



**HAL**  
open science

## Chapitre 3 Introduction aux tests de racine unitaire

Ahmed Bensalma

► **To cite this version:**

Ahmed Bensalma. Chapitre 3 Introduction aux tests de racine unitaire. Master. Pôle universitaire de Koléa, Tipaza, Algérie, Algérie. 2022, pp.37. hal-03655798

**HAL Id: hal-03655798**

**<https://hal.science/hal-03655798>**

Submitted on 30 Apr 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

# Chapitre 3

## Introduction aux tests de racine unitaire

Ahmed BENSALMA

Pôle Universitaire de Koléa, Tipaza, Algérie

École Nationale Supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée

*Ce cours est destiné aux étudiants de 2ème année Master, option statistique appliquée*

### 3.1. Introduction

On admettait, avant (1982), que la croissance et les fluctuations en niveau des séries macroéconomique pouvaient s'expliquer en décomposant, dans les travaux empiriques, les principales séries en une composante tendancielle (fonctions polynomiale et/ou trigonométrique du temps, ajustées par des techniques de régression) et une composante stationnaire  $I(0)$ . Une autre approche, initié par Nelson et Plosser en 1982, souligne que les fluctuations en niveau sont mieux expliqué par des modèles à racine unitaire  $I(1)$ . En d'autres termes les changements sont "stochastiques" plutôt que "déterministe". Après le travail de Box et Jenkins (1970), une stratégie généralement admise par les praticiens, pour identifier les modèles univariés  $ARIMA(p, d, q)$  d'un processus non stationnaire  $y_t$  est d'abord de le différenciée  $d$  ( $d \in \mathbb{N}$ ) fois pour le rendre stationnaire. Lorsque  $y_t$  a une représentation autoregressive

$$\Phi_p(L)y_t = \varepsilon_t$$

les praticiens utilisent couramment les résultats de Dickey et Fuller (1979) pour tester la présence de racine unitaire dans le polynôme

$$\Phi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$$

ce qui implique la factorisation suivante du polynôme

$$\Phi_p(L) = (1 - L)\Phi'_{p-1}(L)$$

où  $\Phi'_{p-1}(L)$  est un polynôme d'ordre  $p - 1$  en  $L$ . A partir des travaux de Nelson et Plosser (1982), le débat c'est centré autour de la question de savoir si une série chronologique économique ou autre possède une tendance déterministe ou une tendance stochastique, i.e. si la série est bien décrite par un processus  $I(0)$  ou  $I(1)$ . L'élaboration d'une méthodologie d'identification des racines unitaires a été développée par Wayne Fuller (1976) et David Dickey et Wayne Fuller (1979, 1981). Ce premier cours expose cette méthodologie.

### 3.2. Processus TS contre processus DS

On abordera, dans ce qui suit, deux formes simple de non stationnarité. La première, appelée non-stationnarité de type TS et la seconde non-stationnarité de type DS. Quand une série n'est pas stationnaire, on a recours à un ensemble de transformation pour la rendre stationnaire et ainsi appliquée la méthodologie de Box et Jenkins.

#### 3.2.1. Les processus stationnaires autour d'une tendance déterministe (TS)

Soit un processus  $y_t$  défini comme suit

$$y_t = c + \beta t + x_t$$

où  $x_t$  est un processus  $ARMA(p, q)$  stationnaire

$$\Phi_p(L)x_t = \Theta_q(L)z_t, \text{ avec } z_t \sim BB(0, \sigma_z^2)$$

Pour rendre stationnaire le processus  $y_t$ , on estime d'abord par la méthode des moindres carrés ordinaires les paramètres  $(c)$  et  $(\beta)$ . Ensuite on déduit le processus  $x_t$  en retranchant de  $y_t$  la droite  $\hat{c} + \hat{\beta}t$ ,

$$x_t = y_t - \hat{c} + \hat{\beta}t$$

### 3.2.2. Les processus non-stationnaires de type DS

Soit un processus  $y_t$  défini comme suit

$$(1 - L)^d y_t = x_t \tag{3.1}$$

où  $x_t$  est un processus  $ARMA(p, q)$  stationnaire

$$\Phi_p(L)x_t = \Theta_q(L)z_t, \text{ avec } z_t \sim BB(0, \sigma_z^2). \tag{3.2}$$

Si à la place de  $x_t$  dans (3.2), on a  $(1 - L)^d y_t$ , alors  $y_t$  est un processus  $ARIMA(p, d, q)$ . L'équation correspondante est

$$\Phi_p(L)(1 - L)^d y_t = \Theta_q(L)z_t, \text{ avec } z_t \sim BB(0, \sigma_z^2). \tag{3.3}$$

Noter qu'un processus  $ARMA(p, q)$  est aussi un processus  $ARIMA(p, 0, q)$ . Si  $(d)$  est supérieur ou égale à 1, alors  $y_t$  n'est pas stationnaire. Pour obtenir un processus stationnaire,  $y_t$  doit être différencié  $(d)$  fois. Dans l'équation (3.3) si  $d$  est un entier ( $d \geq 0$ ), alors  $(1 - L)^d$  peut être réécrit comme

$$(1 - L)^d = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} (-1)^k L^k$$

avec des coefficients binomiaux

$$\binom{d}{k} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)} = \frac{d!}{k!(d-k)!}$$

### 3.2.3. Les tests de racine unitaire comme moyen d'identification

Il est fondamental d'identifier si les séries macroéconomiques sont engendrées par des processus qui possèdent une tendance déterministe ou stochastique. Les tests de racine unitaire fournissent une réponse appropriée à l'identification de la nature de la tendance. À l'origine, ce sont Dickey (1975), Fuller (1976) et Dickey et Fuller (1979, 1981) qui ont formalisé des procédures de tests. Ces tests permettent d'identifier si les processus engendrant les séries sont stationnaires, stationnaires en écarts à une tendance ( $TS$ ) ou encore stationnaires en différence ( $DS$ ).

### 3.2.4. Processus non stationnaires

À l'inverse d'un processus stationnaire, un processus non stationnaire se caractérise par une espérance, une variance et des covariances qui varient avec le temps. En général, deux classes de processus sont distinguées.

#### Le processus stationnaire autour d'une tendance (processus $TS$ )

$$y_t = c + bt + \varepsilon_t$$

où  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc, avec

$$\begin{aligned} E(y_t) &= c + bt \\ V(y_t) &= \sigma_\varepsilon^2 \\ Cov(y_t, y_s) &= 0 \text{ pour } t \neq s \end{aligned}$$

On s'aperçoit que ce processus n'est pas stationnaire puisque son espérance dépend du temps. Pour le rendre stationnaire, il est nécessaire de raisonner en écart par rapport à la tendance déterministe ( $y_t - bt$ ).

### Le processus stationnaire en différence (processus DS)

$$y_t = c + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

où  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc. Par récurrence, on obtient :

$$y_t = y_0 + tc + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j$$

avec

$$\begin{aligned} E(y_t) &= y_0 + tc \\ V(y_t) &= t\sigma_\varepsilon^2 \\ Cov(y_t, y_s) &= \sigma_\varepsilon^2 \min(t, s), \text{ pour } t \neq s \end{aligned}$$

Ce processus n'est pas stationnaire puisque son espérance, sa variance et ses covariances dépendent du temps. Pour le rendre stationnaire, il est nécessaire de prendre les différences premières de la série ( $y_t - y_{t-1}$ ).

La différence essentielle entre les processus TS et DS se situe au niveau des perturbations et de leur impact. Pour le processus DS, les perturbations  $\varepsilon_t$  représentent une accumulation de chocs aléatoires, ce qui traduit une non stationnarité de nature stochastique.

### 3.3. Tests de Racine unitaire dans les modèles $AR(1)$

#### 3.3.1. Marche aléatoire sans dérive

Considérer le modèle

$$\begin{aligned} y_t &= \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \\ y_0 &= 0, \quad (\varepsilon_t, t = 1, 2, \dots, n) \sim i.i.d(0, \sigma_\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

On veut tester l'hypothèse

$$H_0 : \phi = 1$$

Soit  $\hat{\phi}$  l'estimateur des moindres carrés (MCO) obtenu à partir de (3.4). Contrairement au cas  $|\phi| < 1$ , la distribution asymptotique de  $\hat{\phi}$  n'est pas normale. Plus précisément, on peut montrer que (voir Hamilton 1994 page 476)

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\hat{\phi} - 1) \xrightarrow{p} 0$$

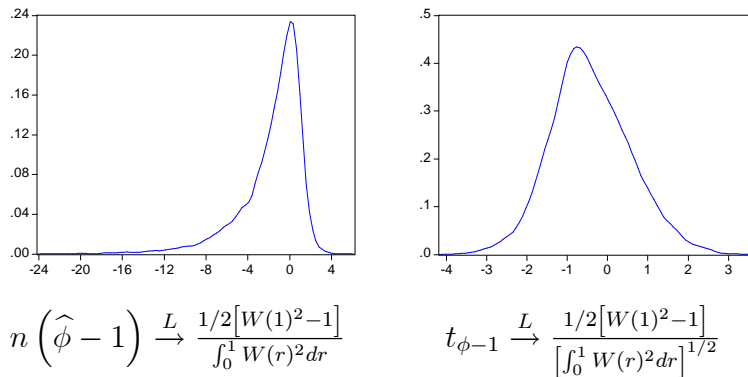
Cependant, les distributions asymptotiques de  $n(\widehat{\phi} - 1)$  et  $t_{\phi-1}$  ne suivent pas des lois normales

$$n(\widehat{\phi} - 1) = n\left(\frac{\sum_{t=2}^T y_t y_{t-1}}{\sum_{t=2}^T y_{t-1}^2} - 1\right) \xrightarrow{L} \frac{1/2 [W(1)^2 - 1]}{\int_0^1 W(r)^2 dr}$$

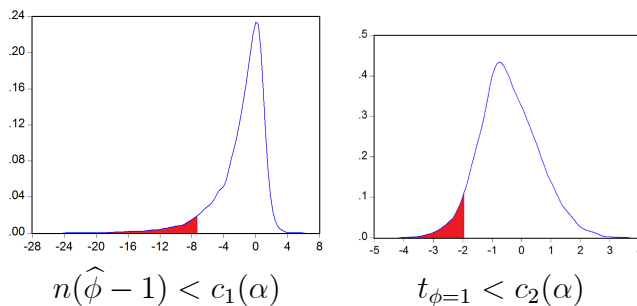
$$t_{\phi-1} = \frac{\widehat{\phi} - 1}{s\left(\sum_{t=2}^T y_{t-1}^2\right)^{-1/2}} \xrightarrow{L} \frac{1/2 [W(1)^2 - 1]}{\left[\int_0^1 W(r)^2 dr\right]^{1/2}}$$

où

$$s^2 = \sum_{t=2}^T (y_t - \widehat{\phi} y_{t-1})^2$$



En pratique, l'hypothèse  $H_0 : \phi = 1$  est testée contre l'hypothèse alternative ( $\phi < 1$ ) par conséquent, on considère une région critique unilatérale à gauche de la forme  $n(\widehat{\phi} - 1) < c_1(\alpha)$  et  $t_{\phi=1} < c_2(\alpha)$  où  $\alpha$  est le niveau du test.



Dans le cas où les  $\varepsilon_t$  suivent une loi normale, les valeurs critiques exactes pour  $n(\widehat{\phi} - 1)$  et  $t_{\phi-1}$  ont été données par Fuller (1976, pp. 373 and 375) : première partie de table B.5 pour  $n(\widehat{\phi} - 1)$  et première partie pour la table B.6 pour  $t_{\phi-1}$ .

**Remarque :**  $W(\cdot)$  est le mouvement Brownien Standard qui sera défini au chapitre 2. L'expression de la distribution limite en fonction du mouvement Brownien Standard est donnée pour voir la différence entre les expressions mathématiques des lois standards, que vous connaissez déjà, avec celles non standard. A ce stade vous n'avez pas besoin de comprendre d'où viennent les expressions des lois limites en fonction de  $W(\cdot)$ . Ce qu'il faut comprendre c'est que les valeurs critiques des lois standards ne peuvent pas être utilisées.

### 3.3.2. Marche aléatoire avec dérive pour les modèles AR(1)

$$\begin{aligned} y_t &= c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \\ y_0 &= 0, \quad (\varepsilon_t, t = 1, 2, \dots, n) \sim i.i.d(0, \sigma_\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

On veut tester l'hypothèse

$$H_0 : \phi = 1$$

Soit  $\hat{\phi}$  l'estimateur des moindres carrés de  $\phi$  basé sur l'équation (3.5) et  $t_{\phi-1}$  la statistique  $t$  associée à l'hypothèse  $H_0$ , on peut utiliser soit  $n(\hat{\phi} - 1)$  ou  $t_{\phi-1}$ . Pour le cas où  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , les valeurs critiques sont données par Fuller (1976, pp.371 and 373) : table B.5 pour  $n(\hat{\phi} - 1)$  et table B.6 pour  $t_{\phi-1}$ . Le rejet de l'hypothèse nulle  $H_0$  se fait lorsque la valeur calculée de la statistique  $n(\hat{\phi} - 1)$  ou  $t_{\phi-1}$  est **inférieure** à une valeur critique (au seuil  $\alpha$ ) donnée par la table B5 ou la table B6.

Dans (1.2), on peut aussi tester l'hypothèse

$$H_{01} : \phi = 1 \text{ et } c = 0$$

Ceci peut se faire par le calcul de la statistique  $F$  usuelle ( $F_{01}$ ) pour  $H_{01}$ . Le rejet de l'hypothèse nulle  $H_{01}$  se fait lorsque la valeur calculée de la statistique

$$F_{01} = \frac{(SCR_{2,constraint} - SCR_2)/2}{SCR_2/(n-2)}$$

est **supérieur** à une valeur critique (au seuil  $\alpha$ ) donnée par la table 3. Les distributions limites de  $n(\hat{\phi} - 1)$ ,  $t_{\phi-1}$  et  $F_{01}$  sont des lois non standard. Les deux résultats ci-dessous seront démontrés au chapitre 4.

$$\begin{aligned} n(\hat{\phi} - 1) &\rightarrow \frac{1/2 [W(1)^2 - 1] - W(1) \int W(r) dr}{\int_0^1 W(r)^2 dr - [\int W(r) dr]^2} \\ t_{\phi-1} &\rightarrow \frac{1/2 [W(1)^2 - 1] - W(1) \int W(r) dr}{\left[ \int_0^1 W(r)^2 dr - [\int W(r) dr]^2 \right]^{1/2}} \end{aligned}$$

### 3.3.3. Marche aléatoire avec tendance pour les modèles $AR(1)$

$$\begin{aligned} y_t &= c + bt + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \\ y_0 &= 0, \quad (\varepsilon_t, t = 1, 2, \dots, n) \sim i.i.d(0, \sigma_\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

On veut tester les hypothèses

$$H_0 : \phi = 1$$

$$H_{02} : \phi = 1, b = 0 \text{ et } c = 0$$

$$H_{03} : \phi = 1, b = 0$$

Soit  $\hat{\phi}$  l'estimateur des moindres carrés de  $\phi$  basé sur l'équation (3.6) et  $t_{\phi-1}$  la statistique  $t$  associée à l'hypothèse  $H_0$ , on peut utiliser soit  $n(\hat{\phi} - 1)$  ou  $t_{\phi-1}$ . Pour le cas où  $\varepsilon_t \sim$

$N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , les valeurs critiques sont données par Fuller (1976, pp.371 and 373) : table B.5 pour  $n(\hat{\phi} - 1)$  et table B.6 pour  $t_{\phi-1}$ . Pour tester les hypothèses  $H_{02}$  et  $H_{03}$ , on utilise les statistiques de **Fisher** (voir remarque ci-dessous)

$$F_{02} = \frac{(SCR_{3,constraint} - SCR_3) / 3}{SCR_3 / (n - 3)}$$

et

$$F_{03} = \frac{(SCR_{3,constraint} - SCR_3) / 2}{SCR_3 / (n - 3)}$$

Le rejet de l'hypothèse nulle  $H_{02}$  se fait lorsque la valeur calculée de la statistique  $F_{02}$  est supérieure à une valeur critique (au seuil  $\alpha$ ) donnée par la **table 6**.

