



HAL
open science

Programmation dynamique

Serguei Pergamenchtkov

► **To cite this version:**

| Serguei Pergamenchtkov. Programmation dynamique. Master. France. 2022. hal-03649729

HAL Id: hal-03649729

<https://hal.science/hal-03649729>

Submitted on 22 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Programmation dynamique

Serguei Pergamenchtchikov
Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem,
UMR 6085 CNRS, Université de Rouen,
Avenue de l'Université, BP.12,
76801 Saint Etienne du Rouvray (France).
email : Serge.Pergamenchtchikov@univ-rouen.fr

Résumé

Le but de ce cours est d'introduire le principe de programmation dynamique pour les problèmes de consommation et investissement optimales. Plus précisément dans ce cours on étudie le problème de consommation optimale en temps discret. On montre le principe de programmation dynamique dans ce cas et on obtient les équation de Bellman. Ensuite, on considère le problème de consommation avec des investissements dans des marchés financiers en temps discret. On étudie dans ce cas le principe stochastique de programmation dynamique. On obtient les équations de Bellman dans ce cas. Et dans la troisième partie de ce cours on étudie le problème de consommation optimale en temps continu. On obtient les équations aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi-Bellman et on montre le principe de programmation dynamique dans ce cas. Finalement, pour analyser ces équations on étudie la méthode de Fourier de séparation de variables.

1 Consommation optimale en temps discret.

On considère le problème de consommation optimale sur l'intervalle de temps $[0, N]$, où $N < \infty$ est l'horizon. Cela veut dire qu'on considère un consommateur qui choisit aux périodes $0 \leq k \leq N$ le montant de sa consommation c_k . Décrivons la dynamique de la richesse. Soit $x_0 = x > 0$ la richesse initiale. Donc à la date $n = 0$ on obtient la contrainte sur la consommation :

$$0 \leq c_0 \leq x.$$

Ensuite, il place le reste $x - c_0$ dans un actif sans risque au taux d'intérêt $r \geq 0$. Donc le lendemain sa richesse est égale à

$$x_1 = R(x - c_0) \quad \text{avec} \quad R = 1 + r.$$

à la date $k = 1$ le consommateur peut consommer $0 \leq c_1 \leq x_1$ et son capital à la date $k = 2$ est donné par la formule suivante

$$x_2 = R(x_1 - c_1).$$

De même au moment $k \geq 1$, le capital x_k s'écrit comme

$$x_k = R(x_{k-1} - c_{k-1}), \quad x_0 = x, \quad (1.1)$$

où le vecteur de consommation $c = (c_0, \dots, c_{N-1})'$ vérifie les contraintes suivantes

$$0 \leq c_k \leq x_k, \quad 0 \leq k \leq N - 1. \quad (1.2)$$

Rappelons que $'$ signifie transposé.

Soit $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction d'utilité et soit $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction d'héritage. On suppose que les fonctions U et h sont croissantes et continues. Dans ce cas la fonction objectif est

$$J_0(x, c_0, \dots, c_{N-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} U(c_k) + h(x_N). \quad (1.3)$$

Le problème est de trouver une suite $c^* = (c_0^*, \dots, c_{N-1}^*)'$ qui maximise la fonction objectif (1.3) sous les contraintes (1.1)-(1.2), c'est-à-dire qu'on cherche à résoudre le problème extrêmum suivant

$$J_0^*(x) = \max_{(c_0, \dots, c_{N-1})' \in \mathcal{C}_0(x)} J_0(x, c_0, \dots, c_{N-1}), \quad (1.4)$$

où $\mathcal{C}_0(x) \subset \mathbb{R}^N$ est l'ensemble de vecteurs $c = (c_0, \dots, c_{N-1})'$ qui vérifient les conditions (1.1)-(1.2).

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser la méthode de programmation dynamique de Bellman. Décrivons cette approche. Définissons d'abord les fonctions objectifs sur les intervalles $[n, N]$ pour $0 \leq n \leq N - 1$. On a

$$J_n(x, c_n, \dots, c_{N-1}) = \sum_{k=n}^{N-1} U(c_k) + h(x_N). \quad (1.5)$$

Ici les consommations c_n, \dots, c_{N-1} vérifient les conditions suivantes

$$0 \leq c_k \leq x_k, \quad n \leq k \leq N-1, \quad (1.6)$$

où $x_n = x$ et pour $k > n$ on a

$$x_k = R(x_{k-1} - c_{k-1}). \quad (1.7)$$

On désigne par $\mathcal{C}_n(x)$ l'ensemble dans \mathbb{R}^{N-n} de vecteurs $(c_n, \dots, c_{N-1})'$ qui vérifient les contraintes (1.6)-(1.7). On définit pour $0 \leq n \leq N-1$

$$J_n^*(x) = \max_{(c_n, \dots, c_{N-1})' \in \mathcal{C}_n(x)} J_n(x, c_n, \dots, c_{N-1}). \quad (1.8)$$

Pour $n = N$ posons

$$J_N^*(x) = h(x). \quad (1.9)$$

Pour résoudre les problèmes (1.8) nous allons utiliser le principe de programmation dynamique déterministe.

Théorème 1.1. *(Le principe de programmation dynamique déterministe)*

Les fonctions $(J_n^(x))_{0 \leq n \leq N-1}$ vérifient les équations de Bellman :*

$$J_n^*(x) = \max_{0 \leq c \leq x} \left(U(c) + J_{n+1}^*(\phi(x, c)) \right), \quad (1.10)$$

où $\phi(x, c) = R(x - c)$.

Démonstration. D'abord, notons que tous les ensembles $\mathcal{C}_n(x)$ sont bornés dans \mathbb{R}^{N-n} . Donc toutes les fonctions $(J_n^*(x))_{0 \leq n \leq N-1}$ sont finies, c'est-à-dire que le problème (1.8) admet une solution pour tous les $0 \leq n \leq N-1$. De plus par la définition on obtient que

$$\begin{aligned} J_n^*(x) &= \max_{(c_n, \dots, c_{N-1})' \in \mathcal{C}_n(x)} \sum_{k=n}^{N-1} U(c_k) + h(x_N) \\ &= \max_{0 \leq c_n \leq x} \left(\max_{(c_{n+1}, \dots, c_{N-1})' \in Q(x, c_n)} \left(U(c_n) + \sum_{k=n+1}^{N-1} U(c_k) + h(x_N) \right) \right) \\ &= \max_{0 \leq c \leq x} \left(U(c) + \max_{(c_{n+1}, \dots, c_{N-1})' \in Q(x, c)} J_{n+1}^*(\phi(x, c), c_{n+1}, \dots, c_{N-1}) \right), \end{aligned}$$

où $Q(x, c) = \mathcal{C}_{n+1}(\phi(x, c)) \subset \mathbb{R}^{N-n-1}$. Cela implique directement l'équation (1.10). \square

