



HAL
open science

Helmholtz interior problem: coupling a modal expansion and an integral representation New version

Dominique Brenot

► **To cite this version:**

Dominique Brenot. Helmholtz interior problem: coupling a modal expansion and an integral representation New version. 2024. hal-03649985v2

HAL Id: hal-03649985

<https://hal.science/hal-03649985v2>

Preprint submitted on 20 Apr 2024 (v2), last revised 21 Dec 2024 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Problème de Helmholtz intérieur : analyse modale couplée à une représentation intégrale

Nouvelle version

Dominique Brenot¹

Résumé

Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^3 de frontière Γ . Le problème numéroté (1) dans le texte admet une solution unique dans $H^1(\Omega)$, si $k \in \mathbb{R}$, $R_e(\frac{1}{\zeta}) > 0$ sur une portion de Γ d'aire S non nulle et $g(k, y, \varepsilon) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$: ε correspond à l'amortissement d'une structure élastique et ζ est l'impédance acoustique normalisée de la paroi interne de la cavité. Les paramètres ε et $\frac{1}{\zeta}$ sont petits. Par une décomposition modale adaptée, une relation intégrale entre la trace de u sur Γ , ζ , ε et g , est construite au premier ordre $\mathcal{O}(\frac{1}{\zeta}, \varepsilon)$ en $\frac{1}{\zeta}$ et ε , par l'intermédiaire du théorème des résidus. Il ne s'agit pas d'une équation équivalente au problème, mais d'une étape vers sa résolution, qui a fait l'objet de la publication [6].

Mots-clés : Problème de Helmholtz intérieur ; Formulation intégrale ; Modes de Neumann ; Impédance acoustique ; Couplage fluide structure

Abstract

Helmholtz interior problem: coupling a modal expansion and an integral representation

Let Ω be an opened domain of \mathbb{R}^3 with a boundary Γ . The problem numbered (1) in the text has a unique solution in $H^1(\Omega)$, if $k \in \mathbb{R}$, $R_e(\frac{1}{\zeta}) > 0$ on a part of Γ the area S of which is different from zero and $g(k, y, \varepsilon) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$: ε is the damping of an elastic structure and ζ is the normalised acoustic impedance of the internal wall of the cavity. Parameters ε et $\frac{1}{\zeta}$ are small. Thanks to a proper modal expansion, an integral relation between the trace of u on Γ , ζ , ε and g is built to the first order $\mathcal{O}(\frac{1}{\zeta}, \varepsilon)$ in $\frac{1}{\zeta}$ and ε , using the residues theorem. It is not an equivalent equation to the problem, but just a step towards its resolution, which was the subject of the publication [6].

Keywords: Interior Helmholtz problem; Integral formulation; Neumann modes; Acoustic impedance; Fluid structure coupling

¹201, avenue du Bois de Verrières, 92160, Antony, France, dominique.micky.brenot@gmail.com, +33 6 38 60 65 01

Abridged English version

The eigenvalues $-\gamma_n^2$ of (2) are real and the set u_n constitutes an orthonormal basis in the Sobolev space $H^1(\Omega)$ [3]. The Green function G^ζ (4) associated with the problem (1) can be expanded [4] in the biorthogonal set of eigenvectors w_n and v_n of the associated homogeneous problem (5) and its adjoint problem (6). Therefore, the solution of (1) can be written as (8), expression in which every mode $w_n(x)$ can be expressed as (9). The eigenvalues of (5), $-k_n^2$, counted with their multiplicity order, tend towards $-\gamma_n^2$ when $\frac{1}{|\zeta|} \rightarrow 0$, and are complex: (14) gives their imaginary parts. Every mode w_n of (5) verifies (15). The solution of (1) can thus be written as (16). A simple application of the Green formula to (9) and $\left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)$ leads to (17). (18) results directly from (16) and (17). Double summation defines the projections of two forms of the solution (19) and (20) on the basis $\{w_n\}$. The residue theorem gives a residue for each of the indices m and n . The comparison of (22) and (23) using (28) yield (29).