Le rejet de l'hypothèse nulle  $H_{03}$  se fait lorsque la valeur calculée de la statistique  $F_{03}$  est supérieure à une valeur critique (au seuil  $\alpha$ ) donnée par la **table 7**.

**Remarque :** Les statistiques de tests  $F_{02}$  et  $F_{03}$  se calculent comme la statistique de Fisher dans le cas stationnaire, mais leurs distributions n'ont rien à voir avec la loi de Fisher. Il faut distinguer entre le nom de la statistique "statistique de Fisher" et "loi de Fisher". Même remarque concernant la statistique de student  $t_{\phi-1} = \frac{\hat{\phi}-1}{s(\sum_{t=2}^T y_{t-1}^2)^{-1/2}}$ . Cette statistique garde le nom de statistique de student dans le cas stationnaire et non stationnaire. Par contre sa loi dans le cas stationnaire est la loi de student (ou la loi normale) qui est loi standard et dans le cas non stationnaire (modèle 1.1 avec  $\phi = 1$ ) sa loi n'a rien à voir avec la loi de student.

**Résumé :** Voici tous les tests qu'on peut mener sur les différents modèles

{	Modèle [3]	$x_t = c + bt + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$	
		$H_0 : \phi = 1$	Table B5 ou B6 (Troisième partie)
		$H_{03} : (c, b, \phi) = (c, 0, 1)$	Table 7
		$H_{03} : (c, b, \phi) = (0, 0, 1)$	Table 6
		$H_0 : b = 0$	Table 4
		$H_0 : c = 0$	Table 5
{	Modèle [2]	$x_t = c + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$	
		$H_0 : \phi = 1$	Table B5 ou B6 (2ième partie)
		$H_{01} : (c, \phi) = (0, 1)$	Table 3
		$H_0 : c = 0$	Table 2
{	Modèle [1]	$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$	
		$H_0 : \phi = 1$	Table B5 ou B6 (1 er partie)

### 3.3.4. Quelques tables statistiques utilisées pour les différents tests

**TABLE B.5**  
Critical Values for the Phillips-Perron  $Z_p$  Test and for the Dickey-Fuller Test  
Based on Estimated OLS Autoregressive Coefficient

Sample size $T$	Probability that $T(\hat{\rho} - 1)$ is less than entry							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
Case 1								
25	-11.9	-9.3	-7.3	-5.3	1.01	1.40	1.79	2.28
50	-12.9	-9.9	-7.7	-5.5	0.97	1.35	1.70	2.16
100	-13.3	-10.2	-7.9	-5.6	0.95	1.31	1.65	2.09
250	-13.6	-10.3	-8.0	-5.7	0.93	1.28	1.62	2.04
500	-13.7	-10.4	-8.0	-5.7	0.93	1.28	1.61	2.04
$\infty$	-13.8	-10.5	-8.1	-5.7	0.93	1.28	1.60	2.03
Case 2								
25	-17.2	-14.6	-12.5	-10.2	-0.76	0.01	0.65	1.40
50	-18.9	-15.7	-13.3	-10.7	-0.81	-0.07	0.53	1.22
100	-19.8	-16.3	-13.7	-11.0	-0.83	-0.10	0.47	1.14
250	-20.3	-16.6	-14.0	-11.2	-0.84	-0.12	0.43	1.09
500	-20.5	-16.8	-14.0	-11.2	-0.84	-0.13	0.42	1.06
$\infty$	-20.7	-16.9	-14.1	-11.3	-0.85	-0.13	0.41	1.04
Case 4								
25	-22.5	-19.9	-17.9	-15.6	-3.66	-2.51	-1.53	-0.43
50	-25.7	-22.4	-19.8	-16.8	-3.71	-2.60	-1.66	-0.65
100	-27.4	-23.6	-20.7	-17.5	-3.74	-2.62	-1.73	-0.75
250	-28.4	-24.4	-21.3	-18.0	-3.75	-2.64	-1.78	-0.82
500	-28.9	-24.8	-21.5	-18.1	-3.76	-2.65	-1.78	-0.84
$\infty$	-29.5	-25.1	-21.8	-18.3	-3.77	-2.66	-1.79	-0.87

The probability shown at the head of the column is the area in the left-hand tail.

Source: Wayne A. Fuller, *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York, 1976, p. 371.

**TABLE B.6**  
Critical Values for the Phillips-Perron  $Z_t$  Test and for the Dickey-Fuller Test  
Based on Estimated OLS  $t$  Statistic

Sample size $T$	Probability that $(\hat{\rho} - 1)/\hat{\sigma}_p$ is less than entry							
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
Case 1								
25	-2.66	-2.26	-1.95	-1.60	0.92	1.33	1.70	2.16
50	-2.62	-2.25	-1.95	-1.61	0.91	1.31	1.66	2.08
100	-2.60	-2.24	-1.95	-1.61	0.90	1.29	1.64	2.03
250	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.29	1.63	2.01
500	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.28	1.62	2.00
$\infty$	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.28	1.62	2.00
Case 2								
25	-3.75	-3.33	-3.00	-2.63	-0.37	0.00	0.34	0.72
50	-3.58	-3.22	-2.93	-2.60	-0.40	-0.03	0.29	0.66
100	-3.51	-3.17	-2.89	-2.58	-0.42	-0.05	0.26	0.63
250	-3.46	-3.14	-2.88	-2.57	-0.42	-0.06	0.24	0.62
500	-3.44	-3.13	-2.87	-2.57	-0.43	-0.07	0.24	0.61
$\infty$	-3.43	-3.12	-2.86	-2.57	-0.44	-0.07	0.23	0.60
Case 4								
25	-4.38	-3.95	-3.60	-3.24	-1.14	-0.80	-0.50	-0.15
50	-4.15	-3.80	-3.50	-3.18	-1.19	-0.87	-0.58	-0.24
100	-4.04	-3.73	-3.45	-3.15	-1.22	-0.90	-0.62	-0.28
250	-3.99	-3.69	-3.43	-3.13	-1.23	-0.92	-0.64	-0.31
500	-3.98	-3.68	-3.42	-3.13	-1.24	-0.93	-0.65	-0.32
$\infty$	-3.96	-3.66	-3.41	-3.12	-1.25	-0.94	-0.66	-0.33

The probability shown at the head of the column is the area in the left-hand tail.

Source: Wayne A. Fuller, *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York, 1976, p. 373.

Table 6 – Distribution empirique de  $\Phi_2$  pour  $H_0^2 : (c, b, \rho) = (0, 0, 0)$   
Modèle (3)

$n$	Probabilité d'une valeur inférieure							
	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99
Modèle (3) $\Phi_2 H_0^2 : (c, b, \rho) = (0, 0, 0)$								
25	0,61	0,75	0,89	1,10	4,67	5,68	6,75	8,21
50	0,62	0,77	0,91	1,12	4,31	5,13	5,94	7,02
100	0,63	0,77	0,92	1,12	4,16	4,88	5,59	6,50
250	0,63	0,77	0,92	1,13	4,07	4,75	5,40	6,22
500	0,63	0,77	0,92	1,13	4,05	4,71	5,35	6,15
$\infty$	0,63	0,77	0,92	1,13	4,03	4,68	5,31	6,09

Source : Dickey et Fuller, 1981 , p.1063, Tableau V.



Table 7 – Distribution empirique de  $\Phi_3$  pour  $H_0^3 : (c, b, \rho) = (c, 0, 0)$   
Modèle (3)

	Probabilité d'une valeur inférieure							
$n$	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99
Modèle (3) $\Phi_3 H_0^3 : (c, b, \rho) = (C, 0, 0)$								
25	0,74	0,90	1,08	1,33	5,91	7,24	8,65	10,61
50	0,76	0,93	1,11	1,37	5,61	6,73	7,81	9,31
100	0,76	0,94	1,12	1,38	5,47	6,49	7,44	8,73
250	0,76	0,94	1,13	1,39	5,39	6,34	7,25	8,43
500	0,76	0,94	1,13	1,39	5,36	6,30	7,20	8,34
$\infty$	0,77	0,94	1,13	1,39	5,34	6,25	7,16	8,27

Source : Dickey et Fuller, 1981 , p.1063, Tableau VI.

Table 4 – Distribution empirique de  $t_{\hat{\epsilon}}$  pour  $(c, b, \rho) = (0, 0, 0)$  Modèle (3)

	Probabilité d'une valeur inférieure			
$n$	0,90	0,95	0,975	0,99
Modèle (3) : $t_{\hat{\epsilon}}$				
25	2,77	3,20	3,59	4,05
50	2,75	3,14	3,47	3,87
100	2,73	3,11	3,42	3,78
250	2,73	3,09	3,39	3,74
500	2,72	3,08	3,38	3,72
$\infty$	2,72	3,08	3,38	3,71

Source : Dickey et Fuller, 1981, p.1062, Tableau II.

Table 5 – Distribution  $t_{\hat{b}}$  pour  $(c, b, \rho) = (0, 0, 0)$  Modèle (3)

	Probabilité d'une valeur inférieure			
$n$	0,90	0,95	0,975	0,99
Modèle (3) : $t_{\hat{b}}$				
25	2,39	2,85	3,25	3,74
50	2,38	2,81	3,18	3,60
100	2,38	2,79	3,14	3,53
250	2,38	2,79	3,12	3,49
500	2,38	2,78	3,11	3,48
$\infty$	2,38	2,78	3,11	3,46

Source : Dickey et Fuller, 1981, p.1062, Tableau III.

Table 3 – Distribution empirique de  $\Phi_1$  pour  $H_0^1 : (c, \rho) = (0, 0)$  Modèle (2)

	Probabilité d'une valeur inférieure							
$n$	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99
Modèle (2) $\Phi_1 : (c, \rho) = (0, 0)$								
25	0,29	0,38	0,49	0,65	4,12	5,18	6,30	7,88
50	0,29	0,39	0,50	0,66	3,94	4,86	5,80	7,06
100	0,29	0,39	0,50	0,67	3,86	4,71	5,57	6,70
250	0,30	0,39	0,51	0,67	3,81	4,63	5,45	6,52
500	0,30	0,39	0,51	0,67	3,79	4,61	5,41	6,47
$\infty$	0,30	0,40	0,51	0,67	3,78	4,59	5,38	6,43

Source : Dickey et Fuller, 1981, p.1063, Tableau IV.

Table 2 – Distribution empirique de  $t_{\hat{c}}$  pour  $(c, \rho) = (0, 0)$  Modèle (2)

	Probabilité d'une valeur inférieure			
$n$	0,90	0,95	0,975	0,99
Modèle (2) : $t_{\hat{c}}$				
25	2,20	2,61	2,97	3,41
50	2,18	2,56	2,89	3,28
100	2,17	2,54	2,86	3,22
250	2,16	2,53	2,84	3,19
500	2,16	2,52	2,83	3,18
$\infty$	2,16	2,52	2,83	3,18

Source : Dickey et Fuller, 1981 , p.1062, Tableau I.

### 3.4. Test de Dickey-Fuller augmenté et test de Phillips-Perron

#### 3.4.1. motivation

Dans section 1 (voir marche aléatoire sans dérive), on a vu comment distinguer entre un processus  $ARMA(0,0)$  et un processus  $ARIMA(0,1,0)$  en utilisant le test de Dickey-Fuller standard basé sur l'estimation du modèle de régression

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, t = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

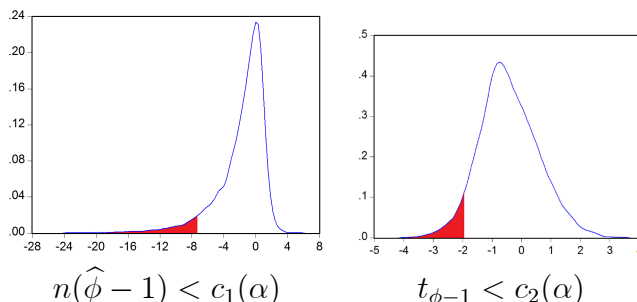
ou le modèle équivalent

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t, t = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

où  $\rho = \phi - 1$  et  $\{\varepsilon_t, t = 1, \dots, n\}$  est la série résiduelle. Le test de la présence ou absence d'une racine unitaire revient à tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : \phi = 1, \text{ (ou } \rho = 0 \text{)}$$

En pratique, l'hypothèse  $H_0 : \phi = 1$  est testé contre l'hypothèse alternative ( $\phi < 1$ ) par conséquent, on considère une région critique unilatérale à gauche de la forme  $n(\hat{\phi} - 1) < c_1(\alpha)$  et  $t_{\hat{\phi}-1} < c_2(\alpha)$  où  $\alpha$  est le niveau du test.



Dans le cas où les  $\varepsilon_t$  suivent une loi normale, les valeurs critiques exactes pour  $n(\hat{\phi} - 1)$  et  $t_{\hat{\phi}-1}$  ont été données par Fuller (1976, pp. 373 and 375) : première partie de table B.5 pour  $n(\hat{\phi} - 1)$  et première partie pour la table B.6 pour  $t_{\hat{\phi}-1}$  (voir section 1).

Supposons maintenant que notre processus est un processus  $ARMA(p, q)$  ou  $ARMA(p, 1, q)$  avec  $p \neq 0$  et/ou  $q \neq 0$ . La question à laquelle on va tenter de répondre est la suivante :

"Le test de Dickey-Fuller standard basé sur l'estimation du modèle (3.7) ou (3.8) peut-il nous permettre de distinguer entre un processus  $ARMA(p, q)$  ou  $ARMA(p, 1, q)$  avec  $p \neq 0$  et/ou  $q \neq 0$  ?

**Remarque importante :** La réponse qu'on va apporter à cette question est basé sur la simulation. Nous savons très bien que vous n'avez jamais fait de cours de simulation (ici, je m'adresse à mes étudiants de 2ème année master). Nous utilisons la simulation pour illustrer le cours (expliquer des concepts statistiques autrement que par des formules mathématiques et des concepts statistiques qui peuvent être mal compris).

Le programme de simulation sur le logiciel EVIEWS, consiste à simuler 1000 échantillons de taille 1000 d'un processus  $ARMA(p, q)$  ou  $ARMA(p, 1, q)$  avec  $p \neq 0$  et/ou  $q \neq 0$ . Pour chaque échantillon simulé on estime le modèle (3.8) et on calcule les deux statistiques de test :  $1000(\hat{\phi} - 1) = 1000\hat{\rho}$  et  $t_{\hat{\rho}}$ . Après l'exécution du programme on aura à notre disposition 1000 valeurs de  $1000\hat{\rho}$  et 1000 valeurs de  $t_{\hat{\rho}}$ ,

$$1000\widehat{\rho}_1, 1000\widehat{\rho}_2, \dots, 1000\widehat{\rho}_{1000}$$

$$t_{\widehat{\rho}_1}, t_{\widehat{\rho}_2}, \dots, t_{\widehat{\rho}_{1000}}$$

Pour  $i = 1$  à 1000, on vérifie si  $1000\widehat{\rho}_i \leq -8.1$  et si  $t_{\widehat{\rho}_i} \leq -1.95$ . C'est-à-dire on vérifie si  $H_0 : \rho = 0$  est rejetée. Les valeurs  $(-8.1)$  et  $(-1.95)$  sont les valeurs critiques au seuil  $\alpha = 5\%$ . Dans le programme deux vecteurs de taille 1000 nommés "Indcoef" et "Indtstat" sont créés pour stocker les résultats sous forme de 1 (si  $H_0$  est rejetée) ou 0 (si  $H_0$  est acceptée). La somme des "un" multipliée par 100 puis divisé par 1000 représente le pourcentage de rejet de  $H_0$ .