Pour trouver les fonctions $(J^*(n, x))_{0 \leq n \leq N-1}$ on utilise la récurrence en arrière. Cela veut dire qu'on commence à partir de $n = N-1$. On a

$$J_{N-1}^*(x) = \max_{0 \leq c \leq x} (U(c) + h(\phi(x, c))). \quad (1.11)$$

On désigne par $\mathbf{s}_{N-1}(x)$ la solution de ce problème. De la même façon par récurrence on obtient une solution $\mathbf{s}_n(x)$ du problème (1.10) pour $0 \leq n \leq N-1$. Donc finalement on

obtient $\mathbf{s}_0(x)$, où x est la richesse initiale. Cela veut dire que $c_0^* = \mathbf{s}_0(x)$. Ensuite, pour trouver les consommations pour chaque $n \geq 1$ on trouve les richesses optimales $(x_n^*)_{1 \leq n \leq N}$. On commence par $n = 1$. On a

$$x_1^* = R(x - c_0^*).$$

Cela implique que $c_1^* = \mathbf{s}_1(x_1^*)$. Cette consommation nous donne la formule pour la richesse à la date $n = 2$: on a

$$x_2^* = R(x_1^* - c_1^*)$$

et $c_2^* = \mathbf{s}_2(x_2^*)$, etc. Donc par récurrence on obtient que

$$x_n^* = R(x_{n-1}^* - c_{n-1}^*), \quad c_n^* = \mathbf{s}_n(x_n^*).$$

Finalement, la solution du problème (1.4) est donnée par le vecteur

$$c^* = (c_0^*, c_1^*, \dots, c_{N-1}^*)'.$$

On considère l'exemple suivant.

Exemple.

Soit $U(x) = h(x) = x^\gamma$ avec $0 < \gamma < 1$. On commence à résoudre les équations de Bellman (1.10) en $n = N - 1$, c'est-à-dire l'équation (1.11). Dans ce cas on a

$$J_{N-1}^*(x) = \max_{0 \leq c \leq x} (c^\gamma + (x - c)^\gamma R^\gamma).$$

Pour $0 < \gamma < 1$ la solution de ce problème est

$$\mathbf{s}_{N-1}(x) = \alpha_{N-1}x, \quad \alpha_{N-1} = \frac{1}{1 + R^\gamma} \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \frac{\gamma}{1 - \gamma}. \quad (1.12)$$

Cela veut dire que

$$J_{N-1}^*(x) = \beta_{N-1}x^\gamma, \quad (1.13)$$

où

$$\beta_{N-1} = \alpha_{N-1}^\gamma + (1 - \alpha_{N-1})^\gamma R^\gamma.$$

On va résoudre les équations de Bellman (1.10) par récurrence. On suppose que pour $0 \leq n \leq N - 1$ quelconque la solution a la forme suivante :

$$\mathbf{s}_n(x) = \alpha_n x \quad \text{et} \quad J_n^*(x) = \beta_n x^\gamma \quad (1.14)$$

pour des constantes positives α_n et β_n . Pour montrer que ces formules sont vraies pour tous $0 \leq n \leq N - 1$, il suffit de vérifier cela pour $n - 1$. En utilisant notre hypothèse (1.14) dans (1.10) on obtient que

$$\begin{aligned} J_{n-1}^*(x) &= \max_{0 \leq c \leq x} (c^\gamma + J^*(n, R(x - c))) \\ &= \max_{0 \leq c \leq x} (c^\gamma + \beta_n (x - c)^\gamma R^\gamma). \end{aligned}$$

On trouve que

$$\mathbf{s}_{N-1}(x) = \frac{x}{1 + R^{\gamma_1} \beta_n^{1+\gamma_1}} = \alpha_{n-1}x$$

et

$$\begin{aligned} J_{n-1}^*(x) &= \mathbf{s}_{N-1}(x)^\gamma + \beta_n (R(x - \mathbf{s}_{N-1}(x)x))^\gamma \\ &= \left(\alpha_{n-1}^\gamma + \beta_n R^\gamma (1 - \alpha_{n-1})^\gamma \right) x^\gamma = \beta_{n-1} x^\gamma. \end{aligned}$$

Cela implique que (1.14) est vraie pour tous $0 \leq n \leq N - 1$. Donc pour trouver les consommations optimales il reste à calculer les richesses $(x_n^*)_{0 \leq n \leq N}$. On commence par $n = 0$. Nous avons la richesse initiale x donc

$$c_0^* = \mathbf{s}_0(x) = \alpha_0 x.$$

Ensuite, à la date $n = 1$ on obtient que

$$x_1^* = R(x - c_0^*) = R(1 - \alpha_0)x \quad \text{et} \quad c_1^* = \mathbf{s}_1(x_1^*) = \alpha_1 x_1^*.$$

Par la même façon pour n quelconque on obtient que

$$x_n^* = R(x_{n-1} - c_{n-1}^*) = R(1 - \alpha_{n-1})x_{n-1}^* \quad \text{et} \quad c_n^* = \mathbf{s}_n(x_n^*) = \alpha_n x_n^*.$$

Cela implique que pour $1 \leq n \leq N$

$$x_n^* = x R^n \prod_{j=1}^n (1 - \alpha_{j-1}) \quad \text{et} \quad c_n^* = x \alpha_n R^n \prod_{j=1}^n (1 - \alpha_{j-1}).$$

2 Consommation et investissement en temps discret.

Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace de probabilité fini avec $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$. Considérons sur cet espace un marché (B, S) à deux actifs sur l'intervalle de temps $[0, N]$:

$$\begin{cases} (B) & B_n = (1 + r)B_{n-1}, \\ (S) & S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1}, \quad 1 \leq n \leq N, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $B_0 > 0$ et $S_0 > 0$ sont des valeurs initiales. On suppose que les taux d'intérêt de l'actif risqué $(\rho_n)_{1 \leq n \leq N}$ est une suite de variables aléatoires identiquement distribuées indépendantes (i.i.d.) à valeurs dans l'ensemble $\{a_1, \dots, a_m\}$, où $a_1 < \dots < a_m$ et $\mathbf{P}(\rho_n = a_i) = p_i > 0$.

Pour éviter les stratégies triviales on va supposer que

$$-1 < a_1 < r < a_m. \quad (2.2)$$

On considère un investisseur avec un capital initial $x_0 = x > 0$. à la date $n = 0$ on peut consommer une quantité $0 \leq c_0 \leq x$. De plus, on distribue le reste $x - c_0$ parmis

les actifs (B) et (S) de la façon suivante. La partie $\theta_0(x - c)$ est placée sur l'actif (S) et $(1 - \theta_0)(x - c)$ est placée sur l'actif (B). Cela veut dire qu'à la date $n = 1$ (le lendemain) le capital x_1 est égal à

$$\begin{aligned} x_1 &= R(1 - \theta_0)(x_0 - c_0) + (1 + \rho_1)\theta_0(x_0 - c_0) \\ &= \tau_1(\theta_0)(x_0 - c_0), \end{aligned}$$

où $\tau_1(\theta) = R + \theta(\rho_1 - r)$ et $R = 1 + r$.

Soit maintenant x_n le capital à la date n . On désigne par $0 \leq c_n \leq x_n$ la consommation à la date n et par θ_n la partie de la richesse investie dans l'actif risqué (S) à la date n . De la même façon, on obtient que

$$x_{n+1} = \tau_{n+1}(\theta_n)(x_n - c_n), \quad (2.3)$$

où $\tau_n(\theta) = R + \theta(\rho_n - r)$ et $R = 1 + r$.

On va introduire une structure informationnelle. Pour cela, il faut décrire toutes les variables aléatoires qu'on peut utiliser pour construire la stratégie financière $(v_n)_{0 \leq n \leq N}$, où $v_n = (c_n, \theta_n)$.