1 Formulation modale

L'unicité du problème de Helmholtz intérieur, avec une paroi absorbante [1] :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{ik}{\zeta} u\right) = g \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

est démontrée dans [2]. Les valeurs propres, $-\gamma_n^2$, comptées avec leur ordre de multiplicité, du problème de Neumann homogène:

$$\begin{cases} \Delta u_n + \gamma_n^2 u_n = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2)$$

sont purement réelles et les modes propres associés $u_n^{L^2}$, normalisés dans $L^2(\Omega)$, permettent de constituer une base orthonormale de $H^1(\Omega)$ [3], soit $u_n^{H^1} = (\gamma_n^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} u_n^{L^2}$ pour le produit scalaire:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} u \bar{v} dx + \sum_{i=1}^{i=3} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx. \quad (3)$$

Pour le vérifier, il suffit d'utiliser la formule de Green, pour calculer le produit scalaire

$$\begin{aligned} a(u_n^{H^1}, u_p^{H^1}) &= \int_{\Omega} u_n^{H^1} \overline{u_p^{H^1}} dx + \sum_{i=1}^{i=3} \int_{\Omega} \frac{\partial u_n^{H^1}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{u_p^{H^1}}}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \Delta u_n^{H^1} \overline{u_p^{H^1}} dx + \int_{\Omega} u_n^{H^1} \overline{\Delta u_p^{H^1}} dx \\ &= (\gamma_n^2 + 1) \int_{\Omega} u_n^{H^1} \overline{u_p^{H^1}} dx = (\gamma_n^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (\gamma_p^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \int_{\Omega} u_n^{L^2} \overline{u_p^{L^2}} dx = \delta_n^p. \end{aligned}$$

La fonction de Green du problème (1) vérifie formellement

$$\begin{cases} \Delta G^\zeta + k^2 G^\zeta = -\delta(x-y), \\ \left(\frac{\partial G^\zeta}{\partial n} - \frac{ik}{\zeta} G^\zeta\right)\Big|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

et se décompose dans les séries bisorthogonales des fonctions propres du problème homogène associé et de son adjoint [4] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w_n + k_n^2 w_n = 0, \\ \left(\frac{\partial w_n}{\partial n} - \frac{ik_n}{\zeta} w_n \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \end{array} \right. \quad (5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta v_n + \bar{k}_n^2 v_n = 0, \\ \left(\frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{i\bar{k}_n}{\bar{\zeta}} v_n \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \end{array} \right. \quad (6)$$

$$G^\zeta(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{w_n(x) \bar{v}_n(y)}{(k_n - k) (\bar{k}_n + k)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{w_n(x) w_n(y)}{(k_n - k) (\bar{k}_n + k)}. \quad (7)$$

Le comportement spectral associe deux fréquences de résonance de signe opposé ($\pm\gamma_n$) et une même partie imaginaire, la transformée de Fourier de l'ensemble constituant une sinusoïde amortie : $k_n = \gamma_n - \frac{i}{2\zeta_n}$; $-\bar{k}_n = -\gamma_n - \frac{i}{2\bar{\zeta}_n}$, comme nous le vérifierons ci-dessous.

La solution de (1) est donc

$$u(x, k, \varepsilon, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\int_{\Gamma} g(y, k, \varepsilon) w_n(y) d\gamma(y)}{(k_n - k) (\bar{k}_n + k)} w_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k, \varepsilon, \zeta) w_n(x), \quad (8)$$

expression dans laquelle chaque mode $w_n(x)$ peut encore s'écrire, dans $H^1(\Omega)$,

$$w_n(x) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a(w_n, u_p^{H^1}) u_p^{H^1}(x) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \left(\int_{\Omega} w_n \overline{u_p^{H^1}} dx \right) \overline{u_p^{H^1}}(x). \quad (9)$$