Le processus qu'on va simuler est un  $ARIMA(0, 1, \theta)$

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

, avec  $\theta \in \{-0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$

### Programme de simulation

```

create u 1001
for !i=1 to 1000
  genr u !i=nrnd'..... "(u_t ~> N(0, 1))"
  series x !i=0
  smpl 2 1000
  genr x !i=x !i(-1)+u !i-0.5*u !i(-1)'..... "(y_t = y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1})"
  equation eq.ls d(x !i) x !i(-1)'..... "(Estimation du modèle \Delta y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t, t = 1, \dots, n)"
  scalar t !i=eq.@tstat(1)'..... "(calcul de t_{\widehat{\rho}})"
  scalar c !i=eq.@coef(1)'..... "(calcul de \widehat{\rho})"
  smpl 1 1000
  next
  series Indtstat=0
  for !i=1 to 1000
    if t !i <= -1.95 then indtstat(!i)=1'..... "(vérifier si t_{\widehat{\rho}_i} \leq -1.95)"
    else indtstat(!i)=0
  endif
  next
  series indcoef=0
  for !i=1 to 1000
    if 1000*c !i <= -8.1 then indcoef(!i)=1'..... "(vérifier si 1000\widehat{\rho}_i \leq -8.1)"
    else indcoef(!i)=0
  endif
  next
  scalar PercentageRejectionNcoef=(@sum(indcoef)*100)/1000'..... "(pourcentage de re-
  jet de H0)"
  scalar PercentageRejectionTstat=(@sum(indtstat)*100)/1000'..... "(pourcentage de re-
  jet de H0)"
  show PercentageRejectionNcoef
  show PercentageRejectionTstat

```

### Fin du programme

Le tableau suivant résume les résultats obtenus.

Tableau 1

Vrai processus : $y_t = y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$		
Modèle estimé $\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$		
$\theta$	Pourcentage de rejet avec $n\hat{\rho}$	Pourcentage de rejet avec $t_{\hat{\rho}}$
-0.5	<b>48.2</b>	<b>46.9</b>
-0.4	<b>31.1</b>	<b>30.5</b>
-0.3	<b>23.9</b>	<b>23.7</b>
-0.2	<b>15.6</b>	<b>15.2</b>
-0.1	<b>8.6</b>	<b>8.6</b>
0	4.8	4.7
0.1	3.1	2.9
0.2	1.5	1.5
0.3	1.1	1.1
0.4	0.5	0.4
0.5	0.4	0.4

On note le pourcentage de rejet par  $\alpha'$ , le pourcentage de rejet nominal (théorique) 5% est noté par  $\alpha$ . Les résultats obtenus indiquent que

$$\begin{cases} \alpha' > \alpha & \text{Si } \theta < 0 \\ \alpha' \sim \alpha & \text{Si } \theta = 0 \\ \alpha' < \alpha & \text{Si } \theta > 0 \end{cases}$$

- Dans le premier cas, lorsque  $\theta < 0$ , les performances du test de Dickey-Fuller standard deviennent mauvaises en terme de niveau puisque malgré la présence d'une racine unitaire la probabilité de rejeter  $H_0 : \phi = 1$  est supérieur au niveau nominal  $\alpha$  du test. La détérioration du test est d'autant plus importante que la valeur de  $|\theta|$  est grande.
- Dans le second cas, lorsque  $\theta = 0$ , les performances du test de Dickey-Fuller standard en terme de niveau sont bonnes puisque, en présence d'une racine unitaire, la probabilité de rejeter  $H_0 : \phi = 1$  est approximativement égale au niveau nominal  $\alpha$  du test.
- Dans le troisième cas, lorsque  $\theta > 0$ , les performances du test de Dickey-Fuller standard en terme de niveau sont encore meilleur que dans le second cas car, en présence d'une racine unitaire, la probabilité de rejeter  $H_0 : \phi = 1$  est inférieur au niveau nominal  $\alpha$  du test.

**Conclusion :** Pour un processus  $ARMA(0,1,1)$  l'application du test de Dickey-Fuller standard peut améliorer ou détériorer les performances du test selon la valeur et le signe du paramètre de la partie moyenne mobile. Dans la pratique, en présence d'un échantillon de données réelles, le vrai processus générateur des données (en supposant bien sûr qu'il s'agisse d'un  $ARIMA(p,1,q)$ ) est inconnu. On ignore le nombre de paramètres autorégressifs ( $p$ ) et le nombre de paramètres moyennes mobiles ( $q$ ). Comme dans le cas qu'on vient d'étudier par simulation, selon les valeurs et le signe des paramètres ( $p+q$ ) l'application du test standard de Dickey-Fuller peut nous conduire au cas où ( $\alpha' > \alpha$ ) ou le cas ( $\alpha' < \alpha$ ). La particularité de l'estimation du modèle standard (3.8) sur la base d'un échantillon issu d'un processus  $ARIMA(p,1,q)$  avec  $p \neq 0$  et/ou  $q \neq 0$ , est que les résidus  $\{\varepsilon_t, t = 1, \dots, n\}$  sont autocorrélés.

Dans le cadre général d'un processus  $ARIMA(p,1,q)$  avec  $p \neq 0$  et/ou  $q \neq 0$ , on vient de voir que l'utilisation des tables statistiques de Dickey-Fuller construites sur la base des

distributions limites

$$n\widehat{\rho} \xrightarrow{L} \frac{0.5[W^2(1)-1]}{\int_0^1 W^2(r)dr} \quad \text{et} \quad t_{\widehat{\rho}} = \frac{\widehat{\rho}}{\widehat{\sigma}_{\rho}} \xrightarrow{L} \frac{0.5[W^2(1)-1]}{\left(\int_0^1 W^2(r)dr\right)^{0.5}}, \quad (3.9)$$

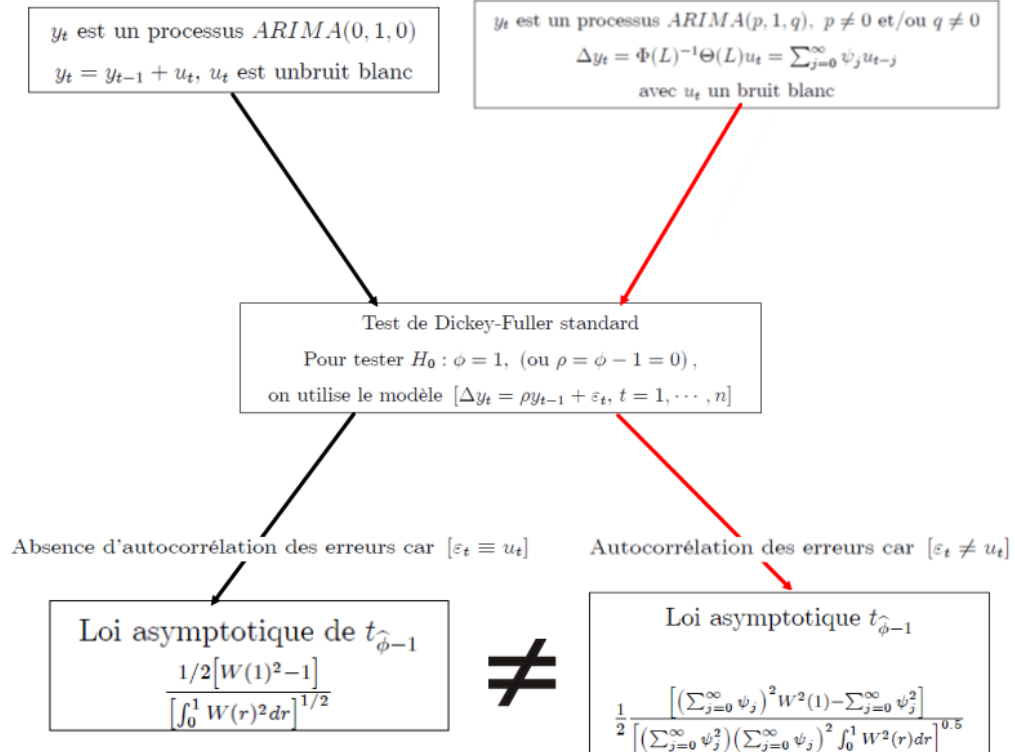
ne conviennent pas, pour tester l'hypothèse nulle de présence d'une racine unitaire sur la base du modèle de régression (3.7) ou (3.8). La raison est que si le modèle de régression (3.8) est estimé sur la base d'un échantillon issu d'un processus  $ARIMA(p, 1, q)$  quelconque alors les distributions limite des deux statistiques de test ne correspondent plus à celles données en (3.9). Les distributions limites deviennent,

$$n\widehat{\rho} \xrightarrow{L} \frac{1}{2} \frac{[\sigma_{\infty}^2 W^2(1) - \sigma_{\varepsilon}^2]}{\sigma_{\infty}^2 \int_0^1 W^2(r)dr} \quad \text{et} \quad t_{\widehat{\rho}} \xrightarrow{L} \frac{1}{2} \frac{[\sigma_{\infty}^2 W^2(1) - \sigma_{\varepsilon}^2]}{\sigma_{\varepsilon} (\sigma_{\infty}^2 \int_0^1 W^2(r)dr)^{0.5}} \quad (3.10)$$

où

- $\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_u^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$  (variance de court terme),
- $\sigma_{\infty}^2 = \sigma_u^2 \left( \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \right)^2$  (variance de long terme),
- Les  $\psi_j$  représentent les coefficients de l'écriture moyenne mobile de  $\Delta y_t$  :  $\Delta y_t = \Phi(L)^{-1} \Theta(L) u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ .

### Schema explicatif 1



### 3.4.2. Test de Dickey-Fuller augmenté

La solution du problème doit consister à trouver un autre modèle qui s'adapte à toutes les situations possibles (c'est-à-dire quels que soient les valeurs, les signes des paramètres  $(p+q)$ , en évitant de tomber dans le cas où  $(\alpha' > \alpha)$ ). Il existe dans la littérature de l'économétrie

des séries temporelles deux solutions. Une première solution a d'abord été proposée par Dickey et Fuller (1981). Dickey et Fuller (1981) ont proposé d'utiliser pour un processus  $ARIMA(p, 1, 0)$  le modèle de régression suivant

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (3.11)$$

Cette solution est viable si  $p$  est connu et  $q = 0$ , mais elle ne l'est pas pour un modèle  $ARIMA$  quelconque. De plus, si  $q \neq 0$ , alors  $\Delta y_t$  possède une représentation autorégressive infinie

$$\Delta y_t = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$$

Pour contourner cette difficulté Said et Dickey (1984) ont proposé d'utiliser le modèle de régression suivant,

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k_{\max}} \gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (3.12)$$

Le test basé sur ce dernier modèle est connu sous le nom du test de Dickey-Fuller augmenté d'ordre ( $k_{\max}$ ). Les statistiques de test et leurs distributions sont

$$\frac{n\hat{\rho}}{1-\sum \gamma_j} \xrightarrow{L} \frac{0.5[W^2(1)-1]}{\int_0^1 W^2(r)dr} \quad \text{et} \quad \frac{\hat{\rho}}{\hat{\sigma}_\rho} = t_{\hat{\rho}} \xrightarrow{L} \frac{0.5[W^2(1)-1]}{(\int_0^1 W^2(r)dr)^{0.5}}$$

1.  $k_{\max}$  est fonction de la taille d'échantillon  $n$ .

Pour implémenter le test de Dickey et Fuller augmenté, une règle empirique utile pour déterminer  $k_{\max}$ , suggérée par Schwert (1989), est donnée par

$$k_{\max} = \left\lceil 12 \left( \frac{n}{100} \right)^{1/4} \right\rceil \quad (3.13)$$

où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ . Ce choix permet à  $k_{\max}$  de croître avec la taille de l'échantillon.

**Attention** : Si vous utilisez cette règle pour un échantillon de taille 1000 engendré par un processus  $ARIMA(2,1,0)$  alors vous aurez  $k_{\max} = 21$ . Pour un échantillon de taille quelconque issue d'un processus  $ARIMA(2,1,0)$  le  $k_{\max}$  doit être égale à 2. La règle (3.13) nous renseigne sur l'ensemble des valeurs possibles de l'ordre  $k$ . C'est-à-dire, une fois la valeur  $k_{\max}$  calculée, on doit chercher la valeur de  $k$  dans l'ensemble  $\{0, 1, 2, \dots, k, \dots, k_{\max}\}$ .

2. La règle du choix de  $k$  est basée sur les critères d'information

Cette règle consiste à choisir  $k$  de façon à minimiser une fonction objective qui est de la forme :

$$IC_k = \log \hat{\sigma}_k^2 + (k + nr + 1) \frac{C_n}{n - k_{\max}} \quad (3.14)$$

avec  $\hat{\sigma}_k^2$  la variance des résidus et  $(nr)$  le nombre de régresseurs. Les critères d'information les plus fréquemment utilisés sont le critère d'information de Akaike [1969] (AIC) qui fixe  $C_n$  à 2, le critère d'information de Schwarz [1978] (BIC) qui fixe  $C_n$  à  $\log(n - k_{\max})$  et le critère d'information de Hannan et Quinn [1979] (HQ) qui fixe  $C_n$  à  $2n \log \left( \frac{\log n}{n} \right)$  où  $b > 2$  est une constante.

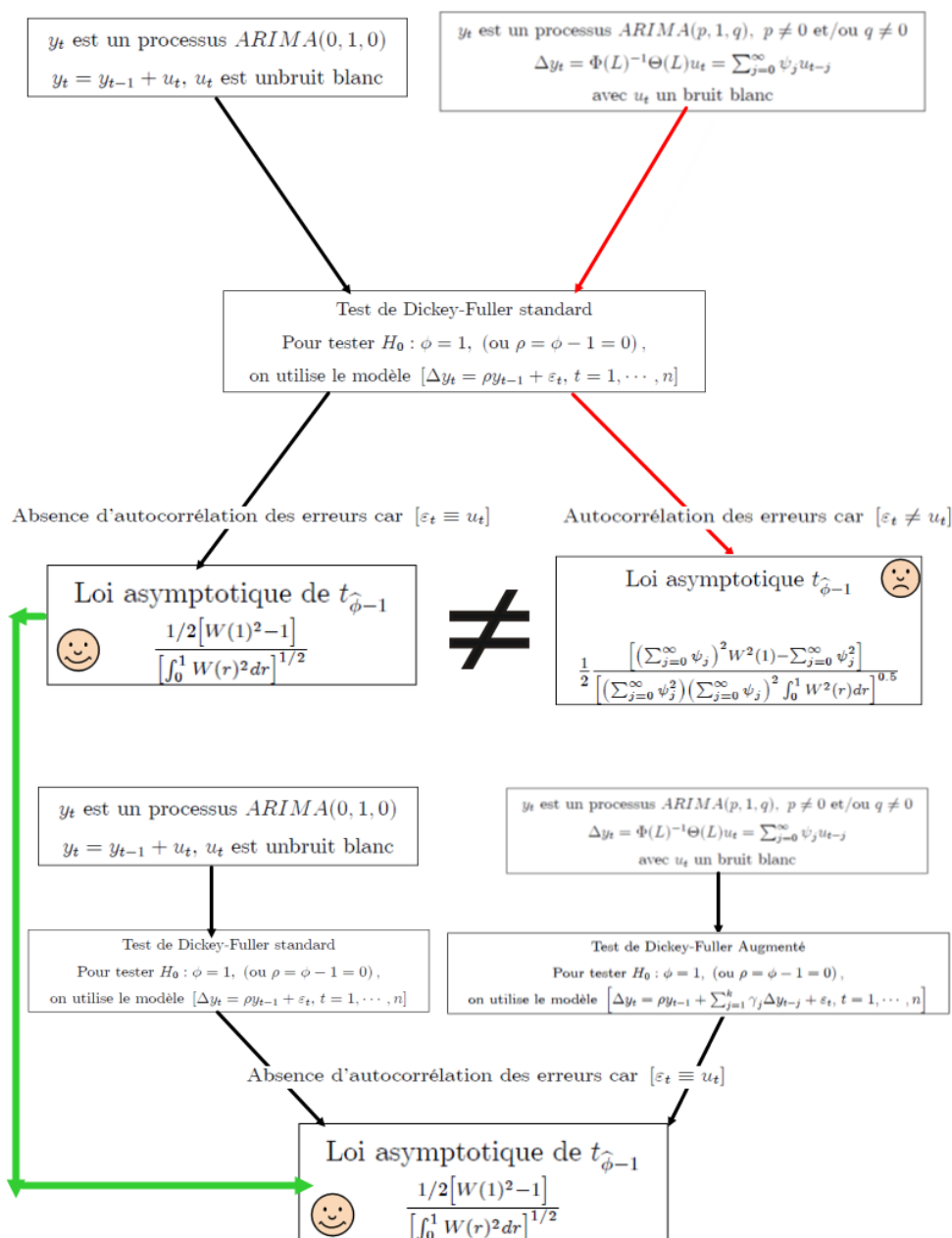
3. La règle séquentielle de choix de  $k$

Hall [1994] discute deux règles séquentielles. La première consiste à commencer avec un nombre de retards assez élevé  $k_{\max}$  et d'éliminer les derniers retards non significatifs un par un jusqu'à l'obtention d'un  $k$  significatif. La deuxième consiste à commencer avec un petit nombre de retards et de l'augmenter successivement jusqu'à l'obtention d'un retard non significatif.

