HAL open science

Profil d'un câble tracté

Simon Villain-Guillot

To cite this version:

Simon Villain-Guillot. Profil d'un câble tracté. 2022. hal-03653650

HAL Id: hal-03653650

https://hal.science/hal-03653650

Preprint submitted on 28 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Profil d'un câble tracté

Simon Villain-Guillot
LOMA, Université de Bordeaux
351 cours de la Libération 33405 Talence Cedex, France
simon.villain-guillot@u-bordeaux.fr

April 28, 2022

On s'intéresse à un cable souple tracté à vitesse constante, par exemple sous l'eau par un chalutier [1], que ce soit un filet de pèche ou une fibre optique, ou bien dans les airs pour un câble tracté par un hélicoptère[2]. Le câble est homogène, de masse M, de longueur L et de masse linéïque constante $\mu = \frac{M}{L}$.

Nous allons nous intérésser au profil stationnaire de ce câble, qu'il entraine ou non un objet, par exemple un sonar ou un chalut pour un bateau, ou une charge de matériel pour un hélicoptère. Ce profil nous permettra notamment de calculer la tension le long de ce câble. Pour l'obtenir, nous allons déterminer l'équation régissant localement la forme du câble puis nous en étudierons les différents type de solutions.

Nous nous placerons dans le référentiel lié au véhicule qui tracte à vitesse constante et horizontale $\overrightarrow{V}$, , pour lequel le câble est au repos. Il est paramétrisé par son abscisse curviligne s ($s = 0$ est l'extrémité du câble qui est libre ou attachée à l'objet trainé, $s = L$ est l'extrémité reliée au véhicule).

Nous allons appliquer le principe fondamentale de la dynamique à une section de câble de longueur ds, et de masse μds. Cette section est soumise à son poids (dans le cadre d'un câble sous-marin en acier, nous négligerons la Poussée d'Archimède). Elle est aussi soumise à deux forces de tension exercées par chaque demi-câble : $\overrightarrow{T}_{bas}$ due à la partie du câble qui relie la section étudiée à l'objet tracté (partie basse du cable entre 0 et s) et $\overrightarrow{T}_{haut}$ due à celle qui la relie au bateau (partie haute du cable entre $s + ds$ et L). Si nous notons $\overrightarrow{t}(s)$ la tangente au câble, définie localement par la direction de celui-ci (dans le sens de $ds > 0$), et $\overrightarrow{T}(s) = T(s)\overrightarrow{t}(s)$, la tension exercée par la partie haute du cable (partie $> s$) alors $\overrightarrow{T}_{haut} = T(s+ds)\overrightarrow{t}(s+ds)$ et, d'après de principe de l'action et de la réaction, $\overrightarrow{T}_{bas} = -\overrightarrow{T}(s) = -T(s)\overrightarrow{t}(s)$. La section de câble est aussi soumise à une force de frottement visqueux. Comme cette section de câble n'est pas un point matériel, mais plutôt un cylindre, cette force de frottement ne sera pas directement opposé au vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ (portance hydrodynamique), ni nécessairement alignée avec l'axe symétrie de la section étudiée. Nous noterons donc

$$d\overrightarrow{F}_{frottement} = \left(-f_t\overrightarrow{t}(s) + f_n\overrightarrow{n}(s)\right)ds = \left(\underbrace{-k_t(V\cos\alpha(s))^D\overrightarrow{t}(s)}_{\text{trainée}} + \underbrace{k_n(V\sin\alpha(s))^D\overrightarrow{n}(s)}_{\text{portance}}\right)ds$$

L'angle d'inclinaison $\alpha(s)$ est l'angle que fait localement la section de cable étudiée (donc le vecteur tangent $\overrightarrow{t}(s)$) et l'horizontale, définie par le vecteur $\overrightarrow{V}$. Rappelons que $\overrightarrow{t}(s)$ n'est pas la tangente à la trajectoire : dans le cas stationnaire, la trajectoire de chaque section est horizontale !). $\overrightarrow{n}(s)$ est la direction transverse, dans le plan $(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{g})$ et faisant un angle $\alpha(s) + \frac{\pi}{2}$ avec l'horizontale. Le nombre entier D caractérise le type de frottement. On prendra $D = 1$ pour un écoulement laminaire (faible nombre de Reynolds) pour lequel

$$d\overrightarrow{F}_{frottement} = \left(-k_tV\cos\alpha(s)\overrightarrow{t}(s) + k_nV\sin\alpha(s)\overrightarrow{n}(s)\right)ds \quad (= -kds\overrightarrow{V} \text{ dans le cas } k_t = k_n).$$

