



**HAL**  
open science

# Helmholtz interior problem: coupling a modal expansion and an integral representation Final version

Dominique Brenot

► **To cite this version:**

Dominique Brenot. Helmholtz interior problem: coupling a modal expansion and an integral representation Final version. 2024. hal-03649985v3

**HAL Id: hal-03649985**

**<https://hal.science/hal-03649985v3>**

Preprint submitted on 27 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Problème de Helmholtz intérieur : analyse modale couplée à une représentation intégrale

*Version définitive*

Dominique Brenot<sup>1</sup>

## Résumé

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\Gamma$ . Le problème numéroté (1) dans le texte admet une solution unique dans  $H^1(\Omega)$ , si  $k \in \mathbb{R}$ ,  $R_e(\frac{1}{\zeta}) > 0$  sur une portion de  $\Gamma$  d'aire  $S$  non nulle et  $g(k, y, \varepsilon) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  :  $\varepsilon$  correspond à l'amortissement d'une structure élastique et  $\zeta$  est l'impédance acoustique normalisée de la paroi interne de la cavité. Les paramètres  $\varepsilon$  et  $\frac{1}{\zeta}$  sont petits et réels. Par une décomposition modale adaptée, une relation intégrale entre  $u$ ,  $\zeta$ ,  $\varepsilon$  et  $g$ , est construite au premier ordre  $\vartheta(\frac{1}{\zeta}, \varepsilon)$  en  $\frac{1}{\zeta}$  et  $\varepsilon$ , par l'intermédiaire du théorème des résidus. Le résultat est la solution du problème (1). Une version moins élaborée est incluse dans la publication [6] relative à la transmission du son à l'intérieur d'une cavité.

*Mots-clés* : Problème de Helmholtz intérieur ; Formulation intégrale ; Modes de Neumann ; Impédance acoustique ; Couplage fluide structure

## Abstract

### **Helmholtz interior problem: coupling a modal expansion and an integral representation**

Let  $\Omega$  be an opened domain of  $\mathbb{R}^3$  with a boundary  $\Gamma$ . The problem numbered (1) in the text has a unique solution in  $H^1(\Omega)$ , if  $k \in \mathbb{R}$ ,  $R_e(\frac{1}{\zeta}) > 0$  on a part of  $\Gamma$  the area  $S$  of which is different from zero and  $g(k, y, \varepsilon) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ :  $\varepsilon$  is the damping of an elastic structure and  $\zeta$  is the normalised acoustic impedance of the internal wall of the cavity. Parameters  $\varepsilon$  et  $\frac{1}{\zeta}$  are small and real. Thanks to a proper modal expansion, an integral relation between  $u$ ,  $\zeta$ ,  $\varepsilon$  and  $g$  is built to the first order  $\vartheta(\frac{1}{\zeta}, \varepsilon)$  in  $\frac{1}{\zeta}$  and  $\varepsilon$ , using the residues theorem. The result is the solution to problem (1). A less elaborate version is included in the publication [6] relating to the transmission of sound inside a cavity.

*Keywords*: Interior Helmholtz problem; Integral formulation; Neumann modes; Acoustic impedance; Fluid structure coupling