#### 4. Remarque importante :

Les valeurs critiques du test ADF sont simulées sous hypothèse d'absence d'autocorrélation des résidus. Pour utiliser ces valeurs critiques, il faut que les résidus ne soient pas corrélés.  $k$  est donc le nombre de retards suffisant pour éliminer l'autocorrélation des résidus. En d'autres termes,  $k$  est le plus petit nombre de retards qui élimine l'autocorrélation des résidus. Le schéma suivant la solution proposée par Said et Dickey (1984).

Shéma explicatif 2 (Résumé)





### 3.4.3. Application : Suite de l'exemple de simulation précédent

On simule un échantillon de taille 1000 du processus  $ARIMA(0, 1, \theta)$

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1},$$

avec  $\theta \in \{-0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ . Le modèle qu'on va utiliser pour tester l'hypothèse  $H_0 : \rho = 0$  est le modèle  $\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k_{\max}=21} \gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$ . La valeur  $k_{\max} = 21$  a été calculée en utilisant la règle (3.13). Les résultats sont donnés par le tableau 2 ci-dessous

Tableau 2

Vrai processus : $y_t = y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$		
Modèle estimé $\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k_{\max}=21} \gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$		
$\theta$	Pourcentage de rejet avec $n\hat{\rho}$	Pourcentage de rejet avec $t_{\hat{\rho}}$
-0.5	6	4.9
-0.4	6	4.7
-0.3	6.2	4.7
-0.2	6.5	4.7
-0.1	6.3	4.7
0	6.4	5
0.1	6.5	4.9
0.2	6.5	4.7
0.3	6.4	4.8
0.4	6.4	4.8
0.5	6.4	5

Les résultats du tableau 2, indiquent que l'utilisation d'un modèle autoregressif augmenté (3.12) ramène le pourcentage de rejet de  $H_0$  lorsqu'elle est vraie à proportion acceptable (qui avoisine le taux de rejet nominal  $\alpha = 5\%$ ), en particulier pour la statistique  $t_{\hat{\rho}}$ .

### 3.4.3. Test de Phillips-Perron

Phillips-Perron (1987) proposent une autre solution au problème des autocorrélation des erreurs lorsque l'échantillon provient d'un processus  $ARIMA(p, 1, q)$ . Dans leurs solution, ils ne préconisent pas de changer le modèle de régression standard (3.8) mais de modifier les statistiques de test  $n\hat{\rho}$  et  $t_{\hat{\rho}}$  de telle sorte que les distributions limite des nouvelles statistiques convergent vers les mêmes lois que dans le test de Dickey-Fuller standard, voici comment il procèdent. Si le modèle de régression (1.2) est estimé sur la base d'un échantillon issu d'un processus  $ARIMA(p, 1, q)$  quelconque alors les distributions limite des deux statistiques de test sont données par

$$n\hat{\rho} \xrightarrow{L} \frac{1}{2} \frac{[\sigma_{\infty}^2 W^2(1) - \sigma_{\varepsilon}^2]}{\sigma_{\infty}^2 \int_0^1 W^2(r) dr} \quad \text{et} \quad t_{\hat{\rho}} \xrightarrow{L} \frac{1}{2} \frac{[\sigma_{\infty}^2 W^2(1) - \sigma_{\varepsilon}^2]}{\sigma_{\varepsilon} (\sigma_{\infty}^2 \int_0^1 W^2(r) dr)^{0.5}}$$

où

- $\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_u^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$  (variance de court terme),
- $\sigma_{\infty}^2 = \sigma_u^2 \left( \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \right)^2$  (variance de long terme),
- Les  $\psi_j$  représentent les coefficients de l'écriture moyenne mobile de  $\Delta y_t$  :  $\Delta y_t = \Phi(L)^{-1} \Theta(L) u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ .

On va expliquer l'idée de Phillips-Perron (1987) pour une seule statistique, le même raisonnement peut être fait pour l'autre statistique.

Comment modifier la statistique  $n\hat{\rho}$  pour que la nouvelle statistique converge vers  $\frac{0.5[W^2(1)-1]}{\int_0^1 W^2(r)dr}$  au lieu de  $\frac{1}{2} \frac{[\sigma_\infty^2 W^2(1) - \sigma_\varepsilon^2]}{\sigma_\infty^2 \int_0^1 W^2(r)dr}$  ?

D'abord on retranche  $\sigma_\infty^2$  et on ajoute  $\sigma_\infty^2$  dans  $[\sigma_\infty^2 W^2(1) - \sigma_\varepsilon^2]$ , on obtient ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{0.5 [\sigma_\infty^2 W^2(1) - \sigma_\varepsilon^2]}{\sigma_\infty^2 \int_0^1 W^2(r)dr} &= \frac{0.5 [\sigma_\infty^2 W^2(1) - \sigma_\infty^2 + \sigma_\infty^2 - \sigma_\varepsilon^2]}{\sigma_\infty^2 \int_0^1 W^2(r)dr} \\ &= \frac{0.5 [\sigma_\infty^2 (W^2(1) - 1) + \sigma_\infty^2 - \sigma_\varepsilon^2]}{\sigma_\infty^2 \int_0^1 W^2(r)dr} \\ &= \underbrace{\frac{0.5 [W^2(1) - 1]}{\int_0^1 W^2(r)dr}}_{\text{Distribution de Dicky-Fuller}} + \frac{0.5 [\sigma_\infty^2 - \sigma_\varepsilon^2]}{\sigma_\infty^2 \int_0^1 W^2(r)dr}. \end{aligned}$$

La première partie de cette dernière décomposition n'est rien d'autre que la distribution standard de Dickey-Fuller. L'idée de Phillips-Perron consiste à estimer la deuxième partie

$$\frac{0.5 [\sigma_\infty^2 - \sigma_\varepsilon^2]}{\sigma_\infty^2 \int_0^1 W^2(r)dr}$$

et d'utiliser la nouvelle statistique

$$Z_\rho = n\hat{\rho} - \text{l'estimateur de } \left( \frac{0.5 [\sigma_\infty^2 - \sigma_\varepsilon^2]}{\sigma_\infty^2 \int_0^1 W^2(r)dr} \right)$$

Ils proposent d'estimer  $\frac{0.5[\sigma_\infty^2 - \sigma_\varepsilon^2]}{\sigma_\infty^2 \int_0^1 W^2(r)dr}$  comme suit :

– La variance de court terme,  $\sigma_\varepsilon^2$ , est estimée par

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2.$$

– La variance de long terme,  $\sigma_\infty^2$ , est estimée par :

$$\hat{\sigma}_\infty^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2 + 2 \sum_{i=1}^l \left( 1 - \frac{i}{l+1} \right) \frac{1}{n} \sum_{t=i+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i}$$

$l$  est le nombre de retards,  $\left( 1 - \frac{i}{l+1} \right)$  est appelé noyau de Bartlett. Cet estimateur est appelé estimateur de Newey-West. Le choix de ( $l$ ) se fait par l'une des deux méthodes de sélections proposée par EVIEWS (Selection automatique par la méthode de Newey-West ou la méthode d'Andrews). Vous pouvez aussi le choisir vous-même, arbitrairement.

– Finalement,  $\sigma_\infty^2 \int_0^1 W^2(r)dr$  est estimé par  $\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2$ .

Avec ces estimateurs, la statistique modifiée de Phillips-Perron, notée par  $Z_\rho$  est :

$$Z_\rho = n\hat{\rho} - \frac{0.5 [\hat{\sigma}_\infty^2 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2]}{\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2} \quad (3.15)$$

Concernant la statistique  $t_{\hat{\rho}}$ , elle converge vers la distribution

$$\begin{aligned}
t_{\hat{\rho}} &\xrightarrow{L} \frac{1}{2} \frac{[\sigma_{\infty}^2 W^2(1) - \sigma_{\varepsilon}^2]}{\sigma_{\varepsilon} \left( \sigma_{\infty}^2 \int_0^1 W^2(r) dr \right)^{0.5}} \\
t_{\hat{\rho}} &\xrightarrow{L} \frac{1}{2} \frac{[\sigma_{\infty}^2 W^2(1) - \sigma_{\infty}^2 + \sigma_{\infty}^2 - \sigma_{\varepsilon}^2]}{\sigma_{\varepsilon} \left( \sigma_{\infty}^2 \int_0^1 W^2(r) dr \right)^{0.5}} \\
t_{\hat{\rho}} &\xrightarrow{L} \frac{1}{2} \frac{[\sigma_{\infty}^2 W^2(1) - \sigma_{\infty}^2]}{\sigma_{\varepsilon} \left( \sigma_{\infty}^2 \int_0^1 W^2(r) dr \right)^{0.5}} + \frac{1}{2} \frac{[\sigma_{\infty}^2 - \sigma_{\varepsilon}^2]}{\sigma_{\varepsilon} \left( \sigma_{\infty}^2 \int_0^1 W^2(r) dr \right)^{0.5}} \\
t_{\hat{\rho}} &\xrightarrow{L} \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_{\varepsilon}} \underbrace{\frac{[W^2(1) - 1]}{\left( \int_0^1 W^2(r) dr \right)^{0.5}}}_{\text{Distribution de Dickey-Fuller}} + \frac{1}{2} \frac{[\sigma_{\infty}^2 - \sigma_{\varepsilon}^2]}{\sigma_{\varepsilon} \left( \sigma_{\infty}^2 \int_0^1 W^2(r) dr \right)^{0.5}}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne, finalement, comme statistique modifiée de Phillips-Perron

$$Z_t = \frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}}{\hat{\sigma}_{\infty}} t_{\hat{\rho}} - \frac{0.5 (\hat{\sigma}_{\infty}^2 - \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2)}{\hat{\sigma}_{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 \right)^{0.5}} \xrightarrow{L} \frac{0.5 (W^2(1) - 1)}{\left( \int_0^1 W^2(r) dr \right)^{0.5}} \quad (3.16)$$

### 3.4.3. Application : Suite de l'exemple de simulation précédent

Pour examiner les performances du test PP en terme de niveau, on simule un échantillon de taille 1000 du processus  $ARIMA(0, 1, \theta)$

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1},$$

avec  $\theta \in \{-0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ . Le modèle qu'on va utiliser pour tester l'hypothèse  $H_0 : \rho = 0$  est le modèle  $\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$ , et la statistique du test est celle de Phillips-Perron (PP)

Tableau 3

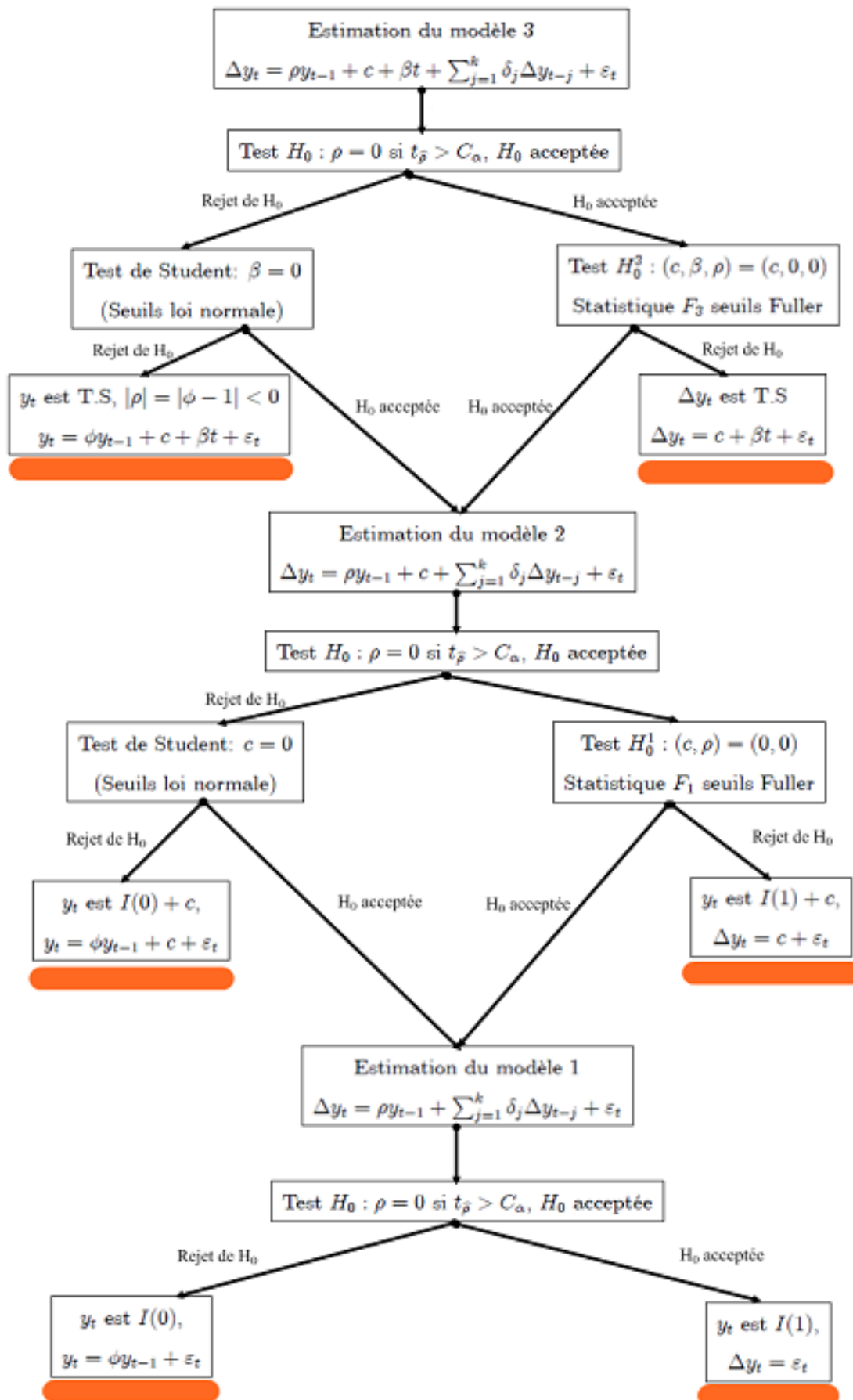
Vrai processus : $y_t = y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$	
Modèle estimé $\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$	
$\theta$	Pourcentage de rejet avec $t_{\hat{\rho}}$ modifiée $Z_t$ de PP
-0.5	<b>19.5</b>
-0.4	<b>13</b>
-0.3	<b>9.5</b>
-0.2	<b>6.6</b>
-0.1	<b>5.7</b>
0	5.2
0.1	4.9
0.2	4.8
0.3	4.5
0.4	4.6
0.5	4.5

Si on compare les performances en terme de niveau, du test de Phillips-Perron (test PP) et celui de Dickey-Fuller augmenté (test ADF), on voit que le test ADF l'emporte sur le test PP (je vous laisse examiner les résultats pour comprendre pourquoi).