Et on prendra $D = 2$ pour un écoulement turbulent ; nous savons alors que $\left\|d\overrightarrow{F}_{frottement}\right\| \tilde{} V^2$ et la dépendance angulaire rend compte de la variation des coefficients de resistance hydrodynamique en fonction de l'angle entre la section de cable étudiée et la vitesse $\overrightarrow{V}$.

En régime stationnaire, le principe fondamentale de la dynamique appliqué à une section de câble de longueur ds, et de masse μds permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T}_{haut} + \overrightarrow{T}_{bas} + \mu ds \overrightarrow{g} + d\overrightarrow{F}_{frottement} &= \overrightarrow{0} \\ \text{soit } \frac{\overrightarrow{T}(s+ds) - \overrightarrow{T}(s)}{ds} + \mu \overrightarrow{g} - f_t \overrightarrow{t}(s) + f_n \overrightarrow{n}(s) &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Projettons cette relation dans la base $(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n})$. Nous obtenons alors

$$\text{sur } \overrightarrow{t} : \qquad \frac{dT}{ds} - \mu g \sin\alpha(s) - f_t = 0 \quad \text{(i)} \tag{1}$$

$$\text{sur } \overrightarrow{n} : \qquad T(s)\frac{d\alpha(s)}{ds} - \mu g \cos\alpha(s) + f_n = 0 \tag{2}$$

$$\text{soit } T(s) = (\mu g \cos\alpha(s) - f_n)\frac{ds}{d\alpha} = (\mu g \cos\alpha(s) - f_n)\,\rho(\alpha) \tag{3}$$

La quantité $\frac{ds}{d\alpha} = \rho(\alpha)$ est le rayon de courbure du câble. Dans le cas d'un cercle de rayon constant ρ_0, $s = \rho_0(\alpha - \alpha_0)$; dans le cas d'une section rectiligne d'inclinaison ($\alpha(s)$ constant), $\rho = +\infty$ car $d\alpha = 0$.

Dérivons la dernière relation (3) obtenue en projetant sur $\overrightarrow{n}$

$$\frac{d}{d\alpha}T(s) = \frac{d\,(\mu g \cos\alpha - f_n)}{d\alpha}\rho(\alpha) + (\mu g \cos\alpha - f_n)\frac{d}{d\alpha}\rho(\alpha)$$

En utilisant aussi $\frac{d}{d\alpha}T(s(\alpha)) = \frac{d}{ds}T(s)\frac{ds}{d\alpha}$ et la relation (1) obtenue en projetant sur $\overrightarrow{t}$, nous pouvons écrire

$$\frac{d}{d\alpha}T(s) = (\mu g \sin\alpha + f_t)\frac{ds}{d\alpha} = (\mu g \sin\alpha + f_t)\rho(\alpha)$$

$$\text{soit } \left(\mu g \cos\alpha\text{-}k_n(V\sin\alpha)^D\right)\frac{d}{d\alpha}\rho(\alpha) - \left(\mu g \sin\alpha + k_n D V^D \cos\alpha \sin^{D-1}\alpha\right)\rho(\alpha) = (\mu g \sin\alpha + k_t(V\cos\alpha)^D)\rho(\alpha)$$

$$\text{donc nous pouvons écrire } \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2\mu g \sin\alpha + k_t(V\cos\alpha)^D + k_n D V^D \cos\alpha \sin^{D-1}\alpha}{\mu g \cos\alpha - k_n(V\sin\alpha)^D}d\alpha \tag{4}$$

Remarquons que le numérateur est positif et que le dénominateur s'annule pour

$$\alpha = \alpha_d \text{ tel que } \frac{\sin^D \alpha_d}{\cos\alpha_d} = \frac{\mu g}{k_n V^D}\ . \text{ Dans ce cas, d'après l'équation (2) } d\alpha = 0 : \text{ le câble est rectiligne.} \tag{5}$$

