

11^{ème} Séminaire de l'ATDM
Hammamet, 23 - 26 Mars 2019

**DIALOGUE ENTRE TSD ET TAD POUR
L'ÉLABORATION D'UN PROJET
COLLABORATIF D'ENSEIGNEMENT
DES MATHÉMATIQUES**

Ebauche d'application au cas du chapitre : Nombres réels et suites numériques à l'entrée à l'université



Imène GHEDAMSI
Université de Tunis

& Thomas LECORRE
Université de Cergy-Pontoise

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Contexte de la recherche

Dimension développementale des théories en éducation mathématique
Enjeux des significations fondamentales

Comment engager un processus d'ingénierie en éducation mathématique qui :

- 1) Conduit à un outil/modèle spécifique aux objets en jeu **prêt à être utilisé**/exploité par les enseignants ?
- 2) Permet aux apprenants de structurer les **significations fondamentales** des objets mathématiques en jeu ;

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Contexte de la recherche

Dimension développementale des théories en éducation mathématique

Enjeux des significations fondamentales

Ingénierie : recherche et/ou développement ?

- Ingénierie en Industrie

- Différence entre recherche et développement se situe au niveau de l'"Utilité" (Pas de relation directe à l'Utilité pour la recherche)
- Actuellement, "*the lines are starting to blur between these two terms that historically were well differentiated*" (Machine design, 2014)
- Qu'est ce que ça donne ?

- Ingénierie en Education mathématique

- Distinction ?
- Résultats de la recherche parfois assimilés à des produits de développement
- **TSD** : Progression et contrôle théorique (Avancée de la recherche) ...
- TAD : Collaboration avec les praticiens/futurs praticiens

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Contexte de la recherche

Dimension développementale des théories en éducation mathématique

Enjeux des significations fondamentales

-
- Est-il possible d'identifier les significations fondamentales des objets mathématiques ?
 - Significations par rapport à quoi ? Interne et/ou externe ?
 - Le cas paradigmatique de la limite ?
 - Le cas d'un réseau d'objets mathématiques : Théorèmes fondamentales de l'analyse réelle ...

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

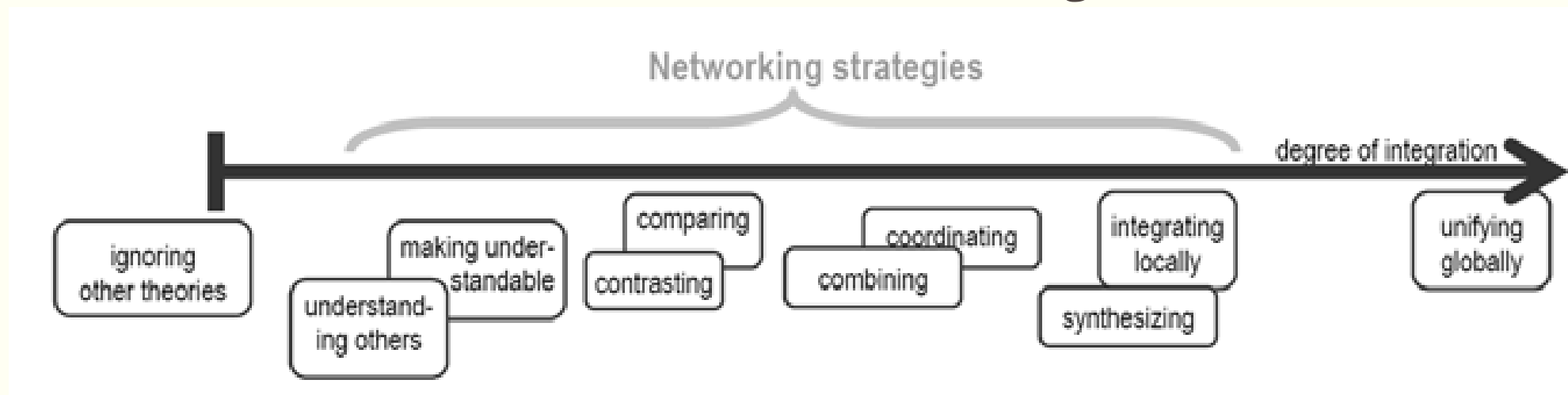
Falsifiabilité et point de vue dynamique
Stratégies de networking
Nouvelle orientation de recherche

- Falsifiabilité
 - Existence potentielle d'observables invalidants (énoncés faux dans M)
 - Fonction critique de l'empirie (moyen de validation des énoncés dans M)
- La question de cohérence (vérité "potentielle"/validité)
 - Non démontrable dans M
 - Existence d'énoncés "indécidables" dans M
 - Qu'est ce qui est expliqué dans M et qu'est ce qui reste à expliquer (peut être ailleurs) ?