On pose $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma\{\rho_1, \dots, \rho_n\}$ pour $1 \leq n \leq N$. La suite $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ s'appelle la *filtration*.

On suppose que les variables aléatoires v_n sont mesurables par rapport à \mathcal{F}_n quelque soient $0 \leq n \leq N - 1$. Dans ce cas on dit que la suite de variables aléatoires $(v_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ est *adaptée*.

De plus, les variables $(x_n)_{1 \leq n \leq N}$ doivent être positives. Cela veut dire que pour tout $0 \leq k \leq N - 1$

$$\theta_k \in \Theta \quad \text{et} \quad 0 \leq c_k \leq x_k, \quad (2.4)$$

où

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} : \inf_{k \geq 1} \tau_k(\theta) \geq 0 \quad \text{p.s.}\}.$$

Il se trouve que dans ce cas

$$\Theta = [\theta_{min}, \theta_{max}], \quad (2.5)$$

où

$$\theta_{min} = -\frac{R}{a_m - r} \quad \text{et} \quad \theta_{max} = \frac{R}{r - a_1}.$$

Les variables $(x_k)_{1 \leq k \leq N}$ sont définies par (2.3) avec $x_0 = x$. On désigne par $\mathcal{V}_0(x)$ l'ensemble de toutes les suites de variables aléatoires adaptées $v = (v_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ qui vérifient les contraintes (2.4).

En général nous désignons par $\mathcal{V}_n(x)$ l'ensemble de toutes les suites de variables aléatoires adaptées $(v_k)_{n \leq k \leq N-1}$ qui vérifient les contraintes (2.4) pour tout $n \leq k \leq N - 1$ avec $x_n = x$.

On définit la fonction objectif sur l'intervalle $[n, N]$ comme

$$J_n(v_n, \dots, v_{N-1}) = \sum_{k=n}^{N-1} U(c_k) + h(x_N). \quad (2.6)$$

Notre but est de trouver une stratégie financière $v^* = (v_k^*)_{0 \leq k \leq N-1}$ dans $\mathcal{V}_0(x)$ qui maximise l'espérance de la fonction $J_0(x, v_0, \dots, v_{N-1})$, c'est-à-dire

$$J_0^*(x) = \max_{(v_0, \dots, v_{N-1})' \in \mathcal{V}_0(x)} \mathbf{E} \left(J_0(v_0, \dots, v_{N-1}) | x_0 = x \right). \quad (2.7)$$

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser le principe de programmation dynamique stochastique de Bellman. Comme dans le cas déterministe, d'après ce principe il faut trouver les stratégies optimales sur chaque intervalle $[n, N]$ pour $0 \leq n \leq N-1$, c'est-à-dire qu'il faut trouver toutes les fonctions objectifs optimales

$$J_n^*(x) = \max_{(v_n, \dots, v_{N-1})' \in \mathcal{V}_n(x)} \mathbf{E} \left(J_n(v_n, \dots, v_{N-1}) | x_n = x \right). \quad (2.8)$$

Théorème 2.1. (*Le principe de programmation dynamique stochastique*)

Les fonctions $(J_n^*(x))_{0 \leq n \leq N-1}$ vérifient les équations de Bellman :

$$\begin{cases} J_n^*(x) &= \max_{0 \leq c \leq x, \theta \in \Theta} (U(c) + \bar{J}_{n+1}(x, c, \theta)), \\ J_N^*(x) &= h(x), \end{cases} \quad (2.9)$$

où

$$\bar{J}_{n+1}(x, c, \theta) = \mathbf{E} \left(J_{n+1}^*(x_{n+1}) | x_n = x, v_n = (c, \theta) \right).$$

On va résoudre l'équation de Bellman (2.9) pour $U(x) = h(x) = x^\gamma$ avec $0 < \gamma < 1$.

D'abord, notons que

$$\bar{J}_{n+1}(c, \theta) = \mathbf{E} J_{n+1}^*(\tau_1(\theta)(x - c)),$$

où $\tau_1(\theta) = R + \theta(\rho_1 - r)$. Donc dans ce cas l'équation (2.9) a la forme suivante

$$J_n^*(x) = \max_{0 \leq c \leq x} \max_{\theta \in \Theta} (U(c) + \mathbf{E} J_{n+1}^*(\tau_1(\theta)(x - c))).$$

Donc, on obtient que pour $0 \leq n \leq N-1$

$$J_n^*(x) = \max_{0 \leq c \leq x} \max_{\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}} \left(U(c) + \mathbf{E} J_{n+1}^*(\tau_1(\theta)(x - c)) \right) \quad (2.10)$$

et $J_N^*(x) = h(x) = x^\gamma$.

On commence à résoudre ces équations à partir de $n = N-1$. On a

$$\begin{aligned} J_{N-1}^*(x) &= \max_{0 \leq c \leq x} \max_{\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}} (c^\gamma + (x - c)^\gamma \mathbf{L}(\theta)) \\ &= \max_{0 \leq c \leq x} (c^\gamma + (x - c)^\gamma \mathbf{L}_*), \end{aligned}$$

où $\mathbf{L}_* = \max_{\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}} \mathbf{L}(\theta)$ et $\mathbf{L}(\theta) = \mathbf{E} (\tau_1(\theta))^\gamma$. La solution est donnée par $(\mathbf{s}_{N-1}(x), \sigma_{N-1}(x))$ avec

$$\mathbf{s}_{N-1}(x) = \frac{1}{1 + (\mathbf{L}_*)^{\gamma_1}} x, \quad \mathbf{L}_* = \mathbf{L}(z^*), \quad \gamma_1 = \frac{1}{1 - \gamma}$$

et $\sigma_{N-1}(x) = z^*$, où z^* est la racine unique de l'équation

$$\mathbf{L}'(\theta) = \mathbf{E} \frac{\rho_1 - R}{(R + \theta(\rho_1 - r))^{1-\gamma}} = \sum_{j=1}^m \frac{a_j - R}{(R + \theta(a_j - r))^{1-\gamma}} p_j = 0 \quad (2.11)$$

sur l'intervalle $(\theta_{min}, \theta_{max})$. Comme dans le cas sans investissement posons

$$\mathbf{s}_{N-1}(x) = \alpha_{N-1}x, \quad \text{où} \quad \alpha_{N-1} = \frac{1}{1 + (\mathbf{L}_*)^{\gamma_1}}. \quad (2.12)$$

Ensuite, on obtient que

$$J_{N-1}^*(x) = \beta_{N-1}x^\gamma, \quad \beta_{N-1} = \alpha_{N-1}^\gamma + \mathbf{L}_*(1 - \alpha_{N-1})^\gamma. \quad (2.13)$$

Maintenant, par récurrence on suppose que pour $0 \leq n \leq N - 1$

$$\mathbf{s}_n(x) = \alpha_n x, \quad \sigma_n(x) = z^* \quad \text{et} \quad J_n^*(x) = \beta_n x^\gamma. \quad (2.14)$$

En utilisant ces conditions dans (2.10) on obtient que

$$J_{n-1}^*(x) = \max_{0 \leq c \leq x} \max_{\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}} (c^\gamma + \beta_n(x - c)^\gamma \mathbf{L}(\theta)).$$

De la même façon comme pour le cas $n = N - 1$ on trouve que

$$\mathbf{s}_{n-1}(x) = \alpha_{n-1}x, \quad \sigma_{n-1}(x) = z^* \quad \text{et} \quad J_{n-1}^*(x) = \beta_{n-1}x^\gamma \quad (2.15)$$

avec

$$\alpha_{n-1} = (1 + \beta_n^{\gamma_1} (\mathbf{L}_*)^{\gamma_1})^{-1} \quad \text{et} \quad \beta_{n-1} = \alpha_n^\gamma + \beta_n \mathbf{L}_*(1 - \alpha_n)^\gamma.$$

Par ces formules on calcule les solutions des équations de Bellman (2.10) pour tous $0 \leq n \leq N - 1$.