---

<sup>1</sup> *dominique.micky.brenot@gmail.com, +33 6 38 60 65 01*

## Abridged English version

The eigenvalues  $-\kappa_n^2$  of (2) are real and the set  $u_n$  constitutes an orthonormal basis in the Sobolev space  $H^1(\Omega)$  [3]. The Green function  $G^\zeta$  (4) associated with the problem (1) can be expanded [4] in the biorthogonal set of eigenvectors  $w_n$  and  $v_n$  of the associated homogeneous problem (5) and its adjoint problem (6). Therefore, the solution of (1) can be written as (8), expression in which every mode  $w_n(x)$  can be expressed as (9). The eigenvalues of (5),  $-\kappa_n^2$ , counted with their multiplicity order, tend towards  $-\kappa_n^2$  when  $\frac{1}{|\zeta|} \rightarrow 0$ , and are complex: (17) gives their imaginary parts. Every mode  $w_n$  of (5) verifies (21). The solution of (1) can thus be written as (22). A simple application of the Green formula to (1) and  $\left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)$  leads to (23). Expression (24) results directly from (22) and (23). The Fourier transform (26) of the left hand side of (24) gives poles (27), of which the inverse Fourier transform (28) leads to (29), showing that the resonances of the cavity cannot be produced but by the resonances of the structure. Manipulations (30) and (31) of (29) allows (32) to be obtained, using approximations (19) and (20) and the resonance (33). A double summation on indices  $m$  and  $n$  of the projections on the basis  $\{w_n\}, \{g_m\}$  yield the solution (34) of the problem (1).

## 1 Formulation modale

L'unicité du problème de Helmholtz intérieur, avec une paroi absorbante [1] :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{ik}{\zeta} u\right) = g \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

est démontrée dans [2]. Les valeurs propres,  $-\kappa_n^2$ , comptées avec leur ordre de multiplicité, du problème de Neumann homogène:

$$\begin{cases} \Delta u_n + \kappa_n^2 u_n = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2)$$

sont purement réelles et les modes propres associés  $u_n^{L^2}$ , normalisés dans  $L^2(\Omega)$ , permettent de constituer une base orthonormale de  $H^1(\Omega)$  [3], soit  $u_n^{H^1} = (\kappa_n^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} u_n^{L^2}$  pour le produit scalaire:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} u \bar{v} dx + \sum_{i=1}^{i=3} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\bar{\partial v}}{\partial x_i} dx. \quad (3)$$

Pour le vérifier, il suffit d'utiliser la formule de Green, pour calculer le produit scalaire

$$\begin{aligned} a(u_n^{H^1}, u_p^{H^1}) &= \int_{\Omega} u_n^{H^1} \overline{u_p^{H^1}} dx + \sum_{i=1}^{i=3} \int_{\Omega} \frac{\partial u_n^{H^1}}{\partial x_i} \frac{\overline{\partial u_p^{H^1}}}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \Delta u_n^{H^1} \overline{u_p^{H^1}} dx + \int_{\Omega} u_n^{H^1} \overline{\Delta u_p^{H^1}} dx \\ &= (\kappa_n^2 + 1) \int_{\Omega} u_n^{H^1} \overline{u_p^{H^1}} dx = (\kappa_n^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (\kappa_p^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \int_{\Omega} u_n^{L^2} \overline{u_p^{L^2}} dx = \delta_n^p. \end{aligned}$$

La fonction de Green du problème (1) vérifie formellement

$$\begin{cases} \Delta G^\zeta + k^2 G^\zeta = -\delta(x-y), \\ \left( \frac{\partial G^\zeta}{\partial n} - \frac{ik}{\zeta} G^\zeta \right) \Big|_\Gamma = 0 \end{cases} \quad (4)$$

et se décompose dans les séries bisorthogonales des fonctions propres du problème homogène associé et de son adjoint [4] :

$$\begin{cases} \Delta w_n + k_n^2 w_n = 0, \\ \left( \frac{\partial w_n}{\partial n} - \frac{ik_n}{\zeta} w_n \right) \Big|_\Gamma = 0, \end{cases} \quad (5) \quad \begin{cases} \Delta v_n + \bar{k}_n^2 v_n = 0, \\ \left( \frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{i\bar{k}_n}{\bar{\zeta}} v_n \right) \Big|_\Gamma = 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$G^\zeta(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{w_n(x) \bar{v}_n(y)}{(k_n - k) (\bar{k}_n + k)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{w_n(x) w_n(y)}{(k_n - k) (\bar{k}_n + k)}. \quad (7)$$

Le comportement spectral associe deux fréquences de résonance de signe opposé ( $\pm \kappa_n$ ) et une même partie imaginaire, la transformée de Fourier de l'ensemble constituant une sinusoïde amortie :  $k_n = \kappa_n - \frac{i}{2\zeta}$  ;  $-\bar{k}_n = -\kappa_n - \frac{i}{2\bar{\zeta}}$ , comme nous le vérifierons ci-dessous.