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Falsifiabilité et point de vue dynamique
Stratégies de networking
Nouvelle orientation de recherche

- Connexion de modèles : pourquoi ?
 - Communiquer, faire comprendre
 - Capitalisation des résultats de recherche en DM
 - **Cohérence à l'échelle de la discipline DM**
 - Limiter l'inflation théorique en DM
 - **Réformer/faire progresser une théorie**
 - **Guider les recherches de type "design recherche"**
- Connexion de modèles : comment ? (Prediger et al., 2008)



1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Falsifiabilité et point de vue dynamique
Stratégies de networking
Nouvelle orientation de recherche

■ Un enjeu mixte pour cette recherche

- >> Elaborer des "ingénieries" au sein de l'institution et émanant de ses besoins (deux études de cas mis en chantier en parallèle)
- >> Avancer dans la perspective développementale de la TSD

■ Méthode

>> Comparer/contraster la TSD et la TAD : 1) même programme de recherche donc "[...] *each one reinterprets and reformulates the problems raised by the other.*" (Artigue et al., 2010) ; 2) même contexte culturel ; 3) fort ancrage épistémologique

>> Critère de comparaison/contraste : Design-Based Research Methodology

→ Elaborer "*an empirically and theoretically grounded instructional model for mathematics education*"

→ Neutralité théorique (le chercheur choisit ses assises théoriques)

→ Possibilité de mettre en place des variables de comparaison/contraste

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Composantes méthodologiques du DBR

- Reformulation méthodologique en trois étapes
- Variables du networking

■ Consistance méthodologique ?

→ "*Design-based research (DBR) evolved near the beginning of the 21st century and was heralded as a practical research methodology that could effectively bridge the chasm between research and practice in formal education.*" (Anderson et al., 2012)

→ Special issues publiées en 2003 et 2004: *Journal of the learning sciences*, 13 (1); *Educational Researcher*, 32(1); and *Educational Psychologist*, 39 (4).

■ 4 composantes méthodologiques fondamentales

- Décider du choix de *orienting theory* et du *design framework*
- Hypothetical Learning Trajectory (HLT)
- Itération d'un processus cyclique
- Sélection des instruments et techniques de collecte et d'analyse de données.

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Composantes méthodologiques du DBR
Reformulation méthodologique en trois étapes
Variables du networking

- 1^{ère} étape : L'amont
Reformulation du projet (élaborer empiriquement et théoriquement une ID) sous formes de questions dans les termes de la théorie adoptée
- 2^{ème} étape : L'en cours
Développement des séries de HLTs en collaboration entre chercheurs et praticiens
- 3^{ème} étape : L'aval
Evolution des HLTs et perfectionnement de l'ID

Orienting theory (ex. constructivism, semiotics, socio-cultural theories)

Design guidelines framework (ex. design for learning, RME)

Research instruments (ex. task oriented analysis, longitudinal cyclic approach) : HLT/Observed learning

Reflective and Prospective processes
collaboration researchers and practitioners

HLT Elaboration /
Ajustements

Experiments / Analysis
on the fly

Retrospective
analysis

V1: Modelling mathematics to be
learnt and taught
V2: Modelling mathematics learning
and teaching processes

Evolution of HLTs ↔ Local Instructional Model

V3: Design guidelines
V4: Process of implementation

V5: Validity
V6: Transferability

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Etude de V1 et V2

Etude de V3 et V4

Etude de V5 et V6

	TDS	ATD
Global Vision	Socio-constructivist vision of learning and teaching mathematics.	Socio-cultural vision of learning and teaching mathematics.
V1	<p>Fundamental situation related to mathematical object: Mathematical game (or problem). The problem should satisfy the same criteria as those developed in mathematical games theory-basically; mathematical object is not explicitly referenced and must provide an optimal method for solving the problem.</p>	<p>Epistemological Reference Model (ERM) related to mathematical object or domain of objects: Organization of local and regional mathematical praxeologies through sequences of connected mathematical praxeologies (compound of two interrelated blocks- practical and theoretical).</p>