La forme sesquilinéaire qui régit la formulation variationnelle de (5) :

$$\sum_{i=1}^{i=3} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx - ik \int_{\Gamma} \frac{u \bar{v}}{\zeta} = 0, \quad (10)$$

est $H^1(\Omega)$ elliptique mais non hermitienne [5]. Ses valeurs propres $-k_n^2$ qui, comptées avec leur ordre de multiplicité, tendent vers $-\gamma_n^2$, lorsque $\frac{1}{|\zeta|} \rightarrow 0$, sont donc complexes. Une application de la formule de Green à (2) et (5) :

$$(k_n^2 - \gamma_p^2) \int_{\Omega} w_n \overline{u_p} dx + ik_n \int_{\Gamma} \frac{w_n \overline{u_p}}{\zeta} d\gamma = 0, \quad (11)$$

montre que

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ k_n^2 \rightarrow \gamma_n^2 \neq \gamma_p^2}} \int_{\Omega} w_n \overline{u_p} dx = \frac{k_n}{k_n^2 - \gamma_p^2} \times \mathfrak{D}\left(\frac{1}{|\zeta|}\right), \quad (12)$$

et la série (9) tendra donc, au premier ordre en $\frac{1}{|\zeta|}$, vers une combinaison linéaire finie Σu_n de vecteurs propres u_n , elle-même vecteur propre associé à la même valeur propre $-\gamma_n^2$. Il résulte de (11) que cette combinaison linéaire Σu_n vérifie, au premier ordre en $\frac{1}{|\zeta|}$,

$$(k_n^2 - \gamma_n^2) \int_{\Omega} w_n \overline{\Sigma u_n} dx + ik_n \int_{\Gamma} \frac{w_n \overline{\Sigma u_n}}{\zeta} d\gamma = 0, \quad (13)$$

ce qui permet de définir l'amortissement du mode n et d'estimer la partie imaginaire de k_n^2 :

$$k_n^2 - \gamma_n^2 = \frac{-ik_n}{\zeta} \frac{\int_{\Gamma} |\Sigma u_n|^2 d\gamma}{\int_{\Omega} |\Sigma u_n|^2 dx} = -\frac{ik_n}{\zeta_n}. \quad (14)$$

Mais cette approximation est d'ordre $\frac{1}{|\zeta|}$. Il n'est donc pas inutile de la vérifier par l'utilisation de la formule de Green appliquée à (5) et (6) :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\Delta w_n \bar{w}_n + k_n^2 w_n \bar{w}_n - \Delta \bar{w}_n w_n - \bar{k}_n^2 \bar{w}_n w_n) dx = (k_n^2 - \bar{k}_n^2) \int_{\Omega} w_n \bar{w}_n dx + \frac{i}{\zeta} (k_n + \bar{k}_n) \int_{\Gamma} w_n \bar{w}_n d\gamma \\ &= (k_n + \bar{k}_n) \left((k_n - \bar{k}_n) \int_{\Omega} w_n \bar{w}_n dx + \frac{i}{\zeta} \int_{\Gamma} w_n \bar{w}_n d\gamma \right), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$(k_n - \bar{k}_n) = 2 \operatorname{Im}(k_n) = -\frac{i}{\zeta} \frac{\int_{\Gamma} |w_n|^2 d\gamma}{\int_{\Omega} |w_n|^2 dx} = -\frac{i}{\zeta_n}.$$

Les solutions de (14) sont donc bien :

$$k_n = \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{\zeta_n} + \sqrt{\frac{-1}{\zeta_n^2} + 4\gamma_n^2} \right) \approx \gamma_n - \frac{i}{2\zeta_n}; \quad -\bar{k}_n = -\frac{1}{2} \left(-\frac{i}{\zeta_n} - \sqrt{\frac{-1}{\zeta_n^2} + 4\gamma_n^2} \right) \approx -\gamma_n - \frac{i}{2\zeta_n}.$$