On trouve maintenant la stratégie optimale $(v_0^*, \dots, v_{N-1}^*)$, où $v_j = (c_j^*, \theta_j^*)$. Notons que d'après (2.15) pour tout $0 \leq n \leq N - 1$ on a $\theta_n^* = z^*$. Ensuite, en tenant compte que $x_0 = x$ on obtient $c_0^* = \mathbf{s}_0(x) = \alpha_0 x$. Donc pour $n = 1$ on a

$$x_1^* = \tau_1(z^*)(x - c_0^*) = \tau_1(z^*)(1 - \alpha_0)x \quad \text{et} \quad c_1^* = \mathbf{s}_1(x_1^*) = \alpha_1 x_1^*.$$

Par la même façon pour $n > 1$ on a

$$x_n^* = \tau_n(z^*)(1 - \alpha_{n-1})x_{n-1}^* \quad \text{et} \quad c_n^* = \mathbf{s}_n(x_n^*) = \alpha_n x_n^*.$$

Cela implique que

$$x_n^* = x \prod_{k=1}^n \tau_k(z^*)(1 - \alpha_{k-1}) \quad \text{et} \quad c_n^* = \alpha_n x \prod_{k=1}^n \tau_k(z^*)(1 - \alpha_{k-1}).$$

3 Consommation en temps continu

Dans ce chapitre nous allons considérer un marché financier en temps continu consistant en un actif sans risque

$$\dot{B}(t) = r B(t) \quad B_0 = 1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.1)$$

Ici r est un taux d'intérêt. On suppose que cette fonction est continue. Ensuite, soit $(c_t)_{0 \leq t \leq T}$ une vitesse de la consommation sur l'intervalle de temps $[0, T]$. On suppose que c'est une fonction non négative, mesurable et intégrable sur l'intervalle $[0, T]$, c'est-à-dire que

$$\int_0^T c_t dt < \infty. \quad (3.2)$$

L'intégrale $\int_0^t c_s ds$ de ce processus représente le montant consommé sur l'intervalle $[0, t]$. Soit X_t la richesse à l'instant t . Pour obtenir une équation pour la richesse on dévise l'intervalle $[0, t]$ par la suite $(t_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie comme

$$t_k = \frac{kt}{n}.$$

Donc, pour $k \geq 1$ par l'analogie avec le temps discret on obtient que

$$X_{t_k} = (1 + r\Delta + d_k) \left(X_{t_{k-1}} - \int_{t_{k-1}}^{t_k} c_t dt \right), \quad (3.3)$$

où

$$\Delta = t_k - t_{k-1} = \frac{t}{n} \quad \text{et} \quad d_k = r \int_{t_{k-1}}^{t_k} (B_t - B_{t_{k-1}}) dt.$$

C'est claire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \max_{1 \leq k \leq n} |d_k| = 0.$$

On peut récrire l'équation (3.3) par la façon suivante

$$X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = r X_{t_{k-1}} \Delta - \int_{t_{k-1}}^{t_k} c_t dt + h_k \Delta$$

avec

$$h_k = \frac{d_k}{\Delta} \left(X_{t_{k-1}} - \int_{t_{k-1}}^{t_k} c_t dt \right) - r \int_{t_{k-1}}^{t_k} c_t dt.$$

C'est facile à voir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \max_{1 \leq k \leq n} |h_k| = 0.$$

Donc, pour tout $n \geq 1$ on a

$$X_t = x + \sum_{k=1}^n r X_{t_{k-1}} \Delta - \int_0^t c_u \, du + \sum_{k=1}^n h_k.$$

Alors en passant à la limite ici quand $n \rightarrow \infty$ on obtient pour tout $t > 0$ que

$$X_t = x + \int_0^t r X_u \, du - \int_0^t c_u \, du,$$

où $x > 0$ est la richesse initiale, c'est-à-dire que

$$\dot{X}_t = r X_t - c_t, \quad X_0 = x. \quad (3.4)$$

On définit la fonction objectif comme

$$J(x, c) := \int_0^T U(c_t) \, dt + h(X_T). \quad (3.5)$$

Notre but est de résoudre le problème

$$J^*(x) = \max_c J(x, c). \quad (3.6)$$

où $c = (c_t)_{0 \leq t \leq T}$.

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser la méthode de programmation dynamique de Bellman. Définissons d'abord

$$J(t, x, c) := \int_t^T U(c_v) \, dv + h(X_T)$$

et

$$J^*(t, x) = \max_c J(t, x, c) = J(t, x, c^*).$$

Ensuite, introduisons l'Hamiltonien comme

$$H(x, z) := \sup_{\vartheta \geq 0} H_0(t, x, z, \vartheta) \quad (3.7)$$

avec

$$H_0(x, z, \vartheta) := z(rx - \vartheta) + U(\vartheta).$$

Pour trouver une solution du problème (3.6), il faut étudier l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\begin{cases} z_t(t, x) + H(x, z_x(t, x)) = 0, & t \in [0, T], \\ z(T, x) = h(x), & x > 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Ici z_t désigne la dérivée partielle de z par rapport à t . On va utiliser les mêmes notations pour toutes les dérivées partielles.

On suppose que

C₁) Il existe une solution $z(t, x)$ du problème (3.8)

C₂) Il existe une fonction mesurable $\vartheta^* : [0, T] \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$H(x, z_x(t, x)) = H_0(x, z_x(t, x), \vartheta^*(t, x))$$

pour tout $0 \leq t \leq T$ et $x > 0$.

C₃) Il existe une solution de l'équation suivante

$$dX_t^* = (rX_t^* - \vartheta^*(t, X_t^*)) dt, \quad X_0^* = x. \quad (3.9)$$

Théorème 3.1. On suppose que les hypothèses **C₁)–C₃)** sont satisfaites. Alors pour tout $0 \leq t \leq T$ et pour tout $x > 0$

$$z(t, x) = J^*(t, x) = J^*(t, x, c^*),$$

où la consommation optimale $c^* = (c_t^* = \vartheta(t, X_t^*))_{0 \leq t \leq T}$ est définie dans les hypothèses **C₃)** et **C₄)**.

Démonstration. Soit $c = (c_t)_{0 \leq t \leq T}$ une fonction non négative quelconque. On a

$$z(T, X_T) - z(t, X_t) = \int_t^T \left(z_t(v, X_v) + z_x(v, X_v) \dot{X}_v \right) dv.$$

En utilisant l'équation (3.4) et les conditions $X_t = x$ et $z(T, x) = h(x)$ on obtient que

$$z(t, x) = J(t, x, c) - \int_t^T (z_t(s, X_s) + H_1(s, X_s, c_s)) ds, \quad (3.10)$$

où $H_1(s, x, \vartheta) = H_0(t, x, z_x(t, x), \vartheta)$.