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Etude de V1 et V2

Etude de V3 et V4

Etude de V5 et V6

	TDS	ATD
V1	<p>Fundamental situation related to mathematical object:</p> <p>Formulated by taking into account the sources of the meanings of the mathematical objects ; it defines the conditions for saving these meanings when the MOs are concerned by didactic transposition</p>	<p>Epistemological Reference Model (ERM) related to mathematical object or domain of objects:</p> <p>Formulated by taking into account all the institutions involved in the process of didactic transposition (i.e. the adaptation of mathematical scholarly objects to mathematical objects to be taught and learnt)</p>

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Etude de V1 et V2

Etude de V3 et V4

Etude de V5 et V6

	TDS	ATD
V2	<p>Situation at two levels didactic (situation of institutionalization) and a-didactic (situation of action, situation of formulation, and situation of validation)</p> <p>In the didactic level, the use by the teacher of knowledge developed by the students in the a-didactic level improves learning and its link to the teaching goal</p>	<p>Didactical organization and moments of study</p> <p>The didactical organization (a complex of didactical praxeologies modeling teaching and learning activities) are strongly related to the mathematical organization to implement; each DP is defined by means of the notion of moment of study: exploratory moment, technical moment and technological moment</p>

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Etude de V1 et V2

Etude de V3 et V4

Etude de V5 et V6

Preliminary design	
V3	<p>Researchers: Identification of didactical variables to determine global and local organizations of the design.</p>
	<p>Researchers: Identification of a question with generating power for praxeologies and with significance in the context of students' life.</p>
A priori design	
	<p>Researchers: set the variables at certain values to achieve the learning goal (analysis with the milieu).</p>
	<p>Researcher/Teachers: the question is rarely accompanied by a learning goal.</p>

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Etude de V1 et V2

Etude de V3 et V4

Etude de V5 et V6

	TDS	ATD
V4	<p>Teachers:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) more active role of teachers (manage the values of didactical variables that are already decided without minimizing students' responsibility in generating knowledge), b) gradual change of didactic contract (The teacher should support the change in the didactic contract by strengthening the link between the outcomes of the a-didactic level and the institutionalization level). 	<p>Teachers:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) the distribution of responsibility between teacher and students is continuously renegotiated, b) the access to intermediate answers is mediated by media (books, journals, TV, internet, etc.) and validated with regards to the didactical milieu, c) c) the final answer, if any, must include a learning goal.

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Etude de V1 et V2

Etude de V3 et V4

Etude de V5 et V6

	TDS	ATD
V5	Researchers/Teachers: Testing the learning goal and the validity of the theoretical assumptions of TDS through the actual teaching and learning process	Researchers/Teachers: Testing the actual teaching and learning process.
V6	Reproducibility and paradigmatic didactic contracts	Ecological issues (conditions and constraints; scale of levels of determination)

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Contexte du projet

Regard croisé pour la formulation du problème

Modélisation mathématique : Premiers commentaires

- Le chapitre des nombres réels et suites numériques : Etablir rigoureusement les propriétés des nombres réelles et leurs interprétations en termes de suites numériques.
- La structure du chapitre est fondé sur **l'axiome de la borne supérieure** : Cet axiome en jonction avec les propriétés de corps totalement ordonné achève la construction axiomatique des nombres réels.
- La reste des propriétés en découlent : **Archimède**, densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} et caractérisation par les suites, interprétation par les suites de la borne supérieure (suites monotones et bornées), suites adjacentes (cas des sous-suites paires et impaires), théorème de Bolzano-Weierstrass.
- Ce chapitre nécessite des pratiques spécifiques de la logique mathématique pour établir **l'existence formelle des nombres réels/limites** ou suites abordés par ces propriétés.

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Contexte du projet

Regard croisé pour la formulation du problème

Modélisation mathématique : Premiers commentaires

	TDS	ATD
	In both theories, the case of university mathematics should be particularly addressed as mathematics to be taught is close to scholarly mathematics	
V1	<p>The design of collection of mathematical problem(s)/ towards didactical variables :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) the interrelated properties of real numbers and sequences at the entrance to the university appear as the optimal way to address them; 2) preserve the conditions for saving their meanings at the moment of transposition 	<p>The design of MER/towards central questions :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) the interrelated properties of real numbers and sequences at the entrance to the university appears as an organization of intertwined mathematical praxeologies 2) this model (mathematical praxeologies) is constructed to provide answers to these questions