2 Formulation intégrale

Une simple application de la formule de Green montre que chaque mode w_n du système (9) vérifie :

$$w_n(x) = - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik_n}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{ik_n|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) w_n(y) d\gamma(y). \quad (15)$$

La solution du problème (1) peut donc s'écrire :

$$u(x, k, \varepsilon, \zeta) = - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k, \varepsilon, \zeta) \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik_n}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{ik_n|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) w_n(y) d\gamma(y). \quad (16)$$

Or, toujours par simple application de la formule de Green à (1) :

$$u(x, k, \varepsilon, \zeta) = - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) u(y, k, \varepsilon, \zeta) d\gamma(y) + \int_{\Gamma} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} g(y, k, \varepsilon) d\gamma(y). \quad (17)$$

Il découle immédiatement de (16) et (17) que :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k, \varepsilon, \zeta) \int_{\Gamma} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik_n}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{ik_n|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \right\} w_n(y) d\gamma(y)$$

$$= \int_{\Gamma} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} g(y, k, \varepsilon) d\gamma(y). \quad (18)$$

Pour comparer

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k, \varepsilon, \zeta) \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik_n}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{ik_n|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) w_n(y) d\gamma(y) \quad (19)$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k, \varepsilon, \zeta) \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) w_n(y) d\gamma(y) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k, \varepsilon, \zeta) \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik}{\zeta} \right) \left(e^{i(k-k_n)|x-y|} \frac{e^{ik_n|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) w_n(y) d\gamma(y) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n(k, \varepsilon, \zeta) \int_{\Gamma} \left\{ (i(k-k_n) \left(\frac{\partial(|x-y|)}{\partial n_y} - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right. \\ & \quad \left. + (e^{i(k-k_n)|x-y|}) \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik_n}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{ik_n|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \right\} w_n(y) d\gamma(y), \quad (20) \end{aligned}$$

notons que les termes $\alpha_n(k, \varepsilon, \zeta)$ sont, par analogie avec le comportement spectral évoqué pour la formule (8), de la forme :

$$\alpha_n(k, \varepsilon, \zeta) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{k^2 \int_{\Gamma} g_m(y) w_n(y) d\gamma(y)}{(k-k_m)(k+\bar{k}_m)} \frac{1}{(k_n-k)(\bar{k}_n+k)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \alpha_{n,m}(k, \varepsilon, \zeta), \quad (21)$$

puisque $g(y, k, \varepsilon)$ modélise l'accélération d'une coque élastique ; par homogénéité avec l'acoustique, les pulsations de la structure doivent être divisées par la vitesse du son. Le terme de couplage du mode m de structure avec le fluide acoustique est inclus dans $k_m = K_m(-i\varepsilon_m + \sqrt{\varepsilon_m^2 + 1}) \cong K_m - iK_m\varepsilon_m$ et $\bar{k}_m = -K_m(-i\varepsilon_m + \sqrt{\varepsilon_m^2 + 1}) \cong -K_m - iK_m\varepsilon_m$, où $K_m \in \mathbb{R}$. Les expressions (19) et (20) sont donc constituées d'une somme double sur les indices m et n .

3 Relation intégrale entre la trace de u sur Γ , ζ , ε et g , au premier ordre $\mathfrak{D}(\frac{1}{\zeta}, \varepsilon)$

Les fonctions des expressions (19) et (20) sont toutes holomorphes en k en dehors des pôles. Elles sont composées d'exponentielles imaginaires ayant en facteurs des fractions rationnelles $R(k) = \frac{P(k)}{Q(k)}$, vérifiant la condition Degré $Q \geq$ Degré $P+2$ et relèvent d'une intégrale le long d'un chemin constitué du segment $[-K, +K]$ et du demi-cercle de centre 0 et de rayon K parcouru dans le sens direct et sur lequel l'intégrale tend vers 0 lorsque K tend vers l'infini. K est choisi assez grand pour inclure les pôles du plan positif correspondant aux fréquences souhaitées. Le théorème des résidus donne le résultat de l'intégrale : $2\pi i \sum \text{Rés}(K, z_k) = \lim_{k \rightarrow k_v} (k - k_v) R(k)$.