**Remarque** : La comparaison des tests PP et ADF n'a pas été faite en terme de puissance.

### Une stratégie de Tests

On vient de voir comment le problème des autocorrélation des erreurs à été contourné dans le cadre du modèle sans constante ni tendance (3.4). Les mêmes solutions peuvent être préconisées pour le modèle avec constante (3.5) et le modèle avec constante et tendance (3.6). Néanmoins, en supposant qu'un processus stochastique est engendré par l'un de ces trois modèles (on ignorant lequel), en testant l'hypothèse nulle  $H_0 : \phi = 1$  on ne peut pas affirmer l'existence d'une racine unitaire sur la base d'un seul modèle. On ne peut pas non plus distinguer un processus  $TS$  et  $DS$  sur la base d'un seul modèle. Pour "**espérer**" arriver à une conclusion correcte il faut utiliser la stratégie de tests de Dickey-Fuller qui combine le test d'hypothèse nulle simple  $H_0 : \phi = 1$  et les tests d'hypothèse jointes  $H_{01}$ ,  $H_{02}$  et  $H_{03}$ . La stratégie de tests de Dickey Fuller permettant de tester la non stationnarité conditionnellement à la spécification du modèle utilisé est décrite par le diagramme suivant,



**Programme evIEWS pour la mise en oeuvre de la Stratégie de Tests de Dickey Fuller simple (k=0)**

```

genr x=lmoneystock
Genr tend=@trend(1)
'-----
'Estimation du modèle 3
'-----
genr dx=x-x(-1)
equation eq3.ls d(x) c tend x(-1)
'-----
'Calcul de F03
'-----
scalar scr3=@ssr
scalar ddl3=@regobs-@ncoef
'-----
'Estimation du modèle 3 avec deux contraintes
'-----
equation eq3c2.ls d(x) c
scalar scr3c2=@ssr
scalar F03=((scr3c2-scr3)/2)/(scr3/ddl3)
'-----
'Calcul de F02
'-----
scalar scr3c3=@sumsq(dx)
scalar F02=((scr3c3-scr3)/3)/(scr3/ddl3)
'-----
equation eq3c1.ls d(x) c tend
'-----
'Estimation du modèle 2
'-----
equation eq2.ls d(x) c x(-1)
'-----
'Calcul de F01
'-----
scalar scr2=@ssr
scalar ddl2=@regobs-@ncoef
scalar scr2c2=@sumsq(dx)
scalar F01=((scr2c2-scr2)/2)/(scr2/ddl2)
'-----
'Estimation du modèle 1
'-----
equation eq1.ls d(x) x(-1)
'Fin du programme

```

-----

**3.5. Exemples d'application de la stratégie de test de Dickey-Fuller et de la méthodologie de Box et Jenkins**

Tous les exemples traités ont été réalisés sur les données de Nelson et Plosser (1982) (voir la fin du document)

### 3.5.1. Exemple 1 : Série "log(nomgnp)"

Les prévisions peuvent être calculées pour les modèles validés  $ARIMA(p, 1, q)$  en utilisant le même principe développé pour les modèles  $ARMA(p, q)$ . A titre d'illustration, nous considérons la série "log(nomgnp)". Nous rappelons d'abord les résultats de l'application de la stratégie de tests deDickey-Fuller sur cette série.

#### 1. Analyse de la série "log(NOMGNP)"

Test de Dickey-Fuller simple ( $DF \equiv ADF(0)$ )			
Hypothèse nulle	Valeurs calculée de la Stat.	Valeurs tabulées	Décisions
$H_0 : \phi = 1, (M3)$	-1.16	-3.45	$H_0$ acceptée
$H_{03} : (\phi, \beta, c) = (1, 0, c), (M3)$	$F3 = 1.699$	6.49	$H_{03}$ acceptée
$H_0 : \phi = 1, (\text{Modèle } (2))$	$F1 = 1.159$	-2.89	$H_0$ acceptée
$H_0 : (\phi, c) = (1, 0), (M2)$	21.59	4.71	$H_0$ rejetée
Conclusion :	$(\log(NOMGNP_t)) \rightsquigarrow I(1)+\text{constante}$		
Test de Dickey-Fuller augmenté ( $ADF(1)$ )			
Hypothèse nulle	Valeurs calculée de la Stat.	Valeurs tabulées	Décisions
$H_0 : \phi = 1, (M3)$	-2.075870	-3.45	$H_0$ acceptée
$H_{03} : (\phi, \beta, c) = (1, 0, c), (M3)$	$F3 = 2.558338$	6.49	$H_{03}$ acceptée
$H_0 : \phi = 1, (\text{Modèle } (2))$	0.445984	-2.89	$H_0$ acceptée
$H_0 : (\phi, c) = (1, 0), (M2)$	$F1 = 34.89$	4.71	$H_0$ rejetée
Conclusion :	$(\log(NOMGNP_t)) \rightsquigarrow I(1)+\text{constante}$		

La série  $\log(\text{nomgnp})$  est un processus DS pour la rendre stationnaire il convient de la différenciée. Soit  $x_t$  la nouvelle variable stationnaire obtenue en différenciant  $\log(\text{nomgnp})$ ,

$$x_t = \log(\text{nomgnp}_t) - \log(\text{nomgnp}_{t-1})$$

Le graphe ci-dessous représente le corrélogramme de la série  $x_t$

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.451	0.451	16.656	0.000
		2 0.106	-0.121	17.594	0.000
		3 -0.093	-0.117	18.321	0.000
		4 -0.200	-0.122	21.718	0.000
		5 -0.043	0.140	21.878	0.001
		6 0.158	0.160	24.077	0.001
		7 0.146	-0.045	25.984	0.001
		8 0.085	-0.044	26.365	0.001
		9 -0.069	-0.095	26.800	0.002
		10 -0.099	0.048	27.715	0.002
		11 -0.024	0.049	27.769	0.004
		12 -0.171	-0.306	30.556	0.002
		13 -0.230	-0.161	35.673	0.001
		14 -0.186	-0.092	39.062	0.000
		15 -0.238	-0.134	44.740	0.000
		16 -0.058	0.057	45.086	0.000
		17 0.144	0.094	47.213	0.000
		18 0.096	-0.033	48.173	0.000
		19 0.015	-0.010	48.198	0.000
		20 -0.155	-0.116	50.787	0.000
		21 -0.121	0.138	52.403	0.000
		22 -0.029	-0.013	52.498	0.000
		23 0.038	-0.054	52.661	0.000

Parmi les modèles  $ARMA(p, q)$  qui peuvent décrire la dynamique du processus  $x_t$  nous avons retenu le modèle  $ARMA(1, 0)$  avec constante. L'estimation de ce modèle sur la base

d'échantillon disponible est donné par le tableau suivant :

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.063747	0.019620	3.249062	0.0017
AR(1)	0.445128	0.070730	6.293356	0.0000
SIGMASQ	0.006057	0.000641	9.450835	0.0000
R-squared	0.203060	Mean dependent var		0.063719
Adjusted R-squared	0.182088	S.D. dependent var		0.087737
S.E. of regression	0.079348	Akaike info criterion		-2.189915
Sum squared resid	0.478505	Schwarz criterion		-2.099936
Log likelihood	89.50163	Hannan-Quinn criter.		-2.153866
F-statistic	9.682386	Durbin-Watson stat		1.880365
Prob(F-statistic)	0.000180			
Inverted AR Roots	.45			

$$d(\log(\text{nomgnp}_t)) = \underbrace{0.063747}_{t_c = 3.249} + \underbrace{0.445128}_{t_\phi = 6.2933} * d(\log(\text{nomgnp}_t)) + \hat{\varepsilon}_t$$

$val.tab = 1.96 \quad val.tab = 1.96$

Le tableau des estimations ci-dessus indique que le coefficient estimé satisfait la condition de stationnarité, il indique aussi que les hypothèses

$$H_0 : c = 0 \quad \text{et} \quad H_0 : \phi = 0$$

sont rejetées.  $H_0 : c = 0$ . Le corrélogramme de la série résiduelle du modèle estimé indique aussi que l'hypothèse nulle

$$H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(20) = 0$$

est acceptée. Par conséquent le modèle est validé (adéquat).

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.060	0.060	0.2913		
2	-0.040	-0.044	0.4239	0.515	
3	-0.088	-0.083	1.0739	0.585	
4	-0.224	-0.219	5.3725	0.146	
5	-0.041	-0.028	5.5181	0.238	
6	0.181	0.168	8.3843	0.136	
7	0.095	0.049	9.1889	0.163	
8	0.055	0.007	9.4622	0.221	
9	0.085	-0.083	10.1117	0.257	
10	-0.097	-0.010	10.992	0.276	
11	0.115	0.180	12.230	0.270	
12	-0.115	-0.164	13.485	0.263	
13	-0.148	-0.229	15.546	0.213	
14	-0.018	-0.043	15.576	0.273	
15	-0.222	-0.177	20.504	0.115	
16	-0.034	-0.064	20.624	0.149	
17	0.195	0.081	24.551	0.078	
18	0.055	0.008	24.873	0.098	
19	0.056	0.045	25.204	0.119	
20	-0.174	-0.157	28.471	0.075	
21	-0.079	0.075	29.166	0.085	
22	0.002	0.043	29.167	0.110	
23	-0.009	-0.050	29.176	0.140	
24	0.088	-0.025	30.086	0.147	
25	0.180	0.072	33.943	0.086	
26	0.002	0.100	33.943	0.109	
27	-0.066	-0.092	34.480	0.123	
28	0.057	-0.033	34.887	0.142	
29	-0.051	-0.009	35.387	0.159	
30	-0.016	-0.000	36.400	0.100	

Nous allons, maintenant, faire des prévisions avec ce modèle. Tout d'abord, nous rapellons les trois dernières observations de la série  $d(\log(\text{nomgnp}))$ ,  $\log(\text{nomgnp})$  et la série résiduelle.

$$\begin{array}{l} d(\log(\text{nomgnp})) \quad 0.053591 \quad 0.059944 \quad 0.074897 \\ \log(\text{nomgnp}) \quad 0.074897 \quad 15.37521 \quad 15.45011 \\ \hat{\varepsilon}_t \quad -0.011838 \quad 0.000718 \quad 0.012843 \end{array}$$

Si on pose  $y_t = \log(\text{nomgnp}_t)$ , le modèle "ARMA(1, 0) + constante" estimé s'écrit comme suit

$$(1 - L)y_t = c + \phi(1 - L)y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.1)$$



Le modèle est équivalent à

$$y_t = c + (1 + \phi)y_{t-1} - \phi y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (1.2)$$

Estimation ponctuelles de  $y_{1989}$ ,  $y_{1990}$  et  $y_{1991}$  : Du modèle (2) on peut déduire que

$$\begin{aligned} \hat{y}_{1988}(1) &= E(y_{1989}/I_{1988}) \\ &= \hat{c} + (1 + \hat{\phi})y_{1988} - \hat{\phi}y_{1987} + 0 \\ &= 0.063747 + (1 + 0.445128)(15.4501) - (0.445128)(15.3752) \\ &= 15.547 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{1988}(2) &= E(y_{1990}/I_{1988}) \\ &= \hat{c} + (1 + \hat{\phi})y_{1989} - \hat{\phi}y_{1988} + 0 \\ &= 0.063747 + (1 + 0.445128)(15.547) - (0.445128)(15.4501) \\ &= 15.654 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{1988}(3) &= E(y_{1991}/I_{1988}) \\ &= \hat{c} + (1 + \hat{\phi})y_{1990} - \hat{\phi}y_{1989} + 0 \\ &= 0.063747 + (1 + 0.445128)(15.654) - (0.445128)(15.547) \\ &= 15.765 \end{aligned}$$

Calcul des erreurs de prévisions  $e_{1988}(1)$ ,  $e_{1988}(2)$  et  $e_{1988}(3)$  et de leur variances (1<sup>er</sup> méthode).

On pose  $T = 1988$

$$\begin{aligned} e_T(1) &= y_{T+1} - \hat{y}_T(1) \\ &= [(1 + \phi)y_T - \phi y_{T-1} + \varepsilon_{T+1}] - [(1 + \phi)y_T - \phi y_{T-1}] \\ &= \varepsilon_{T+1} \\ \text{Var}(e_T(1)) &= \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_T(2) &= y_{T+2} - \hat{y}_T(2) \\ &= [(1 + \phi)y_{T+1} - \phi y_T + \varepsilon_{T+2}] - [(1 + \phi)\hat{y}_T(1) - \phi y_T] \\ &= (1 + \phi)e_T(1) + \varepsilon_{T+2} \\ &= (1 + \phi)\varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2} \\ \text{Var}(e_T(2)) &= ((1 + \phi)^2 + 1)\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_T(3) &= y_{T+3} - \hat{y}_T(3) \\ &= [(1 + \phi)y_{T+2} - \phi y_{T+1} + \varepsilon_{T+3}] - [(1 + \phi)\hat{y}_T(2) - \phi\hat{y}_T(1)] \\ &= (1 + \phi)e_T(2) - \phi e_T(1) + \varepsilon_{T+3} \\ &= (1 + \phi)^2 \varepsilon_{T+1} + (1 + \phi)\varepsilon_{T+2} - \phi\varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+3} \\ \text{Var}(e_T(3)) &= ((1 + \phi)^4 - 2\phi(1 + \phi)^2 + (1 + \phi)^2 + \phi^2 + 1)\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

On a  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = 0.006057$  et  $\widehat{\phi} = 0.445128$ , par conséquent on a

$$\begin{aligned}\widehat{Var}(e_T(1)) &= 0.006057 \\ \widehat{Var}(e_T(2)) &= 1.8706 \times 10^{-2} \\ \widehat{Var}(e_T(3)) &= 3.5062 \times 10^{-2}\end{aligned}$$

Calcul des erreurs de prévisions  $e_{1988}(1)$ ,  $e_{1988}(2)$  et  $e_{1988}(3)$  et de leur variances (2<sup>ième</sup> méthode). L'obtention des intervalles de prévision nécessite de mettre le modèle sous forme  $MA(\infty)$ , sans se soucier de ce que les séries employées divergent. La séquence  $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots\}$  est déterminée par l'identité

$$[\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots + \psi_j L^j + \dots] [1 - (1 + \phi)L + \phi L^2] = 1$$

Par identification des coefficients de puissances identiques de  $(L)$  des deux cotés de l'équation, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\psi_1 &= (1 + \phi), \\ \psi_2 &= (1 + \phi)^2 - \phi,\end{aligned}$$

d'ou, en utilisant le résultat suivant (voir polycopié méthodologie de Box et Jenkins)

$$\widehat{Var}(e_T(h)) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{h-1}^2)$$

on obtient,

$$\begin{aligned}\widehat{Var}(e_T(1)) &= \sigma_\varepsilon^2 \\ \widehat{Var}(e_T(2)) &= \sigma_\varepsilon^2(1 + \psi_1^2) = \sigma_\varepsilon^2(1 + (1 + \phi)^2) \\ \widehat{Var}(e_T(3)) &= \sigma_\varepsilon^2(1 + \psi_1^2 + \psi_2^2) = \sigma_\varepsilon^2(1 + (1 + \phi)^2 + ((1 + \phi)^2 - \phi)^2)\end{aligned}$$