Cela veut dire que $z(t, x) \geq J(t, x, c)$ pour tout $c = (c_t)_{0 \leq t \leq T}$. Donc on trouve $z(t, x) \geq J^*(t, x)$. Ensuite, de la même façon, en remplaçant c dans (3.9) par c^* nous obtenons $z(t, x) = J(t, x, c^*)$ qui implique le Théorème 3.1.

□

4 Consommation et investissement en temps continu

4.1 Modèle du marché financier

Dans ce chapitre nous allons considérer un marché financier de type Black-Scholes consistant en un actif sans risque et quelques actifs risqués. Leurs prix $(B(t))_{t \geq 0}$ et $(S_i(t))_{t \geq 0}$ pour $i = 1, \dots, d$ vérifient les équations suivantes

$$\begin{cases} dB(t) &= r B(t) dt, \\ dS_i(t) &= S_i(t) \mu_i(t) dt + S_i(t) \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t) dw_j(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

avec les conditions initiales $B(0) = 1$ et $S_i(0) = s_i > 0$ pour $1 \leq i \leq d$.

Ici $w_t = (w_1(t), \dots, w_d(t))'$ est un processus de Wiener de dimension d ; $r \in \mathbb{R}_+$ est un taux d'intérêt de l'actif sans risque, $\mu_t = (\mu_1(t), \dots, \mu_d(t))' \in \mathbb{R}^d$ est le vecteur de taux d'intérêt des actifs risqués et $\sigma_t = (\sigma_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq d}$ est la matrice de volatilité. On suppose aussi que les coefficients r , μ_t et σ_t sont des fonctions non aléatoires càdlàg. De plus, nous supposons que la matrice σ_t est non dégénérée pour presque tout $t \in [0, T]$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0, T]$.

Dans tout ce qui suit, $(\mathcal{F}_t^w)_{0 \leq t \leq T}$ est la filtration engendrée par le processus $(w_t)_{0 \leq t \leq T}$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}_t^w = \sigma\{w_u, 0 \leq u \leq t\}$. La norme euclidienne pour les vecteurs et les matrices est noté $|\cdot|$. De plus, pour les fonctions $(y_t)_{t \geq 0}$ de carré intégrable sur l'intervalle $[0, T]$, on note

$$\|y\|_T = \sqrt{\int_0^T |y_t|^2 dt}.$$

Soient, maintenant, $\phi_t \in \mathbb{R}$ la quantité investie dans l'actif sans risque et

$$\varphi_t = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t))' \in \mathbb{R}^d$$

les quantités investies dans les actifs risqués à l'instant t .

Dans ce cas, une *stratégie financière* est définie par un processus aléatoire $((\phi_t, \varphi_t))_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^{d+1} progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t^w)_{0 \leq t \leq T}$. Le processus

$$X_t = \phi_t B(t) + \sum_{j=1}^d \varphi_j(t) S_j(t), \quad t \geq 0,$$

s'appelle le *processus richesse (ou la valeur du portefeuille)* à l'instant t .

De plus, soit $(c_t)_{0 \leq t \leq T}$ une vitesse de la consommation sur l'intervalle de temps $[0, T]$, c'est-à-dire que c'est un processus non négatif progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t^w)_{0 \leq t \leq T}$ et presque sûrement intégrable sur l'intervalle $[0, T]$

$$\int_0^T c_t dt < \infty \quad \text{p.s.}$$

L'intégrale $\int_0^t c_s ds$ de ce processus représente le montant consommé sur l'intervalle $[0, t]$. Une stratégie financière $((\phi_t, \varphi_t))_{t \geq 0}$ avec une consommation $(c_t)_{t \geq 0}$ est dite *autofinancée (avec consommation)* si le processus richesse correspondant vérifie l'équation stochastique suivante

$$X_t = x + \int_0^t \phi_u dB(u) + \sum_{j=1}^d \int_0^t \varphi_j(u) dS_j(u) - \int_0^t c_u du, \quad (4.2)$$

où $x > 0$ est la richesse initiale.

Dans cette chapitre nous allons travailler avec les quantités relatives, c'est-à-dire considérer les fractions du processus richesse investies dans les actifs risqués S_1, \dots, S_d . On pose

$$\pi_1(t) := \frac{\varphi_1(t) S_1(t)}{X_t}, \dots, \pi_d(t) := \frac{\varphi_d(t) S_d(t)}{X_t}.$$

Alors le processus $(\pi_t = (\pi_1(t), \dots, \pi_d(t))')_{0 \leq t \leq T}$, s'appelle *processus du portefeuille*. De la même façon nous définissons le *processus consommation* $(v_t)_{0 \leq t \leq T}$,

$$v_t := \frac{c_t}{X_t}.$$

En tenant compte de ces définitions, nous réécrivons l'équation pour X_t comme

$$dX_t = X_t(r + y_t' \theta_t - v_t) dt + X_t y_t' dw_t, \quad (4.3)$$

où $y_t = \sigma_t' \pi_t$ et $\theta_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r \mathbf{1})$ avec $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^d$. On fait l'hypothèse que

$$0 < \|\theta\|_T < \infty. \quad (4.4)$$

Décrivons maintenant l'ensemble des *processus du contrôle* $\nu = (\nu_t)_{t \geq 0}$ avec $\nu_t = (y_t, v_t)$.

D'abord, nous choisissons les processus du contrôle non aléatoires, c'est-à-dire que $(y_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(v_t)_{0 \leq t \leq T}$ sont des fonctions mesurable non aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d et \mathbb{R}_+ respectivement telles que

$$0 < \|y\|_T < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^T v_t dt < \infty. \quad (4.5)$$

Pour souligner qu'un processus richesse correspond à un processus du contrôle ν nous allons écrire X^ν . Notons que pour $\nu \in \mathcal{U}$, la formule d'Itô nous permet de résoudre l'équation (4.3) :

$$X_t^\nu = x e^{R_t - V_t + (y, \theta)_t} \mathcal{E}_t(y), \quad (4.6)$$

où $R_t = \int_0^t r_u du$, $V_t = \int_0^t v_u du$, $(y, \theta)_t = \int_0^t y_u' \theta_u du$ et $\mathcal{E}(y)$ est l'exponentiel stochastique, c'est-à-dire

$$\mathcal{E}_t(y) = \exp \left(\int_0^t y_u' dw_u - \frac{1}{2} \int_0^t |y_u|^2 du \right) \quad t \geq 0.$$

Donc, le processus $(X_t^\nu)_{t \geq 0}$ est positif et continu presque sûrement sur l'intervalle $[0, T]$ quelque soit $\nu \in \mathcal{U}$.

Une généralisation naturelle de l'ensemble des processus du contrôle \mathcal{U} est donnée dans la définition suivante.