Ainsi chaque coefficient $\alpha_{n,m}(z, \varepsilon, \zeta)$ est associé à deux pôles, $z = k_n$ (acoustique) et $z = k_m$ (structure), définis par $g(y, k, \varepsilon)$ (21) et associés à deux résidus. Comparons leur effet sur la somme double de l'expression (19)

$$\oint \alpha_{n,m}(z, \varepsilon, \zeta) \left\{ \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k_n}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{i k_n |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) w_n(y) d\gamma(y) \right\} dz, \quad (22)$$

avec celui sur la somme double de l'expression (20), qui s'écrit de façon analogue :

$$\begin{aligned} & \oint \alpha_{n,m}(z, \varepsilon, \zeta) \left\{ \int_{\Gamma} \left\{ (i(z - k_n) \left(\frac{\partial(|x-y|)}{\partial n_y} - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{e^{iz|x-y|}}{4\pi |x-y|} \right. \right. \\ & \left. \left. + (e^{i(z-k_n)|x-y|}) \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k_n}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{i k_n |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) \right\} w_n(y) d\gamma(y) \right\} dz, \quad (23) \end{aligned}$$

À un nombre d'onde k donné, les termes qui contribuent de façon non négligeable dans (22) et (23) étant ceux pour lesquels

$$k - k_n = \vartheta\left(\frac{1}{\zeta_n}\right), \quad k - k_m = \vartheta(\varepsilon_m), \quad k_n - k_m = \vartheta\left(\frac{1}{\zeta_n}, \varepsilon_m\right), \quad (24)$$

nous obtenons, respectivement pour chacune de ces deux expressions, les résidus aux pôles $z = k_n$ et $z = k_m$:

$$\begin{aligned} & \vartheta\left(\frac{1}{\zeta}, \varepsilon\right) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k_n}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{i k_n |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) \frac{w_n(y)}{(k_n - k_m)} d\gamma(y) \\ & \left(\frac{k_n^2 \int_{\Gamma} g_m(y) w_n(y) d\gamma(y)}{(\overline{k_n} + k_n)(k_n + \overline{k_m})} + \frac{k_m^2 \int_{\Gamma} g_m(y) w_n(y) d\gamma(y)}{(\overline{k_n} + k_m)(k_m + \overline{k_m})} \right) \\ & = \vartheta\left(\frac{1}{\zeta}, \varepsilon\right) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k_n}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{i k_n |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) \frac{w_n(y)}{(k_n - k_m)} d\gamma(y) \\ & \left(\frac{k_n^2}{(\overline{k_n} + k_n)(k_n + \overline{k_m})} + \frac{k_m^2}{(\overline{k_n} + k_m)(k_m + \overline{k_m})} \right) \times \left(\int_{\Gamma} g_m(y) w_n(y) d\gamma(y) \right) \quad (25) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \vartheta\left(\frac{1}{\zeta}, \varepsilon\right) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k_n}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{i k_n |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) \frac{w_n(y)}{(k_n - k_m)} d\gamma(y) \\ & \left(\frac{k_n^2 e^{i(k_n - k_n)|x-y|} \int_{\Gamma} g_m(y) w_n(y) d\gamma(y)}{(\overline{k_n} + k_n)(k_n + \overline{k_m})} + \frac{k_m^2 e^{i(k_m - k_n)|x-y|} \int_{\Gamma} g_m(y) w_n(y) d\gamma(y)}{(\overline{k_n} + k_m)(k_m + \overline{k_m})} \right) \\ & - \left(\int_{\Gamma} (i(k_m - k_n) \left(\frac{\partial(|x-y|)}{\partial n_y} - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{e^{i k_m |x-y|}}{4\pi |x-y|} w_n(y) d\gamma(y) \right) \left(\frac{k_m^2 \int_{\Gamma} g_m(y) w_n(y) d\gamma(y)}{(\overline{k_n} + k_m)(k_m + \overline{k_m})} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \vartheta\left(\frac{1}{\zeta}, \varepsilon\right) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k_n}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{i k_n |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) \frac{w_n(y)}{(k_n - k_m)} d\gamma(y) \\
&\quad \left(\frac{k_n^2}{(\overline{k_n} + k_n)(k_n + \overline{k_m})} + \frac{k_m^2 e^{i(k_m - k_n)|x-y|}}{(\overline{k_n} + k_m)(k_n + \overline{k_m})} \right) \left(\int_{\Gamma} g_m(y) w_n(y) d\gamma(y) \right) \\
&\quad - \left(\int_{\Gamma} i(k_m - k_n) \left(\frac{\partial(|x-y|)}{\partial n_y} - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{e^{i k_m |x-y|}}{4\pi |x-y|} w_n(y) d\gamma(y) \right) \left(\frac{k_m \int_{\Gamma} g_m(y) w_n(y) d\gamma(y)}{2(k_n + \overline{k_m})} \right). \quad (26)
\end{aligned}$$