La solution de (1) est donc

$$u(x, k) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\int_\Gamma g(s, k) w_n(s) d\gamma(s)}{(k_n - k) (\bar{k}_n + k)} w_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k) w_n(x), \quad (8)$$

expression dans laquelle chaque mode  $w_n(x)$  peut encore s'écrire, dans  $H^1(\Omega)$ ,

$$w_n(x) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a(w_n, u_p^{H^1}) u_p^{H^1}(x) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \left( \int_\Omega w_n \overline{u_p^{H^1}} dx \right) \overline{u_p^{H^1}}(x). \quad (9)$$

La forme sesquilinéaire qui régit la formulation variationnelle de (5) :

$$\sum_{i=1}^{i=3} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx - ik \int_\Gamma \frac{u \bar{v}}{\zeta} = 0, \quad (10)$$

est  $H^1(\Omega)$  elliptique mais non hermitienne [5]. Ses valeurs propres  $-k_n^2$  qui, comptées avec leur ordre de multiplicité, tendent vers  $-\kappa_n^2$ , lorsque  $\frac{1}{|\zeta|} \rightarrow 0$ , sont donc complexes. Une application de la formule de Green à (2) et (5) :

$$(k_n^2 - \kappa_p^2) \int_\Omega w_n \bar{u}_p dx + ik_n \int_\Gamma \frac{w_n \bar{u}_p}{\zeta} d\gamma = 0, \quad (11)$$

montre que

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \kappa_n^2 \rightarrow \kappa_n^2 \neq \kappa_p^2}} \int_\Omega w_n \bar{u}_p dx = \frac{k_n}{k_n^2 - \kappa_p^2} \times \vartheta\left(\frac{1}{|\zeta|}\right), \quad (12)$$

et la série (9) tendra donc, au premier ordre en  $\frac{1}{|\zeta|}$ , vers une combinaison linéaire finie  $\Sigma u_n$  de vecteurs propres  $u_n$ , elle-même vecteur propre associé à la même valeur propre  $-\kappa_n^2$ . Il résulte de (11) que cette combinaison linéaire  $\Sigma u_n$  vérifie, au premier ordre en  $\frac{1}{|\zeta|}$ ,

$$(k_n^2 - \kappa_n^2) \int_{\Omega} w_n \overline{\Sigma u_n} dx + i k_n \int_{\Gamma} \frac{w_n \overline{\Sigma u_n}}{\zeta_n} d\gamma = 0, \quad (13)$$

ce qui permet d'estimer la partie imaginaire de  $k_n^2$  et, par analogie avec la structure, de définir l'amortissement du mode  $n$  (partie imaginaire de  $k_n$ ) ne dépendant que du nombre d'onde modal et pas de la forme modale :

$$k_n^2 - \kappa_n^2 = \frac{-i k_n \int_{\Gamma} |\Sigma u_n|^2 d\gamma}{\zeta_n \int_{\Omega} |\Sigma u_n|^2 dx} = -\frac{i k_n}{\zeta}. \quad (14)$$

Mais cette approximation est d'ordre  $\frac{1}{|\zeta|}$ . Il n'est donc pas inutile de la vérifier par l'utilisation de la formule de Green appliquée à (5) et (6) :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\Delta w_n \overline{w_n} + k_n^2 w_n \overline{w_n} - \Delta \overline{w_n} w_n - \overline{k_n^2} \overline{w_n} w_n) dx = (k_n^2 - \overline{k_n^2}) \int_{\Omega} w_n \overline{w_n} dx + \frac{i}{\zeta} (k_n + \overline{k_n}) \int_{\Gamma} w_n \overline{w_n} d\gamma \\ &= (k_n + \overline{k_n}) \left( (k_n - \overline{k_n}) \int_{\Omega} w_n \overline{w_n} dx + \frac{i}{\zeta} \int_{\Gamma} w_n \overline{w_n} d\gamma \right), \end{aligned} \quad (15)$$

ce qui donne :

$$(k_n - \overline{k_n}) = 2 \operatorname{Im}(k_n) = -\frac{i \int_{\Gamma} |w_n|^2 d\gamma}{\zeta_n \int_{\Omega} |w_n|^2 dx} = -\frac{i}{\zeta}. \quad (16)$$

