



ÉTUDE DE L'ÉVOLUTION DES IMAGES DE LA CONVERGENCE DE SUITES LORS D'UN ENSEIGNEMENT ORDINAIRE

Imène Ghedamsi, Fatma Fattoum

► To cite this version:

Imène Ghedamsi, Fatma Fattoum. ÉTUDE DE L'ÉVOLUTION DES IMAGES DE LA CONVERGENCE DE SUITES LORS D'UN ENSEIGNEMENT ORDINAIRE. Recherches en Didactique des Mathématiques, 2018, pp.207-259. <hal-03654770>

HAL Id: hal-03654770

<https://hal.science/hal-03654770v1>

Submitted on 2 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

ÉTUDE DE L'ÉVOLUTION DES IMAGES DE LA CONVERGENCE DE SUITES LORS D'UN ENSEIGNEMENT ORDINAIRE

Imène Ghedamsi*, Fatma Fattoum**

A STUDY ON THE EVOLUTION OF STUDENTS' IMAGES OF SEQUENCE CONVERGENCE

Abstract – This article focuses on the conceptualization of the convergence of a sequence of numbers, and on the challenges it presents. Many studies have been conducted on the complexity of the cognitive process by which the formal definition of sequence convergence is acquired. Furthermore, relatively few studies investigate the potency of specially designed problems that could be used to overcome students' difficulties, and for them to achieve a better grasp of the formal notion of limit of a sequence. In this paper, we pay attention to how teacher management of students' work involves their understanding of sequence convergence. Our ultimate goal is to identify relevant indicators that could help designing more alternative approaches. Our methodological tool for analyzing regular lessons is based on the TDS construct of the Milieu; the definition of this tool is strengthened by the use of the concept image/concept definition framework. The experimental context comes from a survey conducted with 17/18 – years old scientific track students.

Key words: milieu, didactic contract, concept image/concept definition, limit, sequence convergence.

ESTUDIO DE LA EVOLUCIÓN DE LAS IMÁGENES DE LA CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Resumen – Este artículo se centra en la cuestión de la conceptualización de la convergencia de las sucesiones numéricas y en las exigencias que estas requieren. El estudio de la complejidad del proceso cognitivo relacionado con el límite de sucesiones ha sido objeto de estudio en didáctica durante mucho tiempo. Nos proponemos ampliar el marco de las

* Université de Tunis, ighedamsi@yahoo.fr

** Université Virtuelle de Tunis, fatmafattoum@yahoo.fr

Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.38, n°2 pp. 207-259, 2018

investigaciones a situaciones de clase habituales mostrando cómo la realidad institucional condiciona el desarrollo de un proceso de este tipo. Este estudio permite delimitar mejor lo que quedaría pendiente en un proyecto de elaboración de alternativas a estas situaciones. Basándonos en la estructuración del medio de la TSD, ilustramos nuestra herramienta metodológica para el análisis de situaciones en clases de secundaria, completándola con criterios analíticos que permiten vislumbrar la distinción entre el concepto matemático definido formalmente y el proceso cognitivo que acompaña su construcción. El contexto experimental se nutre de las observaciones de una clase de estudiantes de último curso de secundaria, antes y después del estudio de la convergencia formal.

Palabras-claves: medio, contrato didáctico, concepto imagen/concepto definición, límite de sucesiones, convergencia.

RÉSUMÉ

Cet article s'intéresse à la question de la conceptualisation de la convergence de suites numériques et aux exigences qu'elle requiert. L'étude de la complexité du processus cognitif lié à la limite de suite a depuis longtemps fait l'objet de travaux de recherche en didactique des mathématiques. Nous ambitionnons d'élargir davantage les investigations des situations de classes ordinaires et de montrer comment le contexte institutionnel conditionne le développement d'un tel processus. Cette étude devra nous conduire à une meilleure définition de ce qui reste à investir dans un projet d'élaboration d'alternatives à ces situations. En nous basant sur la structuration des milieux de la TSD, nous illustrons notre outil méthodologique d'analyse de situations de classes ordinaires que nous complétons par des critères d'analyse qui permettent de penser la distinction entre le concept mathématique formellement défini et le processus cognitif qui accompagne son édification. Le contexte expérimental est nourri par les observations d'une classe ordinaire en fin de secondaire, en amont et en aval de la convergence formelle.

Mots-Clés : structuration des milieux, contrat didactique, concept image/concept définition, limite de suite, convergence.

INTRODUCTION

La notion de convergence de suite numérique et plus généralement celle de limite de suite est l'une des idées les plus emblématiques de l'analyse réelle. Cette notion fonde la construction des nombres réels à travers les suites de Cauchy, construction suscitée par la question de l'existence de la limite, et contribue ainsi à l'édification formelle de l'analyse. Les possibilités qu'elle offre du point de vue de la conceptualisation, de travailler à la charnière du formel et du pragmatique (Durand-Guerrier, 2005) lui confèrent une place de choix parmi les recherches en didactique des mathématiques. La potentialité épistémologique d'un tel travail est soulignée dans Rogalski et al. (2001) :

Le point de vue de l'approximation permet [...] de développer le point de vue de l'analyse : un nombre est ce qui est au « bout » d'un processus d'approximation ; l'idée de limite est là essentielle. (Rogalski et al., 2001, p. 307).

Le recours aux approximations (et donc aux valeurs approchées) lors d'une première introduction de la limite n'a bien évidemment pas pour objet celui de soulever la question de l'existence de la limite, mais plutôt de rendre accessible le formalisme de cette dernière et le raisonnement à epsilon près qu'il requiert. L'étude des phénomènes spécifiques, qui conditionnent le processus de conceptualisation de la notion de convergence de suite numérique, a été par ailleurs, largement abordée dans la littérature (pour une vision synthétique de ces travaux, cf. Bressoud et al., 2016).

Certains de ces travaux mettent l'accent sur le caractère déterminant des conceptions des élèves/étudiants et de leurs natures, dans la construction d'une signification de la convergence et dans l'évolution de leur travail avec les limites. Une grande part de ces recherches s'accorde sur le fait que ces conceptions constituent une des composantes fondamentales de l'image que les élèves/étudiants vont finalement activer en situation de résolution de problèmes faisant intervenir la convergence.

À côté de ces travaux, qui mettent en exergue des indicateurs épistémologiques et/ou cognitifs liés à la conceptualisation de la convergence, d'autres étudient des situations potentielles d'enseignement de la convergence suivant deux approches majeures. Dans la première approche, les travaux, qui sont dans la lignée de ceux qui focalisent fondamentalement sur le rôle des images construites par les élèves/étudiants en amont de la convergence formelle dans la conceptualisation, fondent leurs

démarches sur l'élaboration de situations qui permettent de prévoir des conflits cognitifs et être prêt à y remédier (Robert, 1983 ; Mamona-Downs, 2001 ; Przenioslo, 2005 ; Roh, 2008 ; Kidron & Tall, 2014). La quête d'une meilleure définition des indicateurs liés au processus de conceptualisation de la convergence par la prise en compte de la dimension socio-culturelle qui accompagne le développement de ce processus, notamment à travers les interactions entre élèves/étudiants et professeur, constitue la base des recherches effectuées *via* la deuxième approche. Tel est le cas par exemple, des situations construites dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) (Bloch, 2002 ; Gonzalez-Martin et al., 2014).

Dans cet article, nous projetons de mettre l'accent sur les conditions de classes ordinaires et leur impact sur la conceptualisation de la convergence. Notre objectif est d'avancer dans l'étude du rôle des situations de classes ordinaires et de la gestion du professeur dans l'évolution des différentes significations données par les élèves/étudiants à la notion de convergence, en amont et en aval de son introduction formelle. Notre ambition est d'identifier des caractéristiques qui peuvent être prises en considération dans un projet de construction de situations d'enseignement de la convergence dont les enjeux sont en accord avec le contexte ordinaire.

À la suite d'une étude des travaux pertinents du point de vue de notre problématique, nous exposons nos éléments théoriques et méthodologiques. L'étude expérimentale va être conduite, en amont et en aval de l'introduction de la définition formelle de la convergence, auprès d'une classe ordinaire de 3^{ème} année secondaire du cursus tunisien section mathématiques (une année avant la terminale), impliquant des élèves âgés de 17/18 ans. En nous basant sur les principales constructions de la TSD (structuration du milieu, contrat didactique), nous utilisons l'outil méthodologique d'analyse de situations de classes ordinaires élaboré par Ghedamsi (2016) en imbriquant de nouveaux critères d'analyse fondés sur le concept image/concept définition (Tall & Vinner, 1981) qui permettent une prise en compte des images relatives à la convergence de suite.

LA PROBLEMATIQUE DES IMAGES DE LA CONVERGENCE DANS LA LITTÉRATURE

Les travaux qui privilégient l'étude des conceptions pour rendre compte des exigences de la conceptualisation de la convergence, soulignent que ces conceptions sous-tendent dans la majorité des cas une approche dynamique de la notion de limite d'une suite. Cette approche dynamique a régi le fonctionnement cognitif des mathématiciens d'antan jusqu'à Cauchy (Bagni, 2005) donnant lieu à au moins deux images de la convergence d'une suite, qui méritent d'être soulignées dans une telle étude : l'image asymptotique de Leibniz et Newton symptomatique de l'idée de limite atteinte ou non, ainsi que l'image accumulation de Cauchy substituant à la limite d'une suite les limites de ses sous-suites (Tall & Katz, 2014). Cette image accumulation associe la convergence au fait qu'un nombre infini de termes de la suite s'accumulent autour (ou sont de plus en plus proches) d'un ou de plusieurs points limites.

De même que les mathématiciens d'antan dans leur quête de formalisation de la convergence, les élèves/étudiants développent en amont de l'introduction de la notion de convergence de suite leurs propres images. De ce fait, ils acquièrent *a priori* une image de cette notion qui est individuelle et pas nécessairement conséquente du point de vue de la conceptualisation. À côté de l'approche fondée sur le sens commun (Grugnetti, 2003), nous retenons en particulier la prépondérance de l'approche dynamique exprimée à travers une image asymptotique ou une image approximation basée sur le calcul numérique de valeurs approchées (Sierpiska, 1985 ; Roh, 2008). Plus précisément, l'image approximation souligne la dominance du caractère de rapprochement numérique chez certains élèves qui se traduit par le fait que la limite L d'une suite est déterminée en prenant des termes d'indices de plus en plus grands jusqu'à ce que « *finalement L soit atteint* », ou que « *L soit une valeur approchée* » des termes d'indices de plus en plus grands qui devient « naturellement » de plus en plus précise (l'erreur commise devient de plus en plus petite). Ce rapprochement numérique traduit un renversement de la pensée par rapport au rôle des approximations dans l'interprétation de la définition théorique de convergence formelle d'une suite : ce n'est pas l'erreur commise qui induit l'existence d'indice (ou d'ordre) à partir duquel les termes de la suite sont des valeurs approchées de la limite à cette erreur près, mais ce sont plutôt les

termes d'indices pris de plus en plus grands qui vont conditionner l'existence d'une erreur de plus en plus petite pour laquelle L est une valeur approchée de ces termes. Dans toute la suite, c'est dans ce sens que nous entendons l'image approximation. Ces deux images sont liées à l'idée de mouvement et générées par un usage d'expressions de la forme « *la suite tend vers... quand n tend vers $+\infty$* », « *les termes s'approchent de plus en plus de* », « *en prenant des termes d'indices de plus en plus grands* », etc. Dans le cas du cursus tunisien, cet aspect est d'autant plus important à souligner du fait que d'une part la notion de suite est définie comme cas particulier de fonction, et d'autre part la convergence de suite (et la notion de limite de suite en général) est introduite de manière concomitante à celle de sa définition formelle. Par conséquent, même si l'on ne peut évoquer un vécu informel relatif à cette notion, nous pensons que les expériences rencontrées par les élèves/étudiants dans leur travail avec les fonctions et leurs limites (notamment en $+\infty$) induisent le développement d'éléments spécifiques à la notion de limite d'une suite (McGowen & Tall, 2010), qui à leur tour constituent une composante de l'image construite par ces élèves/étudiants en amont de la définition formelle de convergence.

L'ensemble des travaux qui ont traité la question des images construites en aval de la définition formelle de convergence, s'accordent en général sur le fait que les images de type dynamique demeurent chez les élèves/étudiants même après l'introduction de la définition formelle de convergence. Robert (1982) pointe en particulier l'idée implicite de monotonie derrière certaines de ces images, qui exprime que la distance entre les termes de la suite et sa limite devienne de plus en plus petite (décroît vers zéro) quand n est de plus en plus grand. Cette idée renforce par conséquent le maintien de l'image approximation telle qu'elle émerge avant l'introduction de la convergence formelle. Par ailleurs, Przenioslo (2004) souligne l'impact d'un recours abusif aux graphiques dans le développement des images dynamiques à travers des formulations telle que « *les points (n, u_n) approchent l'asymptote $y = L$ à partir d'un certain rang* ». À côté de l'approche dynamique de la notion de convergence, la pensée en termes d'intervalles conduit certains élèves/étudiants à des formulations dans un langage rhétorique ou algébrique de la définition formalisée (Robert, 1982) donnant lieu à des images de type statique. Ces formulations sont en général très éloignées de « *pour tout intervalle ouvert I centré en L , seul un nombre fini de termes de la suite (u_n)* ».

est à l'extérieur de I » (Roh, 2008) ; tel est le cas par exemple de « une infinité de termes de la suite (u_n) est dans tout intervalle centré en L ». Alcock et Simpson (2005) ont également identifié des formulations plutôt algébriques du type « $|u_n - L| < \varepsilon$, pour tout $n > N$ et $\varepsilon > 0$ », témoignant d'un usage des énoncés quantifiés non conforme à la syntaxe logique qui engendre des difficultés bien documentées dans la littérature (Dubinsky, 2000 ; Chellougui, 2009). À l'opposé des images dynamiques, on ne peut trancher d'une manière catégorique sur l'origine des images statiques. Toutefois, nous faisons l'hypothèse que la standardisation des exemples et la focalisation sur les interprétations rhétoriques de la définition de convergence, sans que l'accent ne soit mis sur les différences avec le formalisme, favorisent l'émergence des images statiques. Notons enfin que certains élèves/étudiants développent ce que nous appelons une approche mixte, dans le sens où l'idée de mouvement et de rapprochement est incorporée dans des formulations algorithmiques ou en termes d'intervalles et de voisinages (Przenioslo, 2004 & 2005). Le développement d'images relatives à cette approche est soutenu par un travail dans les registres graphique et algébrique. À titre d'exemple, la formulation « Il existe un rang n_0 , pour tous les voisinages de L , à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à ces voisinages » est fondée sur l'inversion des quantificateurs, probablement issue d'une lecture graphique ordonnée dans un sens non consécutif pour la conceptualisation.