Si l'on ne s'intéresse qu'aux résonances, sans pour autant que les nombres d'onde soient grands, le terme de la dernière ligne de (26) devient doublement négligeable, d'une part parce que non seulement il n'est pas affecté par une résonance en $\frac{1}{(k_n - k_m)}$ (d'autant plus marquée que ε_m et $\frac{1}{\zeta_n}$ tendent vers 0) mais encore parce qu'il est affecté par le produit $(k_m - k_n)$ et d'autre part parce qu'il est d'ordre 0 en k, k_n, k_m . Nous pouvons alors considérer que l'intégrande de (25) s'obtient à partir de celle de (26) par un coefficient multiplicatif, qui ne fait plus intervenir l'intégrale portant sur le produit d'un mode de structure par la trace d'un mode acoustique sur le bord Γ , qui s'écrit :

$$\left(\frac{1 + \frac{k_m^2 (\overline{k_n} + k_n)(k_n + \overline{k_m})}{k_n^2 (\overline{k_n} + k_m)(k_m + \overline{k_m})} e^{i(k_m - k_n)|x-y|}}{1 + \frac{k_m^2 (\overline{k_n} + k_n)(k_n + \overline{k_m})}{k_n^2 (\overline{k_n} + k_m)(k_m + \overline{k_m})}} \right)^{-1}. \quad (27)$$

Lorsque $\zeta_n \rightarrow \infty$, $\varepsilon_m \rightarrow 0$, les valeurs de k_n et k_m qui contribuent doivent être suffisamment proches pour atteindre la résonance et l'on peut alors écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k_m^2 (\overline{k_n} + k_n)(k_n + \overline{k_m})}{k_n^2 (\overline{k_n} + k_m)(k_m + \overline{k_m})} \cong 1 \\ k_m - k_n = K_m - \gamma_n + i \left(K_m \varepsilon_m + \frac{1}{2\zeta_n} \right) \cong i \left(K_m \varepsilon_m + \frac{1}{2\zeta_n} \right), \\ e^{i(k_m - k_n)|x-y|} \cong e^{-\left(K_m \varepsilon_m + \frac{1}{2\zeta_n} \right) |x-y|}. \end{array} \right. \quad (28)$$