Regardons maintenant la condition en $s = 0$

Si un objet de masse m est attaché au bout du câble, la condition d'équilibre en régime stationnaire s'écrit :

$\overrightarrow{T}(s=0) + \overrightarrow{F_T} + \overrightarrow{F_P} + m\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$ où $\overrightarrow{F_T}$ et $\overrightarrow{F_P}$ sont la Trainée (opposé au mouvement horizontal) et la Portance de l'objet tracté (orientée vers le haut). Nous avons là encore négligé la Poussée d'Archimède, ou nous l'avons incluse dans la Portance. En projetant sur les directions horizontale et verticale, nous obtenons donc

$$\begin{aligned} T(s &= 0)\cos\alpha(s{=}0) = |F_T| \\ T(s &= 0)\sin\alpha(s{=}0) = mg - F_P \quad (>0) \end{aligned}$$

donc $\tan\alpha_0 = \frac{mg - F_p}{|F_T|}$ et $T_0 = \sqrt{(mg - F_P)^2 + F_T^2}$

et d'après la relation (3)

$$\frac{ds}{d\alpha}(s=0) = \frac{T_0}{\mu g \cos\alpha_0 - k_n(V\sin\alpha_0)^D} = \rho_0 \tag{6}$$

Si cette quantité est positive, alors $d\alpha$ est croissant et le câble a localement une forme convexe.
C'est le cas lorqu'à l'extrémité du câble est attaché un objet léger ayant une portance importante et une forte trainée ($\alpha_0 \to 0$).

Dans le cas contraire, $d\alpha$ est alors décroissant et le câble a une forme concave au voisinage de l'objet trainé ; c'est le cas notamment lorsque celui-ci est très pesant.

Dans la cas où l'extrémité du cable est libre, la tension à cette extrémité est alors nulle et donc en $s = 0$, l'équation (2) devient : $\mu g \cos\alpha(s) = f_n$ soit $\alpha_0 = \alpha_d$. Le câble reste rectiligne sur toute sa longueur

1 Cas du frottement fluide $D = 1$

Si $D = 1$ et $k_t = k_n = k$ alors $d\overrightarrow{F}_{frottement} = -kds\overrightarrow{V}$ et, en utilisant $\tan\alpha_d = \frac{\mu g}{k_n V}$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2\mu g \sin\alpha + 2kV\cos\alpha}{\mu g\cos\alpha - kV\sin\alpha}d\alpha = 2\frac{\sin\alpha_d\sin\alpha + \cos\alpha_d\cos\alpha}{\sin\alpha_d\cos\alpha - \cos\alpha_d\sin\alpha}d\alpha = 2\frac{\cos(\alpha_d-\alpha)}{\sin(\alpha_d-\alpha)}d\alpha$$

où nous avons utilisé la relation (5) qui s'écrit pour $D = 1$: $\tan\alpha_d = \frac{\mu g}{k_n V}$.

Cette équation différentielle du premier ordre s'intègre pour donner

$$\rho(\alpha) = \rho_0\frac{\sin^2(\alpha_d-\alpha_0)}{\sin^2(\alpha_d-\alpha)}$$

$$\text{Or } \rho(\alpha) = \frac{ds}{d\alpha} \text{ donc } s(\alpha) = \rho_0\int\frac{\sin^2(\alpha_d-\alpha_0)}{\sin^2(\alpha_d-\alpha)}d\alpha = \rho_0\sin^2(\alpha_d-\alpha_0)\left(\frac{1}{\tan(\alpha_d-\alpha)} - \frac{1}{\tan(\alpha_d-\alpha_0)}\right)$$

$$\text{et ainsi } \tan(\alpha(s)-\alpha_d) = \frac{-\sin(\alpha_d-\alpha_0)}{\frac{s}{\rho_0\sin(\alpha_d-\alpha_0)} + \cos(\alpha_d-\alpha_0)} = \frac{\sin(\alpha_0-\alpha_d)}{\frac{s}{\ell} + \cos(\alpha_0-\alpha_d)} \tag{7}$$

$$\text{où } \ell = \rho_0\sin(\alpha_d-\alpha_0) = T_0\frac{\sin\alpha_d\cos\alpha_0 - \cos\alpha_d\sin\alpha_0}{\mu g\cos\alpha_0 - k_n V\sin\alpha_0} \underset{\tan\alpha_d=\frac{\mu g}{k_n V}}{=} \frac{T_0}{\sqrt{(\mu g)^2 + (kV)^2}} = \sqrt{\frac{(mg-F_P)^2 + F_T^2}{(\mu g)^2 + (kV)^2}}$$