Selon Tall et Vinner (1981), chacune de ces trois approches (dynamique, statique et mixte) donne naissance :

- soit à des images non conséquentes du point de vue de la conceptualisation, dans le sens où telles qu'elles sont verbalisées, elles ne sont pas en contradiction avec la définition formelle mais la négocient à la baisse (c'est le cas par exemple de certaines images formulées dans un langage rhétorique utilisant des expressions telles que *tend vers*, *s'approche de*, etc., ou celles qui s'expriment uniquement en termes de condition nécessaire) ;
- soit à des images en contradiction avec la définition formelle de convergence, de telles contradictions supposent l'activation de conflits cognitifs nécessaires à la conceptualisation (c'est le cas par exemple des images qui sont appuyées sur des conceptions de type *limite non atteinte*).

L'objectif de cette recherche n'est pas de se limiter à un recensement des images des élèves de 3^{ème} année secondaire en amont et en aval de la convergence formelle, mais plutôt de traiter à la lumière de ces images la question de l'impact de la classe ordinaire sur le développement des différentes significations données par ces élèves à cette notion. À un niveau moindre, nous étudions les possibilités de régulation en fonction des résultats auxquels nous avons abouti.

Plusieurs travaux préconisent des situations alternatives permettant de faire face aux images problématiques de la convergence. Certains d'entre eux focalisent sur l'introduction de la convergence formelle *via* une représentation sémiotique qui prendrait en compte les images dynamiques pouvant être formées *a priori*, tout en étant un système contenant toutes les informations qui constituent la définition et permettant de décrire, d'une manière plus ou moins exhaustive, le rôle de chaque symbole et expression qui y figurent. Ce travail a été entrepris notamment par Robert (1983), Mamona-Downs (2001) et Roh (2008) ; les représentations sémiotiques retenues sont graphiques ou numériques. L'appui sur la structuration des milieux dans le cadre de la TSD, tel que utilisé dans le travail de Bloch (2002), a de plus permis de rendre compte des différentes interactions entre professeur, élèves (termes pris dans un sens générique) et l'objet mathématique en jeu. D'autres travaux soulignent la pertinence d'amener les élèves à procéder à des investigations, les confrontant à des conflits cognitifs entre images potentielles de la convergence. Nous citons dans ce contexte les travaux qui insistent sur l'efficacité des expériences physiques et de visualisation géométrique, graphique, numérique et ce, sur un dessin, par un logiciel ou une calculatrice (Lie & Tall, 1992 ; Kidron & Tall, 2014), en vue de faciliter la transition vers la convergence formelle. Pinto et Tall (2002) ont de plus montré que les élèves armés d'une image solide, dans le sens où tous les éléments nécessaires sont présents sans qu'aucune contradiction avec la notion théorique ne soit détectée, peuvent à travers des expériences mentales, transformer cette image d'une manière autonome, en un énoncé quantifié sans aucune action venant de l'extérieur.

Sur la base de ces travaux, les questions que nous posons sont :

- Quelle est la nature des images de la convergence formées par les élèves de 3^{ème} année secondaire en Tunisie en amont de la définition formelle ?

- Comment évoluent les images de ces élèves à l'issue de l'introduction formelle de la convergence ? En particulier, comment les situations de classe conditionnent-elles une telle évolution ?

Le support théorique pour l'étude de ces questions est double. Les *concept image* et *concept definition* de Tall et Vinner (1981) permettent de distinguer entre le concept mathématique introduit *via* sa définition formelle et le processus cognitif par lequel il est conçu. Dans le cadre de notre problématique, nous faisons l'hypothèse que le développement d'un tel processus chez les élèves ne peut être isolé du contexte de la classe qui lui donne naissance. Ce contexte est ici défini à partir du contenu mathématique sollicité et de la gestion du professeur en situation réelle. C'est pourquoi, en nous basant sur les principales constructions de la TSD (Brousseau, 1986), nous justifions la grille multidimensionnelle d'analyse de classes ordinaires, que nous alimentons dans le cadre de cette recherche par des critères d'étude basés sur les *concept image* et *concept definition* pour rendre compte de la nature des images et de leurs organisations.

CONTEXTE THEORIQUE ET METHODOLOGIE

1. La structuration des milieux : une modélisation flexible des apprentissages

Vinner (1991) assume que la totalité de la structure cognitive associée à un objet mathématique comporte les éléments spécifiques au concept image incluant toutes sortes d'associations, de conceptions, d'intuitions, d'éléments structuraux et de processus reliés au concept en jeu. Le *concept image* n'est pas verbal, par contre, la confrontation directe ou indirecte des élèves à des questions spécifiques pourrait amener à une verbalisation qui rendrait compte de sa nature. Les éléments liés au *concept definition* comportent les formes langagières, y compris formelles qui permettent de spécifier le concept. Celles-ci peuvent être apprises par cœur puis oubliées, ou bien reconstruites par l'élève témoignant d'une adaptation de l'image, elles seront de la sorte utilisées pour en traduire une verbalisation. Pour des besoins d'économie, nous appelons, dans ce texte, *image* toutes sortes de verbalisation (par exemple image approximation, image accumulation, image asymptotique, etc.).

Dans le cadre de notre recherche, la notion de suite est introduite comme cas particulier de fonction. Par conséquent, nous supposons l'existence de diverses images relatives à la limite finie d'une fonction en $+\infty$, notion ayant déjà fait l'objet d'enseignement, avant l'introduction de la convergence qui sera faite *via* sa définition formelle. Par ailleurs, outre les spécificités du contenu mathématique en jeu, le développement et l'évolution de ces images sont également intimement liés à ce que pourrait apporter le professeur en situation de classe ordinaire. Notre approche de la gestion du professeur en classe est fondamentalement orientée vers le travail des élèves et le processus de conceptualisation. Autrement dit, nous écartons ici une étude visant le métier d'enseignant et ses pratiques.

L'objet central de la TSD est celui de « Situation » définie comme étant le modèle idéal du système des relations entre élèves, enseignant et milieu mathématique. Le processus de conceptualisation est étudié à travers les interactions qui se produisent dans un tel système. Dans la Situation, le travail des élèves est modélisé en réseau avec les activités du professeur sur plusieurs niveaux, à travers le schéma de structuration des milieux (Bloch, 2002). Dans leur quête d'une meilleure visibilité des conditions d'optimisation des interactions prenant place au sein du système, certains chercheurs font le choix d'enrichir le modèle du milieu par d'autres outils théoriques adaptés notamment à l'investigation de questions relatives au cursus secondaire et postsecondaire (Bloch, 2006). En particulier, certaines de ces recherches ont conduit à une réévaluation dans la recherche du rôle des interventions du professeur dans le processus d'évolution du travail des élèves au niveau de la situation expérimentale en incorporant de nouveaux éléments d'analyse sémiotiques et cognitifs dans les milieux d'action, de formulation et de validation (Bloch & Gibel, 2011). Dans une situation de classe ordinaire, les interactions entre élèves, professeur et milieu mathématique sont régies par le contrat didactique en vigueur et se développent en fonction de sa nature (Brousseau, 1996). La gestion de ces interactions par le professeur matérialise en grande partie ce contrat. Sur cette base, la grille d'analyse de classes ordinaires que nous définissons comporte deux dimensions d'étude des interventions des élèves, centrées sur les phases d'action, de formulation et de validation. À côté d'une dimension d'analyse spécifique à la gestion des interactions, les interventions du professeur sont étudiées du point de vue de la gestion du travail des

élèves durant les phases modélisant le processus de conceptualisation tel que postulé dans la TSD. En outre, ces dimensions sont spécifiées *via* des critères d'analyse qui prennent en compte divers exemples paradigmatiques de contrats didactiques (Brousseau, 1996). Par ailleurs, l'appui sur les travaux de Robert (2003, 2007) concernant les pratiques enseignantes nous permet de souligner la cohérence de référer aux images des élèves/étudiants dans une telle étude. Robert (2003) attache une grande importance, notamment à l'organisation des connaissances comme condition de la conceptualisation. Nous ajoutons que ces connaissances, y compris celles qui sont inadaptées, incomplètes voire contradictoires, concrétisent les éléments constitutifs du concept image et la nécessité de les organiser va de pair avec les exigences de changer la structure cognitive qui y réfère pour intégrer un nouvel objet et former une nouvelle image. En d'autres termes, dans cet article nous pensons l'organisation des connaissances, en partie *via* le déclenchement de conflits cognitifs conséquents pour la conceptualisation.

Dans la suite, nous exposons la grille d'analyse et les critères utilisés pour spécifier chacune des dimensions d'étude.

1. La gestion du professeur est analysée *via* trois dimensions d'étude :

a) Gestion des interactions (GI)

GI₁ : Engager un débat en posant des questions sur les notions mathématiques en jeu.

GI₂ : Laisser aux élèves des ouvertures, un choix pour poser et se poser des questions (les déséquilibrer) afin d'organiser leurs connaissances (Robert, 2003 & 2007).

GI₃ : Abréger le travail des élèves (y compris leurs questions).

GI₄ : Découper des tâches en tâches élémentaires et/ou indiquer des techniques, des procédures. Dans ce cas, il est important de clarifier si la façon de faire du professeur limite ou non l'activité des élèves à des applications juxtaposées du contenu du cours (Robert, 2007).

GI₅ : Amener les élèves à prendre de la distance par rapport à ce qui se fait (introduire des incertitudes) et à travailler dans un niveau métacognitif (Robert, 2007).

b) Gestion de la recherche et de la formulation (GRF)

GRF₁ : Faire traiter un exemple ou un contre-exemple (nous insistons en particulier sur la généricité des exemples et leur exhaustivité).

- GRF₂ : Favoriser une formulation en offrant aux élèves/étudiants l'opportunité d'expérimenter, de conjecturer, etc. (une telle formulation traduit en réalité une verbalisation permettant de mettre en exergue des images, en l'occurrence conflictuelles, etc.).
- GRF₃ : Favoriser un changement de situations en mettant en œuvre dans la mesure du possible l'aspect opérationnel des notions en jeu, en soulignant les liens entre notions, en changeant de registres sémiotiques, etc.

c) Gestion de la validation (GV)

- GV₁ : Faire des déclarations sur les notions en jeu et leurs propriétés (ce qui revient à se limiter à énoncer des définitions et propositions du cours).
- GV₂ : Argumenter par validation, en restant dans un même registre ou en changeant de registre.
- GV₃ : Argumenter par formulation/explicitation, en restant dans un même registre ou en changeant de registre.
- GV₄ : Instancier des énoncés généraux et discuter les conséquences de ces énoncés sur une certaine catégorie d'objets mathématiques.
- GV₅ : Procéder à des bilans de connaissances (synthèses locale ou globale, y compris celles relatives à l'usage, dans la mesure du possible, des règles du calcul formel).

Parmi les critères énoncés, nous soulignons ceux qui explicitent des interventions du professeur pouvant empêcher les élèves de s'engager dans des interactions pertinentes, entre pairs ou avec le professeur, du point de vue de la conceptualisation. Tel est le cas des critères GI₃, GI₄, GV₁ et GV₂. Le reste des critères met l'accent sur le rôle que peut jouer le professeur pour enrichir le travail des élèves notamment dans le cas de GI₂, GI₅, GRF₃, GV₄ et GV₅.

2. L'étude des interventions des élèves est faite suivant deux dimensions d'analyse :

a) Travail de recherche et de formulation (TRF)

- TRF₁ : Formuler des questions sur les notions en jeu et leurs propriétés.
- TRF₂ : Exprimer spontanément des connaissances (en recourant à des changements de registres, à des instanciations, à des contre-exemples, à un calcul, en reliant plusieurs notions, etc.). Dans cette recherche, ceci est fondamentalement entendu en termes de verbalisation des éléments du *concept image* qui y réfère ; les

connaissances peuvent de ce point de vue être inadaptées, incomplètes, contradictoires, etc.

TRF₃ : Formuler des opinions sur les notions en jeu.

b) Travail de validation (TV)

TV₁ : Indiquer des procédures et/ou des techniques de résolution (pour éviter des confusions, nous écartons ici les interventions relatives au critère TV₂).

TV₂ : Procéder à un calcul de validation, formel ou autre y compris au tableau (il est impératif d'explicitier parmi ces interventions celles qui indiquent des procédures et/ou des techniques de résolution).

TV₃ : Discuter des modèles de validation proposés par les pairs ou le professeur.

L'usage de cette grille suppose un complément d'informations *a priori* sur la nature du contenu mathématique projeté par le professeur. Dans le cadre de l'étude de situations concernant la convergence de suite, ce contenu est étudié du point de vue du recours à la visualisation, de la pertinence et l'exhaustivité des exemples et contre-exemples, du basculement entre divers registres sémiotiques, le fait de susciter la formulation de conjecture et la nécessité d'expérimenter sur des cas particuliers, etc. L'objectif sous-jacent à une telle étude est celui d'investiguer les opportunités que peut offrir ce contenu mathématique pour amener les élèves à verbaliser leurs images, les confronter et en générer des conflits cognitifs conséquents. Dans certains cas, la définition formelle du concept peut ne pas permettre le développement d'images qui devraient contribuer à faire émerger des conflits cognitifs nécessaires pour surmonter l'inconsistance d'images existantes. Dans ces conditions, les élèves seront portés à se satisfaire de leurs propres interprétations et de considérer la définition formelle comme étant inopérante et superflue (c'est le cas par exemple de certaines des images statiques énoncées dans un langage rhétorique).

2. Cadre expérimental

En Tunisie, la notion de suite réelle est introduite deux années avant la terminale par des exemples de suites arithmétiques et géométriques, aucun travail sur le comportement des suites, y compris intuitif, n'est prévu. Elle est définie comme cas particulier de fonction une année avant la terminale (3^{ème} année secondaire), la notion de convergence est introduite la même année à travers sa définition formelle et aucun autre type d'enseignement (y compris

informel) sur la limite de suite n'a été auparavant dispensé. Le chapitre des suites est dispensé à l'issue de celui des fonctions (limites, continuité, dérivabilité, branches infinies, etc.). Ceci est d'autant plus important à souligner si l'on sait précisément, que l'unique manuel scolaire, auquel adhère la grande majorité des enseignants, introduit la notion de limite finie d'une fonction en $+\infty$ *via* sa définition formelle (sans utiliser les symboles des quantificateurs) :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$, tel que pour tout $x \in D_f$, si $x > A$, alors $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Cette définition est tout de suite interprétée en termes d'existence d'une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction. Par ailleurs, hormis une algébrisation de calcul de limites pour les besoins de la représentation graphique d'une fonction, on ne trouve pas d'exemples ayant pour objectif la problématisation de cette notion pour une meilleure conceptualisation. Les exemples monotones sont les plus sollicités, et des exemples tels que celui de la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ sont quasi absents.