Les intervalles de prévisions de 95% pour  $h = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}\widehat{y}_{1988}(1) \pm 1.96 [\widehat{\sigma}(e_{1988}(1))] \\ 15.547 \pm 1.96 \left[ \sqrt{0.006057} \right] \\ 15.547 \pm 0.15254\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{y}_{1988}(2) \pm 1.96 [\widehat{\sigma}(e_{1988}(2))] \\ 15.654 \pm 1.96 \left[ \sqrt{1.8706 \times 10^{-2}} \right] \\ 15.654 \pm 0.26807\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{y}_{1988}(3) \pm 1.96 [\widehat{\sigma}(e_{1988}(3))] \\ 15.765 \pm 1.96 \left[ \sqrt{3.5062 \times 10^{-2}} \right] \\ 15.765 \pm 0.36701\end{aligned}$$

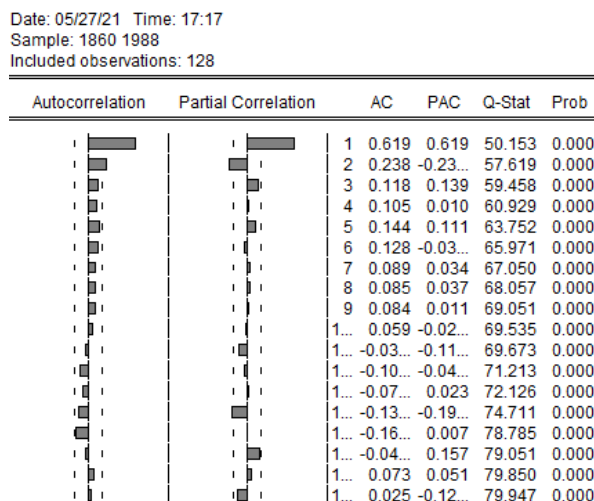
### 3.5.2. Exemple 2 : Série "Log(CPI) Test de racine unitaire (test de Dickey-Fuller)

Test de Dickey-Fuller simple ( $DF \equiv ADF(0)$ )			
Hypothèse nulle	Valeurs calculée de la Stat.	Valeurs tabulées	Décisions
$H_0 : \phi = 1, (M3)$	0.500862	-3.45	$H_0$ acceptée
$H_{03} : (\phi, \beta, c) = (1, 0, c), (M3)$	$F3 = 5.680464$	6.49	$H_{03}$ acceptée
$H_0 : \phi = 1, (\text{Modèle } (2))$	3.086649	-2.89	$H_0$ acceptée
$H_0 : (\phi, c) = (1, 0), (M2)$	$F1 = 13.2620$	4.71	$H_0$ rejetée
Conclusion :	$(\log(CPI_t)) \rightsquigarrow I(1) + \text{constante}$		
Test de Dickey-Fuller augmenté ( $ADF(2)$ )			
Hypothèse nulle	Valeurs calculée de la Stat.	Valeurs tabulées	Décisions
$H_0 : \phi = 1, (M3)$	-0.584374	-3.45	$H_0$ acceptée
$H_{03} : (\phi, \beta, c) = (1, 0, c), (M3)$	$F3 = 3.335849$	6.49	$H_{03}$ acceptée
$H_0 : \phi = 1, (\text{Modèle } (2))$	1.754898	-2.89	$H_0$ acceptée
$H_0 : (\phi, c) = (1, 0), (M2)$	$F1 = 65.33$	4.71	$H_0$ rejetée
Conclusion :	$(\log(CPI_t)) \rightsquigarrow I(1) + \text{constante}$		

La série  $\log(\text{lpci})$  est un processus DS pour la rendre stationnaire il convient de la différencier. Soit  $x_t$  la nouvelle variable stationnaire obtenue en différenciant  $\log(\text{lpci})$ ,

$$x_t = \log(\text{lpci}_t) - \log(\text{lpci}_{t-1})$$

Le graphe ci-dessous représente le corrélogramme de la série  $x_t$



Parmi les modèles  $ARMA(p, q)$  qui peuvent décrire la dynamique du processus  $x_t$  nous avons retenu le modèle  $ARMA(1, 1)$  avec constante. L'estimation de ce modèle sur la base

d'échantillon disponible est donné par le tableau suivant :

Dependent Variable: D(LCPI)  
 Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)  
 Date: 05/27/21 Time: 17:23  
 Sample: 1861 1988  
 Included observations: 128  
 Convergence achieved after 56 iterations  
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.416616	0.090435	4.606799	0.0000
MA(1)	0.444966	0.130560	3.408139	0.0009
SIGMASQ	0.001901	0.000151	12.59880	0.0000

R-squared	0.410694	Mean dependent var	0.020115
Adjusted R-squared	0.401265	S.D. dependent var	0.057024
S.E. of regression	0.044124	Akaike info criterion	-3.374589
Sum squared resid	0.243368	Schwarz criterion	-3.307744
Log likelihood	218.9737	Hannan-Quinn criter.	-3.347430
Durbin-Watson stat	2.023836		

Inverted AR Roots	.42
Inverted MA Roots	-.44

$$d(\log(cpi_t)) = \underbrace{0.44166}_{t_\phi = 4.606} * d(\log(cpi_t)) + \widehat{\varepsilon}_t + \underbrace{0.4449}_{t_\theta = 3.408} * \widehat{\varepsilon}_{t-1}$$

*val.tab = 1.96* *val.tab = 1.96*

Le tableau des estimations ci-dessus indique que le coefficient estimé satisfait la condition de stationnarité, il indique aussi que les hypothèses

$$H_0 : \phi = 0 \quad \text{et} \quad H_0 : \theta = 0$$

sont rejetées.  $H_0 : c = 0$ . Le corrélogramme de la série résiduelle du modèle estimé indique aussi que l'hypothèse nulle

$$H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(20) = 0$$

est acceptée. Par conséquent le modèle est validé (adéquat).

Date: 05/27/21 Time: 17:43  
 Sample: 1860 1988  
 Included observations: 128  
 Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA terms

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.4166	-0.04...	-0.04...	0.3207	
2	0.4166	-0.02...	-0.02...	0.4140	
3	0.023	0.020	0.4834	0.487	
4	-0.03	-0.02...	0.6026	0.740	
5	0.099	0.098	1.9340	0.586	
6	0.044	0.053	2.2038	0.698	
7	-0.01	0.002	2.2176	0.818	
8	0.038	0.036	2.4230	0.877	
9	0.021	0.028	2.4855	0.928	
10	0.061	0.060	3.0091	0.934	
11	0.004	0.001	3.0115	0.964	
12	-0.13	-0.13...	5.7805	0.833	
13	0.078	0.055	6.6155	0.829	
14	-0.04	-0.05...	6.9669	0.860	
15	-0.15	-0.17...	10.629	0.642	
16	-0.00	-0.04...	10.632	0.715	
17	0.135	0.165	13.360	0.574	
18	0.001	0.015	13.360	0.646	
19	-0.04	-0.05...	13.630	0.693	
20	-0.04	-0.05...	14.002	0.729	
21	-0.07	-0.04...	14.938	0.727	
22	0.087	0.077	16.124	0.709	
23	0.003	-0.00...	16.125	0.763	
24	0.055	0.070	16.618	0.784	
25	-0.06	-0.02...	17.351	0.792	

Nous allons, maintenant, faire des prévisions avec ce modèle. Tout d'abord, nous rappelons les trois dernières observations de la série  $d(\log(\text{nomgnp}))$ ,  $\log(\text{lcp})$  et la série résiduelle.

$t$	$lcp_i$	$résidus$
1984	5,740791	0,027954
1985	5.775783	0.004944
1986	5.794200	0.001639
1987	5.830046	0.027444
1988	5.870586	0.013394

Si on pose  $y_t = \log(cpi)$ , le modèle "ARMA(1, 1)" estimé s'écrira comme suit

$$(1 - L)y_t = \phi(1 - L)y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \quad (2.1)$$

Le modèle est équivalent à

$$y_t = (1 + \phi)y_{t-1} - \phi y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \quad (2.2)$$

Estimation ponctuelles de  $y_{1989}$ ,  $y_{1990}$  et  $y_{1991}$  : Du modèle (2) on peut déduire que

$$\begin{aligned} \hat{y}_{1988}(1) &= E(y_{1989}/I_{1988}) \\ &= (1 + \hat{\phi})y_{1988} - \hat{\phi}y_{1987} + 0 + \theta\hat{\varepsilon}_{1988} \\ &= (1 + 0.44166)(5.870586) - (0.44166)(5.830046) + 0 + (0.4449)(0.013394) \\ &= 5.8944 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{1988}(2) &= E(y_{1990}/I_{1988}) \\ &= (1 + \hat{\phi})\hat{y}_{1988}(1) - \hat{\phi}y_{1988} + 0 + 0 \\ &= (1 + 0.44166)(5.8944) - (0.44166)(5.870586) \\ &= 5.9049 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{1988}(3) &= E(y_{1991}/I_{1988}) \\ &= (1 + \hat{\phi})\hat{y}_{1988}(2) - \hat{\phi}\hat{y}_{1988}(1) + 0 + 0 \\ &= (1 + 0.44166)(5.9049) - (0.44166)(5.8944) \\ &= 5.9095 \end{aligned}$$

Calcul des erreurs de prévisions  $e_{1988}(1)$ ,  $e_{1988}(2)$  et  $e_{1988}(3)$  et de leur variances (1<sup>er</sup> méthode).

On pose  $T = 1988$

$$\begin{aligned} e_T(1) &= y_{T+1} - \hat{y}_T(1) \\ &= [(1 + \phi)y_T - \phi y_{T-1} + \varepsilon_{T+1} + \theta\varepsilon_T] - [(1 + \phi)y_T - \phi y_{T-1} + \theta\varepsilon_T] \\ &= \varepsilon_{T+1} \\ \text{Var}(e_T(1)) &= \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_T(2) &= y_{T+2} - \hat{y}_T(2) \\ &= [(1 + \phi)y_{T+1} - \phi y_T + \varepsilon_{T+2} + \theta\varepsilon_{T+1}] - [(1 + \phi)\hat{y}_T(1) - \phi y_T] \\ &= (1 + \phi)e_T(1) + \varepsilon_{T+2} + \theta\varepsilon_{T+1} \\ &= (1 + \phi + \theta)\varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2} \\ \text{Var}(e_T(2)) &= ((1 + \phi + \theta)^2 + 1)\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_T(3) &= y_{T+3} - \widehat{y}_T(3) \\
&= [(1 + \phi) y_{T+2} - \phi y_{T+1} + \varepsilon_{T+3} + \theta \varepsilon_{T+2}] - [(1 + \phi) \widehat{y}_T(2) - \phi \widehat{y}_T(1)] \\
&= (1 + \phi) e_T(2) - \phi e_T(1) + \varepsilon_{T+3} + \theta \varepsilon_{T+2} \\
&= [(1 + \phi) (1 + \phi + \theta) - \phi] \varepsilon_{T+1} + (1 + \phi + \theta) \varepsilon_{T+2} + \varepsilon_{T+3} \\
\text{Var}(e_T(3)) &= [((1 + \phi) (1 + \phi + \theta) - \phi)^2 + (1 + \phi + \theta)^2 + 1] \sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}$$

$[(1 + \phi) (1 + \phi + \theta) - \phi]^2 + (1 + \phi + \theta)^2 + 1] \sigma_\varepsilon^2$   
Calcul des erreurs de prévisions  $e_{1988}(1)$ ,  $e_{1988}(2)$  et  $e_{1988}(3)$  et de leur variances (2<sup>ième</sup> méthode).  
L'obtention des intervalles de prévision nécessite de mettre le modèle sous forme  $MA(\infty)$ , sans se soucier de ce que les séries employées divergent. La séquence  $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots\}$  est déterminée par l'identité

$$[\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots + \psi_j L^j + \dots] [1 - (1 + \phi)L + \phi L^2] = 1 + \theta L$$

Par identification des coefficients de puissances identiques de ( $L$ ) des deux cotés de l'équation, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= (1 + \phi + \theta) = (1 + 0.44166 + 0.4449) \\
&= 1.8866
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2 &= (1 + \phi) (1 + \phi + \theta) - \phi \\
&= 2.2781
\end{aligned}$$

On sait que

$$\widehat{\sigma}(e_T(h)) = \sigma_\varepsilon \sqrt{1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{h-1}^2},$$

d'où

$$\widehat{\sigma}(e_T(1)) = 0.001901$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}(e_T(2)) &= 0.001901 \sqrt{1 + (1.8866)^2} \\
&= 4.0591 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}(e_T(3)) &= 0.001901 \sqrt{1 + (1.8866)^2 + (2.2781)^2} \\
&= 5.9356 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

Les intervalles de prévisions de 95% pour  $h = 1, 2, 3$

$$1.96 (5.9356 \times 10^{-3}) = 1.1634 \times 10^{-2} = 7.9558 \times 10^{-3} = 3.7260 \times 10^{-3}$$

$$\begin{aligned}
&\widehat{y}_{1988}(1) \pm 1.96 [\widehat{\sigma}(e_{1988}(1))] \\
&5.8944 \pm 1.96 (0.001901) \\
&5.8944 \pm 3.7260 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \hat{y}_{1988}(2) \pm 1.96 [\hat{\sigma}(e_{1988}(2))] \\ & 5.9049 \pm 1.96 (4.0591 \times 10^{-3}) \\ & 5.9049 \pm 7.9558 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \hat{y}_{1988}(3) \pm 1.96 [\hat{\sigma}(e_{1988}(3))] \\ & 5.9095 \pm 1.96 (5.9356 \times 10^{-3}) \\ & 5.9095 \pm 1.1634 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

### 3.6. Exercices (Chapitre 3)

#### Exercice n°1

L'objectif de cet exercice est double. Vu les lacunes que possèdent les étudiants en théories des tests (notamment sur les notions des performances des tests en terme de niveau et de puissance), cet exercice permettra d'expliquer aux étudiants pourquoi le test de Dickey et Fuller simple à de bonnes performances lorsqu'il est appliqué à un processus  $ARMA(0, 1, 0)$  et de mauvaises performances lorsque le test standard est appliqué à un processus  $ARIMA(p, 1, q)$  avec  $p \neq 0$  et/ou  $q \neq 0$ .

En utilisant le programme ci-dessous, simuler 1000 marches aléatoires de tailles  $T = 1000$

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \rightsquigarrow n.i.i.d(0, 1)$$

Processus générateur de données (P.G.D)

Pour chaque marche aléatoire simulée, appliquer le test de Dickey Fuller simple. La procédure du test de Dickey-Fuller simple est définie par les étapes suivantes :

- Estimer le modèle de regression

$$x_t = \phi x_{t-1} + u_t$$

- Calculer les deux statistiques suivantes

$$Z_\rho = 999 \times (\hat{\phi} - 1) \text{ ou } Z_t = \frac{\hat{\phi} - 1}{\sigma_{\hat{\phi}}}$$

- Comparer les valeurs calculées des deux statistiques aux valeurs tabulées (au seuils  $\alpha = 1\%$ ,  $5\%$  et  $10\%$ ), pour effectuer le test d'hypothèses,

$$H_0 : \phi = 1 (\rho = \phi - 1 = 0) \text{ contre } H_0 : \phi < 1 (\rho < 0).$$

1. Quelle est le pourcentage d'acceptation et de rejet dans chacun des trois cas ?
2. Refaire le même travail en modifiant le processus générateur de données par l'un des processus suivant :

$$x_t = 1.5x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$x_t = 0.5x_{t-1} + 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$$

$$x_t = 3 + x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$x_t = 3 + y_t \text{ et } y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

```

create u 1000
vector (1000) coef
vector (1000) tstat
for !j=1 to 1000
  genr eps !j=nrnd
  series x !j=0
  smpl 2 1000
  genr x !j=x !j(-1)+eps !j
  equation eq.ls d(x !j) x !j(-1)
  scalar t !j=eq.@tstat(1)
  scalar c !j=eq.@coef(1)

```

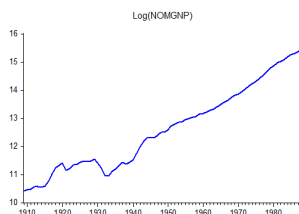


```

coef(!j)=999*(c!j)
tstat(!j)=t!j
smpl 1 1000
next
range 1 1000
smpl 1 1000
mtos(coef,coef1)
mtos(tstat,tstat1)
group gg coef1 tstat1
gg.distplot(s) kernel(k=u, x)
series Indstat=0
for !j=1 to 1000
if t!j<=-1.95 then indstat(!j)=0
else indstat(!j)=1
endif
next
series indcoef=0
for !j=1 to 1000
if 999*c!j<=-8.1 then indcoef(!j)=0
else indcoef(!j)=1
endif
next
show indstat indcoef

```

**Exercice n°2** (Application de la stratégie de tests de Dickey-Fuller à la série "Nominal GNP" La figure 1 représente l'évolution de la série  $\{y_t = \text{Log}(\text{nomgnp}_t), t = 1, \dots, 80\}$  sur la période 1909-1988.