Définition 4.1. *Un processus du contrôle $\nu = (\nu_t)_{t \geq 0} = ((y_t, v_t))_{t \geq 0}$ est dit admissible s'il est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t^w)_{0 \leq t \leq T}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ tel que l'équation (4.3) a une solution unique forte presque sûrement positive sur l'intervalle $[0, T]$. Nous désignons par \mathcal{V} l'ensemble de tous les processus du contrôle admissible.*

Il est clair que $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Maintenant, pour la richesse initiale $x > 0$ et pour un processus du contrôle $(\nu_t)_{t \geq 0}$ dans \mathcal{V} , nous introduisons la *fonction objectif*

$$J(x, \nu) := \mathbf{E}_x \left(\int_0^T v_t^{\gamma_1} (X_t^\nu)^{\gamma_1} dt + (X_T^\nu)^{\gamma_2} \right), \quad (4.7)$$

où \mathbf{E}_x est l'espérance conditionnelle sachant que $X_0^\nu = x$ et $0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$.

Remarque 4.1. Notons que pour $\gamma < 1$ la fonction d'utilité $U(z) = z^\gamma$ est concave et s'appelle la fonction d'utilité de HARA. Nous étudions aussi le cas $\gamma = 1$, qui correspond à la situation dans laquelle un consommateur ne sait pas quelle est sa fonction d'utilité, c'est-à-dire comment choisir le paramètre γ .

Le but de l'investissement et de la consommation est de maximiser la fonction objectif (4.7), c'est-à-dire que

$$\max_{\nu \in \mathcal{V}} J(x, \nu). \quad (4.8)$$

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser la méthode de programmation dynamique stochastique de Bellman qui est basé sur les théorèmes de vérification pour les équations différentielles stochastiques. Une version particulier de tels théorèmes est donnée dans la section suivante.

4.2 Théorème de vérification

Dans cette section on va montrer le théorème de vérification proposé dans [3] qui s'appliquera au problème (4.8).

On considère le problème du contrôle stochastique pour le processus d'Itô scalaire sur l'intervalle $[0, T]$

$$\begin{cases} dX_t^\nu &= a(t, X_t^\nu, \nu_t) dt + (b(t, X_t^\nu, \nu_t))' dw_t; \\ X_0^\nu &= x > 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

On suppose que le processus du contrôle $\nu = (\nu_t)_{0 \leq t \leq T}$ prend ses valeurs dans un ensemble $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^d$, que les coefficients

$$a : [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad b : [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

sont des fonctions non aléatoires et que pour tout $t \in [0, T]$ les fonctions $a(t, \cdot, \cdot)$ et $b(t, \cdot, \cdot)$ sont continus sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{K}$, telles que pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$ l'équation (4.9) avec $\nu \equiv \kappa$ a une solution unique forte positive presque sûrement sur l'intervalle $[0, T]$.

Rapellons que $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. De plus, soient

$$U : [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction d'utilité et

$$h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction d'héritage. On suppose que les fonctions U et h sont continus.

Dans cette section nous allons modifier la Définition 4.1 de l'admissibilité pour l'équation (4.9) de la façon suivante.

Définition 4.2. On dira qu'un processus du contrôle $\nu = (\nu_t)_{0 \leq t \leq T}$ est admissible s'il est progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t^w)_{0 \leq t \leq T}$ et l'équation (4.9) a une solution unique forte $(X_t^\nu)_{0 \leq t \leq T}$ positive presque sûrement sur l'intervalle $[0, T]$ telle que

$$\int_0^T (|a(t, X_t^\nu, \nu_t)| + |b(t, X_t^\nu, \nu_t)|^2) dt < \infty \quad p.s. \quad (4.10)$$

et

$$\mathbf{E} \left[\int_0^T (U(t, X_t^\nu, \nu_t))_- dt + (h(X_T^\nu))_- \right] < \infty, \quad (4.11)$$

où $(a)_- = -\min(0, a)$. On désigne par \mathcal{V} l'ensemble de tous les processus du contrôle admissibles.

Définissons maintenant les fonctions objectifs, en posant

$$J(t, x, \nu) := \mathbf{E}_{t,x} \left[\int_t^T U(s, X_s^\nu, \nu_s) ds + h(X_T^\nu) \right], \quad 0 \leq t \leq T,$$

où $\mathbf{E}_{t,x}$ est l'espérance conditionnelle sachant que $X_t^\nu = x$.

Notre but est de résoudre les problèmes d'optimisation suivants

$$J^*(t, x) := \sup_{\nu \in \mathcal{V}} J(t, x, \nu), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.12)$$

Pour cela, introduisons l'Hamiltonien défini par

$$H(t, x, z_1, z_2) := \sup_{\vartheta \in \mathcal{K}} H_0(t, x, z_1, z_2, \vartheta) \quad (4.13)$$

avec

$$H_0(t, x, z_1, z_2, \vartheta) := a(t, x, \vartheta) z_1 + \frac{1}{2} |b(t, x, \vartheta)|^2 z_2 + U(t, x, \vartheta).$$

Pour trouver une solution du problème (4.12), il faut étudier l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\begin{cases} z_t(t, x) + H(t, x, z_x(t, x), z_{xx}(t, x)) = 0, & t \in [0, T], \\ z(T, x) = h(x), & x > 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Ici z_t désigne la dérivée partielle de z par rapport à t . On va utiliser les mêmes notations pour toutes les dérivées partielles.

On suppose que

H₁) Il existe une fonction $z : [0, T] \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les conditions suivantes.

(i) Il existe une fonction $z_t(\cdot, \cdot)$ telle que pour tout $0 \leq t_1, t_2 \leq T$ et pour tout $x > 0$

$$z(t_2, x) - z(t_1, x) = \int_{t_1}^{t_2} z_t(u, x) du. \quad (4.15)$$

De plus, $z_t(u, \cdot)$ est continu sur \mathbb{R}_+^* .

(ii) Pour tout $N \geq 1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \sup_{x, y \in K_N, |x-y| < \varepsilon} |z_t(u, x) - z_t(u, y)| dt = 0, \quad (4.16)$$

où $K_N = [N^{-1}, N]$.

(iii) La fonction z est deux fois dérivable par rapport à x et les dérivées partielles $z_x(\cdot, \cdot)$ et $z_{xx}(\cdot, \cdot)$ sont continus sur $[0, T] \times (0, \infty)$.

(iv) Il existe un ensemble $\Gamma \subseteq [0, T]$ avec $\Lambda(\Gamma) = T$ ($\Lambda(\cdot)$ est la mesure de Lebesgue) et pour tout $t \in \Gamma$ et pour tout $x > 0$ la fonction $z(t, x)$ est une solution du problème (4.14).

H₂) Il existe une fonction mesurable $\vartheta^* : [0, T] \times (0, \infty) \rightarrow \mathcal{K}$ telle que

$$H(t, x, z_x(t, x), z_{xx}(t, x)) = H_0(t, x, z_x(t, x), z_{xx}(t, x), \vartheta^*(t, x))$$

pour tout $t \in \Gamma$ et pour tout $x > 0$.

H₄) Il existe une solution unique forte presque sûrement positive de l'équation d'Itô suivante

$$dX_t^* = a^*(t, X_t^*) dt + (b^*(t, X_t^*))' dw_t, \quad X_0^* = x, \quad (4.17)$$

où $a^*(t, x) = a(t, x, \vartheta^*(t, x))$ et $b^*(t, x) = b(t, x, \vartheta^*(t, x))$. De plus, le processus du contrôle optimal $\nu^* = (\nu_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ avec $\nu_t^* = \vartheta^*(t, X_t^*)$ appartient à l'ensemble \mathcal{V} et pour tout $0 \leq t \leq T$ et $x > 0$

$$\mathbf{E}_{t,x} \sup_{t \leq s \leq T} |z(s, X_s^*)| < \infty. \quad (4.18)$$

Maintenant, on montre que le processus ν^* résout les problèmes (4.12).