Notons que, d'après les relations (5) et (6), $\ell = \rho_0\sin(\alpha_d-\alpha_0) \geq 0$. Nous retrouvons donc bien d'après la relation (7)que le câble sera convexe (ρ_0 positif et $\alpha(s)$ croissant) si $\alpha_0 < \alpha_d$ et concave (ρ_0 négatif et $\alpha(s)$ décroissant) dans le cas opposé. Proche du véhicule, l'angle $\alpha(s)$ se rapprochera de l'angle d'équilibre α_d, qui sera l'angle limite dans le cas des câbles longs ($L \geq s >> \ell$).

Pour ensuite obtenir la forme du cable, nous pouvons utiliser

$$\begin{aligned}
ds^2 &= dx^2 + dy^2 \text{ et donc } dx = \cos\alpha(s)ds \text{ ainsi que } dy = \sin\alpha(s)ds \\
\text{ou } d\tilde{x} &= \cos(\alpha(s)-\alpha_d)\,ds \text{ ainsi que } d\tilde{y} = \sin(\alpha(s)-\alpha_d)\,ds \\
\text{soit } d\tilde{x} &= \frac{ds}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha(s)-\alpha_d)}} \text{ ainsi que } d\tilde{y} = \frac{\tan(\alpha(s)-\alpha_d)\,ds}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha(s)-\alpha_d)}} = \pm\frac{ds}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2(\alpha(s)-\alpha_d)}}}
\end{aligned}$$

Les coordonnées $(\tilde{x}, \tilde{y})$ obtenus par une rotation de α_d sont l'écart au cable rectiligne (incliné d'un angle α_d). En utilisant (7), et en notant $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0 - \alpha_d$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{x}}{ds} &= \frac{\frac{s}{\ell} + \cos\tilde{\alpha}_0}{\sqrt{\left(\frac{s}{\ell}+\cos\tilde{\alpha}_0\right)^2 + \sin^2\tilde{\alpha}_0}} \text{ ainsi que } \frac{d\tilde{y}}{ds} = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s}{\ell\sin\tilde{\alpha}_0} + \frac{1}{\tan\tilde{\alpha}_0}\right)^2 + 1}} \\
\text{soit } \tilde{x}(s) &= \ell\sqrt{\left(\frac{s}{\ell}+\cos\tilde{\alpha}_0\right)^2 + \sin^2\tilde{\alpha}_0} - \ell \text{ et } \tilde{y}(s) = \ell\sin\tilde{\alpha}_0\ln\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{s}{\ell}+\cos\tilde{\alpha}_0\right)^2 + \sin^2\tilde{\alpha}_0} + \frac{s}{\ell} + \cos\tilde{\alpha}_0}{1+\cos(\alpha_0-\alpha_d)}\right) \\
\text{soit } \tilde{y}(s) &= \ell\sin\tilde{\alpha}_0\ln\left(\frac{\tilde{x}/\ell + 1 + \sqrt{(\tilde{x}/\ell+1)^2 - \sin^2\tilde{\alpha}_0}}{1+\cos\tilde{\alpha}_0}\right) = \ell\sin\tilde{\alpha}_0\ln\left(\frac{\tilde{x}/\ell + 1 + \sqrt{(\tilde{x}/\ell)^2 + 2\tilde{x}/\ell + \cos^2\tilde{\alpha}_0}}{1+\cos\tilde{\alpha}_0}\right)
\end{aligned}$$

Pour $x << \ell$, on retrouve au premier ordre $\tilde{y} = \tan(\tilde{\alpha}_0)\tilde{x} = \tan(\alpha_0-\alpha_d)\tilde{x}$