Les solutions de (14) sont donc bien :

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{1}{2} \left( -\frac{i}{\zeta} + \sqrt{\frac{-1}{\zeta^2} + 4 \kappa_n^2} \right) \approx \kappa_n - \frac{i}{2\zeta}; \\ -\overline{k_n} &= -\frac{1}{2} \left( -\frac{i}{\zeta} - \sqrt{\frac{-1}{\zeta^2} + 4 \kappa_n^2} \right) \approx -\kappa_n - \frac{i}{2\zeta}. \end{aligned} \quad (17)$$

En outre le terme  $g(s, k)$  ci-dessus modélise l'accélération d'une coque élastique caractérisée par sa base modale  $\{g_m(s)\}$  associée à ses résonances propres  $\{k_m\}$ , correspondant aux pulsations propres divisées par la vitesse du son par homogénéité avec l'acoustique. Le terme de couplage du mode  $m$  de structure avec le fluide acoustique est inclus dans  $k_m = K_m(-i\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 1}) \cong K_m - i K_m \varepsilon$  et  $-\overline{k_m} = -K_m(i\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 1}) \cong -K_m - i K_m \varepsilon$ , où  $K_m \in \mathbb{R}$ .

Il est utile de rappeler que la densité des modes acoustiques  $N(k_n) = \frac{V(\Omega)}{6\pi^2} k^3$ , fonction du volume de l'ouvert  $\Omega$  et du cube du nombre d'onde, est très élevée. Quant aux modes de structure associés aux nombres d'onde propres  $k_m$ , ils ont beau être moins nombreux, ce sont eux et eux seuls qui excitent les modes de la cavité, car celle-ci ne contient aucune source acoustique.

Nous pouvons définir les termes  $\beta_{n,m}(k)$  par analogie avec le comportement spectral évoqué pour la formule (8) :

$$\alpha_n(k) = - \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{k^2 \int_{\Gamma} g_m(s) w_n(s) d\gamma(s)}{(k_m - k)(k_n - k)(\overline{k_n} + k)(\overline{k_m} + k)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \beta_{m,n} R_{m,n}(k). \quad (18)$$

Seules les résonances de la structure peuvent faire résoner la cavité :

$$k - k_m = \vartheta(\varepsilon). \quad (19)$$

Mais il faut pour cela que les nombres d'onde propres de la cavité soient suffisamment proches :

$$k - k_m = \vartheta(\varepsilon), \quad k_n - k_m = \vartheta\left(\frac{1}{\zeta}, \varepsilon\right). \quad (20)$$

## 2 Formulation intégrale

Une simple application de la formule de Green montre que chaque mode  $w_n$  du système (5) vérifie :

$$w_n(x) = - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k_n}{\zeta} \right) \left( \frac{e^{i k_n |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) w_n(y) d\gamma(y). \quad (21)$$

La solution du problème (1) peut donc s'écrire :

$$u(x, k) = - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k) \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k_n}{\zeta} \right) \left( \frac{e^{i k_n |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) w_n(y) d\gamma(y). \quad (22)$$

Or, toujours par simple application de la formule de Green à (1) :

$$u(x, k) = - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k}{\zeta} \right) \left( \frac{e^{i k |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) u(y, k) d\gamma(y) + \int_{\Gamma} \frac{e^{i k |x-y|}}{4\pi |x-y|} g(y, k) d\gamma(y). \quad (23)$$

Il découle immédiatement de (8), (18), (22) et (23) que :

