si, et seulement si, l'équation de conservation (1) a une solution  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}^m$ .*

D'autres caractérisations de la stabilisabilité existent, par exemple à partir de la double couverture bipartite de  $G$  ou de ses ensembles indépendants [MM16], mais la Proposition 2 est plus directe et simple à vérifier. Si  $G$  est bijectif, il suffit de calculer  $A^{-1}\mu$  et de vérifier que toutes les composantes de cette solution sont strictement positives. Si  $G$  est strictement surjectif, l'existence d'un vecteur solution dont les composantes sont strictement positives peut être vérifiée en temps polynomial, en résolvant un programme linéaire détaillé dans [CMB22]. Notons que pour stabiliser un problème stabilisable, il suffit de prendre comme politique  $\Phi$  la politique *la-plus-longue-d'abord* [MM16] ou la politique *premier-arrivé-premier-apparié* [MBM21].

### 3 Solutions de l'équation de conservation

À partir de maintenant, nous considérons un problème d'appariement stabilisable  $(G, \mu)$  dont le graphe  $G$  est *strictement* surjectif : l'équation (1) admet un ensemble infini de solutions, noté  $\Lambda$ , dont au moins une appartient à  $\mathbb{R}_{>0}^m$ . Si  $y^\circ$  est une solution particulière de l'équation (1) et si  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_d)$  est une base du noyau  $\dagger \ker(A)$  de la matrice  $A$ , alors  $\Lambda = \{y^\circ + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_d b_d : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d\}$ . Autrement dit, tout vecteur  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  exprime les coordonnées d'un point de  $\Lambda$  dans la base  $\mathcal{B}$  ancrée en  $y^\circ$  : il est donc possible de paramétrer les solutions de (1) par  $\alpha \in \mathbb{R}^d$ . La figure 2a illustre ce principe. Notons que les espaces  $\Lambda$  et  $\ker(A)$  ont la même dimension, égale à  $d = m - n$  d'après le théorème du rang.

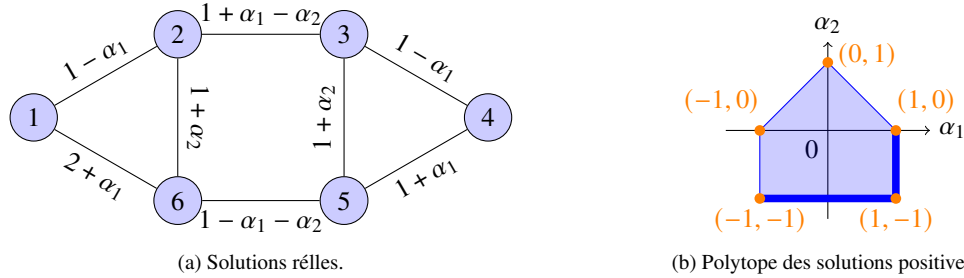
Un taux d'appariement étant positif, il est naturel de considérer les solutions positives de l'équation (1),

$$\Lambda_{\geq 0} = \Lambda \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m = \{y \in \mathbb{R}^m : Ay = \mu, y \geq 0\}. \quad (2)$$

L'ensemble  $\Lambda_{\geq 0}$  est un polytope (borné et convexe) de dimension  $d$ , intersection de  $\Lambda$  avec les demi-espaces caractérisant la positivité de chaque arête. Le polytope  $\Lambda_{\geq 0}$  peut aussi être décrit par ses sommets, c'est-à-dire ses points extrémaux, qui sont d'une grande importance pour résoudre des problèmes d'optimisation. La proposition 3 permet de caractériser ces sommets.

**Proposition 3** Soit  $y \in \Lambda_{\geq 0}$ . Notons  $E_y = \{k \in E : y_k > 0\}$  le support de  $y$  et  $G_y = (V, E_y)$  le graphe induit par cet ensemble, appelé *graphe support de  $y$  dans la suite*. Alors  $y$  est un sommet de  $\Lambda_{\geq 0}$  si, et seulement si, le graphe  $G_y$  est injectif. Le graphe support d'un sommet  $y$  de  $\Lambda_{\geq 0}$  peut donc être de deux types, bijectif ou strictement injectif. En particulier  $|E_y| \leq n < m$ , i.e. au moins une arête a un taux nul.

La figure 2b décrit le polytope de dimension 2 associé au problème d'appariement de la figure 2a. Deux sommets ont un graphe support bijectif  $((-1, 0)$  et  $(0, 1)$  dans la base choisie) et trois ont un graphe support strictement injectif  $((-1, -1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(1, -1))$ . L'existence d'une politique stable dont les taux d'appariement correspondent à un sommet est intimement liée à la bijectivité de ce sommet, discutée en partie 4.



**FIGURE 2 :** Solutions de l'équation (1) pour un graphe  $G$  de type *co-domino* avec le vecteur  $\mu = (3, 3, 3, 2, 3, 4)$  de taux d'arrivée. La figure 2a montre une solution réelle générique de la forme  $y^\circ + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$ , avec  $y^\circ = (1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$ . La figure 2b montre les solutions positives exprimées dans la base  $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$  ancrée en  $y^\circ$ . Les traits épais indiquent les bords où plusieurs arêtes ont un taux nul, qui induisent des sommets dont le graphe support est strictement injectif.