L'étude expérimentale va s'appuyer sur la progression de deux expérimentations faisant intervenir les acteurs d'une classe ordinaire de 3^{ème} année secondaire en amont et en aval de l'introduction de la convergence d'une suite, comportant 25 élèves à côté du professeur. La première expérimentation a pour objectif d'approfondir la question de la nature des images construites par les élèves en amont de l'enseignement de la convergence des suites après un enseignement qu'ils ont déjà reçu sur les limites de fonctions, en particulier la limite finie d'une fonction en $+\infty$, puis sur la notion de suite (définition, monotonie, majorée/minorée et des exemples de suites récurrentes). Elle s'articule autour de la passation d'un questionnaire, comportant trois questions, pour les élèves de la classe considérée. L'objectif est celui de se doter d'un maximum d'informations concernant les images construites par ces élèves, et d'en sélectionner celles qui nous permettraient de voir plus clair au niveau du développement de ces images en aval de la convergence. Nous avons pu recueillir 25 traces écrites qui serviront de support d'analyse. La deuxième expérimentation comporte deux niveaux d'étude. Le premier niveau a pour objectif celui d'étudier globalement la question du développement d'images par les élèves en aval de la convergence formelle contraint par les choix institutionnels, et celui de recenser un certain nombre de données concernant la nature de ces images.

Nous analyserons *via* la grille multidimensionnelle d'analyse de situation de classe ordinaire, les transcriptions d'une succession de trois séances visant l'introduction de la notion de limite de suite. Nous incorporons dans cette analyse tous les éléments nécessaires à l'explicitation du processus de développement des images consolidés par les résultats de la première expérimentation. Nous nous basons sur un corpus de transcriptions composé de trois séances de cours concernant le chapitre des limites de suites dispensées dans cette chronologie : limite finie d'une suite, opérations sur les limites finies de suites et limites infinies de suites. Chacune de ces séances a duré deux heures de temps en présence des 25 élèves de la classe, ce qui est équivalent à la durée institutionnelle accordée à une classe de cours à ce niveau du cursus. Le deuxième niveau d'étude se fixe comme enjeu celui de cerner de manière plus précise le processus menant au développement des images, les différentes transitions qui régissent le basculement d'une image à une autre et le rôle que pourrait avoir la classe ordinaire dans la progression d'un tel processus. La modalité d'expérimentation de type entretien a été retenue. Six élèves parmi les 25 ayant participé au questionnaire en amont de la convergence, ont fait l'objet de ces entretiens. Le choix de ces élèves tient compte aussi bien de leur représentativité que de la fécondité de leurs images potentielles, identifiées en amont de la convergence et confirmées à la suite de l'étude des séances de classe. Les données orales et écrites recueillies décrivent les échanges entre l'interviewer et les élèves ainsi que les échanges entre pairs. Nous avons choisi pour l'expérimentation la modalité d'entretien par deux : nous avons en définitive travaillé avec trois groupes de deux élèves chacun. Le même observateur est chargé de transcrire l'intégralité des échanges dans les trois groupes de travail. Les entretiens se sont donc déroulés en trois phases identiques, aussi bien dans la durée que par rapport au support d'étude. Pour chacune de ces trois phases :

- On demande à chacun des deux élèves de répondre à un questionnaire, le même pour les trois binômes, dont les résultats vont servir de support pour l'entretien.
- À l'issue du questionnaire, l'interviewer s'entretient avec les deux élèves en même temps, du fait que les échanges entre pairs pour convaincre, proposer des exemples, etc. sont des éléments qui facilitent l'activation d'images et nous permettent de progresser dans l'analyse. La part d'improvisation qui accompagnerait de tels échanges

demeurera sous le contrôle de l'interviewer. Ce dernier a comme rôle celui d'approfondir la question du développement des images des élèves tout en prenant en compte leurs connaissances antérieures ainsi que celles qui émergent lors de l'entretien.

IMAGES FORMEES EN AMONT DE LA CONVERGENCE : QUELLES POTENTIALITES ?

1. Analyse *a priori* du questionnaire

La première question, que nous avons empruntée à Juter (2006), s'énonce comme suit :

Q₁ : Dans quels contextes avez-vous rencontré la notion de limite tout au long de votre cursus ? Donnez des exemples.

Notre objectif est multiple : avoir un aperçu sur les connaissances des élèves à propos du concept de limite, connaître les autres concepts que les élèves associent à la notion de limite et tenter d'identifier le degré de développement de leurs images en amont de la convergence.

Cette question est ouverte, évoquant les différents contextes où les élèves auraient pu percevoir la notion de limite. Le terme « rencontrer » va élargir le champ de réponses possibles et inciter les élèves à s'exprimer plus librement. Donner des exemples, y compris par des graphiques, est un autre moyen pour traduire des situations rencontrées qui réfèrent aux limites. Les réponses possibles peuvent renvoyer au sens commun, aux fonctions mais aussi aux suites dans le cas par exemples de suites monotones et bornées ou encore des valeurs approchées, notions ayant fait l'objet d'enseignement antérieur.

La deuxième question a pour finalité de répertorier les images développées chez les élèves à propos de la notion de limite finie d'une fonction en $+\infty$ (Williams, 1991) et ce, en cohérence avec l'objectif final du questionnaire qui vise les limites de suites. Les élèves ont à leur charge d'attribuer une valeur de vérité à chacun des sept énoncés décrivant une limite finie d'une fonction en $+\infty$ en justifiant leurs réponses. Ils peuvent choisir un ou plusieurs énoncés comme étant vrais. Pour désigner ces énoncés, nous leur attribuons les dénominations E_i ($1 \leq i \leq 7$) :

E₁ : La limite décrit vers quoi tend $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
C'est un énoncé qui évoque le sens commun basé sur l'interprétation de l'expression *tend vers*, que chacun peut charger

du sens qui lui convient. L'image associée est dynamique, globale, traduisant une idée de mouvement induit sur $f(x)$ lorsque x prend des valeurs qui *tendent vers* $+\infty$. Cette image, bien qu'elle ne soit pas en contradiction avec la définition, ne permet pas d'évaluer le niveau de conceptualisation de la convergence.

E₂ : La limite est une valeur que la fonction f ne peut pas dépasser. Cet énoncé présente la limite comme étant une frontière, une borne au-delà de laquelle la fonction ne peut pas aller. Cet énoncé correspond à une approche dynamique de la limite *via* une image asymptotique liée à une fonction bornée, qui dans certains cas pourrait de plus être interprétée comme étant monotone.

E₃ : La limite est une valeur que la fonction f peut approcher sans jamais l'atteindre. Cet énoncé reflète une image asymptotique appuyée par le registre graphique. Image connue pour être résistante. Elle représente pour certains élèves la définition même de la limite finie de f en $+\infty$.

E₄ : La limite est une valeur de la fonction f . Cette question ne sera pas prise en considération lors de l'analyse des résultats *a posteriori*, car l'énoncé renvoie plus à la limite en un réel. Dans notre étude, cet énoncé s'avère non discriminatoire.

E₅ : La limite est une valeur approchée de la fonction qui peut être aussi précise que l'on veut. Inspiré de l'image approximation liée aux suites, cet énoncé traduit un renversement de la pensée en termes d'approximation ; la limite étant décrite comme une « valeur approchée de f ». L'approche de la limite est dynamique *via* une image approximation de la limite, qui peut être soutenue par le registre numérique.

E₆ : La limite peut être aussi proche que l'on veut de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de $+\infty$. L'énoncé est vrai, il interprète d'une manière informelle la limite finie d'une fonction en $+\infty$.

E₇ : La limite est déterminée en prenant des nombres de plus en plus proches de $+\infty$ jusqu'à ce que la limite soit atteinte. L'énoncé traduit une image d'approximation (ici en prenant des termes d'indices de plus en plus grands) qui s'inscrit dans une dynamique potentielle.

La troisième question a pour objectif de répertorier les images *a priori* de la notion de convergence de suite qui ont pu être développées par les élèves à travers l'enseignement de la notion de limite de fonction en $+\infty$. La liste de suites proposées dans cette question, est empruntée à Przenioslo (2005). La question consiste à déterminer une propriété que toutes les suites (a_n) possèdent et

que la suite (b_n) ne vérifie pas. Les élèves peuvent travailler dans différents registres (graphique, algébrique, numérique, etc.). Durant leur premier cours sur les suites, les élèves ont étudié les suites croissantes, décroissantes, minorées et majorées, nous supposons qu'ils vont penser à confronter les suites données à ces propriétés.

(1) $a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 10^6 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$	(2) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 10^6 \leq n \leq 10^7 \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$
(3) $a_n = \frac{n+1}{n}$	(4) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n < 5 \cdot 10^5 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$
(5) $a_n = 1$	(6) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ multiple de } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$
(7) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n < 10^4 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$	(8) $a_n = \begin{cases} -3 & \text{si } 2 \cdot 10^5 \leq n \leq 5 \cdot 10^5 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
(9) $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$	(10) $a_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{si } n \leq 100 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
(11) $b_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est un multiple de } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$	

Tableau 1. – Liste des suites/Questionnaire en amont de la convergence

Cette question a été choisie de sorte que toutes les suites (a_n) aient une limite égale à 1, contrairement à (b_n) qui n'a pas de limite. Avant même que les élèves n'aient étudié la définition de la notion de convergence de suite (mais sachant étudier la limite finie d'une fonction en $+\infty$), nous avons proposé cette série d'exemples de suites atypiques en retenant six contraintes :

- C1 : Huit des onze suites proposées (1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11) sont définies par deux expressions, deux par une seule formule (3, 9) et la suite 5 est constante.

- C2 : Comportement d'un nombre fini, « grand » ou « petit », de termes initiaux ou non, de manière différente du reste des termes

de la suite. On insiste sur le fait que des termes de la suite peuvent prendre des valeurs éloignées de la 'limite' sans pour autant influencer l'existence de celle-ci. Une seule condition est à respecter : ces termes doivent être en nombre fini (en particulier, les premiers termes de la suite ne conditionnent pas la nature de la suite).

- C3 : Les suites proposées varient différemment : les suites (1, 2, 4, 6, 7, 8, 9) ne sont pas monotones, les suites (3 et 10) sont monotones, la suite (5) est constante. On souligne ici que la monotonie n'est pas une condition nécessaire à l'existence de la limite d'une suite. Si nous considérons de plus la contrainte C2, on peut s'intéresser particulièrement aux suites qui ne sont pas monotones « à partir d'un certain rang » (6, 9).

- C4 : Toutes les suites proposées sont bornées, pourtant les suites (a_n) possèdent une limite mais pas la suite (b_n) . Être bornée n'est pas une condition suffisante pour qu'une suite admette une limite.

- C5 : En se référant, par exemple, aux représentations graphiques, pour une même suite (a_n) les termes sont de *plus en plus proches* de la limite 1 : cette limite n'est pas atteinte dans le cas des suites (1, 2, 3, 4), elle est atteinte dans le cas des suites (5, 7, 8, 10), les suites (8, 9) ont des termes parfois supérieurs à 1 et parfois inférieurs à 1.

- C6 : Dans le cas de la suite (b_n) , il y a une infinité de termes qui *s'approchent de 1* mais il y a aussi une infinité de termes qui s'en éloignent, c'est la raison pour laquelle cette suite n'admet pas de limite.

2. Résultats et discussion

Nous avons distribué le questionnaire aux 25 élèves de la classe considérée, ils ont travaillé dessus durant une heure de temps. Comme souligné plus haut, nous avons pu recueillir 25 traces écrites anonymes qui serviront de support d'analyse. Nous procédons à l'analyse par question, la discussion finale reposera sur la mise en commun de ces résultats conformément à notre objectif.

L'étude de la première question nous a permis de constater que pour plus de 70% des élèves (18/25), le contexte mathématique qui renvoie à la notion de limite finie de fonction en $+\infty$, est celui relatif à l'étude des branches infinies. Ce résultat était prévisible en raison du choix institutionnel d'introduire simultanément la notion de limite finie de fonction en $+\infty$ et la notion d'asymptote horizontale

à une courbe. Certains de ces élèves appuient l'image asymptotique qu'ils ont de la limite finie d'une fonction en $+\infty$ par l'emploi d'expressions renvoyant à des conceptions telles que *limite non atteinte* ou *ne peut être dépassée*. Ce que nous pouvons de plus souligner, concerne la référence de certains élèves non redoublants (3/25) au contexte relatif à la notion de limite de suite, ce cours n'ayant pourtant pas encore été assuré.