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} \beta_{m,n} R_{m,n}(k) \int_{\Gamma} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k}{\zeta} \right) \left( \frac{e^{i k |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k_n}{\zeta} \right) \left( \frac{e^{i k_n |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) \right\} w_n(y) d\gamma(y) \\ = \int_{\Gamma} \frac{e^{i k |x-y|}}{4\pi |x-y|} g(y, k) d\gamma(y). \end{aligned} \quad (24)$$

## 3 Relation intégrale entre la trace de $u$ sur $\Gamma$ et $g$ à $\vartheta(\varepsilon, \frac{1}{\zeta})$

Les fonctions de (23) sont toutes holomorphes en  $k$  en dehors des pôles. Elles sont composées d'exponentielles imaginaires ayant en facteurs des fractions rationnelles  $R(k) = \frac{P(k)}{Q(k)}$ , vérifiant la condition  $Degré(Q) \geq Degré(P) + 2$  et relèvent d'une intégrale le long d'un chemin constitué du segment  $[-K, +K]$  et du demi-cercle de centre 0 et de rayon  $K$  parcouru dans le sens direct et sur lequel l'intégrale tend vers 0 lorsque  $K$  tend vers l'infini.  $K$  est choisi assez grand pour inclure les pôles du plan positif correspondant aux fréquences souhaitées. Le théorème des résidus donne le résultat de l'intégrale :

$$2 i \pi \sum Rés(K, z_k) = 2 i \pi \sum \lim_{k \rightarrow k_\nu} (k - k_\nu) R(k). \quad (25)$$

Ainsi chaque coefficient  $R_{n,m}(z)$  défini par (18) est associé à deux pôles,  $z = k_n$  (acoustique) et  $z = k_m$  (structure).

Dans les versions antérieures de cet article, nous avons écrit l'égalité (29) à une convolution par une fenêtre cardinale près. Sa largeur est celle des résonances de la structure, généralement moins étroites que les résonances acoustiques, ce qui permet de lisser les spectres des pressions acoustiques.

Dans cette nouvelle version, nous utilisons une fenêtre qui couvre tout le spectre en nombre d'onde. Il suffit alors de rajouter le terme  $e^{-2i\pi kt}$  pour obtenir dans le domaine temporel les transformées de Fourier des coefficients  $R_{m,n}(k)$  et obtenir ainsi la transformée de Fourier du membre gauche de (24).

Une transformée de Fourier inverse redonnera une expression équivalente dans le domaine fréquentiel (en nombre d'onde).

Donnons la transformée de Fourier du membre de gauche de l'équation (24) :

$$\oint \left\{ \sum_{m,n=-\infty}^{m=+\infty} \beta_{m,n} R_{m,n}(z) \int_{\Gamma} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{iz}{\zeta} \right) \left( \frac{e^{iz|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik_n}{\zeta} \right) \left( \frac{e^{ik_n|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \right\} w_n(y) d\gamma(y) \right\} e^{-2i\pi zt} dz. \quad (26)$$

À l'évidence seuls restent les résidus aux pôles  $z = k_m$  :

$$2i\pi \frac{-k_m^2 \beta_{m,n}}{(k_n - k_m) (\overline{k_n} + k_m) (\overline{k_m} + k_m)} \int_{\Gamma} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik_m}{\zeta} \right) \left( \frac{e^{ik_m|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) w_n(y) d\gamma(y) \right\} e^{-2i\pi k_m t}. \quad (27)$$

Pour revenir dans le domaine des nombres d'onde, il suffit de multiplier  $e^{-2i\pi k_m t}$  par la fonction d'Heaviside  $H(t)$  et  $e^{+2i\pi kt}$  puis d'intégrer l'ensemble de  $-\infty$  à  $+\infty$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t) e^{+2i\pi(k-k_m)t} dt = \left[ \frac{e^{+2i\pi(k-k_m)t}}{2i\pi} \right]_0^{+\infty} \frac{-1}{k-k_m} = \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{k_m - k}, \quad (28)$$

compte tenu de la limite asymptotique vers 0 de  $e^{-2i\pi k_m t}$ .