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Contexte du projet

Regard croisé pour la formulation du problème

Modélisation mathématique : Premiers commentaires

	TDS	ATD
V1	>> The organization of their relationships built upon the expectations of the curriculum (i.e. start with the self-evidence of the continuity principle) does not fit cognitive requirement (spontaneous adoption of Cantor's principle- nested intervals theorem, deserves more attention in the design)	
	>> 1) Metaphor of Infinity/infinitesimals: process that evolves in an ordered string of stages that never ends, but at the same time some sort of conceivable completion of this process is suggested; 2) Role of the formal definition	
	> Deepening insights on the fundamental significances beyond their relationships > But designing a collection of problems that connect rationally these properties remains a real challenge mainly because the didactical variables that may emerge require strong adaptation to the university context	> ERM provides a more global vision of the mathematical contents [...]. In the case of the university, this vision is particularly illuminating > But, the theoretical compounds of the model that is supposed to answer the questions needs to be more highlighted: the questions should necessitate more than practical answers.

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Contexte du projet

Regard croisé pour la formulation du problème

Modélisation mathématique : Premiers commentaires

	TSD	TAD
V1	<p>>> Significations dans la construction des réels</p> <ul style="list-style-type: none"> - Archimède ↔ Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} et place de l'égalité des réels : contourner les problèmes liés aux grandeurs divisibles à l'infini pour calculer ces grandeurs. - Les segments emboîtés et approximations des réels / choix des suites et unicité de la limite - Formalisation : les enjeux de <u>rigueur</u> 	<p>>> Accent sur les "théories" de l'ensemble des nombres réels (structures sémantiques) et l'interprétation de la logique formelle (structures syntaxiques/formules et raisonnements mathématiques) :</p> <p>Approche algébrique (corps totalement ordonné)</p> <p>Approche topologique (topologie de l'ordre, la valeur absolue)</p> <p>....</p>

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Contexte du projet

Regard croisé pour la formulation du problème

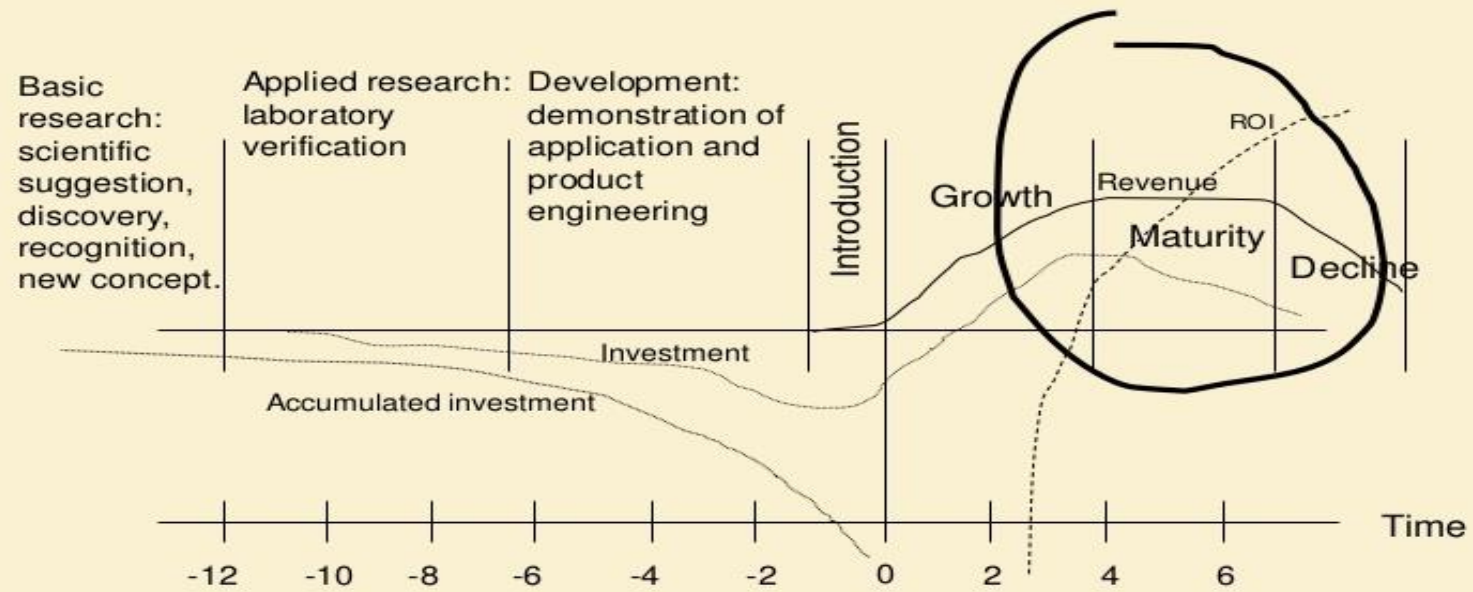
Modélisation mathématique : Premiers commentaires