Dans le cadre de l'analyse de la deuxième question, nous ne nous sommes pas attardées sur les réponses sans justifications sauf pour exprimer des constats quantitatifs. Nous procédons à l'étude suivant deux axes. Le premier axe d'étude concerne l'analyse des réponses par énoncés (E_1 , E_2 , E_3 , E_5 , E_6 , E_7). Nous avons pu observer que plus que 80% (21/25) des élèves acceptent l'énoncé E_1 comme traduisant la limite finie d'une fonction en $+\infty$. La moitié d'entre eux ne procèdent pas à des justifications, alors que le reste de ces élèves accompagne leur justification par le graphique d'une fonction comportant une asymptote. Même si l'image à laquelle renvoie cet énoncé est dynamique et reste tributaire du sens que chacun donne au terme *tend*, nous pouvons détecter les signes d'une image asymptotique dans le travail des élèves. Par ailleurs, environ 90% (22/25) des élèves renvoient la limite finie d'une fonction en $+\infty$ à l'énoncé E_2 . La grande majorité de ces élèves ont procédé à des justifications *via* l'usage du graphique d'une fonction admettant une asymptote, ou bien en formulant algébriquement des expressions exprimant le fait que *la limite est supérieure à f*. Par ailleurs, pour environ 80% (20/25) des élèves, la limite finie d'une fonction en $+\infty$ est traduite par l'énoncé E_3 ; une grande part de ces élèves ont procédé à des justifications *via* l'usage du graphique d'une fonction admettant une asymptote. Concernant l'énoncé E_5 , les élèves sont presque partagés entre ceux qui le relie à la limite finie d'une fonction en $+\infty$, et ceux qui ne relie pas, et dans la majorité des cas sans donner des justifications à leurs choix. Seuls 4 élèves sur 25 ont justifié leur choix de considérer E_5 comme étant équivalent à la limite finie d'une fonction en $+\infty$. Pour cela, ils ont utilisé des représentations graphiques de fonctions avec asymptotes mais aussi un début de calcul numérique avec des valeurs de x de plus en plus grandes. L'absence de justification de la part des élèves qui considèrent l'énoncé E_6 comme significatif de la limite, nous amène à nous interroger sur une éventuelle mémorisation de leur part, d'expressions formulées par le professeur sans qu'une investigation profonde du sens qu'elles portent, ne soit faite. Enfin,

environ 90% (22/25) des élèves ne retiennent pas l'énoncé E_7 , c'est-à-dire le fait qu'une limite soit déterminée en prenant des valeurs de plus en plus proches de $+\infty$ jusqu'à ce qu'elle soit atteinte. Toutefois, on ne peut attester d'une réelle cohérence dans les images développées par les élèves sans un deuxième axe d'étude relatif au lien et à la nature des différents choix adoptés par chacun d'entre eux. Le deuxième axe d'étude nous a permis de catégoriser les élèves en deux groupes comportant chacun, soit deux profils, soit trois profils d'élèves différents. La première catégorie comporte trois profils d'élèves qui présentent une cohérence dans leurs réponses, ou ce qu'Alcock et Simpson (2011) appellent *concept consistency*. Dans le cas de ces trois profils, l'approche de la limite est explicitement dynamique sans aucune incohérence de jugement, avec au moins une image asymptotique. Par ailleurs, chacun de ces trois profils présente des spécificités qui ne vont toutefois pas à l'encontre de la cohérence globale des réponses. Le premier profil, prépondérant, regroupe plus du tiers des élèves (9/25), qui pensent la limite comme étant une borne, au-delà de laquelle la fonction ne peut aller. À côté de l'image asymptotique, ils activent aussi une image approximation fondée sur la recherche d'une valeur de plus en plus proche des termes d'indices de plus en plus grands. Le deuxième profil concerne un peu moins du quart des élèves (6/25), la différence avec le premier profil provient de l'absence de l'image approximation. Le troisième profil englobe 2 élèves, la différence avec le premier profil réside dans le fait que ces élèves acceptent de plus, que des valeurs de la fonction puissent se trouver de part et d'autre de la limite. La deuxième catégorie comporte deux profils d'élèves : ceux qui ne présentent pas une cohérence dans leurs réponses et ceux que nous n'avons pas été en mesure de profiler. Afin de les distinguer, nous avons référé à leurs réponses identiques aux énoncés E_3/E_7 , que nous qualifions par *Non atteint/Atteint*. Nous avons pu noter que 3 élèves acceptent en même temps les deux énoncés, pourtant contradictoires. Le reste des élèves (soit 5) ne retiennent pas ces deux énoncés. Dans les deux cas de figure, les élèves sont partagés quant à leurs réponses concernant les énoncés E_2 et E_5 . Même s'il est difficile d'expliquer de tels choix, il semblerait que ces élèves développent une approche dynamique de la limite moyennant, pour le profil, des images conflictuelles dont ils ne se rendent pas compte.

L'étude de la troisième question montre que plus de 80% des élèves (21/25) n'ont pas trouvé une propriété que partagent les

suites (a_n) et que la suite (b_n) ne satisfait pas, ce qui est prévisible étant donné que la notion de limite de suite n'a pas encore été abordée en classe. Ce que nous attendons d'une telle question est une meilleure définition de la nature du travail des élèves avec les suites avant l'introduction de la convergence. Ces élèves ont tenté un travail sur la monotonie, sur la nature des expressions définissant les suites, et même sur l'étude de comportements de termes d'indices de plus en plus grands des suites numériquement ou *via* la donnée de graphiques. Certains d'entre eux sont même arrivés à formuler des expressions telles que *la suite s'approche (ou non) de 1*. Le reste des élèves (4/25) ont pu formuler dans leurs termes la propriété demandée. Dans tous les cas de figure, ces élèves se servent d'un graphique pour appuyer leurs réponses. En outre, ils emploient des termes tels que *s'approchent de*, en ajoutant parfois *sans l'atteindre* pour exprimer la méthode qu'ils utilisent pour trouver le nombre en question (la limite).

3. Conclusion

Dans le cadre de cette expérimentation, le contexte mathématique qui renvoie, chez les élèves, à la notion de limite finie de fonction en $+\infty$ est celui relatif à l'étude des branches infinies. La majorité de ces élèves présente une cohérence dans leurs interprétations de la limite finie d'une fonction en $+\infty$. Dans tous les cas de figure, ces élèves développent une approche de la limite qui est explicitement dynamique véhiculant au moins une image asymptotique. Ceci est particulièrement tributaire du choix institutionnel d'identifier l'existence d'une telle limite à celle d'une asymptote horizontale à la courbe de la fonction en question. Certains de ces élèves appuient l'image asymptotique qu'ils ont de la limite par l'emploi d'expressions renvoyant à des conceptions telles que *limite non atteinte* ou *ne peut être dépassée*. Ils pensent la limite comme une borne, au-delà de laquelle la fonction ne peut aller. À côté de l'image asymptotique, quelques-uns activent aussi une image approximation soutenue par un registre numérique. Nous avons fait le choix de ne pas particulariser dans cette analyse les élèves qui décrivent la limite *via* la verbalisation conséquente de la définition formelle (E_6). Les élèves approuvent cet énoncé par contrat sans qu'une signification réelle n'en soit donnée, comme le montrent par ailleurs certaines de leurs réponses.

Cette étude nous a de plus permis de répertorier des éléments nous permettant de déceler le niveau de développement potentiel d'images relatives à la notion de limite de suite. À travers les

réponses qui ont tenté une entrée dans la limite de suite, il nous a été possible de détecter un recours récurrent au registre graphique, et dans un moindre niveau numérique pour appuyer le travail fait. Plus précisément, avant d'avoir reçu un enseignement sur la notion de limite de suite, certains élèves utilisent des termes adoptés dans le cadre de la limite de fonction tels que *s'approchent de*, *sans l'atteindre* pour décrire leur façon de rechercher le nombre en question (la limite).

EN AVAL DE LA CONVERGENCE DE SUITE

1. Enseignement de la limite de suite - Analyse de situations de classes ordinaires en 3^{ème} année, section mathématiques

Nous analysons *via* la grille multidimensionnelle d'analyse de situation de classe ordinaire, une succession de trois séances visant l'introduction de la notion de limite de suite. Nous incorporons dans cette analyse tous les éléments nécessaires à l'explicitation du processus de développement des images. Nous nous basons sur un corpus de transcriptions composé de trois séances de cours en 3^{ème} année secondaire option mathématiques dans la classe des élèves faisant l'objet de la première expérimentation : une séance sur la limite finie d'une suite, une séance sur les opérations sur les limites finies de suites et une séance sur les limites infinies de suites.

Analyse a priori du projet d'enseignement

La première séance comporte une situation d'introduction de la convergence de suite suivie de résultats généraux énoncés comme étant à admettre, et d'une situation d'application. La première situation proposée a pour objectif d'introduire la définition de la convergence de suite et s'énonce comme suit :

Soit la fonction $h : x \rightarrow \frac{3+2x}{2+x}$.

1. Déterminer la solution positive de l'équation de $h(x) = x$.
2. Dans un même repère, représenter la droite d'équation $y = x$ et la courbe de h . On considère les points $A_n(n, x_n)$ où (x_n) est une suite obtenue selon le procédé suivant : le terme x_{n+1} est l'image par h de x_n et $x_0 = 0$. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n . Expliquer la construction de x_1, x_2 et x_3 .
3. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-6} de $x_n, n \leq 6$.

4. *A partir de quel entier n , a-t-on $|\sqrt{3} - x_n| \leq 10^{-2}$, 10^{-3} , 10^{-5} ?*

Dans cette situation, le choix est celui de considérer une suite d'approximations successives de $\sqrt{3}$ définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \frac{3+2x_n}{2+x_n}$ et $x_0 = 0$ pour introduire la notion de convergence de suite. La pertinence d'une telle approche réside dans les possibilités que peuvent offrir les approximations successives d'une valeur réelle donnée pour pallier à des interprétations informelles de la convergence telle que celle générée par un renversement de la pensée dans les termes d'image approximation – quel que soit le rang considéré, il existe une erreur pour laquelle la limite est une valeur approchée du terme d'indice en question ; plus le rang est grand, plus l'erreur est petite. En outre, le recours à des changements de registres entre le graphique, le numérique et l'algébrique permettra de mettre l'accent sur :

- la formalisation de « *de plus en plus proche que* »
via « x_n est dans un intervalle de la forme $] \sqrt{3} - \varepsilon, \sqrt{3} + \varepsilon[$, ε un réel strictement positif de plus en plus petit » ;
- la dépendance de N par rapport à ε : en prenant des ε de plus en plus petits, on trouve une valeur de plus en plus grande.

Toutefois, ce que nous pouvons souligner concerne le caractère standard de la suite en jeu : un prototype de suite croissante et majorée, et les conséquences qu'un tel choix peut engendrer du point de vue de la conceptualisation dont l'idée selon laquelle *la limite ne peut pas être dépassée*. Rappelons aussi qu'un tel choix a été pointé par Robert (1982) comme pouvant déboucher sur un modèle monotone de la convergence. Cette situation introductive est suivie par l'énoncé simple de la définition formelle de convergence de suite *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n > N$, alors $|u_n - L| < \varepsilon$* , ainsi que le vocabulaire et les notations qui lui sont attachées. Une suite divergente est définie comme étant non convergente. Dans ce projet, aucune explication ne précise la manière de transiter entre cette situation introductive et la définition en epsilon. À l'issue de cette définition, le théorème sur l'unicité de la limite est admis. Le projet notionnel de cette séance est clôturé par une situation dont l'objectif est d'explicitier et de valider la technique d'étude de la limite finie

d'une suite en utilisant la fonction à laquelle elle réfère, elle s'énonce comme suit :

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et u la suite définie par $u_n = f(n)$.

1. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

2. Appliquer le résultat précédent pour déterminer les limites des suites (u_n) , (v_n) , (t_n) et (w_n) définies par : $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$;

$v_n = \frac{2n+1}{3n-1}$, $n \geq 1$; $t_n = 5 - \frac{3}{2n+1}$, $n \geq 0$.

A moins d'une prise en charge de la part du professeur dans la situation de classe réelle, telle qu'elle est énoncée cette situation porte en germes beaucoup d'implicites. L'existence de la limite de f en $+\infty$ étant une condition suffisante et non nécessaire, tel est le cas de la suite $u_n = \frac{1}{n^2+1}$ et la fonction f définie par $\begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$. Par ailleurs, l'usage de cette technique favorisera

l'activation d'une panoplie d'images, que les élèves se sont construites, concernant la limite finie d'une fonction en $+\infty$. Or, le résultat de l'étude faite en amont de la convergence nous a permis de souligner la prépondérance de l'image asymptotique, traduisant des conceptions telles que la fonction n'atteint jamais sa limite, la fonction est forcément monotone et bornée, etc. Notons enfin que les exemples, visant l'usage de cette technique (par les fonctions), sont standards et portent le travail sur les limites de suites convergentes vers le calcul algébrique.

La deuxième séance comporte une situation d'application de la notion de convergence et une situation d'introduction du théorème de comparaison, suivies d'une situation d'application concernant le théorème relatif aux opérations sur les limites de suites convergentes, formulé comme étant admis. La définition de la convergence n'est pas explicitement sollicitée dans la résolution des situations proposées sauf pour démontrer des résultats généraux, et ne ferait vraisemblablement pas partie des éléments du concept image. En particulier, l'étude de la limite d'une suite géométrique de raison -1 ne fait pas partie des attentes dans ce projet, pourtant stipulée comme occasion pour exploiter la définition formelle dans le texte du programme officiel. Par conséquent, les élèves risqueraient de ne pas cerner l'importance et le rôle de la définition formelle de la convergence et de se suffire de l'algorithmique en procédant à un calcul algébrique, cachant

ainsi différentes interprétations de la notion qui freinent la plupart du temps la conceptualisation. La mise en place des techniques de comparaison ou des opérations sur les limites finies de suites, pour étudier la convergence d'une suite, pourrait renforcer les pratiques d'algébrisation dans le travail des élèves, sans qu'aucun apport significatif dans le processus de conceptualisation de la convergence ne puisse être entrepris. En outre, la complexité parfois de certaines des suites proposées risque de renforcer cette tendance à l'algébrisation. Tel est, par exemple, le cas des suites suivantes, la question posée étant celle de retrouver, par un calcul algébrique utilisant les encadrements des fonctions cosinus et sinus, les limites : $u_n = \frac{1}{2 + \frac{\cos n}{n}}$ et $t_n = \left[-\frac{2n+1}{3n-1} \right] \left[\frac{\sin(4n^3)}{n^2+1} + 3 \right]$.

Finalement, les élèves finiront par faire le calcul des limites de suites directement sur le terme général u_n sans se référer à la fonction en jeu, et d'une manière qui demeure algorithmique.

La troisième séance comporte une situation d'introduction de la notion de limite infinie. La question consiste à déterminer le nombre de droites qu'on peut tracer en joignant deux points d'un ensemble de point deux à deux distincts. On s'attendrait à ce que des essais pratiques et des calculs algébriques montrent qu'on peut obtenir un nombre de droites aussi grand que l'on veut dès qu'on dispose de suffisamment de points. On sensibilise les élèves au fait que le nombre de droites tracées peut être plus grand que $10^6, 10^9$, etc., il suffit juste de prendre un nombre N de points suffisamment grand. Or, le projet d'enseignement ne souligne pas explicitement la manière d'exploiter cette situation pour introduire la définition formelle de la limite infinie d'une suite, qui devrait être simplement énoncée à la suite de cette situation : *pour tout $A > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n > A$* (dans le cas de $+\infty$). Cette situation est suivie de trois situations de validation de techniques relatives à l'étude des limites infinies de suites : technique relative à l'étude de la fonction à laquelle réfère la suite en jeu (si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$), techniques utilisant les comparaisons et les opérations sur les limites de suites. La séance est clôturée par l'énoncé de théorèmes admis sur les opérations sur les limites infinies de suites, suivi d'une situation d'application et d'une situation visant l'étude de la limite d'une suite géométrique dans tous les cas de figure. Le recours aux résultats généraux concernant l'étude des limites infinies de suites *via* les fonctions renforce davantage les démarches algébriques de standardisation, et ne permet pas de

souligner la distinction entre suite et fonction, élément essentiel à la conceptualisation de la notion de suite en tant qu'objet mathématique à part entière. Les exemples présentés sont prototypés et n'appellent pas un réel travail d'investigation de la part des élèves. De même que pour les limites finies de suite, nous notons l'absence d'exemples et de contre-exemples pertinents pour l'activation d'images conflictuelles, tel que l'exemple de la suite

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n < 10.000.000 \\ n + 1 & \text{sinon} \end{cases}. \text{ En général, le travail attendu des}$$

élèves se restreint à une activité de majoration ou minoration, d'usages des opérations sur les limites, réduisant ainsi l'étude des suites à l'application d'opérations algébriques. On ne relève pas dans le projet d'enseignement d'activités permettant *a priori* de donner une signification à la notion de limite infinie.