L'expression temporelle (27) retourne ainsi dans le domaine des nombres d'onde :

$$\frac{-k_m^2 \beta_{m,n}}{(k_m - k) (k_n - k_m) (\overline{k_n} + k_m) (\overline{k_m} + k_m)} \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik_m}{\zeta} \right) \left( \frac{e^{ik_m|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) w_n(y) d\gamma(y). \quad (29)$$

Ce que montre cette dernière équation, c'est que,  $k$  étant un nombre réel, il y aura résonance chaque fois que  $k = K_m$  : elle n'a plus de pôle en  $k_n$ . Nous confirmons ici que seules les résonances

de la structure, et elles seules, excitent la cavité chaque fois que  $k = K_m$  avec  $k_m - K_m = \vartheta(\varepsilon)$ . Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k_m}{\zeta} \right) \left( \frac{e^{i k_m |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) w_n(y) d\gamma(y) \\
&= \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k_m}{\zeta} \right) \left( e^{i(k_m - k_n)|x-y|} \frac{e^{i k_n |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) w_n(y) d\gamma(y) \\
&= \int_{\Gamma} \left( e^{i(k_m - k_n)|x-y|} \right) \left\{ i(k_m - k_n) \left( \frac{\partial(|x-y|)}{\partial n_y} - \frac{1}{\zeta} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k_n}{\zeta} \right) \right\} \left( \frac{e^{i k_n |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) w_n(y) d\gamma(y). \tag{30}
\end{aligned}$$

Le membre de gauche de (24) peut donc se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} \beta_{m,n} R_{m,n}(k) \frac{-k_m^2 (k_n - k) (\overline{k_n} + k) (\overline{k_m} + k)}{-k^2 (k_n - k_m) (\overline{k_n} + k_m) (\overline{k_m} + k_m)} \\
& \int_{\Gamma} \left( e^{-i(k_n - k_m)|x-y|} \right) \left\{ -i(k_n - k_m) \left( \frac{\partial(|x-y|)}{\partial n_y} - \frac{1}{\zeta} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k_n}{\zeta} \right) \right\} \left( \frac{e^{i k_n |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) w_n(y) d\gamma(y). \tag{31}
\end{aligned}$$

Le premier terme du crochet ci-dessus échappe à la résonance. Il est donc négligeable par rapport au second. Pour la même raison  $e^{i(k_n - k_m)|x-y|} \cong 1$  et

$$\begin{aligned}
& \frac{-k_m^2 (k_n - k) (\overline{k_n} + k) (\overline{k_m} + k)}{-k^2 (k_n - k_m) (\overline{k_n} + k_m) (\overline{k_m} + k_m)} \\
&= \frac{k_m^2 (k_n - k) (\overline{k_n} + k_m + \vartheta(\varepsilon, \frac{1}{\zeta})) (\overline{k_m} + k_m + \vartheta(\varepsilon))}{\left( k_m + \vartheta(\varepsilon) \right)^2 (k_n - k_m) (\overline{k_n} + k_m) (\overline{k_m} + k_m)} \\
&= \left( \frac{k_n - k}{k_n - k_m} \right) \frac{\left( 1 + \frac{\vartheta(\varepsilon, \frac{1}{\zeta})}{\overline{k_n} + k_m} \right) \left( 1 + \frac{\vartheta(\varepsilon)}{\overline{k_m} + k_m} \right)}{\left( 1 + \frac{\vartheta(\varepsilon)}{k_m} \right)^2} \cong \left( \frac{k_n - k}{k_n - k_m} \right) + \vartheta(\varepsilon, \frac{1}{\zeta}) = 1 + \vartheta(\varepsilon, \frac{1}{\zeta}). \tag{32}
\end{aligned}$$