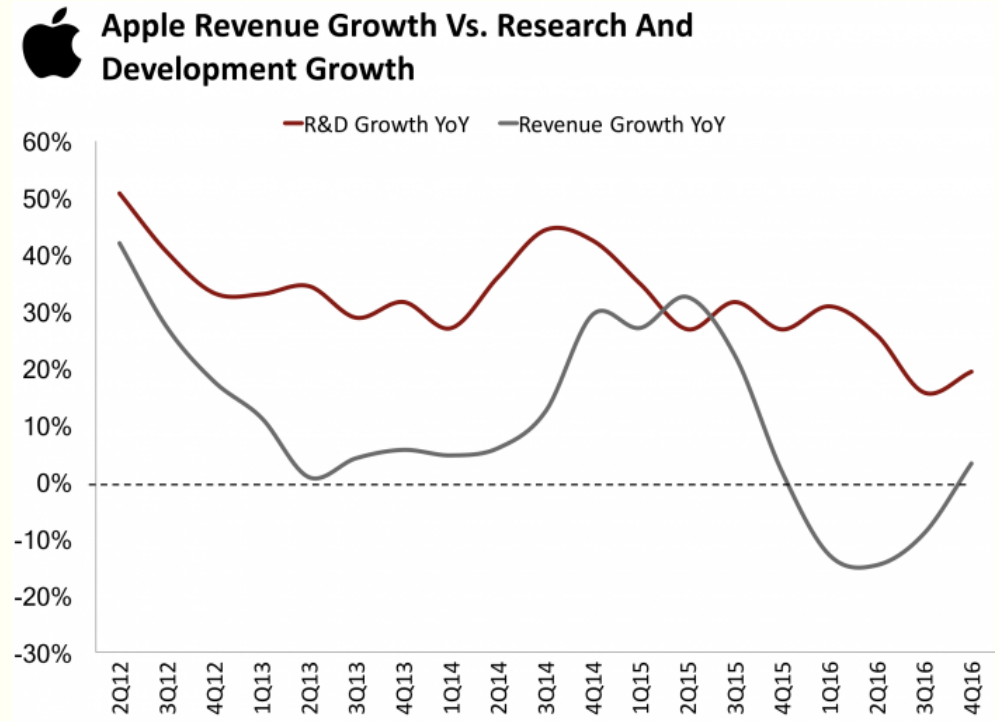
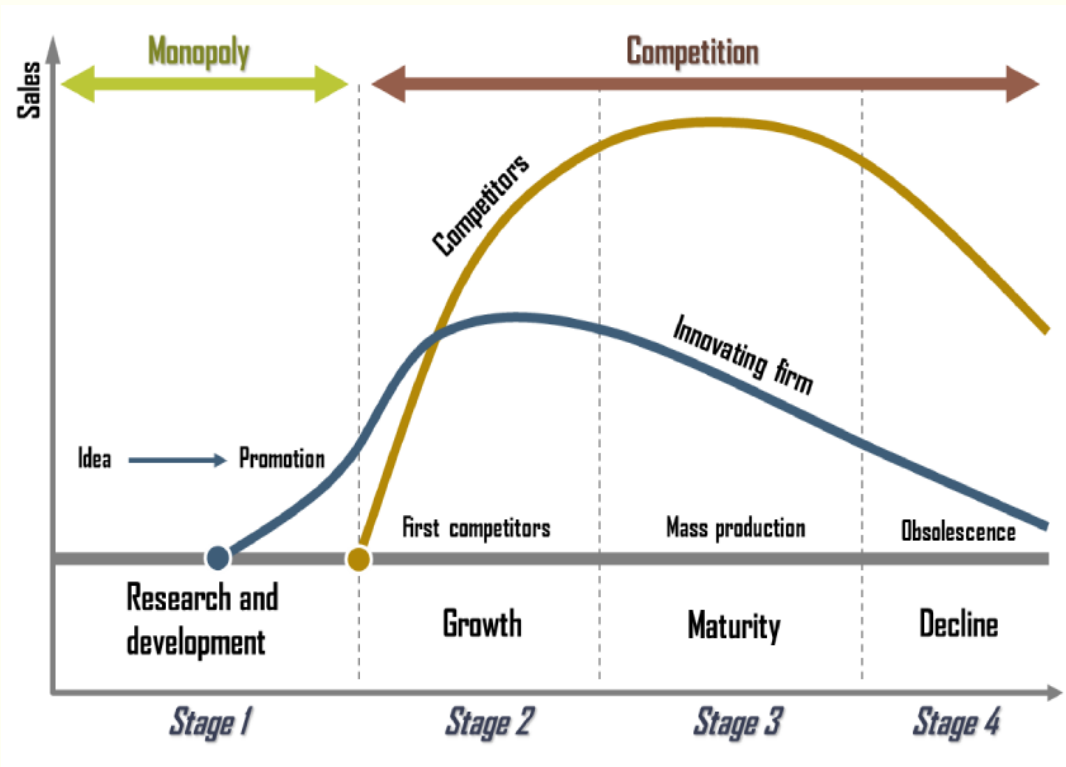
-
- Networking entre TSD et TAD : Pour l'action didactique
 - Les possibilités d'intégration ?
 - Rôle des instruments et techniques d'analyse ?
 - Nombres réels et suites numériques à l'entrée à l'université : Egalité et limite deux processus infinis resp. pour conjecturer et valider ? Place des valeurs d'adhérences ?
 - Cours magistral en MEEF : Intégrer la formation mathématique et didactique et enjeux ?