Finalement, la définition formelle de la notion de limite de suite n'est pas mobilisée dans les situations proposées. Le projet d'enseignement est clôturé par l'énoncé du théorème relatif à la limite d'une suite géométrique, accompagné d'une situation ayant pour objectif la démonstration d'un tel résultat. Le cas problématique de la suite géométrique de raison -1 n'est pas évoqué. En dépit du fait que le programme officiel stipule l'exploitation de la définition formelle pour montrer sur des exemples qu'une suite n'a pas de limite, la question de la divergence d'une suite n'est approchée que dans le cas d'une limite infinie. Il est par ailleurs difficile d'imaginer que les élèves travailleront sur le cas de la suite $(-1)^n$ en utilisant la définition formelle (il suffit de prendre $\varepsilon = \inf(|L-1|, |L+1|)$ d'une manière autonome.

Travail des élèves et gestion du professeur en situations de classe

Nous faisons le choix de ne plus distinguer les séances, et de détailler l'analyse *a posteriori* en fonction des dimensions d'étude aussi bien du côté des interventions du professeur, que du côté des interventions des élèves. Ceci nous permettra en particulier, d'identifier des régularités dans la gestion du professeur en aval de la convergence, et de mieux cerner la nature du travail des élèves. L'étude globale des transcriptions montre qu'en six heures de cours, le professeur intervient 169 fois et les élèves 173 fois, les interventions sont orales et/ou écrites au tableau. En particulier, au moins 15 sur 25 élèves sont intervenus lors de ces heures de cours et à plusieurs reprises chacun. Les séances de classes se sont déroulées de la manière suivante.

Séance	Séance 1	Séance 2	Séance 3
Professeur	$P_1 - P_{50}$	$P_{51} - P_{114}$	$P_{115} - P_{169}$
Élèves	$E_1 - E_{58}$	$E_{59} - E_{116}$	$E_{117} - E_{173}$

Tableau 2. – Situations de classes/Répartition des interventions

Nous focalisons en particulier l'analyse sur les interventions du professeur et des élèves qui ont eu lieu à la charnière de l'introduction de la convergence formelle (avant, pendant et après), comme l'indique le tableau ci-dessous.

Avant la définition	$P_1 - P_{24}$	$E_1 - E_{39}$
Pendant la définition	$P_{25} - P_{37}$	$E_{40} - E_{49}$
Après la définition	$P_{38} - P_{50}$	$E_{50} - E_{58}$

Tableau 3. – Situations de classes/Répartition des interventions de la séance 1

1. Gestion du professeur

Sur les 169 interventions du professeur nous n'avons tenu compte dans notre analyse que de 140 interventions. Le reste des interventions (soit 29) consistant en majorité à relire des questions proposées dans les activités ou les exercices, n'avaient pas d'intérêt particulier dans notre grille d'analyse.

GI ₁	GI ₂	GI ₃	GI ₄	GI ₅	GRF ₁	GRF ₂	GRF ₃
16	27	25	16	0	4	4	1
		GV ₁	GV ₂	GV ₃	GV ₄	GV ₅	
		20	17	10	0	0	

Tableau 4. – Situations de classes/Interventions du professeur

Durant la résolution de la situation introductive, il a déjà, été possible d'identifier dans les interventions du professeur un usage aléatoire et non contrôlé de formulations problématiques, dont l'impact a été apparent aussi bien dans le travail des élèves, que dans son évolution.

Plus précisément, nous avons enregistré parmi les interventions relatives aux interactions (GI), un peu moins de 20% concernant le déclenchement d'un débat en posant des questions sur les concepts mathématiques dans l'environnement de la notion de suite (GI₁). Néanmoins, la majorité de ces questions se limitent à faire appel à la mémorisation. En particulier, les interventions P₁₇ et P₁₈ ayant déclenché des interactions intéressantes ne sont pas accompagnées d'interprétations plus fines mettant en évidence la place des intervalles dans la définition de la limite d'une suite :

P₁₇ : [...] dites-moi ce que signifie valeur absolue de $(x - a)$ inférieur à α ?

31 Jed : x est compris entre $a - \alpha$ et $a + \alpha$...

32 Belkil : $x - a$ est compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$...

P₁₈ : C'est un intervalle centré en ...

33 Belkil : ...en 0...

34 Wiem : C'est un intervalle centré en a de largeur α ...

De plus, dans des interventions de type P₂₄ « On considère des intervalles infiniment petits centrés en $\sqrt{3}$... », le professeur procède à l'emploi, sans davantage de clarifications, de termes qui renvoient à l'infini et aux infiniment petits et grands, notions assez controversées chez les élèves et qui provoquent plusieurs interprétations, pour la plupart très éloignées de leurs définitions. Par ailleurs, un peu moins de 30% des interventions relatives à la gestion des interactions ont consisté à abréger le travail des élèves (GI₃). Tel est le cas notamment de l'intervention P₁₁ :

P₁₀ : Que remarquez-vous pour les éléments de la suite (x_n) ?

22 Hedi : Ils sont tous proches de $\sqrt{3}$...

P₁₁ : Ils sont proches ... mais aussi ...

23 Nada : Proches mais toujours $< \sqrt{3}$...

P₁₂ : [...] On a l'impression qu'ils se superposent...on va continuer par le calcul...

Cette séquence illustre la non prise en compte par le professeur des confusions que peut engendrer l'emploi d'expressions pouvant porter vers une multitude d'interprétations parfois très éloignées de ce qui en est attendu. À aucun moment, le professeur n'a entrepris un travail d'explicitation et de formalisation de la signification de l'expression *un nombre proche d'un autre nombre*. Plus de 30% des interventions relatives aux interactions sont supposées laisser aux élèves un choix pour se poser des questions et pour organiser leurs images à propos des suites et des limites de suites (GI₂). Toutefois, ces interventions ne trouvent pas en général du répondant de la part des élèves. C'est le cas par exemple de l'intervention P₁₄ qui est restée en suspens, où l'on note l'usage d'expressions telles que *s'approche de* ou *une fois inférieur et une fois supérieur*, pourtant très significatives des spécificités de la limite finie :

28 Nada (relit la question) : A partir de quel entier n a-t-on $|\sqrt{3} - x_n| \leq 10^{-2}$.

29 Belkil : *Pourquoi la valeur absolue...on sait que la différence est positive...*

P₁₄ : *Tu as raison dans ce cas...mais rappelle toi l'exemple de la dernière fois pour approcher $\sqrt{37}$...c'était une fois inférieur et une fois supérieur...comme nous on prépare la définition...on ne doit pas se limiter au cas où la différence est positive...*

Cette séquence illustre le danger signalé par Robert (1982) d'abuser de la monotonie dans l'étude de la convergence. De même pour l'intervention P₇₅ qui n'est pas suffisamment soutenue pour espérer faire avancer les élèves dans le processus d'édification de la définition formelle :

74 Wiem : *...ça veut dire $|v_n - 0| < \varepsilon$...*

P₇₅ : *C'est quoi ε ?*

75 Wiem : *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > N'$, on a $|v_n - 0| < \varepsilon$...*

La réplique de Wiem non accompagnée de commentaires de la part du professeur, est une répétition de la définition à la demande. Suivant Vinner (1992), nous faisons l'hypothèse que cette définition ne sera pas utilisée et risque d'être oubliée au bout d'un certain temps. Par ailleurs, environ 20% des interventions du professeur relatives aux interactions visent à découper les questions en des questions élémentaires pour rendre visibles des techniques et des procédures de résolution (GI₄). Cette pratique de l'enseignant limite l'activité des élèves à des applications qui favorisent le développement d'une image algorithmique. Dans l'intervention P₄₈, le professeur renforce le côté calculatoire dans le travail avec la convergence de suite :

57 Nada : *On va appliquer la définition à chaque fois ?*

P₄₈ : *On va pouvoir appliquer cette propriété qu'on vient de démontrer... [Parlant de la technique avec les fonctions]*

Dans le cas des interventions de type (GI₄), le professeur insiste sur des méthodes de calcul et de résolution particulières et guide pas à pas le travail des élèves.

Il ressort de notre catégorisation des interventions du professeur que moins de 7% de l'ensemble de ces interventions visent à amener les élèves à procéder à la recherche, à la formulation et à l'organisation autonome des connaissances (GRF). Parmi ces interventions, on note P₂₈ qui constitue la seule intervention du professeur où il met l'accent sur la nature des suites divergentes dont la limite n'est pas infinie et qui n'ont pas fait l'objet de traitement particulier dans le projet d'enseignement.

Toutefois, cette intervention n'a pas été accompagnée d'une investigation profonde et est restée en suspens :

40 Nada : Toutes les suites ont des limites ?

P28 : Tu veux dire si elles sont convergentes ? Est ce $(-1)^n$ admet une limite pour toi ?

41 Nada : On prend n pair et n impair, donc elle admet...

P29 : Tu verras plus clair à la fin de la séance...

À la lumière de cette séquence, nous pouvons d'ores et déjà prévoir le développement d'une image accumulation algorithmique, dans le sens où ce n'est plus le rapprochement dynamique qui conditionne cette image mais plutôt le canevas de calcul algébrique auquel les élèves ont été entraînés. Plus précisément, dans le cas où la suite est définie par deux expressions ou plus, on pourrait s'attendre que le calcul de limite pour chacune des expressions porte à conclure en invoquant comme « limite » les résultats de ce calcul. Dans ces conditions, la suite $(-1)^n$ aurait pour « limite » 1 et -1.

Enfin, plus de 30% des interventions relatives à la gestion de la validation (GV) restreint le travail de validation à l'argumentation standardisée en demeurant dans un même registre (GV₂). Plus précisément, le registre en jeu est soit algébrique, soit formel et, dans certains cas, rhétorique. Parmi ces interventions, nous retenons celle qui pointe la dépendance entre ε et N - P₃₇ « À chaque fois que epsilon change... l'ordre change aussi... » et celle qui verbalise une image statique de la convergence de suite - P₂₇ « Pour tout epsilon, les termes u_n vont se trouver dans un intervalle de rayon ε centré en L , à partir d'un certain ordre...seulement un nombre finis de termes reste à l'extérieur de cet intervalle... ». Ces images ont été déjà identifiées dans la littérature comme étant une interprétation fidèle de la convergence et d'un grand apport dans la résolution de problèmes. Toutefois, le fait de se limiter à l'énoncer sans investigation ni mise en application sur des exemples, écarte un apport significatif dans le processus de conceptualisation. Plus de 50% des interventions de validation portent sur des déclarations sur le concept de suite, de limites de suites et leurs propriétés (GV₁). En particulier, ces déclarations énoncent les définitions relatives aux limites finies et infinies de suites ainsi que les théorèmes de comparaison et d'opérations sur ces limites. D'un autre côté, un peu plus de 20% des interventions relatives à la validation ont pour objectif d'amener les élèves à argumenter par formulation/explicitation en changeant de registre (GV₃). Nous

soulignons en particulier l'intervention P_{12} qui explicite un changement de registre graphique/numérique :

P_{12} : Ils sont si proches que sur le graphique...on a l'impression qu'ils se superposent...on va continuer par le calcul...

24 Nada : les valeurs s'approchent de plus en plus de $\sqrt{3}$

Cette intervention aurait pu constituer une première occasion pour expliciter ce qui est entendu par *approche*, et pointer le fait que l'erreur (ou la précision), qui va jouer le rôle de ε conditionne la nature du « rapprochement ». Un peu plus loin, l'intervention P_{26} (en montrant sur le graphique déjà reproduit sur le tableau) « ...c'est la première fois qu'on utilise epsilon...il désigne toujours un réel infiniment petit...quand on change epsilon on le prend de plus en plus petit...vous remarquez que l'ordre n change... » permet une visualisation du lien, ordonné, existant entre ε et N . L'usage d'un réel infiniment petit est explicité dans ce cas de figure dans la représentation graphique *via* la considération de réels strictement positifs de plus en plus petits (*proches de 0*).

D'un point de vue global, l'usage de la grille d'analyse a permis d'illustrer les particularités des pratiques du professeur conformément au modèle que nous avons adopté. Dans le cadre de cette étude, environ deux tiers de ces interventions sont partagés entre celles qui abrègent le travail des élèves ou l'appauvrissent *via* le découpage des tâches, et celles qui énoncent simplement les résultats généraux du cours et les utilisent pour étudier algébriquement les limites de suites. En particulier, la situation d'introduction de la convergence n'a pas été suffisamment exploitée pour faire le lien avec la définition formelle qui à son tour, a été simplement énoncée.

2. Travail des élèves et développement de leurs images

Nous avons enregistré 173 interventions des élèves dont 15 qui se limitent à reprendre les questions posées par le professeur ou dans les situations proposées. Sur les 158 interventions retenues, nous avons dénombré 74 (soit 47%) interventions relatives au travail de recherche et de formulation, et 84 (soit 53%) interventions relatives au travail de validation. Les interventions des élèves sont généralement courtes, locales et se produisent le plus souvent pour répondre aux questions posées par le professeur, moins souvent, pour discuter des suggestions des pairs et à des rares occasions pour formuler des questionnements relatifs à la notion en jeu. Bien que les interventions des élèves se réduisent à des phrases inachevées,

et que leur discours porte beaucoup d'implicite, on a pu déceler certaines informations concernant le développement de leurs images en aval de la convergence.

TRF ₁	TRF ₂	TRF ₃	TV ₁	TV ₂	TV ₃
18	55	1	17	63	4

Tableau 5. – Situations de classes/Interventions des élèves

Parmi les interventions relatives au travail de recherche et de formulation (TRF), nous notons qu'un peu moins de 30% portent sur la formulation de questions concernant la notion de suite, de limite d'une suite et leurs propriétés, et avec la même fréquence, les techniques qui s'y rattachent (TRF₁). En particulier, les interventions E₄₂, E₄₃ et E₄₄, qui ont eu lieu durant l'introduction de la définition de convergence, sont représentatifs du reste des interventions des élèves, et montrent clairement que ces élèves développent une approche dynamique de la convergence, sous-tendue par des conceptions telles que *ne peut être dépassée*, *d'un seul côté* (reliée à la monotonie), etc. :

42 Wiem : ...converge veut dire tend... ?

P₃₀ : Oui s'approche...

43 Ahmed : Des deux côtés... ?

44 Abderraouf : D'un seul côté...?

Dans la séquence qui suit, l'intervention E₄₈ souligne la difficulté des élèves à concevoir la convergence formelle ainsi que les incertitudes qui accompagnent les argumentations du professeur :

48 Sarah : Je n'ai pas compris la définition de convergente...ça veut dire quoi $|u_n - L| < \varepsilon$?

P36 (au tableau) : [Représente un intervalle centré en L de rayon ε]

P37 : A chaque fois que epsilon change... l'ordre change aussi...