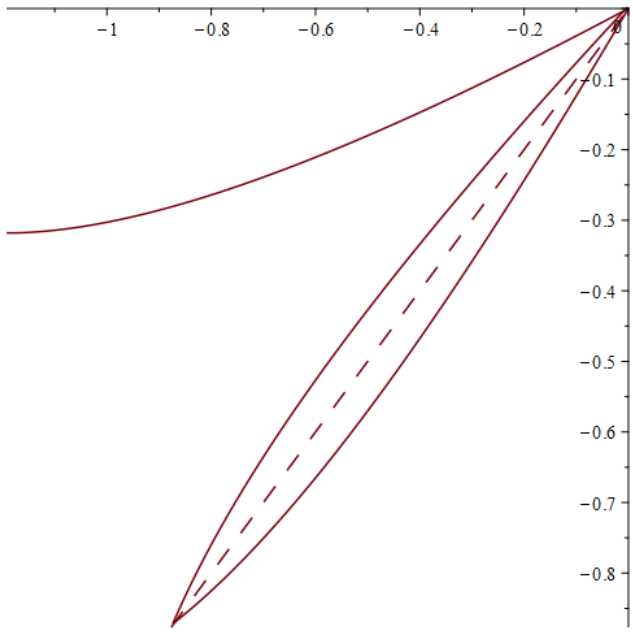

Figure 1: Profils du câble dans 4 cas pour $L = 1,25$ et $\ell = 0.5$. De haut en bas : 1) câble avec une extrémité de portance importante ($\alpha_0 = 0$) et $\alpha_d = \frac{\pi}{6}$, 2) câble avec une extrémité lourde ($\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$) et $\alpha_d = \frac{\pi}{6}$, 3) câble rectigne (extrémité libre, en pointillé), 4) câble avec une extrémité légère ($\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$) et $\alpha_d = \frac{\pi}{3}$.

En revenant par une rotation dans le repère initiale, nous obtenons finalement

$$x(s) = \tilde{x}(s)\cos\alpha_d - \tilde{y}(s)\sin\alpha_d \text{ et } y(s) = \tilde{x}(s)\sin\alpha_d + \tilde{y}(s)\cos\alpha_d \text{ pour } s \in [0, L]$$

Nous avons tracé les profils du câble dans 4 cas.

Nous pouvons aussi calculer la tension le long du câble

$$T(s) = (\mu g\cos\alpha(s) - f_n)\,\rho(\alpha) = T_0\frac{\sin(\alpha_d - \alpha_0)}{\sin(\alpha_d - \alpha)} = T_0\sqrt{\left(\frac{s}{\ell}\right)^2 + 2\frac{s}{\ell}\cos\tilde{\alpha}_0 + 1} \text{ où } \tilde{\alpha}_0 = \alpha_0 - \alpha_d$$

2 Cas du frottement visqueux $D = 2$

L'équation différentielle (4) étant du premier ordre, elle est intégrable numériquement :

$$\rho(\alpha) = \rho_0\exp\left[\int_{\alpha_0}^{\alpha} R(\theta)d\theta\right] \text{ où } R(\theta) = 2\frac{k_n V^2\cos\theta\sin\theta + \mu g\sin\theta + 0.5\times k_t(V\cos\theta)^2}{\mu g\cos\theta - k_n(V\sin\theta)^2}$$

En intégrant de nouveau, il serait possible d'obtenir $s(\alpha) = \int\rho(\alpha)d\alpha$. Le profil reste convexe ($s(\alpha)$ et donc $\alpha(s)$ croissants) si $\rho_0 > 0$, ce qui est le cas lorsque $\alpha_0 < \alpha_d$, c'est à dire si l'objet tracté a suffisamment de portance. Le profil sera au contraire concave ($\alpha(s)$ décroissant) lorsque l'objet tracté sera suffisamment pesant. Mais le tracé détaillé du profil nécessite de connaitre explicitement $\alpha(s)$, ce qui requiert d'inverser la fonction $s(\alpha)$ et n'est plus possible analytiquement, contrairement au cas $D = 1$.

Cet article, inspiré d'un travail de Daniel REYSS (19 juin 1936- 27 avril 2021), lui est dédié.

[1] Lucien LAUBIER, Jacques MARTINAIS, Daniel REYSS,
Publication du CENTRE NATIONAL POUR L'EXPLOITATION DES OCEANS (CNEXO)
Série : Rapports scientifiques et techniques n°03, 1971
[2] Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=q-_7y0WUnW4