MERCI !

Extended product life cycle





Source: Apple

BI INTELLIGENCE

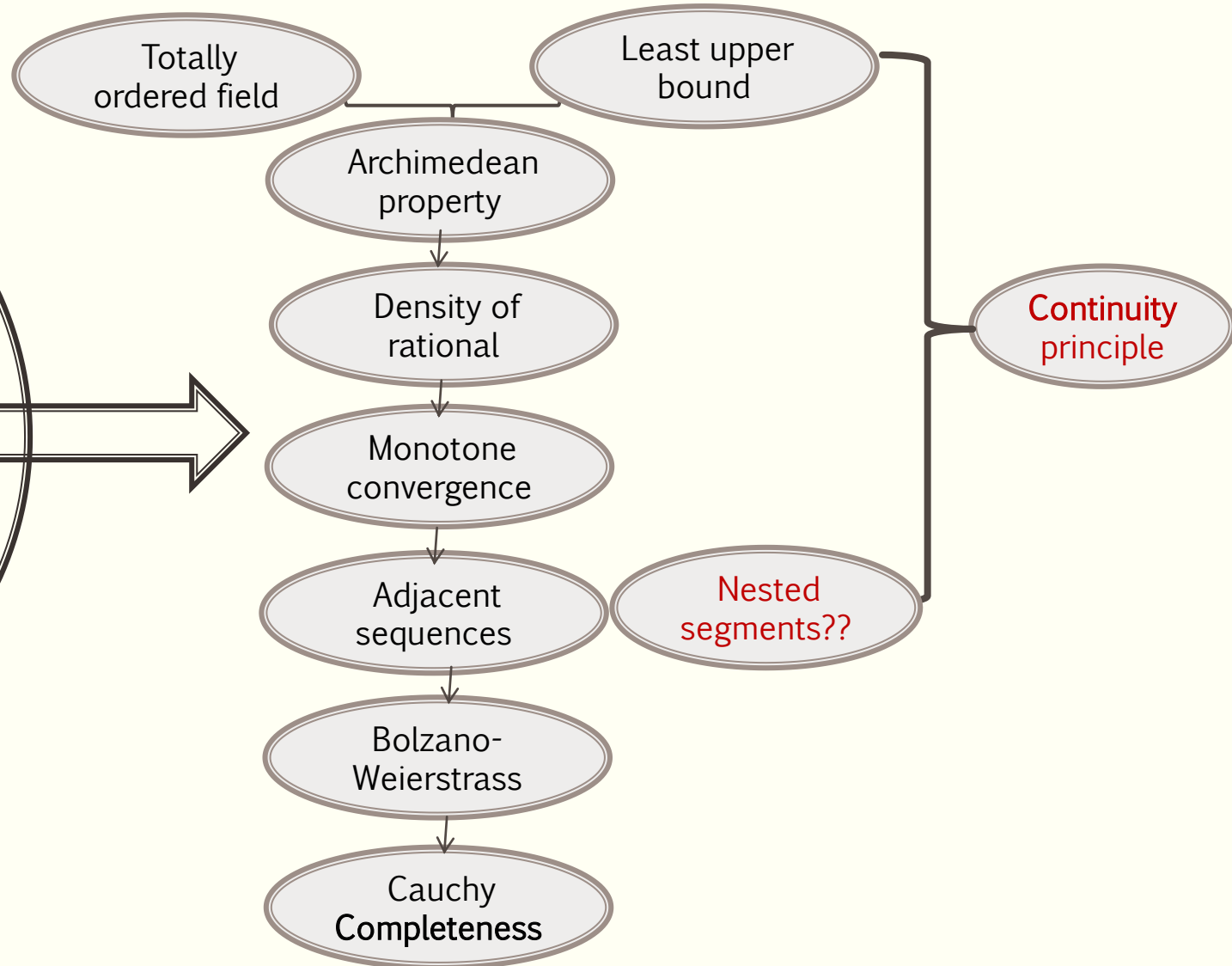
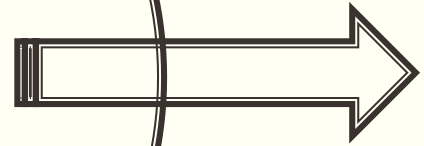
1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Contexte de la recherche