49 Sarah : Euh ...Je pensais que le ε était constant...

P38 [passe à autre chose]

L'intervention E₄₉ met en évidence l'apparition d'images statiques qui renvoient aux difficultés du formalisme et de son usage. La gestion minimaliste du professeur ne permet pas d'attester d'un potentiel changement dans la manière avec laquelle les élèves pourraient concevoir ce formalisme et son usage. Les interventions des élèves concernant des questions relatives aux techniques et procédures en jeu, sont dans leurs majorités algorithmiques développées dans un registre algébrique. Tel est le cas des interventions 78 Wiem « *Est-ce qu'on peut appliquer ce*

résultat ? » et 129 Wiem « *On va revenir aux fonctions comme pour la limite finie... »* où la fréquence du recours aux méthodes algébriques témoigne de leur difficulté à saisir autrement les objets qu'ils manipulent. Par ailleurs, plus de 70% des interventions relatives à la recherche et la formulation concernent l'expression spontanée de connaissances (TRF₂). Celles qui mettent l'accent sur la nature des images des élèves et leur développement durant la résolution de la première situation et au cours de l'introduction de la définition de convergence sont dominantes. C'est le cas par exemple de l'intervention 34 Wiem « *C'est un intervalle centré en a de largeur a...* » qui renvoie à la métrique de l'ensemble des réels à travers la notion de valeur absolue. Un retour profond sur le sens de cette métrique permet d'envisager le développement d'images robustes de la convergence en termes d'intervalles et de voisinages. D'autres parmi ces interventions (TRF₂) reflètent une image approximation de la convergence soutenue par un travail dans un registre numérique telles que :

11 Hedi : *Les valeurs deviennent de plus en plus proches...les unes des autres... [Parlant des termes de la suite d'indices de plus en plus grands]*

12 Wiem : *Au départ non mais après oui...*

En règle quasi-générale, avant et durant l'introduction de la définition de convergence, les élèves développent une approche dynamique de la convergence *via* une image asymptotique ou encore d'approximation sous-tendues par des conceptions telles que *sans jamais l'atteindre, ne la dépassant pas*, etc. Au cours de ces interventions, nous ne notons aucune prise en charge par le professeur du développement de telles images, tel qu'apparaissant dans les échanges ci-dessous :

24 Nada : *les valeurs s'approchent de plus en plus de $\sqrt{3}$... [Parlant des termes de la suite d'indices de plus en plus grands]*

25 Hedi : *Sans jamais l'atteindre...*

26 Jed : *Bien sûr c'est la limite...*

27 Nada : *Oui c'est la limite...*

Le choix de ne retenir au niveau institutionnel de la divergence que les limites infinies, a induit de la part des élèves, des formulations qui concernent le rôle de l'unicité dans l'étude de la divergence d'une suite sans qu'elles ne soient commentées par le professeur :

45 Abdesslem : *Toujours unique, même si la limite n'est pas finie ?*

46 Wiem : *Oui...elle est unique !*

47 Belkir : *Donc une suite qui ne converge pas sa limite est $+\infty$ ou bien $-\infty$...*

Nous retrouvons aussi parmi ces interventions celles qui sont formulées à l'issue de l'introduction de la définition de convergence et qui renvoient à une image asymptotique, activée en vertu des connaissances relatives à la limite finie de fonction en $+\infty$. Tel est le cas, par exemple, de l'intervention E_{50} :

P39 : *Que veut dire $\lim_{+\infty} f(x) = a$?*

Wiem : *Asymptote horizontale d'équation $y = a$...*

D'un autre côté, les interventions des élèves qui énoncent la définition formelle ne reflètent pas nécessairement un niveau de conceptualisation conséquent, elles sont formulées à la demande du professeur.

Environ 20% des interventions relatives à la validation (TV) consiste à indiquer des procédures et/ou des techniques de résolution (TV₁). Ces procédures sont le plus souvent algébriques utilisant les techniques d'encadrement et les résultats généraux concernant les opérations sur les limites de suites. Pareillement en ce qui concerne les interventions relatives à un calcul de validation (TV₂), celles-ci sont majoritairement algébriques et représentent plus de 40% de l'ensemble de toutes les interventions des élèves. Elles traduisent une image algorithmique de la convergence. Les interventions de validation dans les registres numérique et graphique sont très rares et ne nous permettent pas de détecter des éléments permettant de cerner le processus de conceptualisation de la convergence, en raison de l'automatisme qui a régi le travail qui les a accompagnées. Notons enfin, que seules 4 interventions de type validation sont relatives à la discussion de modèles de validation proposés par les pairs ou le professeur (TV₃). La plus significative du point de vue de cette étude est celle de E_{77} :

77. Wiem : *Dans la définition on a...il existe N , $N \geq n_0$ [Discutant l'approche du professeur de considérer N comme étant un entier naturel]*

P78 : *Dans la définition la suite (u_n) était définie pour $n \geq n_0$...mais dans cet exercice la suite est définie dans tout \mathbb{N} ...*

Cette séquence montre une approche purement algébrique de la convergence formelle la réduisant à une suite d'ostensifs introduits selon un ordre bien déterminé. D'autre part, l'intervention E_{146} suivie du commentaire expéditif du professeur est significative de la suprématie de l'autorité algorithmique imposée dans ce cours :

146 Nada : *On ne fait pas la démonstration ? [Concernant le résultat général admis relatif à la limite de l'inverse d'une suite ayant une limite infinie]*

P139 : *1 sur l'infini c'est zéro...*

Le découpage des interventions des élèves en fonction des différents critères de la grille d'analyse a permis de souligner que plus des deux tiers de ces interventions sont relatives à l'expression spontanée de connaissances spécifiques aux procédés algébriques de calcul, et à l'usage de ces procédés pour valider le calcul des limites de suites. Dans de telles conditions, il n'est pas possible d'aspirer à un changement ou à une évolution conséquente de leurs images concernant la convergence de suite.

Conclusion : Quelle possibilité pour le développement des images a posteriori ?

À ce stade de l'étude, il est possible de cerner globalement la question du développement d'images en aval de la convergence formelle au vu des résultats de l'analyse des séances de classe. Le recours à l'énoncé général concernant l'étude de la limite d'une suite *via* la technique par les fonctions ainsi que l'usage abusif de la part du professeur d'expressions telles que *s'approche de*, *infinitement petit*, *intervalle centré en*, etc., sans qu'une transposition plus formalisée n'en soit effectuée, ont activé chez les élèves une approche dynamique de la notion de limite de suite. Cette approche est dominante, elle est fondamentalement issue du répertoire des élèves concernant la limite finie d'une fonction à l'infini. Les images de type dynamique sont sous-tendues par des conceptions telles que *sans jamais atteindre*, *ne dépassant pas*, *d'un seul côté* (reliée à la monotonie), etc., elles sont soutenues par un travail dans le registre graphique ou numérique et montrent clairement la résistance des images asymptotique et approximation. De plus, le caractère prototypique des exemples ainsi que la pauvreté des contre-exemples énoncés par le professeur suite aux questionnements des élèves, ont renforcé l'ancrage de l'approche dynamique de la convergence de suite. Par ailleurs, la mise en avant d'une multitude de procédures d'étude des limites de suites basées sur les comparaisons et les opérations, ont marqué un abandon quasi organisé de la définition formelle au profit d'une approche mixte *via* une image algorithmique qui devient de fait le moyen incontournable pour traiter les questions de limites dans un registre exclusivement algébrique. En outre, la restriction de l'étude des suites divergentes à celles admettant une limite infinie

a favorisé la verbalisation d'une image algorithmique pouvant donner naissance au développement de l'image accumulation, selon lequel l'étude de la convergence d'une suite définie par deux expressions (ou plus) renvoie à l'étude de ses points d'accumulation. Cette restriction de l'étude de la divergence a de plus généré des conceptions telles que toute suite divergente admet une limite infinie.

L'exploitation de la définition de la convergence n'intervient que dans la démonstration des théorèmes sous le contrôle stricto-sensu du professeur : sa manipulation est strictement réservée au professeur. Ce dernier a pris en charge d'abrégé toute tentative de référer à des suites ayant plus qu'un point d'accumulation (telle que l'exemple soulevé pour $(-1)^n$), dans le cas où ceci se produit, l'unicité lui sert d'argument pour arrêter d'en débattre. Or, derrière l'argument d'unicité se cache le critère de divergence *via* les sous-suites paire et impaire. La verbalisation dans un langage rhétorique d'images statiques, par le professeur, identifiées dans la littérature comme significatives de la conceptualisation et les plus performantes dans la résolution de problèmes, est restée sans aucune suite du côté des élèves. Finalement, le professeur se donne comme responsabilité celle de réduire l'étude des limites de suites à l'application d'opérations algébriques sans qu'aucune réelle signification ne puisse être donnée à la notion de limite qu'elle soit finie, ou qu'elle soit infinie. En particulier, comme nous l'avons prévu *a priori*, la situation d'introduction des limites infinies a été complètement déconnectée de la définition formelle de cette limite, qui à son tour, a été simplement énoncée à la fin de la résolution.

2. Identification d'images formées en aval de la convergence

Le deuxième niveau d'expérimentation visant l'approfondissement de la question du développement des images des élèves et des tentatives de déstabilisation, s'appuie sur les résultats d'un questionnaire/entretien en direction de 6 élèves représentatifs de la classe expérimentée.

Analyse a priori

Nous procédons dans ce qui suit à l'analyse *a priori* du questionnaire comportant trois questions, qui a servi de support à l'entretien qui va suivre. Nous soulignons à chaque fois que ceci a

été prévu¹, comment nous entendons enrichir les réponses données par les élèves *via* l'entretien.

Question 1

La première question consiste à choisir, en le justifiant, parmi cinq énoncés celui qui décrit le mieux la réponse à *Existe-t-il des nombres compris entre $0, \underline{9}$ ($0,99999\dots$) et 1 ?* L'élève a la possibilité de ne choisir aucun énoncé, et de proposer une autre réponse en la justifiant. Comme souligné dans Durand-Guerrier et al. (2013), nous retenons dans le cadre de cette étude, deux interprétations possibles des difficultés qu'auraient les élèves à concevoir l'égalité de $0, \underline{9}$ et 1 :

[...] difficulties taking in consideration non terminating decimal number; difficulties with limits considered as process, not as number [...]. (Durand-Guerrier et al., 2013, p. 197).

Dans cet ordre d'idée, la question posée peut donc renvoyer aux notions de limite et d'infini qui, bien qu'ils soient souvent évoqués ensemble, peuvent référer à des paradigmes différents voire conflictuels. Deux idées peuvent décrire le procédé infini dans la suite des termes $0,9$; $0,99$; $0,999$; etc. :

- Il indique un processus illimité, d'un *potentiel* qui peut donner des valeurs plus grandes ou plus petites, qui admettent à chaque fois un successeur, obtenu en un nombre fini d'itérations. Du point de vue de la conceptualisation, derrière cette idée, nous retrouvons des conceptions telles que *ne peut atteindre, ne peut dépasser*, etc.
- Il indique tous les éléments à la fois d'un ensemble infini, soutenu par un objet *en acte* pouvant être identifié. Cette idée traduit la convergence formelle telle qu'elle est définie dans la théorie des ensembles.

Cette distinction entre processus et objet peut tout aussi bien être soulevée sous l'angle des développements décimaux propre et impropre d'un réel : «*Does a non-terminating decimal writing refer to an object or to a process?*» (Durand-Guerrier et al., 2013, p. 198). Plus précisément, des écritures de types $0, \underline{3}$, $0, \underline{6}$, etc. pour manipuler des nombres, y compris des opérations sur ces nombres, ont été introduites depuis le collège (quatre années avant la

¹ Rappelons que comme nous l'avons précisé plus haut, une grande part d'improvisation est laissée à la charge de l'interviewer en fonction des réponses des élèves et de la progression des échanges dans le sens d'une meilleure définition de l'évolution de leurs images, leurs natures ainsi que leurs origines.

terminale). Chaque écriture est le produit « final » d'une opération de division (de 1 par 3, de 2 par 3, etc.). Par ailleurs, les opérations de multiplication utilisant ces écritures sont légitimées, au cas par cas, par le seul recours à cette opération de division ($2.0,\underline{3}=0,\underline{6}$ car $2.1/3 = 2/3 = 0,\underline{6}$) :

[...] this fact supports the conjecture that the calculating rules define on terminating decimal can be applied to non terminating decimal. But of course, it does not provide a proof that it is possible to extend the rule. (Durand-Guerrier et al., 2013, p. 197).

Par conséquent, dans le cas de $0,\underline{9}$ et 1 , où l'algorithme de division est inopérant, on pourrait s'attendre à ce que les élèves problématisent des arguments de type 3. $0,\underline{3} = 1$ du fait qu'une telle égalité autorise la multiplication par un nombre qui comporte des décimales qui se répètent à l'infini ; ils n'auraient aucun moyen de contrôler cette multiplication à l'infini (Durand-Guerrier et al., 2013). En posant cette question, nous voulons savoir dans laquelle des deux optiques s'inscrivent les élèves, processus ou objet, notamment du point de vue de la limite en tant que processus ou nombre. Ceci nous permettra de mieux cerner les éléments derrière l'enracinement d'une approche dynamique de la convergence de suite, telle que répertoriée dans les résultats de l'analyse des séances de classe en aval de la convergence.

Nous étayons dans ce qui suit, chacun de ces énoncés en étudiant les justifications possibles.

- E_1 : *Il n'existe aucun nombre compris entre $0,\underline{9}$ et 1 .*

Les élèves ont différentes possibilités pour justifier ce premier choix, dont celles introduites dans les classes antérieures à l'occasion de l'étude de l'ensemble des nombres réels : numérique ($3.\frac{1}{3} = 3.(0,333...) = 0,\underline{9}$), algébrique ($x = 0,\underline{9}$ donc $10x = 9,\underline{9}$ et $x = 1$) ou en utilisant la suite des sommes partielles d'une suite géométrique de premier terme $\frac{9}{10}$ et de raison $\frac{1}{10}$. Par ailleurs, la non existence de nombres entre $0,\underline{9}$ et 1 peut traduire un argument de type « $0,\underline{9}$ est juste avant 1 ». Or dans ces conditions, si on accepte qu'ils soient distincts, ceci impliquerait que la moyenne de ces deux nombres est comprise entre ces nombres ; ils ne sont donc plus « l'un derrière l'autre » et l'argument est par conséquent réfuté.