Pour découvrir le type de non-stationnarité (DS ou TS) on applique la stratégie des tests de racine unitaire (Dickey-Fuller standard), en utilisant les résultats suivants :

$$- \Delta x_t = \underbrace{0.005101 * x_{t-1}} + \hat{\varepsilon}_{1,t}, \text{ avec } \sum (\hat{\varepsilon}_{1,t})^2 = 0.591427$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t_\rho = 6.594603 \\ v.tab(5\%) = -1.95 \end{array}}$$

$$- \Delta x_t = \underbrace{0.007893 * x_{t-1}} + \underbrace{-0.035594} + \hat{\varepsilon}_{2,t}, \text{ avec } \sum (\hat{\varepsilon}_{2,t})^2 = 0.59012$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t_\rho = 1.159 \\ v.tab(5\%) = -2.89 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t_c = -0.412 \\ v.tab(5\%) = 2.86 \end{array}}$$

$$- \text{modèle 2 contraint } (c, \rho) = (0, 0) : \Delta x_t = \hat{\varepsilon}_{2c,t}, \text{ avec } \sum (\hat{\varepsilon}_{2c,t})^2 = 0.921176, F_{01}(5\%) = 4.71, F_{01}(obs) = 21.59$$

$$- \Delta x_t = \underbrace{-0.272 * x_{t-1}} + \underbrace{-5.3853} + \underbrace{0.00305 * t} + \hat{\varepsilon}_{3,t},$$

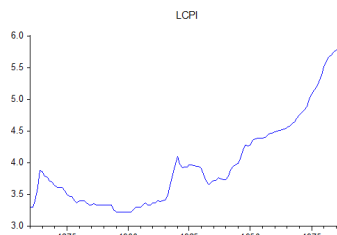
$$\boxed{\begin{array}{l} t_\rho = -4.596 \\ v.tab(5\%) = -3.45 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t_c = -1.436 \\ v.tab(5\%) = 3.42 \\ (c, \rho, \beta) = (0, 0, 0) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t_\beta = 1.466 \\ v.tab(5\%) = 3.14 \\ (c, \rho, \beta) = (0, 0, 0) \end{array}}$$

- modèle 3 contraint  $(c, \rho, \beta) = (c, 0, 0) : (1 - L)x_t = 0.063719 + \widehat{\varepsilon}_{3c2,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{3c2,t})^2 = 0.600428$ ,  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{3,t})^2 = 0.5747$ ,  $F_{03}(5\%) = 6.49$ ,  $F_{03}(obs) = 1.699$ .
- modèle 3 contraint  $(c, \rho, \beta) = (0, 0, 0) : (1 - L)x_t = \widehat{\varepsilon}_{3c3,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{3c3,t})^2 = 0.921176$ ,  $F_{02}(5\%) = 4.88$ ,  $F_{02}(obs) = 15.27$ .

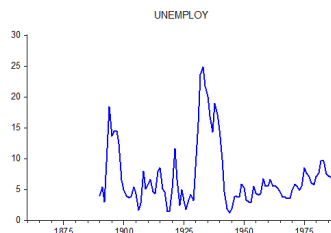
**Exercice n°3** (Application de la stratégie de tests de Dickey-Fuller à la série "CPI" La figure 1 représente l'évolution de la série  $\{y_t = \text{Log}(CPI_t), t = 1, \dots, 129\}$  sur la période 1860-1988.



Pour découvrir le type de non-stationnarité (DS ou TS) on applique la stratégie des tests de racine unitaire (Dickey-Fuller standard), en utilisant les résultats suivants :

- $\Delta x_t = \underbrace{0.005554 * x_{t-1}}_{\substack{t_\rho = 4.5134 \\ v.tab(5\%) = -1.95}} + \widehat{\varepsilon}_{1,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{1,t})^2 = 0.400521$
- $\Delta x_t = \underbrace{0.021731 * x_{t-1}}_{\substack{t_\rho = 3.0866 \\ v.tab(5\%) = -2.89}} + \underbrace{-0.066245}_{\substack{t_c = -2.3324 \\ v.tab(5\%) = 2.86}} + \widehat{\varepsilon}_{2,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{2,t})^2 = 0.383942$
- modèle 2 contraint  $(c, \rho) = (0, 0) : \Delta x_t = \widehat{\varepsilon}_{2c,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{2c,t})^2 = 0.464765$ ,  $F_{01}(5\%) = 4.71$ ,  $F_{01}(obs) = 13.26$ .
- $\Delta x_t = \underbrace{-0.00666 * x_{t-1}}_{\substack{t_\rho = 0.5008 \\ v.tab(5\%) = -3.45}} + \underbrace{-0.646}_{\substack{t_c = -1.48 \\ v.tab(5\%) = 3.42 \\ (c, \rho, \beta) = (0, 0, 0)}} + \underbrace{0.000333 * t}_{\substack{t_\beta = 1.33 \\ v.tab(5\%) = 3.14 \\ (c, \rho, \beta) = (0, 0, 0)}} + \widehat{\varepsilon}_{3,t}$
- modèle 3 contraint  $(c, \rho, \beta) = (c, 0, 0) : (1 - L)x_t = 0.020115 + \widehat{\varepsilon}_{3c2,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{3c2,t})^2 = 0.412974$ ,  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{3,t})^2 = 0.378567$ ,  $F_{03}(5\%) = 6.49$ ,  $F_{03}(obs) = 5.6804$
- modèle 3 contraint  $(c, \rho, \beta) = (0, 0, 0) : (1 - L)x_t = \widehat{\varepsilon}_{3c3,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{3c3,t})^2 = 0.464765$ ,  $F_{02}(5\%) = 4.88$ ,  $F_{02}(obs) = 9.4873$ .

**Exercice n°4** (Application de la stratégie de tests de Dickey-Fuller à la série "UNEMPLOY" La figure 1 représente l'évolution de la série  $\{y_t = \text{Log}(UNEMPLOY_t), t = 1, \dots, 99\}$  sur la période 1890-1988.

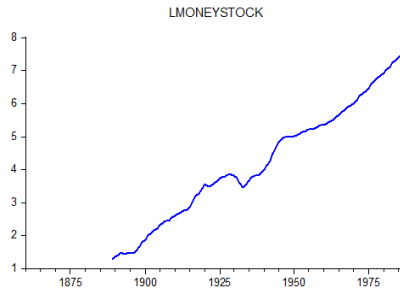


Pour découvrir le type de non-stationnarité (DS ou TS) on applique la stratégie des tests de racine unitaire (Dickey-Fuller standard), en utilisant les résultats suivants :

- $\Delta x_t = \underbrace{-0.026992 * x_{t-1}}_{\substack{t_\rho = -1.1219 \\ v.tab(5\%) = -1.95}} + \widehat{\varepsilon}_{1,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{1,t})^2 = ??$

- $\Delta x_t = \underbrace{-0.2445 * x_{t-1}}_{\substack{t_\rho = -3.6712 \\ v.tab(5\%) = -2.89}} + \underbrace{0.4316}_{\substack{t_c = 3.475 \\ v.tab(5\%) = 2.86}} + \widehat{\varepsilon}_{2,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{2,t})^2 = 16.9878$
- modèle 2 contraint  $(c, \rho) = (0, 0)$  :  $\Delta x_t = \widehat{\varepsilon}_{2c,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{2c,t})^2 = 19.37384$ ,  $F_{01}(5\%) = 4.71$ ,  $F_{01}(obs) = 6.741$
- $\Delta x_t = \underbrace{-0.244693 * x_{t-1}}_{\substack{t_\rho = -3.6548 \\ v.tab(5\%) = -3.45}} + \underbrace{1.04587}_{\substack{t_c = -0.3568 \\ v.tab(5\%) = 3.42 \\ (c, \rho, \beta) = (0, 0, 0)}} + \underbrace{-0.000317 * t}_{\substack{t_\beta = -0.20978 \\ v.tab(5\%) = 3.14 \\ (c, \rho, \beta) = (0, 0, 0)}} + \widehat{\varepsilon}_{3,t}$
- modèle 3 contraint  $(c, \rho, \beta) = (c, 0, 0)$  :  $(1 - L)x_t = 0.00325 + \widehat{\varepsilon}_{3c2,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{3c2,t})^2 = 19.3728$ ,  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{3,t})^2 = 16.979$ ,  $F_{03}(5\%) = 6.49$ ,  $F_{03}(obs) = 4.69$
- modèle 3 contraint  $(c, \rho, \beta) = (0, 0, 0)$  :  $(1 - L)x_t = \widehat{\varepsilon}_{3c3,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{3c3,t})^2 = 19.3738$ ,  $F_{02}(5\%) = 4.88$ ,  $F_{02}(obs) = 4.46$ .

**Exercice n°5** (Application de la stratégie de tests de Dickey-Fuller à la série "log(moneystock)")  
La figure 1 représente l'évolution de la série  $\{y_t = \text{Log}(\text{moneystock}_t), t = 1, \dots, 100\}$  sur la période 1889-1988.



Pour découvrir le type de non-stationnarité (DS ou TS) on applique la stratégie des tests de racine unitaire (Dickey-Fuller standard), en utilisant les résultats suivants :

- $\Delta x_t = \underbrace{0.013320 * x_{t-1}}_{\substack{t_\rho = 9.98 \\ v.tab(5\%) = -1.95}} + \widehat{\varepsilon}_{1,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{1,t})^2 = ??$
- $\Delta x_t = \underbrace{0.00305 * x_{t-1}}_{\substack{t_\rho = 0.9154 \\ v.tab(5\%) = -2.89}} + \underbrace{0.0508}_{\substack{t_c = 3.3273 \\ v.tab(5\%) = 2.86}} + \widehat{\varepsilon}_{2,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{2,t})^2 = 0.325252$
- modèle 2 contraint  $(c, \rho) = (0, 0)$  :  $\Delta x_t = \widehat{\varepsilon}_{2c,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{2c,t})^2 = 0.73071$ ,  $F_{01}(5\%) = 4.71$ ,  $F_{01}(obs) = 60.459$
- $\Delta x_t = \underbrace{-0.027 * x_{t-1}}_{\substack{t_\rho = -0.945 \\ v.tab(5\%) = -3.45}} + \underbrace{-3.412}_{\substack{t_c = -1.0434 \\ v.tab(5\%) = 3.42 \\ (c, \rho, \beta) = (0, 0, 0)}} + \underbrace{0.00185 * t}_{\substack{t_\beta = 1.059 \\ v.tab(5\%) = 3.14 \\ (c, \rho, \beta) = (0, 0, 0)}} + \widehat{\varepsilon}_{3,t}$
- modèle 3 contraint  $(c, \rho, \beta) = (c, 0, 0)$  :  $(1 - L)x_t = 0.063774 + \widehat{\varepsilon}_{3c2,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{3c2,t})^2 = 0.328062$ ,  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{3,t})^2 = 0.321496$ ,  $F_{03}(5\%) = 6.49$ ,  $F_{03}(obs) = 0.9803$ .
- modèle 3 contraint  $(c, \rho, \beta) = (0, 0, 0)$  :  $(1 - L)x_t = \widehat{\varepsilon}_{3c3,t}$ , avec  $\sum (\widehat{\varepsilon}_{3c3,t})^2 = 0.73071$ ,  $F_{02}(5\%) = 4.88$ ,  $F_{02}(obs) = 40.73$ .