Il suffit donc d'introduire le facteur multiplicatif $2 \left(1 + e^{-\left(k \varepsilon + \frac{1}{2\zeta} \right) |x-y|} \right)^{-1}$ dans (20) pour obtenir (26) : le théorème des résidus redistribuera à chaque mode le facteur résonant qui le concerne, ce qui n'interdit pas de considérer que les paramètres ε et ζ dépendent du nombre d'onde k considéré. Une sommation sur tous les résidus dans (22) et (23) permet une recombinaison de tous les modes acoustiques prépondérants, qui conduit à exprimer la relation (18) sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma} \left(1 - 2 \left(1 + e^{-\left(k \varepsilon + \frac{1}{2\zeta} \right) |x-y|} \right)^{-1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{i k}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{i k |x-y|}}{4\pi |x-y|} \right) u(y, k, \varepsilon, \zeta) d\gamma(y) \\
&= \int_{\Gamma} \frac{e^{i k |x-y|}}{4\pi |x-y|} g(y, k, \varepsilon) d\gamma(y) + \vartheta\left(\frac{1}{\zeta}, \varepsilon\right). \quad (29)
\end{aligned}$$

4 Remarques

La fonction de Green $G^\zeta(x, y)$ ainsi que les modes u_n et w_n sont dans $H^1(\Omega)$. L'opérateur intégral $\varphi \rightarrow \int_{\Omega} G^\zeta(x, y) \varphi(y) dy$ est un opérateur compact dans $H^1(\Omega)$, ce qui permet sa décomposition en série de fonctions propres $\frac{1}{k_n^2 - k^2} w_n(x) = \int_{\Omega} G^\zeta(x, y) w_n(y) dy$. C'est une distribution définie par [4], pour une intégrale de Lebesgues et des dérivées au sens faible. Elle contient une singularité en $\frac{1}{|x-y|}$, $\forall (x=y) \in \Gamma$. La série (8), résultant d'une convolution de la distribution $g \delta(\Gamma)$ par G^ζ est fortement convergente puisque la singularité de la fonction de Green a une contribution nulle dans cette convolution : c'est une expression correcte de la solution u de (1) y compris sur le bord Γ du domaine Ω . Néanmoins, prendre les gradients terme à terme de la série (8) au sens fort conduit à retrouver les conditions aux limites homogènes : $\left(\frac{\partial w_n}{\partial n} - \frac{ik}{\zeta} w_n \right) \Big|_{\Gamma} = 0$. Il en est de même pour la fonction de Green :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_x} - \frac{ik}{\zeta} \varphi \right) \Big|_{\Gamma} = - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial G^\zeta}{\partial n_y}(x, y) - \frac{ik}{\zeta} G^\zeta(x, y) \right) \varphi(y) d\gamma(y) = 0, \forall x \in \Gamma.$$

La singularité de $\frac{\partial G^\zeta}{\partial n_y}$ ne donne en effet aucune contribution, puisque

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^3} (ik|x-y| - 1) (y-x, n_x)$$

est d'ordre $\frac{1}{|x-y|}$ car $\frac{(x-y, n_x)}{|x-y|}$ a un zéro simple lorsque $x \rightarrow y$ sur Γ , le vecteur $\lim_{x \rightarrow y} \frac{(x-y)}{|x-y|}$ étant orthogonal à n_x .

5 Références

1. **J. P. Dalmont**, Acoustic impedance measurement, Parts I & II, Journal of Sound and Vibration, 243, 427-460, 2001. doi: 10.1006/jsvi.2000.3428 & 3429
2. **A. Bamberger** et **T. Ha Duong**, Diffraction d'une onde acoustique par une paroi absorbante : nouvelles équations intégrales, Rapport interne n°121, Centre de mathématiques appliquées de l'Ecole polytechnique, 91 128 Palaiseau Cedex, 1985
3. **J.L.Lions**, Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique, 91 128 Palaiseau Cedex, 1984
4. **P. M. Morse** and **H. Feshbach**, Methods of theoretical physics, I, Interscience publishers, New York, 1953
5. **J. L. Lions** et **E. Magenes**, Problèmes aux limites non homogènes et applications, I, Dunod, Paris, 1968
6. **D. Brenot**, Sound transmission in an axisymmetric enclosure. Journal of Sound and Vibration, 2005, 287 (1-2), pp.45-75. doi: 10.1016 / j.jsvi.2004.10.048. hal-03650016