Le reste des énoncés est successivement E_2 : *Il existe un nombre fini de nombres* ; E_3 : *Il existe une infinité de nombres* ; E_4 : *Il existe une quantité infiniment petite de nombres* et E_5 : *On ne peut pas répondre car $0,\underline{9}$ est indéfiniment périodique et ne s'arrête jamais.*

Ces énoncés utilisent des expressions arbitrairement employées aussi bien par les élèves que par le professeur lors des séances de classe. En particulier, l'énoncé E_5 reflète explicitement une vision potentielle de l'infini. L'énoncé E_2 servira de support pour éventuellement distinguer entre *un nombre fini de termes* et *une quantité infiniment petite de termes*, etc.

Question 2

Une série de cinq suites (a_n) , $n \geq 1$, a été présentée aux élèves en posant la question suivante : *Étudier, en justifiant votre réponse, la convergence des suites (a_n)* . Ces suites, ont été choisies de telle sorte qu'elles ne soient pas de type standard, qui se prêterait à être investigué suivant une approche algorithmique *via* les fonctions auxquelles les suites réfèrent. Ces suites seront désignées dans l'analyse qui suit, par leurs numéros d'apparition dans la question.

- La suite (1) est définie par $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \leq 10 \\ \frac{1}{1000} & \text{sinon} \end{cases}$. Dans leur

travail, les élèves peuvent faire abstraction de la manière dont la suite est définie et faire tendre n vers $+\infty$ dans l'expression $\frac{1}{n}$. Et ce, conformément à des conceptions telles que celles que traduit les expressions *non atteinte*, *ne dépasse pas*, etc.

- La suite (2) est définie par $a_n = \frac{n}{n}$. Les élèves peuvent simplifier l'écriture et trouver que la suite est constante, mais auront des difficultés pour conclure car l'image de la limite qui ne doit pas être atteinte est très présente dans leur esprit.

- La suite (3), $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ est définie de sorte que

les sous-suites paires et impaires convergent vers 1. On ne s'attend pas à ce que les élèves procèdent à une validation formelle de la convergence de cette suite, par contre comme pour la suite (1), notre objectif est celui de cerner des conceptions reliées au mouvement empêchant les élèves de prendre pour limite un nombre qui soit égal à une infinité de termes de la suite.

- La suite (4) est définie par $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$. La donnée de cette suite est liée à l'absence d'un travail profond en classe sur la divergence de suites n'ayant pas de limites infinies.

- La suite (5) est définie par $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

La particularité de cette suite (par rapport à (4)) pour les élèves qui

accepteraient qu'une suite converge vers deux limites, réside dans le choix des « nombres limites » qui eux sont *atteints*.

Question 3

La question 3 est inspirée du travail de Roh (2008), qui s'articule autour de la donnée en direction des élèves, de deux énoncés statiques soutenus par un registre rhétorique de la convergence dans le but d'investiguer la nature des images qu'ils activent. Dans le cadre de ce questionnaire, elle a pour objectif principal celui d'étudier la cohérence des réponses données à la question 2.

Plus précisément, il s'agit de choisir parmi deux énoncés celui qui signifie que *la suite* (u_n) *converge vers* L . Le choix est laissé aux élèves de refuser en bloc les deux énoncés, et de donner leurs propres versions. Les deux énoncés attribués aux élèves Héla et Ahmed pour des raisons de motivation, se présentent comme ci-dessous.

Héla : *La suite admet une limite finie L signifie qu'une infinité de termes de la suite est dans tout intervalle ouvert centré en L .*

Ahmed : *La suite admet une limite finie L signifie que pour tout intervalle ouvert centré en L seulement un nombre fini des termes de la suite est à l'extérieur de cet intervalle.*

La formulation d'Ahmed a été simplement exprimée par le professeur, sans être mise en valeur, ni exploitée dans la suite du cours. Cet énoncé pourtant conséquence de la convergence (contraposée de la définition formelle $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \geq \varepsilon \Leftrightarrow n \leq N$) fait partie des expressions formulées aléatoirement par le professeur et comporte beaucoup d'implicite. La signification de Héla véhicule une image particulière que nous avons prévue à l'issue de l'analyse de la situation de classe en aval. Elle renvoie à la notion de point d'accumulation d'une suite et traduit le fait que ce point est forcément la limite de la suite ; elle traduit la définition d'un point d'accumulation d'une suite ($\forall \varepsilon > 0$, on peut trouver une infinité de valeurs de n pour lesquelles $|u_n - l| < \varepsilon$). Sa deuxième particularité réside dans le fait qu'elle permet de revenir sur la question des suites divergentes qui n'a pas été explicitement introduite en classe sauf dans le cas où la suite admet pour limite l'infini. Le tableau ci-dessous résume, selon nous, le modèle des réponses à la question 2 qui pourrait attester d'une cohérence dans le travail prévu des élèves en fonction de leurs choix, éventuels, dans la question 3.

Suite	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Héla	1/1000	1	1	1 et -1	0 et 1
Ahmed	1/1000	1	1	-	-

Tableau 6. – Niveau de cohérence des réponses/En aval de la convergence

Dans tous les autres cas de figure, lors de l'entretien nous confrontons les élèves à leur travail en fonction de leurs réponses.

Résultats et discussion

Le choix des six élèves retenus dans le cadre de cette expérimentation (Hamza, Nada, Aziz, Sarah, Wiem et Jed) tient compte aussi bien de leur représentativité que de la fécondité de leurs images potentielles, y compris lors des séances de classe. L'étude faite en amont de la convergence formelle a permis de souligner que Nada, Aziz, Sarah et Wiem s'inscrivent dans un profil cohérent approchant la limite d'un point de vue dynamique *via* au moins une image asymptotique, soutenue par des conceptions telles que *limite non atteinte*, *ne peut dépasser*, etc. Hormis Sarah, ces élèves activent en plus une image approximation basée sur la recherche « d'une valeur approchée de la suite de plus en plus précise ». Par contre Hamza et Jed s'inscrivent dans un profil incohérent où la limite est en même temps *atteinte* et *non atteinte*. L'usage fait par ces élèves des graphiques pointe une approche dynamique des limites sans qu'aucune image claire ne puisse en être déduite.

Dans cette analyse articulée des résultats du questionnaire et de l'entretien qui l'a suivi, nous focalisons sur les changements éventuels induits par la définition formelle, sur les images individuelles que les élèves ont, *a priori*, de la notion de convergence de suite. S'il y a eu réadaptation des images nous essayons d'en expliquer le processus. Si les images sont restées inchangées nous essayons de trouver les raisons. Lors des entretiens un intérêt particulier sera porté à la possibilité de créer des conflits cognitifs entre les différentes images en vue de déstabiliser les élèves et voir le degré de résistance de ces images. Le tableau ci-dessous décrit les réponses données par les 6 élèves dans la première question.

Hamza	Nada	Aziz	Sarah	Wiem	Jed
$0.\underline{9} \approx 1$	E_1 et E_5	E_5	E_3	E_3	E_3

Tableau 7. – Conception de l'infini chez les élèves /En aval de la convergence

On peut faire l'hypothèse que les traces de l'infini potentiel sont incrustées dans de telles réponses ; néanmoins, seules les réponses de Sarah et Jed sont accompagnées de justifications. En particulier, Sarah verbalise explicitement ce qu'elle entend par l'infini en écrivant que : *Quel que soit le nombre que l'on choisit, il existe un nombre plus grand que lui*. Dès le début de l'entretien, Nada montre clairement un conflit entre une approche dynamique de la limite et une approche algorithmique, effaçant toute trace de la limite ou de l'infini pour valider algébriquement l'égalité des deux nombres (l'interviewer est désigné par la lettre I) :

I₇ : Pour toi ceci est donc suffisant pour prouver que $0.\underline{9} = 1$...penses-tu qu'il y a un autre moyen ? Par les suites par exemple ?

Nada : La suite... elle tend vers sa limite sans jamais l'atteindre ! [Essai de démonstration via la limite de suite]

I₂₁ : Ce que tu viens de faire te permet-il de dire que $0.\underline{9} = 1$?

Nada : La limite est égale à 1 ! [...]

I₂₂ : Et... $0.\underline{9}$?

Nada : La limite c'est 1... mais ce n'est pas suffisant pour démontrer que $0.\underline{9}$ est égal à 1...

Convaincue que la limite ne peut jamais être atteinte et que $0.\underline{9} = 1$, Nada soutient que le travail sur la suite des sommes partielles est valide mais ne peut constituer une démonstration de $0.\underline{9} = 1$. À l'opposé, Wiem, convaincue que la limite ne peut jamais être atteinte et que $0.\underline{9} \neq 1$, soutient que le recours à la suite des sommes partielles est une démonstration de $0.\underline{9} \neq 1$:

I₇ : Vous cherchez une suite qui tend vers 1 ?

Wiem : 0.9 ; 0.99 ; 0.99 ; les termes à l'infini sont de la forme 0.9999999...

Wiem : Cette suite tend vers 1...sans l'atteindre...donc comme j'ai dit 0.9 n'est pas égale à 1...il y a une infinité de nombres entre eux...

Pour Nada et Wiem, leur conception de la convergence s'appuie sur leur conception de l'infini comme étant potentiel. Les deux élèves s'inscrivent dans une approche dynamique de la limite, pour elles la limite n'est pas atteinte. Influencés vraisemblablement par la démonstration algébrique de l'égalité, Aziz et Sarah ont tenté de

changer leur réponse, sauf qu'à chaque fois, ils se retrouvent confrontés à leur propre approche de la limite, exactement identique à celle développée par Nada et Wiem :

I4 : Vous voulez dire indéfiniment périodique ?

Aziz : [...] pour 0,9...9 se répète indéfiniment...ça ne s'arrête jamais [...]

Sarah : Mais il y a la possibilité que ça soit strictement inférieur à 1...donc c'est presque égal à 1

I6 : Et donc ?

Sarah : Non...cette suite ne prouve pas que $0,9 = 1$!

Alors que Jed trouve la démonstration algébrique convaincante, mais peut-être pas suffisamment pour le faire changer d'avis « *Pour moi c'est comme une limite 0,99999... tend vers 1 sans l'atteindre...* », Hamza insiste sur son choix de changer sa réponse en faveur de l'égalité sans qu'une réelle conviction ne s'en dégage. Nous pouvons affirmer sans équivoque que le contrat institutionnel (y compris dans la gestion du professeur) régît les confusions que développent les élèves, les amenant jusqu'à refuser de percevoir dans leur travail des éléments de conflits potentiels. Certains sont plus acharnés que d'autres à refuser de considérer que le calcul algébrique ou numérique puisse valider un travail mettant en jeu l'infini. Dans ce cas de figure, c'est le comportement de la multiplication « à l'infini » qui est critiquée :

Binôme 1

Nada : Pour $0,9 = 1$...on a même fait la démonstration en classe...moi j'ai choisi deux réponses : ils sont égaux et on ne peut pas répondre ! [...]

Nada : Il y a aussi une autre démonstration qu'on a vu en 9^{ème} année [Parlant de la démonstration numérique de fin du collège]

I26 : Mais pas celle des suites ?

Nada : Non ! Bon...je ne suis plus sûre à cent pour cent...

Binôme 2

Aziz : [...] on a vu en 8^{ème} année qu'un tiers est égale à 0.3333...qui se répète à l'infini puis on multiplie [...]

Sarah : [...] je pense qu'il est presque égal à 1...

Aziz : [...] mais il faut qu'il soit égal à 1...

Binôme 3

Jed : On l'a vu au collège de la même manière...[Démonstration algébrique de l'égalité]

Wiem : Même que moi j'ai posé la question au prof pour la démonstration...je ne suis pas sûre que c'est vrai...comment on multiplie 0.3 par 3 [...]

Jed : C'est un argument juste...mais ce n'est pas convaincant...

Pour étudier la deuxième question, nous retenons trois critères d'analyse : le rôle de l'expression de la suite pour le calcul de limite, le registre de validation et la limite est un terme de la suite ou non (atteinte ou bien non atteinte). Force est de constater que tous les élèves donnent la priorité aux expressions en n pour étudier la limite. D'ailleurs, pour tous ces élèves la suite (1) converge vers 0. Nous retrouvons ainsi les traces d'une image algorithmique de la limite, appuyées par des conceptions dynamiques. Ceci est souligné notamment dans les propos de Nada et Wiem quand elles disent que de toutes les façons pour les autres termes « $1/1000$ tend vers 0 ». Il en est de même pour Sarah qui l'exprime explicitement « J'ai fait le graphe et ça ne dépasse pas $0... \frac{1}{1000}...c'est proche de 0...$ », ainsi que Jed « D'ailleurs pour la suite (1) $\frac{1}{1000}$ tend vers 0 donc la limite est égale à 0... ». Les tentatives de déstabilisation des élèves n'ont pas été concluantes, les propos de Nada en témoignent « Je suis sûre de mes réponses pour toutes les autres suites sauf pour la suite (1) ». Nada et Wiem donnent toutes les deux les mêmes réponses, d'ailleurs correctes, à l'étude des suites (2), (3), (4) et (5). Toutefois, Nada se place exclusivement dans l'algébrique et réfère au graphique seulement quand la suite ne comporte pas d'expressions en n , alors que Wiem s'inscrit d'une manière sans équivoque dans le registre graphique pour chercher et pour valider. Le cas de Sarah (répondant correctement aux suites (2) et (3)) est particulièrement frappant : elle s'appuie exclusivement sur le graphique pour trouver la limite en montrant une difficulté à trancher en cas de non « unicité ». Lors de l'entretien, elle exprime clairement qu'une suite admet une unique limite, et que dans le cas où elle en possède deux (les suites (4) et (5)), elle choisira la plus grande valeur :

I_{14} : Est-ce qu'une suite peut admettre deux limites ?

Sarah : Non ! La suite doit avoir une seule limite... [...]

I_{15} : Peux-tu expliquer davantage Sarah ?

Sarah : Il ne peut y avoir qu'une seule limite... [...]

I_{19} : Pour les suites (4) et (5), parmi les deux limites que tu calcules, tu choisis à chaque fois un seul nombre ?

Sarah : Oui je choisis 1 parce que c'est le plus grand nombre...

Afin de légitimer l'unicité, Sarah réfère aux règles d'un contrat « d'autorité » en insinuant l'obligation de les respecter « *On l'a vu comme ça dans le cours...* ».