Dimension développementale des théories en éducation mathématique

Enjeux des significations fondamentales

- Achilles et la tortue, le fameux paradoxe de Zénon : Une question philosophique – physique (méta?)-mathématique
- Philosophique : continuité du monde et perception ?
- Physique : peut-on découper indéfiniment les instants, la matière ?
- Mathématique : résoudre le paradoxe par la théorie ?



1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Fonction des modèles en DM

Falsifiabilité et adaptabilité

Stratégies de networking

- Formulation dans la TSD

“How to design, regulate and make controlled observations of experimental situations where mathematical content appear as the optimal way to address a mathematical problem?” (Gonzales-Martin, Bloch, Durand-Guerrier, & Maschietto, 2014)

- Formulation dans la TAD

“How to design a didactic organization that places central questions at the starting point of mathematical activity, making mathematical content appear as models constructed to provide answers to these questions? And what is the ecology of these didactic organizations?” (Winslow et al., 2014)

Orienting theory (ex. constructivism, semiotics, socio-cultural theories)

Design guidelines framework (ex. design for learning, RME)

Research instruments (ex. task oriented analysis, longitudinal cyclic approach) : HLT/Observed learning

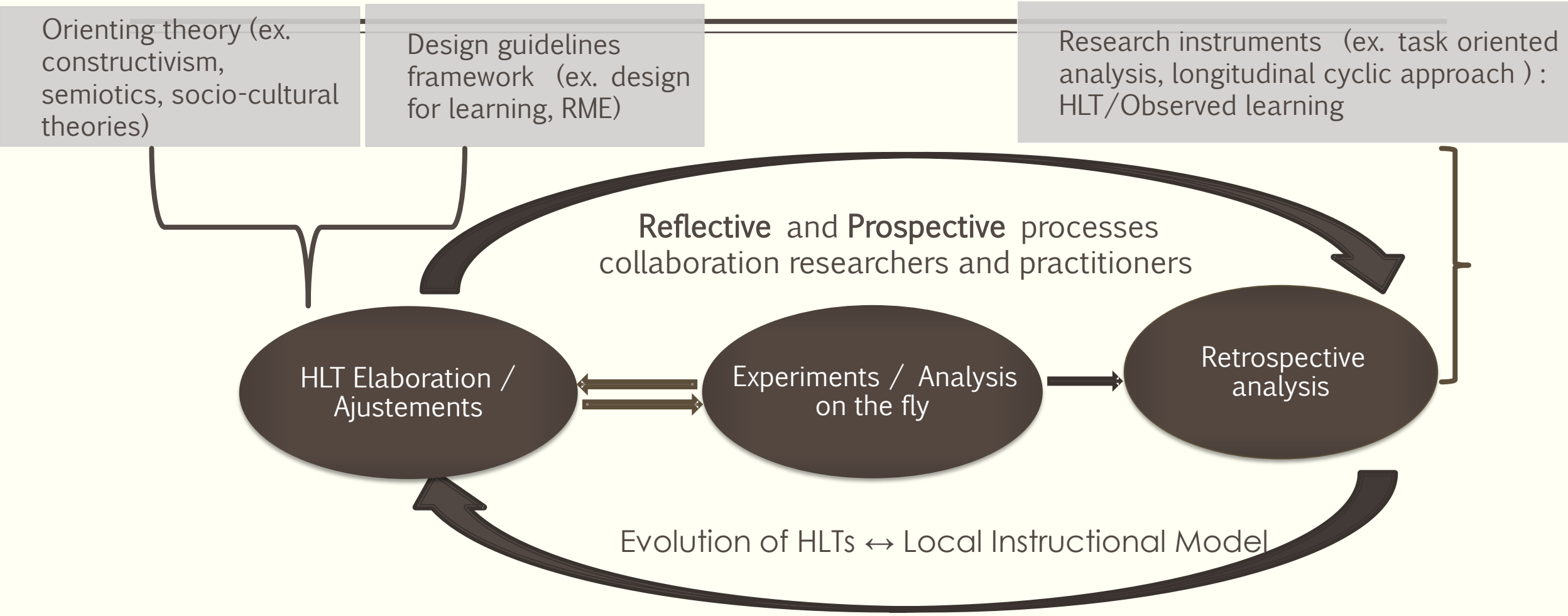
HLT Elaboration / Ajustements

Experiments / Analysis on the fly

Retrospective analysis

Reflective and Prospective processes
collaboration researchers and practitioners

Evolution of HLTs ↔ Local Instructional Model



1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
- 3. DBR et les variables du networking**
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Composantes méthodologiques du DBR

- Reformulation méthodologique en trois étapes
- Variables du networking

- Similarités avec l'ID comme méthodologie de la TSD (Artigue, 1992, 2000; Brousseau, 2008) et du PER dans le cadre de la TAD
- Trois raisons essentielles pour la non redondance de cette étude
 - 1) La question développementale des ID demeure d'actualité (Artigue, 2016);
 - 2) Usage d'un critère neutre théoriquement et supposé efficace pour réconcilier la recherche et l'action (DBR) ;
 - 3) Aucune des deux théories n'est favorisée par ce critère (Prediger et al., 2008).

- 1^{ère} étape : V1 & V2

V1 : How to model mathematics to be learnt and to be taught?