Théorème 4.3. On suppose que $\mathcal{V} \neq \emptyset$ et que les hypothèses **H₁)–H₄)** sont satisfaites. De plus, on suppose que

$$z_* = \inf_{0 \leq t \leq T} \inf_{x > 0} z(t, x) > -\infty. \quad (4.19)$$

Alors pour tout $t \in \Gamma$ et pour tout $x > 0$

$$z(t, x) = J^*(t, x) = J^*(t, x, \nu^*),$$

où la stratégie ν^* est définie dans les hypothèses **H₃)** et **H₄)**.

Démonstration. Soient $\nu \in \mathcal{V}$ et X^ν le processus richesse avec la condition $X_t^\nu = x$ pour un moment fixé $t \in \Gamma$. Ensuite, définissons les temps d'arrêt suivants

$$\tau_n = \inf \left\{ s \geq t : \int_t^s |b(u, X_u^\nu, \nu_u)|^2 z_x^2(u, X_u^\nu) du \geq n \right\} \wedge T.$$

Notons que la condition (4.10) implique que $\tau_n \rightarrow T$ quand $n \rightarrow \infty$ p.s.. Par continuité de $z(\cdot, \cdot)$ et $(X_t^\nu)_{0 \leq t \leq T}$ on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(\tau_n, X_{\tau_n}^\nu) = z(T, X_T^\nu) = h(X_T^\nu) \quad \text{p.s.} \quad (4.20)$$

Ensuite, d'après la formule d'Itô on a

$$\begin{aligned} z(t, x) &= \int_t^{\tau_n} U(s, X_s^\nu, \nu_s) ds + z(\tau_n, X_{\tau_n}^\nu) \\ &\quad - \int_t^{\tau_n} (z_t(s, X_s^\nu) + H_1(s, X_s^\nu, \nu_s)) ds - M_n, \end{aligned} \quad (4.21)$$

où $M_n = \int_t^{\tau_n} b(u, X_u^\nu, \nu_u) z_x(u, X_u^\nu) dw_u$ et

$$H_1(s, x, \vartheta) = H_0(t, x, z_x(t, x), z_{xx}(t, x), \vartheta).$$

La définition du temps d'arrêt τ_n entraîne que $\mathbf{E}_{t,x} M_n = 0$. Par conséquent, on déduit l'inégalité suivante

$$z(t, x) \geq \mathbf{E}_{t,x} \int_t^{\tau_n} U_s ds + \mathbf{E}_{t,x} z_n, \quad (4.22)$$

où $U_s = U(s, X_s^\nu, \nu_s)$ et $z_n = z(\tau_n, X_{\tau_n}^\nu)$. Considérons d'abord, le premier terme dans cette inégalité. On a

$$\int_t^{\tau_n} U_s ds = \int_t^{\tau_n} (U_s)_+ ds - \int_t^{\tau_n} (U_s)_- ds,$$

où $(a)_+ = \max(a, 0)$. La condition (4.11) et le théorème de convergence monotone impliquent que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{t,x} \int_t^{\tau_n} U_s ds = \mathbf{E}_{t,x} \int_t^T U_s ds.$$

De plus, par la condition (4.19) la suite $((z_n)_-)_{n \geq 1}$ est bornée, donc, uniformément intégrable. Donc, par le Lemme de Fatou on obtient

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{t,x} z_n \geq \mathbf{E}_{t,x} \lim_{n \rightarrow \infty} z(\tau_n, X_{\tau_n}^\nu) = \mathbf{E}_{t,x} h(X_T^*).$$

Par conséquent, en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans (4.22) on trouve $z(t, x) \geq J^*(t, x)$. De la même façon, en remplaçant ν dans (4.21) par ν^* nous obtenons l'égalité suivante

$$z(t, x) = \mathbf{E}_{t,x} \int_t^{\tau_n} U(s, X_s^*, \nu_s^*) ds + \mathbf{E}_{t,x} z(\tau_n, X_{\tau_n}^*).$$

Ensuite, par l'hypothèse (4.18) et le théorème de convergence dominée, on trouve que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{t,x} z(\tau_n, X_{\tau_n}^*) = \mathbf{E}_{t,x} \lim_{n \rightarrow \infty} z(\tau_n, X_{\tau_n}^*) = \mathbf{E}_{t,x} h(X_T^*).$$

Cela veut dire que

$$\begin{aligned} z(t, x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{t,x} \int_t^{\tau_n} U(s, X_s^*, \nu_s^*) ds + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{t,x} z(\tau_n, X_{\tau_n}^*) \\ &= \mathbf{E}_{t,x} \left(\int_t^T U(s, X_s^*, \nu_s^*) ds + h(X_T^*) \right) \\ &= J(t, x, \nu^*). \end{aligned}$$

Donc, avec l'inégalité (4.22) nous obtenons $z(t, x) = J^*(t, x)$ qui implique le Théorème 4.3.

□

Dans la section suivante nous allons voir comment appliquer le théorème de vérification au problème (4.8).

4.3 Investissement et consommation optimales

Théorème 4.4. *Considérons le problème (4.8) pour $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. Alors*

$$\max_{\nu \in \mathcal{U}} J(x, \nu) = \infty.$$

Démonstration. Tout d'abord, notons que pour toute stratégie $\nu \in \mathcal{U}$ on a

$$J(x, \nu) = x \left(\int_0^T e^{r-V_t+(y,\theta)_t} v_t dt + e^{r-V_T+(y,\theta)_T} \right). \quad (4.23)$$

Ensuite, définissons pour $n \in \mathbb{N}$ la suite de stratégies $\nu^{(n)} = (y^{(n)}, v^{(n)})$ avec $v^{(n)} = 0$ et $y^{(n)} = n\theta$. Pour cette stratégie on obtient que

$$J(x, \nu^{(n)}) = x e^{R_T+n\|\theta\|T} \rightarrow \infty \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

□

Remarque 4.2. *Le théorème 4.4 veut dire que pour $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ le problème (4.8) n'a pas de solution.*

Considérons maintenant le problème (4.8) dans le cas où $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$. Définissons d'abord les fonctions suivantes.

$$A_1(t) = \gamma_1^{q_1} \int_t^T e^{\int_t^s \beta_1(u) du} ds \quad \text{et} \quad A_2(t) = \gamma_2^{q_2} e^{\int_t^T \beta_2(u) du}, \quad (4.24)$$

où $q_i = (1 - \gamma_i)^{-1}$ et

$$\beta_i(t) = (q_i - 1) \left(r + \frac{q_i}{2} |\theta_t|^2 \right).$$

Ensuite, pour tout $0 \leq t \leq T$ et $x > 0$, nous définissons la fonction $g(t, x) > 0$ par

$$A_1(t) g^{-q_1}(t, x) + A_2(t) g^{-q_2}(t, x) = x. \quad (4.25)$$

De plus, posons

$$p(t, x) = q_1 A_1(t) g^{-q_1}(t, x) + q_2 A_2(t) g^{-q_2}(t, x).$$

Théorème 4.5. *Considérons le problème (4.8) pour $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$. Alors la valeur optimale pour $J(x, \nu)$ est donnée par*

$$\max_{\nu \in \mathcal{V}} J(x, \nu) = J(x, \nu^*) = \frac{A_1(0)}{\gamma_1} g^{1-q_1}(0, x) + \frac{A_2(0)}{\gamma_2} g^{1-q_2}(0, x),$$

où le contrôle optimale $\nu^* = (y^*, v^*)$ a la forme suivante

$$y_t^* = \frac{p(t, X_t^*)}{X_t^*} \theta_t \quad \text{et} \quad v_t^* = (\gamma_1)^{q_1} \frac{g^{-q_1}(t, X_t^*)}{X_t^*}. \quad (4.26)$$