Finalement du côté du registre de validation, les résultats montrent que Hamza et Aziz s'inscrivent dans une approche algorithmique en acceptant qu'une suite admette deux limites, de même que Jed sauf que son travail n'est pas forcément porté sur l'étude de la convergence. Au cours de l'entretien, il a été possible de noter un changement dans la réponse de Hamza « *[...] en tout cas si la suite admet deux limites...elle est divergente...* ». Les réponses écrites des élèves concernant les limites des suites à étudier, semblent montrer que Nada, Aziz, Sarah et Wiem acceptent de se dessaisir de conceptions telles que la limite est non atteinte, ou ne peut pas être dépassée, etc. Cependant, confrontés à ces conceptions lors de l'entretien, les réponses des élèves demeurent confuses gagnées par des incertitudes sauf lorsqu'il s'agit de mettre en œuvre les procédés algébriques conformément à ce qui a été fait en classe notamment pour Nada. Le cas de Wiem est vraisemblablement exceptionnel, pour elle la limite est à rechercher, là-bas...plus loin, voire à l'infini, le reste des termes ne poseront pas de problème même s'ils atteignent ou dépassent la limite :

Jed : [...] pour la suite (3)... il y a un problème avec le premier terme qui est égal à 2...

Wiem : Qu'est-ce que tu es entrain de raconter...mais c'est le seul terme qui est supérieur à 1...il faut regarder du côté de l'infini [...]

Wiem : Moi je pense toujours aux termes à l'infini...je peux trouver des termes qui dépassent au début...

Wiem appuie ses dires en avançant que « *on peut toujours trouver n'importe quoi avant l'infini...mais à l'infini on a la limite...le professeur nous a dit qu'il faut regarder à l'infini* ».

À ce stade des analyses, il nous reste à étudier la cohérence des réponses données par les élèves en fonction du choix qu'ils ont fait entre les deux formulations proposées dans la question 3 (celle d'Héla et celle d'Ahmed) pour rendre compte de la notion de convergence formelle). Nous soulignons d'abord que le choix que s'est fixé chacun de ces élèves dans le questionnaire, n'a pas changé jusqu'à la fin de l'entretien pour quatre d'entre eux. Pour ce qui concerne deux autres élèves (Aziz et Wiem) :

- Aziz, n'ayant pas donné de réponse à cette question, a opté pour l'énoncé de Héla au cours de l'entretien. Lors des échanges, il a été possible de noter un certain degré de

cohérence dans ses réponses qui traduisent une approche mixte de la convergence comportant au moins une image accumulation dynamique. Ceci s'applique au cas de Jed qui, par contre, a depuis le début choisi l'énoncé de Héla.

- Wiem, dont la réponse stipule que « *Les points (n, u_n) approchent l'asymptote $y = L$, tout en étant en dessous* ». Au cours de l'entretien, en cohérence totale avec ses choix, elle précise « *au début certains points sont en dessous ou sur la droite $y = L$ mais pas à l'infini* ». L'approche de Wiem demeure fondamentalement dynamique *via* une image asymptotique, le recours aux procédés algébriques se fait par contrat et ne change en rien ses conceptions.

Faisant le choix de l'énoncé d'Ahmed, Nada qui est à l'aise dans les investigations algébriques se trouve confrontée à des conceptions qu'elle porte de l'infini potentiel et qui l'empêchent de trancher dans les situations qui y réfèrent. Par ailleurs, Sarah qui depuis le début tente d'harmoniser ses réponses en fonction des résultats algébriques auxquels elle est confrontée lors de l'entretien, s'accroche au choix de l'énoncé de Héla comme celui signifiant la convergence d'une suite. Son approche de la convergence est largement conditionnée par un travail algorithmique qui toutefois, ne lui permet pas d'aller à l'encontre de la manière avec laquelle elle pense la convergence. Ceci est particulièrement apparent quand elle concilie l'unicité avec son choix de ne garder que la plus grande limite dans le cas où la suite admet plus qu'un point d'accumulation.

3. Conclusion de l'expérimentation en aval

Le choix d'associer l'étude de la convergence de suite à l'usage des techniques *via* les fonctions a activé chez les élèves les images qu'ils se sont construites sur les fonctions et leurs limites en $+\infty$, limite institutionnalisée dans le cas fini *via* la notion d'asymptote horizontale. Ces images sont sous-tendues par une vision dynamique de la limite fondée sur une idée de l'infini comme étant potentiel. Cette idée nourrit à son tour des conceptions telles que *ne peut être atteinte, ne peut être dépassée, etc.* En situation de classe, le recours fréquent du professeur à des expressions informelles telles que *s'approche de plus en plus, infiniment petit, voisinage, etc.* ainsi que le caractère prototypique des exemples ont largement contribué au maintien de l'approche dynamique. L'algorithme massive qui accompagne le travail de validation ou de formulation des élèves, dans un registre

principalement algébrique cache soigneusement toutes les difficultés qu'ils ont à surmonter leurs conceptions des limites. Dans le cas problématique de $0.\underline{9}$ et 1, ils trouvent un moyen de concilier leurs conceptions et leurs réponses de sorte que :

- s'ils répondent que $0.\underline{9} = 1$, ils refusent que la démonstration par les suites, pourtant valide d'après eux, en soit une argumentation puisque ceci voudrait dire que $0.\underline{9}$ tend vers 1 ;
- s'ils répondent que $0.\underline{9} \neq 1$, ils acceptent que la démonstration par les suites en soit une argumentation, puisque ceci voudrait aussi dire que $0.\underline{9}$ tend vers 1.

La gestion du professeur est fondamentalement tournée vers une réduction du travail des élèves dans le sens d'une concentration sur les techniques et procédures algébriques de résolution. Ceci lui a permis, en particulier, d'échapper aux implicites notionnels relatifs aux suites divergentes, et au rôle de l'unicité pour pouvoir conclure dans le cas où la suite admet deux limites. Les retombées d'une telle pratique ont rejailli sur le travail des élèves dès qu'ils ont été confrontés à des exemples de suites non standard, les incitant à retourner sur la place de l'unicité et sur la donnée de leurs propres significations de la convergence. Les tentatives faites pour entrer dans un processus de déstabilisation des élèves et mesurer le degré de résistance de leurs images n'ont pas été concluantes. Les élèves tentent de réguler sans grande conviction par rapport à des conceptions dynamiques de la limite, dans le but de donner plus de cohérence aux réponses données dans le registre algébrique.

CONCLUSION

L'usage de la grille multidimensionnelle d'analyse de situations de classe fondée sur la TSD, et exploitée dans le contexte d'une problématique de type conceptions/images, nous a permis de caractériser la gestion du professeur et le travail des élèves de deux points de vue :

- Le point de vue global illustre les particularités du contrat didactique en vigueur par rapport aux partages des responsabilités entre professeur et élèves aux niveaux de la recherche, de la formulation et de la validation. Ce partage étant accommodé conformément à la gestion des interactions par le professeur. Dans le cadre de cette étude, il n'est pas possible de détecter une véritable gestion du professeur visant un travail potentiel de la part des élèves, d'adaptation d'images et de restructuration de

définitions ou d'énoncés généraux. Le professeur semble éviter de créer des conflits cognitifs et même quand ceux-ci surgissent, ils ne sont pas systématiquement pris en charge pour optimiser la conceptualisation. Par conséquent, les connaissances procédurales des élèves, nourries de l'algorithmisation institutionnellement transmise, demeurent séparées de leurs connaissances conceptuelles. Cet écart ne leur permet pas de percevoir les contradictions qui accompagnent leur travail.

- Le point de vue local spécifie le niveau de développement conceptuel qui accompagne le travail des élèves avec la notion de convergence de suite, conditionné par l'organisation des choix notionnels et la gestion du professeur. L'appui sur un complément d'analyse clinique conforte le résultat selon lequel avant et après la convergence formelle, les élèves associent à la limite d'une suite l'infini potentiel inscrivant ainsi leur travail avec les limites dans une approche dynamique. Nous faisons l'hypothèse qu'ils cherchent les moyens de concilier leurs images et les exigences notionnelles, implicites ou non, instaurées par le contrat en vigueur.

L'usage de l'outil méthodologique, issu du modèle des milieux, pour analyser les situations de classes ordinaires, au niveau secondaire et postsecondaire, a permis d'intégrer la problématique des images de la convergence de suite et de la mettre à l'étude. Les résultats de l'étude permettent d'inférer aux moins quatre points essentiels à prendre en considération dans un projet de type élaboration et expérimentation d'alternatives concernant l'enseignement de la convergence de suite :

- Rendre accessibles aux enseignants les connaissances contingentes des élèves et les préparer à y remédier. Dans le cas de la convergence, ces connaissances sont nourries par une vision dynamique de la limite, spécifiée dans la littérature comme étant dominante et très résistante. Ce travail ne peut être entrepris sans qu'un équilibre ne soit clairement spécifié dans les situations entre les investigations pragmatiques diversifiant les expérimentations, et le contrôle formel. Dans cette optique, le rôle du professeur est crucial.

- L'introduction des suites comme cas particulier de fonctions, ne peut être conséquente, du point de vue de la conceptualisation de la convergence, que si l'étude des limites finies de fonctions en $+\infty$ problématisent les questions d'existence de telles limites en réduisant le champ du calcul algébrique. Une telle étude ne saurait se concentrer sur les

seules interprétations en termes d'existence d'asymptotes horizontales pour les besoins des représentations graphiques.

- L'unicité de la limite d'une suite convergente est un résultat qui fonde le travail ultérieur des élèves avec les limites de suites. Simplement énoncé, la viabilité d'un tel résultat est discutable. Son exploitation par les élèves, *via* un contrôle algébrique, pour conclure la divergence des suites de limites non infinies n'est pas conséquente ; l'obstination de certains d'entre eux à accepter qu'une suite admette plus qu'une limite en témoigne.

En dépit des limites de cette étude, il est possible de voir que l'absence d'un réel travail sur le raisonnement à epsilon près de l'analyse appauvrit les activités des élèves et rend difficile la gestion de leurs difficultés, notamment dans la question relative à 0.9 et 1 et son lien avec la convergence de suite. Une étude centrée sur l'égalité des réels en analyse devrait permettre de se saisir du sens et de l'importance d'un tel raisonnement. Par ailleurs, le choix d'introduire la convergence *via* une situation d'approximation successive ne peut être conséquent s'il ne permet pas de transiter efficacement vers la définition *via* le raisonnement en epsilon ; par exemple en interprétant la définition par : *pour toute erreur commise, il existe un ordre à partir duquel tous les termes de la suite sont des valeurs approchées de ce nombre (la limite) à cette erreur près*. Ceci est corroboré par Rogalski et al. (2001) quand ils soulignent que : « *Le point de vue formel consiste [...] à définir un nombre réel comme étant le processus d'approximation lui-même.* » (Rogalski, et al., 2001, p. 307). Cette manière de procéder permettrait de plus, de surmonter l'inadaptation de certaines images des élèves qui renvoient aux approximations. Finalement, penser une organisation mathématique relative à l'enseignement des suites et de leurs limites ne peut être dissocié d'une réflexion profonde sur le développement de la pensée mathématique à travers un tel enseignement, et sur la complexité de transition entre divers niveaux de conceptualisation qui en découle.

BIBLIOGRAPHIE

ALCOCK, L., & SIMPSON, A-P. (2005). Convergence of sequences and series 2: interactions between non-visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 77-110.

- ALCOCK, L., & SIMPSON, A-P. (2011). The role of definitions in example classification. *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 33-40.
- BAGNI, G.T. (2005). The historical roots of the limit notion. Cognitive development and development of representation registers. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 5 (4), 453-468.
- BLOCH, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. In J.L. Dorier et al (Eds), *Actes de la XI^e École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 125-139). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BLOCH, I. (2006). Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur. *Note de synthèse HDR de l'Université Paris 7*.
- BLOCH, I., & GIBEL, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : Étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 1-18.
- BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 135-194.
- BROUSSEAU, G. (1996). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. *Actes de la VIII^e école d'été de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand.
- CHELLOUGUI, F. (2009). L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université : entre l'explicite et l'implicite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29(2), 123-154.
- DUBINSKY, E., & YIPARAKI, O. (2000). On student understanding of AE and EA Quantification. *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, 8, 239-289.
- DURAND-GUERRIER, V. (2005). Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique. *Note de synthèse HDR de l'Université Claude Bernard - Lyon I*.
- DURAND-GUERRIER, V., & NGANSOP, J. N. (2013). An equality questioning the relationships between truth and validity. In B. Ubuz, C. Haser, M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 196-205). Middle East Technical University, Ankara, Turkey.
- GHEDAMSI, I. (2016). Teacher management of learning calculus: The case of sequences at the first year of university mathematics studies. In Konrad Krainer and Nad'a Vondrová (Eds), *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 20103-20110).
- GONZÁLEZ-MARTÍN, A., BLOCH, I., DURAND-GUERRIER, V., & MASCHIETTO, M. (2014). Didactic situations and didactical engineering in

university mathematics: cases from the study of Calculus and proof. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 117-134.

GRUGNETTI, L., & RIZZA, A. (2003). A lengthy process for the establishment of the concept of limit. M.A. Mariotti et al (Eds), *Proceedings of the third Conference of the European Society for research in Mathematics Education (CERME 3)*. Bellaria, Italie. Edizioni Plus Pisa University Press.

JUTER, K. (2008). Limits of Function: University Students' Concept Development. *Doctoral Thesis, Lulea University of Technology, Department of Mathematics*.

KIDRON, I., & TALL, D. (2015). The role of embodiment and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), 183-199.

LIE, L., & TALL, D. (1992). Constructing Different Concept Images of Sequences and Limits by Programming. In I. Hirabayashi et al. (Eds), *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2* (pp. 41– 48). Tsukuba, Japan.

MAMONA-DOWNS, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288.

MCGOWEN, M., & TALL, D. (2010). Metaphor or Met-before? The effects of previous experience on the practice and theory of learning mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 29, 169-179.

PINTO, M., & TALL, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: A case study and a theory. *For the Learning of Mathematics*, 22(1), 2-10.

PRZENIOSLO, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 103-132.

PRZENIOSLO, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 71-93.

ROBERT, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 3(3), 307-341.

ROBERT, A. (1983). Ingénierie didactique sur les suites numériques après le baccalauréat. *Cahier de DIDIREM*, N°4, IREM de Paris.

ROBERT, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 27(3), 271-310.

ROGALSKI, M., ROBERT, A., & POUYANNE, N. (2001). *Carrefours entre Analyse, Algèbre et Géométrie*. Collection CAPES/Agrégation. Ellipses.

ROH, K.H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 217-233.

- SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5-67.
- TALL, D.O., & VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- TALL, D., & KATZ, M. (2014). A Cognitive Analysis of Cauchy's Conceptions of Function, Continuity, Limit, and Infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 97-124.
- VINNER, A. (1992). The role of definitions in teaching and learning mathematics. In D.O. Tall (Ed), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.
- WILLIAMS, S.R. (1991). Models of limits held by college calculus students. *Journal for Research on Mathematics Education*, 22(3), 219-236.