V2 : How to model mathematics learning and teaching process?

- 2^{ème} étape : V3 & V4

V3 : The design guidelines

V4 : The process of implementation

- 3^{ème} étape : V5 & V6

V5 : The potency of the elaborated HLT

V6 : Transferability

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Contexte du projet

Regard croisé pour la formulation du problème

Modélisation mathématique : Premiers commentaires

L'objectif de ce chapitre est de fonder rigoureusement le cours d'analyse relatif aux propriétés des nombres réels. Il convient d'insister sur **l'aspect fondateur de la propriété de la borne supérieure.**

Dans l'étude des suites, on distingue les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

Il convient de souligner l'intérêt des suites, **tant du point de vue pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximation de nombres réels).**

1. De quoi s'agit-il ?
2. La question du networking
3. DBR et les variables du networking
4. TSD vs. TAD : comparer/contraster
5. Cas des mathématiques à l'université

Contexte du projet

Regard croisé pour la formulation du problème

Modélisation mathématique : Premiers commentaires

- Approximation des nombres réels/Ingénierie autour des méthodes numériques d'approximations (Ghedami, 2008) : Les propriétés deviennent des arguments pour valider les méthodes utilisées
 - >> Usage naturel et inattendu par les étudiants de la propriété des segments emboîtés

- Modélisation de phénomènes discrets /Situation de la balle rebondissante (Lecorre, 2015 ; Lecorre et Ghedamsi, 2019) : Calcul de grandeurs finies divisibles à l'infini
 - >> Le paradoxe, lié au calcul de grandeurs finies divisibles à l'infini, que devrait résoudre le concept de limite n'est pas résolu

Proof of equalities through succession of ε_s
precede the notion of limit
(Archimedean theorem \Leftrightarrow Density of \mathbb{Q} in \mathbb{R})

Infinite process of limit

*For all $\varepsilon > 0$, there exists $A > 0$ such
that for all $x > A$, $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$*

Infinite process of equality

*There exists $A > 0$, for all $\varepsilon > 0$ such that
for all $x > A$, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$*

Infinite closeness

Arbitrariness of ε

*with ε and others variables / with
the only ε*

To what extent the formalizations of the infinite closeness involved in these two processes and their link may assist students' formalization of the limit process? (Lecorre, 2016 ; Ghedamsi et [Lecorre](#), 2018)