Le processus richesse optimale $(X_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ vérifie l'équation stochastique

$$dX_t^* = a^*(t, X_t^*)dt + (b^*(t, X_t^*))'dw_t \quad (4.27)$$

avec $X_0^* = x$, $b^*(t, x) = p(t, x) \theta_t$ et

$$a^*(t, x) = rx + p(t, x) |\theta_t|^2 - \gamma_1^{q_1} g^{-q_1}(t, x).$$

Démonstration. Pour montrer ce théorème on va utiliser le théorème 4.3. pour l'équation différentielle stochastique (4.3). Fixons d'abord $\vartheta = (y, v)$ avec $y \in \mathbb{R}^d$ et $v \in [0, \infty)$. Alors les coefficients dans le modèle (4.9) sont définies comme

$$a(t, x, \vartheta) = x(r + y' \theta_t - v) \quad \text{et} \quad b(t, x, \vartheta) = xy.$$

De plus, la fonction objectif est donnée par les fonctions suivantes

$$U(t, x, \vartheta) = v^{\gamma_1} x^{\gamma_1} \quad \text{et} \quad h(x) = x^{\gamma_2}.$$

Pour vérifier les hypothèses $\mathbf{H}_1) - \mathbf{H}_4)$ calculons l'Hamiltonien (4.13) dans notre cas. On a

$$H(t, x, z_1, z_2) = \sup_{\vartheta \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)} H_0(t, x, z_1, z_2, \vartheta),$$

où

$$H_0(t, x, z_1, z_2, \vartheta) = (r + y' \theta_t) x z_1 + \frac{1}{2} x^2 |y|^2 z_2 + v^{\gamma_1} x^{\gamma_1} - x v z_1.$$

On rappelle que $q_i = (1 - \gamma_i)^{-1}$. Donc pour $z_2 \leq 0$ on obtient

$$H(t, x, z_1, z_2) = H_0(t, x, z_1, z_2, \vartheta_0) = r x z_1 + \frac{z_1^2 |\theta_t|^2}{2|z_2|} + \frac{1}{q_1} \left(\frac{\gamma_1}{z_1} \right)^{q_1 - 1},$$

où $\vartheta_0 = \vartheta_0(t, x, z_1, z_2) = (y_0(t, x, z_1, z_2), v_0(t, x, z_1, z_2)) = (y_0, v_0)$ avec

$$y_0 = \frac{z_1}{x|z_2|} \theta_t \quad \text{et} \quad v_0 = \left(\frac{\gamma_1}{z_1} \right)^{q_1} x^{-1}. \quad (4.28)$$

Maintenant il faut résoudre le problème (4.14) qui a la forme suivante pour notre cas

$$\begin{cases} z_t(t, x) + r x z_x(t, x) + \frac{z_x^2(t, x) |\theta_t|^2}{2|z_{xx}(t, x)|} + \frac{1}{q_1} \left(\frac{\gamma_1}{z_x(t, x)} \right)^{q_1 - 1} = 0, \\ z(T, x) = x^{\gamma_2}. \end{cases} \quad (4.29)$$

On désigne par $\Gamma \subseteq [0, T]$ l'ensemble des points de continuité des fonctions $\beta_1(\cdot)$ et $\beta_2(\cdot)$ définies dans (4.24). En tenant compte du fait que tous les coefficients dans le modèle (4.1) sont càdlàg on obtient que la mesure de Lebesgue de Γ $\Lambda(\Gamma) = T$. La solution de ce problème (cf. [3]) pour $t \in \Gamma$ et $x > 0$ est donnée par la fonction

$$z(t, x) = \frac{A_1(t)}{\gamma_1} g^{1-q_1}(t, x) + \frac{A_2(t)}{\gamma_2} g^{1-q_2}(t, x), \quad (4.30)$$

qui remplit la condition (4.19) avec $z_* = 0$. Par conséquent, on a

$$H(t, x, z_x(t, x), z_{xx}(t, x)) = H_0(t, x, z_x(t, x), z_{xx}(t, x), \vartheta^*(t, x)),$$

où $\vartheta^*(t, x) = (y^*(t, x), c^*(t, x))$ avec

$$y^*(t, x) = \frac{p(t, x)}{x} \theta_t \quad \text{et} \quad v^*(t, x) = \left(\frac{\gamma_1}{g(t, x)} \right)^{q_1} x^{-1}.$$

Dans [3] on a vérifié les hypothèses $\mathbf{H}_1) - \mathbf{H}_4)$ pour ce cas. Donc le Théorème 4.3 implique le Théorème 4.5. \square

Maintenant on considère le problème (4.8) pour $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. On pose

$$\tilde{g}_\gamma(t) = \exp \left(\gamma r + \frac{q-1}{2} \|\theta\|_t^2 \right) \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{1-\gamma}. \quad (4.31)$$

Corollary 4.6. *Soit $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ avec $0 < \gamma < 1$. Alors la valeur optimale de $J(x, \nu)$ dans (4.8) est donnée par*

$$J^*(x) = \max_{\nu \in \mathcal{V}} J(x, \nu) = J(x, \nu^*) = x^\gamma \left(\|\tilde{g}_\gamma\|_{q, T}^q + \tilde{g}_\gamma^q(T) \right)^{1/q},$$

où le processus du contrôle optimale $\nu^* = (y^*, v^*)$ pour $0 \leq t \leq T$ a la forme

$$y_t^* = \frac{\theta_t}{1-\gamma} \quad \text{et} \quad v_t^* = \frac{\tilde{g}_\gamma^q(t)}{\tilde{g}_\gamma^q(T) + \int_t^T \tilde{g}_\gamma^q(s) ds}. \quad (4.32)$$

Le processus richesse optimale $(X_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ vérifie l'équation stochastique

$$dX_t^* = X_t^* \left(r - v_t^* + \frac{|\theta_t|^2}{1-\gamma} \right) dt + \frac{X_t^*}{1-\gamma} \theta_t' dw_t \quad (4.33)$$

avec $X_0^* = x$.

Références

- [1] Demange G. et Rochet J-C. *Méthodes Mathématiques de la finance*, Economica, 2005
- [2] Karatzas, I. and Shreve, S.E. : *Methods of Mathematical Finance*. Springer, Berlin (2001)
- [3] Klüppelberg, C. and Pergamenschikov, S.M. (2007) Optimal consumption and investment with bounded Capital-at-Risk for power utility functions. - Munich University of Technology, Preprint, available at <http://www-m4.ma.tum.de/Papers/index.en.html>.
- [4] Liptser, R.S., Shirayev, A.N. : *Statistics of Random Processes I. General Theory*. Springer, New York (1977)