En effet, seuls les modes acoustiques dont le nombre d'onde  $k_n$  est dans la bande passante d'un mode de structure de nombre d'onde  $k_m$  sont excités par ce dernier, du fait de la résonance en

$$\frac{1}{(k_m - k)(k_n - k)}. \tag{33}$$

Une double sommation sur les indices  $m$  et  $n$  de (30) reconstitue alors le membre de gauche de (24), compte tenu de l'équation (22) :

$$u(x, k) = \int_{\Gamma} \frac{e^{i k |x-y|}}{4\pi |x-y|} g(y, k) d\gamma(y) + \vartheta(\varepsilon, \frac{1}{\zeta}). \tag{34}$$



## 4 Remarques

La fonction de Green  $G^\zeta(x, y)$  ainsi que les modes  $u_n$  et  $w_n$  sont dans  $H^1(\Omega)$ . L'opérateur intégral  $\varphi \rightarrow \int_{\Omega} G^\zeta(x, y) \varphi(y) dy$  est un opérateur compact dans  $H^1(\Omega)$ , ce qui permet sa décomposition en série de fonctions propres  $\frac{1}{k_n^2 - k^2} w_n(x) = \int_{\Omega} G^\zeta(x, y) w_n(y) dy$ . C'est une distribution définie par (4), pour une intégrale de Lebesgues et des dérivées au sens faible. Elle contient une singularité en  $\frac{1}{|x-y|}, \forall (x=y) \in \Gamma$ . La série (8), résultant d'une convolution de la distribution  $g \delta(\Gamma)$  par  $G^\zeta$  est fortement convergente puisque la singularité de la fonction de Green a une contribution nulle dans cette convolution : c'est une expression correcte de la solution  $u$  de (1) y compris sur le bord  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$ . Néanmoins, prendre les gradients terme à terme de cette série au sens fort conduit à retrouver les conditions aux limites homogènes :  $\left( \frac{\partial w_n}{\partial n} - \frac{ik}{\zeta} w_n \right) \Big|_{\Gamma} = 0$ . Il en est de même pour la fonction de Green :

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial n_x} - \frac{ik}{\zeta} \varphi \right) \Big|_{\Gamma} = - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G^\zeta}{\partial n_y}(x, y) - \frac{ik}{\zeta} G^\zeta(x, y) \right) \varphi(y) d\gamma(y) = 0, \forall x \in \Gamma.$$

La singularité de  $\frac{\partial G^\zeta}{\partial n_y}$  ne donne en effet aucune contribution, puisque

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^3} (ik|x-y| - 1) (y-x, n_x)$$

est d'ordre  $\frac{1}{|x-y|}$  car  $\frac{(x-y, n_x)}{|x-y|}$  a un zéro simple lorsque  $x \rightarrow y$  sur  $\Gamma$ , le vecteur  $\lim_{x \rightarrow y} \frac{(x-y)}{|x-y|}$  étant orthogonal à  $n_x$ .

## 5 Références

1. **J. P. Dalmont**, Acoustic impedance measurement, Parts I & II, Journal of Sound and Vibration, 243, 427-460, 2001. doi: 10.1006/jsvi.2000.3428 & 3429
2. **A. Bamberger** et **T. Ha Duong**, Diffraction d'une onde acoustique par une paroi absorbante : nouvelles équations intégrales, Rapport interne n°121, Centre de mathématiques appliquées de l'Ecole polytechnique, 91 128 Palaiseau Cedex, 1985
3. **J.L.Lions**, Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique, 91 128 Palaiseau Cedex, 1984
4. **P. M. Morse** and **H. Feshbach**, Methods of theoretical physics, I, Interscience publishers, New York, 1953
5. **J. L. Lions** et **E. Magenes**, Problèmes aux limites non homogènes et applications, I, Dunod, Paris, 1968
6. **D. Brenot**, Sound transmission in an axisymmetric enclosure. Journal of Sound and Vibration, 2005, 287 (1-2), pp.45-75. doi: 10.1016 / j.jsvi.2004.10.048. hal-03650016