### 4 Atteignabilité

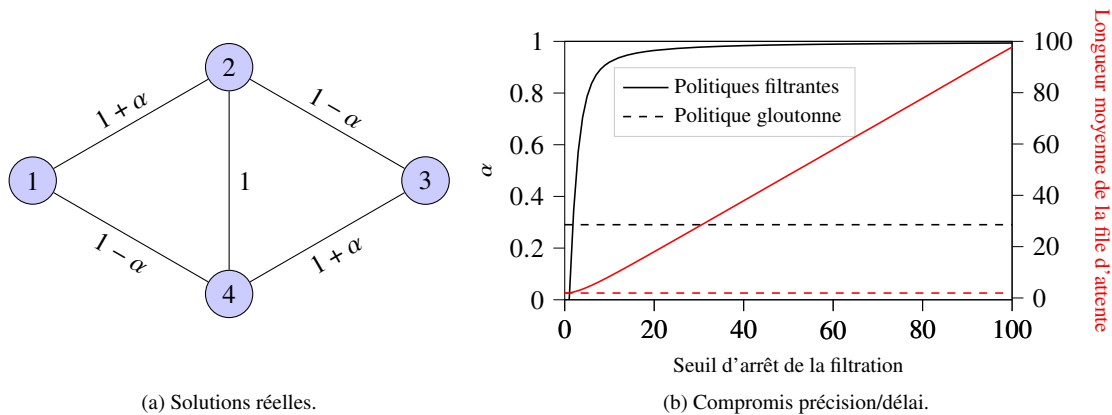
Le vecteur de taux d'appariement associé à toute politique stable vérifie (1) et appartient donc à  $\Lambda_{\geq 0}$ , mais rien ne garantit *a priori* qu'à un point donné de  $\Lambda_{\geq 0}$  correspond une politique stable. Contrôler les taux d'appariement est important, par exemple pour les optimiser selon des valeurs associées aux arêtes.

Il est naturel de considérer tout d'abord des politiques *gloutonnes*, c'est-à-dire des politiques qui appaierent immédiatement un élément entrant à chaque fois que c'est possible. Beaucoup de politiques gloutonnes, comme *la-plus-longue-d'abord* ou *premier-arrivé-premier-apparié*, sont à la fois simples à décrire

$\dagger$ . Un algorithme pour construire une telle base en utilisant un arbre couvrant de  $G$  est rappelé dans [CMB22]. Chaque vecteur de cette base a pour support un cycle de longueur paire ou bien une paire de cycles de longueur impaire reliés par un chemin.

et stables. Hélas, les politiques gloutonnes ont un contrôle limité sur les taux d'appariement : elles n'atteignent généralement qu'une partie de  $\Lambda_{\geq 0}$ . Un exemple extrême est lorsque  $G$  est une clique : le polytope a alors une dimension maximale ( $d = n(n-3)/2$ ), tandis que les taux d'appariement atteignables par une politique gloutonne sont réduits à un unique point.

Pour plus de flexibilité, et en particulier pour atteindre les sommets de  $\Lambda_{\geq 0}$ , il faut considérer des politiques non-gloutonnes. Les politiques *filtrantes* sont des politiques qui ignorent certaines arêtes et n'autorisent des appariements que selon les autres arêtes. Elles permettent d'atteindre tout sommet de  $\Lambda_{\geq 0}$  dont le graphe support est bijectif en ne conservant que les arêtes du support de ce sommet, tout en préservant la stabilité du système. Malheureusement, prendre la même approche pour un sommet dont le graphe support est strictement injectif rend le système instable ; en effet, nous avons montré en partie 2 qu'un graphe est stabilisable si, et seulement si, il est surjectif. Un compromis consiste à filtrer tant que la taille des files d'attente n'est pas trop grande et à arrêter de filtrer lorsqu'elles dépassent un certain seuil. Le choix du seuil définit un compromis entre la distance du vecteur de taux d'appariement au sommet visé d'une part et la taille des files d'attentes d'autre part. La figure 3 illustre ce compromis sur un graphe *diamant*.



**FIGURE 3 :** Graphe diamant avec le vecteur  $\mu = (2, 3, 2, 3)$  de taux d'arrivée. La figure 3a décrit l'espace des solutions réelles, de dimension 1. Les solutions positives correspondent aux valeurs de  $\alpha$  dans le segment  $[-1, 1]$ , dont les deux extrémités ont un graphe support strictement injectif ( $\alpha = -1$  correspond au chemin 1-4-2-3 et  $\alpha = 1$  au chemin 1-2-4-3). La Figure 3b montre la plus grande valeur de  $\alpha$  atteignable par une politique filtrante en fonction du seuil de filtration, ainsi que le coût en terme d'attente (estimé par la longueur moyenne des files d'attente). Les performances de la politique gloutonne qui maximise  $\alpha$  sont montrées à titre de comparaison.

En résumé, les politiques filtrantes permettent d'atteindre ou d'approcher arbitrairement tous les sommets du polytope  $\Lambda_{\geq 0}$ . Elles peuvent aussi être combinées pour atteindre tout point de l'enveloppe convexe de leurs vecteurs de taux d'appariements. Les politiques filtrantes permettent ainsi d'atteindre tout l'intérieur du polytope  $\Lambda_{\geq 0}$ , ainsi que tous les bords caractérisés par des sommets dont le graphe support est bijectif.

## Références

- [CMB22] Céline Comte, Fabien Mathieu, and Ana Bušić. Stochastic dynamic matching : A mixed graph-theory and linear-algebra approach. January 2022. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03502084>.
- [Mat] Fabien Mathieu. Stochastic Matching. Package Python disponible sur GitHub et Pip. URL : [https://balouf.github.io/stochastic\\_matching/index.html](https://balouf.github.io/stochastic_matching/index.html).
- [MBM21] Pascal Moyal, Ana Bušić, and Jean Mairesse. A product form for the general stochastic matching model. *Journal of Applied Probability*, 58(2) :449–468, 06 2021.
- [MM16] Jean Mairesse and Pascal Moyal. Stability of the stochastic matching model. *Journal of Applied Probability*, 53(4) :1064–1077, 12 2016.