	BONDYIELD	CPI	EMPLOY	GNPDEFLATOR	INDPROD	MONEYSTOCK	NOMGNP	NOMWAGES	REALGNP	REALWAGES	STOCKPRICES	UNEMPLOY	VELOCITY
1860	NA	27.00000	NA	NA	0.900000	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
1861	NA	27.00000	NA	NA	0.900000	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
1862	NA	30.00000	NA	NA	0.900000	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
1863	NA	37.00000	NA	NA	1.000000	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
1864	NA	48.00000	NA	NA	1.000000	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
1865	NA	47.00000	NA	NA	1.000000	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
1866	NA	44.00000	NA	NA	1.200000	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
1867	NA	43.00000	NA	NA	1.300000	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
1868	NA	41.00000	NA	NA	1.300000	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
1869	NA	40.00000	NA	NA	1.400000	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	5.610000
1870	NA	38.00000	NA	NA	1.500000	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	5.160000
1871	NA	37.00000	NA	NA	1.500000	NA	NA	NA	NA	4.690000	NA	NA	4.630000
1872	NA	37.00000	NA	NA	1.800000	NA	NA	NA	NA	5.030000	NA	NA	5.050000
1873	NA	37.00000	NA	NA	1.800000	NA	NA	NA	NA	4.800000	NA	NA	4.950000
1874	NA	35.00000	NA	NA	1.700000	NA	NA	NA	NA	4.570000	NA	NA	4.710000
1875	NA	33.00000	NA	NA	1.700000	NA	NA	NA	NA	4.450000	NA	NA	4.460000
1876	NA	32.00000	NA	NA	1.700000	NA	NA	NA	NA	4.060000	NA	NA	4.650000
1877	NA	32.00000	NA	NA	1.800000	NA	NA	NA	NA	3.140000	NA	NA	4.890000
1878	NA	30.00000	NA	NA	1.900000	NA	NA	NA	NA	3.380000	NA	NA	5.060000
1879	NA	29.00000	NA	NA	2.200000	NA	NA	NA	NA	4.120000	NA	NA	5.100000
1880	NA	30.00000	NA	NA	2.500000	NA	NA	NA	NA	5.210000	NA	NA	5.310000
1881	NA	30.00000	NA	NA	2.800000	NA	NA	NA	NA	5.250000	NA	NA	4.410000
1882	NA	30.00000	NA	NA	3.000000	NA	NA	NA	NA	3.900000	NA	NA	4.410000
1883	NA	29.00000	NA	NA	3.000000	NA	NA	NA	NA	3.630000	NA	NA	4.010000
1884	NA	28.00000	NA	NA	2.900000	NA	NA	NA	NA	1.730000	NA	NA	3.890000
1885	NA	28.00000	NA	NA	2.900000	NA	NA	NA	NA	4.600000	NA	NA	3.530000
1886	NA	28.80000	NA	NA	3.500000	NA	NA	NA	NA	3.360000	NA	NA	3.380000
1887	NA	28.00000	NA	NA	3.700000	NA	NA	NA	NA	5.530000	NA	NA	3.290000
1888	NA	28.00000	NA	NA	3.800000	NA	NA	NA	NA	3.200000	NA	NA	3.150000
1889	NA	28.00000	NA	25.90000	4.100000	3.600000	NA	NA	NA	3.320000	NA	NA	3.080000
1890	NA	28.00000	22577.00	25.40000	4.400000	3.920000	NA	NA	NA	5.270000	4.000000	NA	3.000000
1891	NA	28.00000	22792.00	24.90000	4.500000	4.080000	NA	NA	NA	5.030000	5.400000	NA	2.960000
1892	NA	28.00000	23932.00	24.00000	4.800000	4.430000	NA	NA	NA	5.550000	3.000000	NA	2.860000
1893	NA	28.00000	22321.00	24.50000	4.300000	4.260000	NA	NA	NA	4.780000	1.700000	NA	2.930000
1894	NA	26.00000	21102.00	23.00000	4.200000	4.280000	NA	NA	NA	4.390000	1.840000	NA	2.570000
1895	NA	25.00000	22824.00	22.70000	4.900000	4.430000	NA	NA	NA	4.530000	13.70000	NA	2.730000
1896	NA	25.00000	23129.00	22.10000	4.600000	4.350000	NA	NA	NA	4.230000	14.40000	NA	2.630000
1897	NA	25.00000	23604.00	22.20000	4.900000	4.640000	NA	NA	NA	4.450000	14.50000	NA	2.720000
1898	NA	25.00000	24746.00	22.90000	5.600000	5.260000	NA	NA	NA	5.050000	12.40000	NA	2.510000
1899	NA	25.00000	26911.00	23.60000	6.100000	6.090000	NA	NA	NA	6.290000	6.500000	NA	2.490000
1900	3.300	25.00000	27909.00	24.70000	6.300000	6.600000	NA	487.0000	NA	19.48000	6.150000	5.000000	2.490000
1901	3.250	25.00000	28922.00	24.50000	7.100000	7.480000	NA	511.0000	NA	20.44000	7.840000	4.000000	2.440000
1902	3.300	26.00000	29800.00	25.40000	7.900000	8.170000	NA	537.0000	NA	20.65000	8.420000	3.700000	2.310000
1903	3.450	27.00000	30506.00	25.70000	8.100000	8.680000	NA	548.0000	NA	20.30000	7.210000	3.900000	2.290000
1904	3.600	27.00000	30771.00	26.00000	7.800000	9.240000	NA	538.0000	NA	19.93000	7.050000	5.400000	2.140000
1905	3.500	27.00000	31976.00	26.50000	9.200000	10.24000	NA	561.0000	NA	20.78000	8.990000	4.300000	2.130000
1906	3.550	28.00000	33749.00	27.20000	9.800000	11.08000	NA	577.0000	NA	20.61000	9.640000	1.700000	2.280000
1907	3.800	29.00000	34371.00	28.30000	10.00000	11.60000	NA	598.0000	NA	20.62000	7.840000	2.800000	2.280000
1908	3.950	28.00000	33246.00	28.10000	8.500000	11.44000	NA	548.0000	NA	19.57000	7.780000	8.000000	2.060000
1909	3.770	28.00000	35172.00	29.10000	10.00000	12.68000	33400	599.0000	116.8000	21.39000	9.710000	5.100000	2.190000
1910	3.800	29.00000	35762.00	29.90000	10.60000	13.34000	35300	651.0000	120.1000	22.45000	9.350000	5.900000	2.170000
1911	3.900	29.00000	36179.00	29.70000	10.20000	14.12000	35800	632.0000	123.2000	21.79000	9.240000	6.700000	2.070000
1912	3.900	30.00000	37433.00	30.90000	11.70000	15.13000	39400	651.0000	130.2000	21.70000	9.530000	4.600000	2.120000
1913	4.000	29.70000	38298.00	31.10000	12.50000	15.73000	39600	689.0000	131.4000	23.20000	8.510000	4.300000	2.150000
1914	4.100	30.10000	37559.00	31.40000	11.70000	16.39000	38600	696.0000	125.6000	23.12000	8.080000	7.900000	1.880000
1915	4.150	30.40000	37511.00	32.50000	13.60000	17.59000	40000	661.0000	124.5000	21.74000	8.310000	8.500000	1.870000
1916	4.050	32.70000	39364.00	36.50000	16.10000	20.85000	48300	751.0000	134.3000	22.97000	9.470000	5.100000	2.090000
1917	4.050	38.40000	40084.00	45.00000	16.20000	24.37000	60400	683.0000	135.2000	22.99000	8.500000	4.600000	2.150000
1918	4.750	45.10000	42712.00	52.60000	16.00000	26.73000	76400	1107.000	151.8000	24.55000	7.540000	1.400000	2.470000

1919 4.750	51.80000	41938.00	53.80000	14.10000	31.01000	84000 1293.000	146.4000	24.96000	8.780000	1.400000	2.250000
1920 5.100	60.00000	40799.00	61.30000	14.80000	34.80000	91500 1532.000	140.0000	25.53000	7.980000	5.200000	2.180000
1921 5.170	53.60000	38568.00	52.20000	11.40000	32.85000	69600 1396.000	127.8000	26.04000	6.860000	11.70000	1.880000
1922 4.710	50.20000	41134.00	49.50000	14.50000	33.72000	74100 1283.000	148.0000	25.56000	8.410000	6.700000	1.870000
1923 4.610	51.10000	43955.00	50.70000	17.30000	36.60000	85100 1403.000	165.9000	27.46000	8.570000	2.400000	2.020000
1924 4.660	51.20000	43607.00	50.10000	16.20000	38.58000	84700 1427.000	165.5000	27.87000	9.050000	5.000000	1.950000
1925 4.500	52.50000	45082.00	51.00000	17.80000	42.05000	93100 1450.000	179.4000	27.62000	11.15000	3.200000	1.870000
1926 4.400	53.00000	46464.00	51.20000	18.90000	43.68000	97000 1476.000	190.0000	27.85000	12.59000	1.800000	1.940000
1927 4.300	52.00000	46496.00	50.00000	18.90000	44.73000	94900 1502.000	189.8000	28.88000	15.34000	3.300000	1.860000
1928 4.050	51.30000	46774.00	50.40000	19.60000	46.42000	97000 1534.000	190.9000	29.90000	19.95000	4.200000	1.830000
1929 4.420	51.30000	47890.00	50.60000	21.80000	46.60000	104400 1543.000	203.6000	30.08000	26.02000	3.200000	1.940000
1930 4.400	50.00000	45740.00	49.30000	18.10000	45.73000	91900 1488.000	183.5000	29.76000	21.03000	8.700000	1.680000
1931 4.100	45.60000	42660.00	44.80000	15.00000	42.69000	77000 1369.000	169.3000	30.02000	13.66000	15.90000	1.450000
1932 4.700	40.90000	39190.00	40.20000	11.70000	36.05000	59100 1150.000	144.2000	28.12000	6.930000	23.60000	1.240000
1933 4.150	38.80000	39010.00	39.30000	13.80000	32.22000	56700 1086.000	141.5000	27.99000	8.960000	24.90000	1.320000
1934 3.990	40.10000	41150.00	42.20000	15.10000	34.36000	66300 1153.000	154.3000	28.75000	9.840000	21.70000	1.470000
1935 3.500	41.10000	42530.00	42.60000	17.40000	39.07000	73600 1216.000	169.5000	29.59000	10.60000	20.10000	1.490000
1936 3.200	41.50000	44710.00	42.70000	20.60000	43.48000	84000 1287.000	193.0000	31.01000	15.47000	16.90000	1.570000
1937 3.080	43.00000	46620.00	44.50000	22.50000	45.68000	92200 1376.000	203.2000	32.00000	15.41000	14.30000	1.640000
1938 3.000	42.20000	44560.00	43.90000	17.80000	45.51000	86500 1296.000	192.9000	30.71000	11.49000	19.00000	1.510000
1939 2.750	41.60000	46120.00	43.20000	21.80000	49.27000	92500 1363.000	209.4000	32.76000	12.06000	17.20000	1.500000
1940 2.700	42.00000	48060.00	43.90000	25.50000	55.20000	101700 1432.000	227.2000	34.10000	11.02000	14.60000	1.480000
1941 2.650	44.10000	51970.00	47.20000	31.80000	62.51000	127200 1653.000	263.7000	37.48000	9.820000	9.900000	1.580000
1942 2.650	48.80000	57720.00	53.00000	36.60000	71.16000	162300 2023.000	297.8000	41.45000	8.670000	4.700000	1.820000
1943 2.650	51.80000	63490.00	56.80000	44.70000	89.91000	198900 2349.000	337.1000	45.35000	11.50000	1.900000	1.750000
1944 2.600	52.70000	65370.00	58.20000	48.30000	106.8000	220100 2517.000	361.3000	47.76000	12.47000	1.200000	1.610000
1945 2.550	53.90000	64260.00	59.70000	41.30000	126.6000	223400 2517.000	355.2000	46.70000	15.16000	1.900000	1.370000
1946 2.430	58.50000	58700.00	66.70000	35.20000	138.7000	222900 2517.000	312.6000	43.03000	17.08000	3.900000	1.160000
1947 2.500	56.90000	58630.00	74.60000	39.40000	146.0000	245300 2793.000	309.9000	41.75000	15.17000	3.900000	1.200000
1948 2.800	72.10000	59803.00	79.60000	41.00000	148.1000	270600 3038.000	323.7000	42.14000	15.53000	3.800000	1.330000
1949 2.740	71.40000	59266.00	79.10000	38.80000	147.5000	268600 3095.000	324.1000	43.35000	15.23000	5.900000	1.300000
1950 2.580	72.10000	60570.00	80.20000	44.90000	150.8000	295200 3302.000	355.3000	45.80000	18.40000	5.300000	1.410000
1951 2.670	77.80000	63062.00	85.60000	48.70000	156.4000	341200 3608.000	383.4000	46.38000	22.34000	3.300000	1.570000
1952 3.000	79.50000	63846.00	87.50000	50.60000	164.9000	360300 3832.000	395.1000	48.20000	24.50000	3.000000	1.560000
1953 3.150	80.10000	64726.00	88.30000	54.80000	171.2000	381300 4053.000	412.8000	50.60000	24.73000	2.900000	1.570000
1954 3.000	80.50000	63460.00	89.60000	51.80000	177.2000	382500 4123.000	407.0000	51.22000	29.69000	5.500000	1.510000
1955 3.040	80.20000	65220.00	90.90000	58.40000	183.7000	417200 4356.000	438.0000	54.31000	40.49000	4.400000	1.590000
1956 3.090	81.40000	66659.00	94.00000	51.00000	186.9000	440300 4589.000	446.1000	56.38000	46.62000	4.100000	1.660000
1957 3.680	84.30000	66871.00	97.50000	51.80000	191.8000	464100 4786.000	452.5000	56.77000	44.38000	4.300000	1.680000
1958 3.610	86.60000	65672.00	100.0000	57.80000	201.1000	469800 4946.000	447.3000	57.11000	46.24000	5.800000	1.610000
1959 4.100	87.30000	67182.00	101.6000	64.70000	210.1000	509300 5221.000	475.9000	59.81000	57.38000	5.500000	1.680000
1960 4.550	88.70000	68292.00	103.3000	66.20000	210.7000	529500 5352.000	487.7000	60.34000	55.85000	5.500000	1.720000
1961 4.220	89.60000	68318.00	104.6000	66.60000	221.2000	548200 5507.000	497.2000	61.46000	66.27000	5.700000	1.690000
1962 4.420	90.60000	69530.00	105.8000	72.10000	233.9000	589700 5730.000	529.8000	63.25000	62.38000	5.500000	1.710000
1963 4.160	91.70000	70500.00	107.2000	76.50000	249.1000	622200 5920.000	551.0000	64.56000	69.87000	5.700000	1.690000
1964 4.330	92.90000	72044.00	108.8000	81.80000	264.7000	668500 6196.000	581.0000	66.70000	81.37000	5.200000	1.710000
1965 4.350	94.50000	73811.00	110.9000	89.20000	285.9000	724400 6389.000	617.8000	67.61000	88.17000	4.500000	1.720000
1966 4.750	97.20000	76018.00	113.9000	98.00000	308.0000	792900 6643.000	658.1000	68.34000	85.26000	3.800000	1.760000
1967 4.950	100.0000	77818.00	117.6000	100.0000	331.8000	838000 6880.000	675.2000	68.80000	91.93000	3.800000	1.720000
1968 5.930	104.2000	79455.00	122.3000	105.8000	361.6000	916100 7347.000	706.6000	70.51000	98.70000	3.600000	1.720000
1969 6.540	109.8000	81408.00	128.2000	110.7000	385.2000	990700 7775.000	724.7000	70.81000	97.84000	3.500000	1.730000
1970 7.600	116.3000	81815.00	135.3000	106.7000	401.3000	1044900 8150.000	720.0000	70.08000	83.82000	4.900000	1.730000
1971 6.099	121.3482	81339.99	144.2828	108.2170	445.4427	1134700 8542.880	740.0369	70.39972	98.29000	5.900000	1.787459
1972 5.989	125.2433	83965.98	151.1070	118.6853	501.1345	1246800 9278.777	776.8779	74.08599	109.2000	5.600000	1.842168
1973 6.659	133.0336	86838.04	160.8559	128.3378	550.8199	1395300 9983.487	817.2630	75.04485	107.4300	4.900000	1.902620
1974 7.349	147.7152	88514.97	175.4791	126.4345	584.4155	1515500 10603.63	812.8552	71.78427	82.85000	5.600000	1.884575
1975 7.339	161.1984	87523.97	192.7021	115.2865	639.0140	1651300 11442.69	802.6398	70.98512	86.16000	8.500000	1.870220
1976 7.139	170.4868	90420.02	205.0506	125.8907	721.7681	1842100 12554.03	841.8634	73.63638	102.0100	7.700000	1.909018
1977 7.419	181.5729	93672.97	218.6990	135.9511	813.2158	2051200 13728.34	881.1466	75.60789	98.20000	7.100000	1.952900
1978 8.249	195.3556	97679.01	234.6221	144.7879	882.5869	2316300 14950.04	927.7861	76.52730	96.02000	6.100000	2.007856
1979 9.099	217.5279	100421.0	255.4197	150.4978	955.4816	2595300 16153.74	950.7782	74.26056	103.0100	5.800000	2.038943

# Bibliographie

- [1] Alan Pankratz, (1983), 'Forecasting with univariate Box-Jenkins models' John Wiley & Sons.
- [2] Aragon, Y., (2011), "Séries temporelles avec R", Méthodes et cas", Springer-Verlag, France tests. *Econometric Theory*, 19, 143-164.
- [3] Azencott, R. et Dacunha-Castelle, D.,(1984), "Séries d'observations irrégulières Modélisation et prévision", Masson Paris.
- [4] Bourbonnais, R. et Terraza, M., (2016), 'Analyse des séries temporelles', DUNOD.
- [5] Box G. et Jenkins G (1970), 'Time series analysis : forecasting and control', Holden Day, San Francisco.
- [6] Bresson, G. et Pirotte, A.,(1995), 'Econométrie des séries temporelles : Théorie et Applications', Presses Universitaire de France.
- [7] Dickey, D.A. and Fuller, W.A. (1979) 'Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root', *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 74, No. 366a, pp.427–431.
- [8] Dickey, D.A. and Fuller, W.A. (1981) 'Likelihood ratio tests for autoregressive time series with a unit root', *Econometrica*, Vol. 49, No. 4, pp.1057–1072.
- [9] Dickey, D.A., et Pantula, S.G., (1987), 'Determining the order of differencing in autoregressive processes' *Journal of Business and Economics Statistics*, 5(4), page : 455-461.
- [10] Gourieroux, C. et Monfort, A., (1995), 'Séries temporelles et modèles dynamiques' *ECONOMICA*.
- [11] Hamilton, J.D. (1994) 'Time series analysis', Princeton University Press.
- [12] Lardic, S. et Mignon, V. (2002), 'Econométrie des séries temporelles macroéconomique et financières', *ECONOMICA*
- [13] Nelson, C. and Plosser, C., (1982), 'Trends and random walks in macroeconomic time series', *Journal of Monetary Economics* 10, 139-162.
- [14] Ngai Hang Chan. (2010) 'Time Series, application to finance with R and S-plus', John Wiley & Sons.